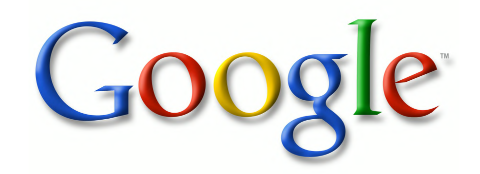
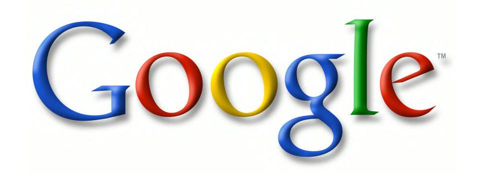
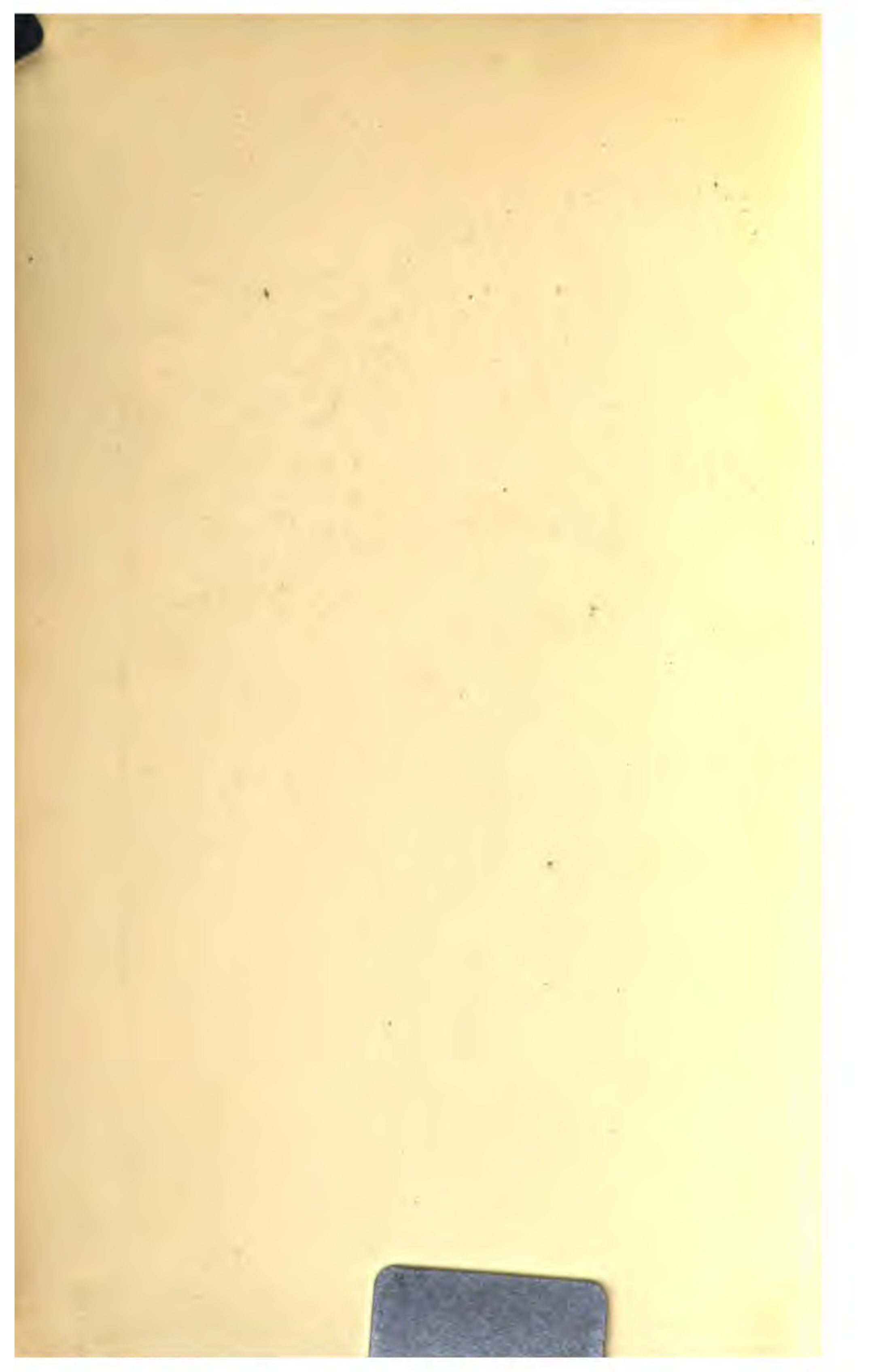
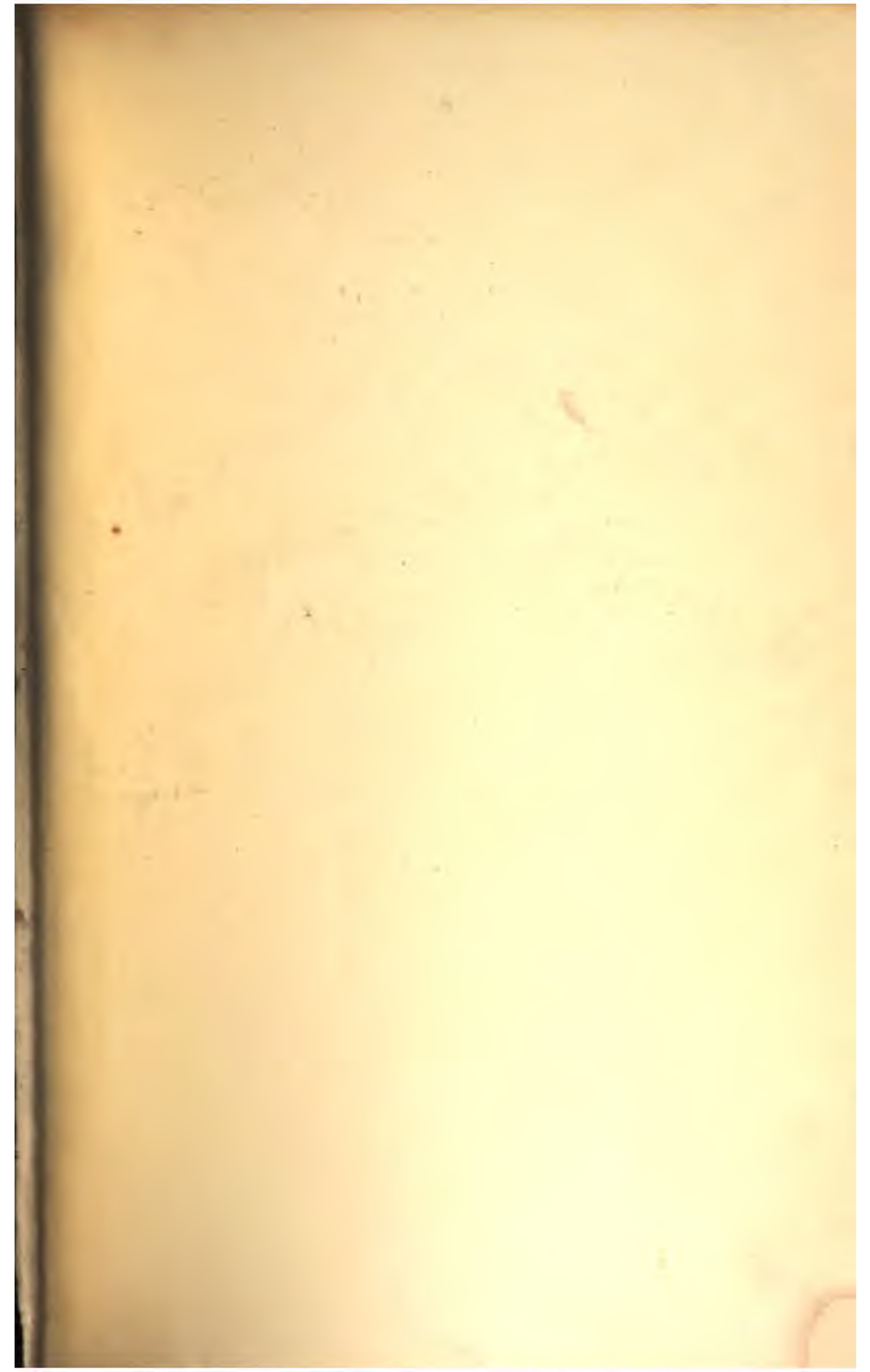














SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

DREIUNDACHTZIGSTER BAND.

WIEN.

AUS DER K. K. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI CARL GEROLD'S SOHN,
BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

1881.

SITZUNGSBERICHTE

DER

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

LXXXIII. BAND. II. ABTHEILUNG.

JAHRGANG 1881. — HEFT I BIS V.

(Mit 4 Tafeln und 81 Holzschnitten.)



WIEN.

AUS DER K. K. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI CARL GEROLD'S SOHN,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1881.

INHALT.

Seite

I. Sitzung vom 7. Jänner 1881: Übersicht 3
Goldschmiedt u. *v. Schmidt*, Untersuchungen über das Stuppfett 7
Korteweg u. *Julius*, Über das Grössenverhältniss der elektrischen Ausdehnung bei Glas und Kautschuk. (Mit 1 Holzschnitt.) [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.] 29
II. Sitzung vom 13. Jänner 1881: Übersicht 37
Weidel, Über eine Tetrahydrocinchoninsäure. (Mit 1 Holzschnitt.) 41
Schuhmeister, Bestimmung magnetischer und diamagnetischer Constanten von Flüssigkeiten und Gasen in absolutem Masse. [Preis: 18 kr. = 36 Pfg.] 45
Weyr, Über die involutorische Lage sich berührender Kegelschnitte. [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.] 63
Vaneček, Raum-Epicycloiden. [Preis: 20 kr. = 40 Pfg.] . . . 69
Lauermann, Über die Normalen der Ellipse 92
Niessl, Theoretische Untersuchungen über die Verschiebungen der Radiationspunkte aufgelöster Meteorströme. [Preis: 40 kr. = 80 Pfg.] 96
Eder u. *Pizzighelli*, Beiträge zur Photochemie des Chlorsilbers 144
Oser u. *Kalmann*, Über ein neues Derivat der Gallussäure und dessen Anwendung zur Bestimmung der gebundenen Kohlensäure 161
III. Sitzung vom 20. Jänner 1881: Übersicht 168
Kretschy, Untersuchungen über Kynurensäure 171
IV. Sitzung vom 3. Februar 1881: Übersicht 203
Hann, Über den täglichen Gang einiger meteorologischen Elemente in Wien (Stadt). [Preis: 22 kr. = 44 Pfg.] 207
Finger, Über die Beziehungen der homogenen Deformationen fester Körper zur Reactionsfläche. [Preis: 25 kr. = 50 Pfg.] 234
Maly u. *Hinteregger*, Studien über Caffeïn und Theobromin. I. Abhandlung. (Mit 1 Holzschnitt.) [Preis: 12 kr. = 24 Pfg.] 262
Mauthner u. *Suida*, Über gebromte Propionsäuren und Acrylsäuren. (Mit 3 Holzschnitten.) 273
V. Sitzung vom 10. Februar 1881: Übersicht 297
Weyr, Über biquadratische Involutionen erster Stufe. [Preis: 20 kr. = 40 Pfg.] 300

Seite

Gegenbauer, Eine Verallgemeinerung der Cartesianischen Zeichenregel. [Preis: 12 kr. = 24 Pfg.] 321

Wassmuth, Über die Magnetisirbarkeit des Eisens bei hohen Temperaturen. (Mit 1 Holzschnitt.) [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.] 332

VI. Sitzung vom 17. Februar 1881: Übersicht 346

Weyr, Über Involutionen zweiter Stufe 349

Le Paige, Bemerkungen über cubische Involutionen. [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.] 351

Wittenbauer, Über Momente höherer Ordnung. (Mit 11 Holzschnitten.) [Preis: 20 kr. = 40 Pfg.] 357

Pelz, Zur wissenschaftlichen Behandlung der orthogonalen Axonometrie. II. Mittheilung. (Mit 1 Tafel.) [Preis: 40 kr. = 80 Pfg.] 375

Ameseder, Über ein Nullsystem zweiten Grades. [Preis: 18 kr. = 36 Pfg.] 385

Puluj, Strahlende Elektrodenmaterie. II. Abhandlung. (Mit 2 Holzschnitten.) [Preis: 12 kr. = 24 Pfg.] 402

Maly u. *Hinteregger*, Studien über Caffeïn und Theobromin. II. Abhandlung. (Mit 1 Holzschnitt.) [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.] 421

Skraup, Synthetische Versuche in der Chinolinreihe. I. Mittheilung. (Mit 3 Holzschnitten.) [Preis: 25 kr. = 50 Pfg.] . . 434

Weiss, Über die Berechnung der Differentialquotienten der wahren Anomalie und des Radius vector nach der Excentricität in stark excentrischen Bahnen. [Preis: 12 kr. = 24 Pfg.] 466

VII. Sitzung vom 10. März 1881: Übersicht 479

Hann, Über den täglichen Gang des Luftdruckes, der Temperatur, der Feuchtigkeit, Bewölkung und Windstärke auf den Plateaux der Rocky Mountains. [Preis: 20 kr. = 40 Pfg.] 484

Wald, Studie über Energie producirende chemische Processe 504

Herzig, Über die Einwirkung von Schwefelsäure auf Mono-Di- und Tribrombenzol 525

Heindl, Über krystallinische Verbindungen von Chlorcalcium mit Alkoholen 533

VIII. Sitzung vom 17. März 1881: Übersicht 545

Stefan, Über das Gleichgewicht eines festen elastischen Körpers von ungleichförmiger oder veränderlicher Temperatur. [Preis: 25 kr. = 50 Pfg.] 549

Boltzmann, Entwicklung einiger zur Bestimmung der Diamagnetisirungszahl nützlichen Formeln. (Mit 1 Holzschnitt.) I. Herausstossende Kraft einer Spirale mit vielen Windungslagen. [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.] 576

Seite

Margules, Über die Bestimmung der Reibungs- und Gleitungscoëfficienten aus ebenen Bewegungen einer Flüssigkeit. [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.] 588

Klemenčič, Zur Bestimmung des Verhältnisses zwischen der elektromagnetischen u. mechanischen Einheit der Stromintensität. (Mit 1 Holzschnitt.) [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.] 606

Streintz, Über die durch Entladung von Leydener Flaschen hervorgerufene Zersetzung des Wassers an Platinelektroden. (Mit 1 Tafel.) [Preis: 35 kr. = 70 Pfg.] 618

Weselsky u. *Benedikt*, Über die Einwirkung der salpetrigen Säure auf Pyrogallussäureäther 639

Janovsky, Über eine neue Azobenzoldisulfosäure 643

Schrötter, Über die Oxydation von Essigsäure-Borneoläther . 651

Binder, Das Problem der vier Punkte im Sinne der neueren Geometrie. (Mit 1 Tafel.) [Preis: 25 kr. = 50 Pfg.] . . . 659

IX. Sitzung vom 31. März 1881: Übersicht 667

Lang, Über die Dispersion des Aragonits nach arbiträrer Richtung. [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.] 671

Reitlinger u. *Wächter*, Über Disgregation der Elektroden durch positive Elektricität und die Erklärung der Lichtenberg'schen Figuren. (Mit 11 Holzschnitten.) [Preis: 20 kr. = 40 Pfg.] 677

Puluj, Strahlende Elektrodenmaterie. III. Abhandlung. (Mit 6 Holzschnitten.) [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.] 696

Hočevar, Über einige Versuche mit einer Holtz'schen Influenzmaschine. (Mit 2 Holzschnitten.) [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.] 709

Kachler u. *Spitzer*, Untersuchungen über Borneolkohlensäure und Campherkohlensäure 716

Goldschmidt, Über die Einwirkung von molecularem Silber auf die Kohlenstoffchloride. [Preis: 8 kr. = 16 Pfg.] . . . 736

Cobenzl, Beitrag zur Trennung des Wolframs von Antimon, Arsen und Eisen, nebst Analyse eines sogenannten Pseudometeoriten 742

Gröger, Die Sulfochromite 749

Ungar, Zur Reduction Abel'scher auf elliptische Integrale. [Preis: 25 kr. = 50 Pfg.] 759

Peschka, Normalenfläche einer Developpablen längs ihres Durchschnittes mit einer krummen Fläche. [Preis: 12 kr. = 24 Pfg.] 790

X. Sitzung vom 7. April 1881: Übersicht 803

Weyr, Über Ausartungen biquadratischer Involutionen und über die sieben Systeme der eine rationale Plancurve vierter Ordnung vierfach berührenden Kegelschnitte. [Preis: 22 kr. = 44 Pfg.] 807

Seite

Ameseder, Über die eine rationale Plancurve vierter Ordnung vierfach berührenden Kegelschnitte, welche ein einzelnes System bilden. (Mit 1 Tafel.) [Preis: 50 kr. = 1 RMk.] . 82

Bobek, Über metrische Beziehungen, die in einer Congruenz linearer Complexe stattfinden. (Mit 5 Holzschnitten.) [Preis: 18 kr. = 36 Pfg.] 88

Bečka, Über die Bahn des Planeten Ino (173) [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.] 90

Tinter, Zur Bestimmung der Polhöhe auf dem Observatorium der k. k. technischen Hochschule in Wien. [Preis: 12 kr. = 24 Pfg.] 90

Andreasch, Synthese der methylirten Parabansäuren, der Methylthioparabansäure u. des Thiocholestrophans . . . 91

Haitinger, Über Nitroolefine 92

XI. Sitzung vom 5. Mai 1881: Übersicht 93

Stefan, Über die Verdampfung aus einem kreisförmig oder elliptisch begrenzten Becken. [Preis: 12 kr. = 24 Pfg.] . 94

Moser, Elektrostatische Untersuchungen, insbesondere über die Verzweigung der Induction beim Differential-Inductometer und Elektrophor. [Preis: 18 kr. = 36 Pfg.] . . 95

Wittenbauer, Über Deviationsmomente. (Mit 21 Holzschnitten.) [Preis: 60 kr. = 1 RMk. 20 Pfg.] 97

Seeliger, Über die Bewegungsverhältnisse in dem dreifachen Sternsystem ζ Cancri. [Preis: 20 kr. = 40 Pfg.] 101

Domac, Über das Hexylen aus Mannit 10

Benedikt u. *v. Hübl*, Über Dinitro- und Trinitroresorcin 10

Fischer, Über resorcinsulfosaure Salze. (Mit 9 Holzschnitten.) 10

XII. Sitzung vom 12. Mai 1881: Übersicht 10

Skraup, Über Cinchonidin und Homocinchonidin. [Preis: 8 kr. = 16 Pfg.] 10

Ditscheiner, Über die Aufsuchung der Störungszellen an nicht vollkommen isolirten Leitungen. (Mit 2 Holzschnitten.) [Preis: 12 kr. = 24 Pfg.] 10

Haluschka, Ein Beitrag zur Theorie der Maxima und Minima von Functionen. [Preis: 18 kr. = 36 Pfg.] 10

Durège, Über Körper von vier Dimensionen. [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.] 11

Maly, Über die Dotterpigmente 11

Holetschek, Über die Bahnbestimmung des Planeten (118) Peitho. II. Theil. [Preis: 20 kr. = 40 Pfg.] 11

XIII. Sitzung vom 19. Mai 1881: Übersicht 11

Haubner, Über das magnetische Verhalten von Eisenpulvern verschiedener Dichten. [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.] . . . 11

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LXXXIII. Band. I. Heft.

ZWEITE ABTHEILUNG.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Mechanik, Meteorologie und Astronomie.



I. SITZUNG VOM 7. JÄNNER 1881.

In Verhinderung des Vicepräsidenten übernimmt Herr Dr. L. Fitzinger den Vorsitz.

Die Direction der königl. Oberrealschule in Déva dankt für die Betheilung dieser Lehranstalt mit akademischen Druckschriften.

Das wirkliche Mitglied Herr Prof. A. Winckler übermittelt einige Exemplare seiner neuerlich erschienenen Schrift, betitelt: „Die Integration linearer Differentialgleichungen und der Herr Professor Simon Spitzer in Wien."

Das c. M. Herr Prof. Dr. L. Boltzmann in Graz übersendet eine Abhandlung: „Über das Grössenverhältniss der elektrischen Ausdehnung bei Glas und Kautschuk", von den Herren D. G. Korteweg und V. A. Julius in Breda.

Herr Prof. Leop. Gegenbauer in Innsbruck übersendet eine Abhandlung, betitelt: „Eine Verallgemeinerung der Cartesianischen Zeichenregel."

Herr Cloris Baudet in Paris übersendet eine Notiz über die Wasserzersetzung bei Anwendung von Elektroden aus Retortenkohle.

Der Secretär legt ein versiegeltes Schreiben des Herrn Willibald Vinier in Wien vor, welcher um die Wahrung seiner Priorität bezüglich des Inhaltes ersucht.

Das w. M. Herr Prof. v. Barth überreicht eine in seinem Laboratorium von den Herren Dr. G. Goldschmiedt und M. v. Schmidt ausgeführte Arbeit: „Untersuchungen über das Stuppfett."

Das w. M. Herr Hofrath Prof. E. Ritter v. Brücke berichtet über eine unkrystallisirbare Säure, die er durch Oxydation mit Kaliumhypermanganat aus Eiweiss erhalten hat.

Der Secretär bringt zur Kenntniss, dass nach der letzte Classensitzung die telegraphische Meldung über einen von Her C. F. Pechüle in Kopenhagen am 16. December v. J. entdeckte Kometen bei der Akademie einlangte, dessen Elemente u Ephemeride an der Wiener Sternwarte berechnet und im K meten-Circulare Nr. XXXVII vom 22. December 1880 veröffen licht worden sind.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Académie de Médecine: Bulletin. 44e année, 2e série. Ton IX. Nrs. 50—52. Paris, 1880; 8°.

Annales des Mines. 7e série. Tome XVIII. 4e livraison de 188 Paris, 1880; 8°.

Apotheker-Verein, allgem. österr.: Zeitschrift nebst Anzeige Blatt. XVIII. Jahrg. Nr. 36. Wien, 1880; 8°. — XIX. Jahr Nr. 1. Wien, 1881; 8°.

Bibliothèque universelle et Revue Suisse: Archives d Sciences physiques et naturelles. 3e période. Tome I Nr. 11. — 15 Novembre 1880. Genève, Lausanne, Paris; 8

Chemiker-Zeitung: Central-Organ. Jahrgang IV.. Nr. 51—5 Cöthen, 1880; 4°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tor XCI. Nrs. 23—25. Paris, 1880; 4°. — Tables des Compt rendus. Premier semestre 1880. Tome XC; 4°.

Elektrotechnischer Verein: Elektrotechnische Zeitschri I. Jahrgang 1880, Heft 12. December, Berlin, 1880; 4°.

Gesellschaft, deutsche, chemische, zu Berlin: Berich XIII. Jahrgang, Nr. 18. Berlin, 1880; 8°.

— für Salzburger Landeskunde: Mittheilungen. XX. Verein jahr. 1880. 1. & 2. Heft. Salzburg; 8°.

— österreichische, zur Förderung der chemischen Industri Berichte. II. Jahrgang 1880, Nr. 3. Prag, 4°.

— naturforschende zu Danzig: Tageblatt der 53. Versammlu deutscher Naturforscher und Ärzte in Danzig vom 18. b 24. September 1880; von Dr. Otto Völkel. Danzig; 4°.

Gewerbe-Verein, n.-ö.: Wochenschrift. XLI. Jahrg. Nr. 5 bis 53. Wien, 1880; 4°.

Gesellschaft, naturforschende Gesellschaft und pomologische Gesellschaft zu Altenburg: Mittheilungen aus dem Osterlande. Neue Folge. I. Band. Altenburg, 1880; 8°.

Handels- und Gewerbekammer in Wien: Bericht über den Handel, die Industrie und die Verkehrsverhältnisse in Niederösterreich während des Jahres 1879. Wien, 1880; 8°.

Ingenieur- u. Architekten-Verein, österr.: Wochenschrift. V. Jahrgang, Nr. 51 u. 52. Wien, 1880; 4°.

— — Zeitschrift. XXXII. Jahrgang, 10. u. 11. Heft. Wien, 1880; gr. 4°

Journal, the American of Science 3. series: Vol. XX. Nr. 120. (Whole Number, CXX). December, 1880. New Haven, 1880; 8°.

Maumené, E. J.: Théorie générale de l'Action chimique. Paris, 1880; 8°.

Militär-Comité, k. k. technisches und administratives: Mittheilungen über Gegenstände des Artillerie- und Genie-Wesens. Jahrgang 1880. 10. u. 11. Heft. Wien; 8°.

Mittheilungen aus J. Perthes' geographischer Anstalt, von Dr. A. Petermann. XXVI. Band, 1880. XII. Gotha; 4°.

Moniteur scientifique du Dteur Quesneville: Journal mensuel 25e année. 3e série. Tome XI. Livraison. 469e. Janvier 1881. Paris; 4°.

Nature. Vol. XXIII. Nrs. 581, 583. London, 1880; 4°.

Omboni, Giovanni Prof.: Denti di Ippopotamo da aggiungersi alla fauna fossile del Veneto: Venezia, 1880; 4°.

Osservatorio del Collegio reale Carlo Alberto in Moncalieri: Bullettino meteorologico. Vol. XV. Nrs. 4 & 6. Torino, 1880; 4°.

Société impériale de Naturalistes de Moscou: Bulletin. Année 1880. Nr. 2. Moscou, 1880; 8°.

Society, the royal astronomical: Monthly notices. Vol. XLI. Nr. 1. November 1880. London; 8°.

Verein für Erdkunde zu Dresden. XVI. und XVII. Jahresbericht. Sitzungsberichte und geschäftlicher Theil der Vereinsjahre 1878—79 und 1879—80. Schluss Ende März 1880. Dresden; 8°. — Wissenschaftlicher Theil. (Vereinsjahr 1879/80.) Dresden; 8°. — Nachtrag zum XVII. Jahresbericht. Wissenschaftlicher Theil. (Vereinsjahr 1879—80). Dresden; 8°.

Verein militär-wissenschaftlicher, in Wien: Organ. XXI. Ban
5. Heft. 1880. Wien; 8°.

Wiener Medizin. Wochenschrift. XXX. Jahrgang, Nr. 51 & 5
Wien, 1880; 4°. — XXXI. Jahrgang, Nr. 1. Wien, 1881; 4

Winckler, A. Dr.: „Die Integration linearer Differentialgl
chungen" und der Herr Professor Simon Spitzer in Wie
Wien, 1881; 8°.

Wissenschaftlicher Club in Wien: Monatsblätter. II. Jahrg
Nr. 1, 2 u. 3. Wien, 1880; 4°. — Ausserordentliche Beilage
Nr. 1 u. 2. Wien, 1880; 4°.

Wolf, Heinrich, k. k. Bergrath: Geologische Gruben-Revierkar
des Kohlenbeckens von Teplitz-Dux-Brüx im nordwestliche
Böhmen. Wien, 1880; gr. folio. — Begleitworte zur geol
gischen Gruben-Revierkarte des Kohlenbeckens von Teplit
Dux-Brüx. Wien, 1880; 8°.

Zürich, Universität: Akademische Schriften pro 1879 — 8
37 Stücke. 4° & 8°.

Untersuchungen über das Stuppfett.

Von Dr. **Guido Goldschmiedt** und **M. v. Schmidt.**

(Aus dem Universitäts-Laboratorium des Prof. v. Barth.)

Bekanntlich findet sich bei der hüttenmännischen Verarbeitung der Quecksilbererze in den Condensationskammern ausser dem metallischen Quecksilber ein Nebenproduct, der „Stupp", welcher selbst bereits Gegenstand ausführlicher Untersuchung [1] gewesen, und in welchem ein neuer Kohlenwasserstoff, das Idryl, von dem Einen von uns entdeckt worden ist.

Der Stupp enthält noch grosse Quantitäten Quecksilber, welches zum Theil durch mechanische Behandlung daraus gewonnen wird; immerhin bleiben auch nach dieser noch 15—20 Procent davon zurück. Dieses Product wird nun zur weiteren Ausbeutung des Quecksilbers nochmals in die Muffelöfen zurückgebracht. Es finden sich dann in den Condensationsräumen ausser Quecksilber und staubförmigem Stupp auch Klumpen einer zähen, schmierigen Masse, welche den Namen „Stuppfett" führt.

Diese Details, welche der Eine von uns aus einem Vortrage des k. k. Ministerialrathes v. Friese erfuhr, als er bereits grosse Quantitäten von Stupp zur Darstellung von Idryl in Angriff genommen hatte, veranlassten denselben, seine Aufmerksamkeit diesem Materiale zuzuwenden, weil es wegen seines geringen Quecksilbergehaltes, zum mindesten ein bequemeres Arbeiten in Aussicht stellte. Die k. k. Bergdirection in Idria, welche demselben schon wiederholt in der liebenswürdigsten Weise entgegengekommen ist, hat seinem Wunsche um Überlassung von Stuppfett durch Übersendung von 32 Kilogramm dieses interessanten Productes entsprochen, wofür ihr hiemit der aufrichtigste Dank gesagt wird.

---

[1] Sitzb. d. k. Akad. d. Wissenschaften LXXVI. II. Abth. Juli-Heft.

Schon nach oberflächlicher Untersuchung war zu entnehmen, dass der Stupp und das Stuppfett sich nicht nur durch die Menge der beigemengten anorganischen Stoffe unterscheiden, sondern dass auch die organischen Bestandtheile in diesen beiden, einander so nahestehenden Materialien, theilweise wenigstens, verschieden wären. Wir haben uns daher entschlossen, das Stuppfett einer gründlichen systematischen Untersuchung zu unterziehen, in der Hoffnung, vielleicht auch in diesem zu neuen Körpern zu gelangen.

Das Product, wie es uns aus Idria zukam, bestand aus schweren Klumpen von nicht genau definirbarer, bei einzelnen Stücken mehr gelber, bald auch grünlicher, bei wenigen bräunlicher Farbe. Alle hatten aber eine deutliche krystallinische Beschaffenheit und waren durch die ganze Masse von einem zähen Öle durchsetzt, dessen Quantität übrigens nicht so gross war, dass es etwa durch mechanische Mittel von dem krystallinischen Theile hätte getrennt werden können.

Beim Berühren fühlte sich die Masse fettig an und hinterliess auch auf Papier gebracht, einen durchscheinenden Fleck. Auf dem Platinbleche brannte sie unter starkem Russen mit Hinterlassung von nur sehr geringen Mengen fixen Rückstandes. Metallisches Quecksilber war mit freiem Auge in derselben nicht zu entdecken und auch beim Auflösen in Lösungsmitteln blieb ein nur geringer unlöslicher, schwarzer, pulveriger Rückstand, in dem Quecksilberkügelchen nicht zu unterscheiden waren.

Nachdem, wie bereits erwähnt, bei Verarbeitung des Stuppfettes neben dem zunächst in Aussicht genommenen Zwecke der Reindarstellung von Pyren und Idryl in grösseren Quantitäten, auch die Zusammensetzung desselben ermittelt werden sollte, haben wir, um auch die Auffindung von eventuell in sehr geringer Menge vorhandenen Verbindungen zu ermöglichen, die Bearbeitung des ganzen zur Verfügung stehenden Quantums unternommen. Wie aus Nachstehendem ersichtlich ist, wäre es auch thatsächlich kaum möglich gewesen, den einen oder anderen der aufgefundenen Stoffe bei Anwendung kleinerer Mengen an Untersuchungsmateriale von den übrigen zu trennen, nachdem von denselben in den 32 Kgrm. nur 1—2 Grm. enthalten waren.

Die erste rohe Trennung wurde dadurch ausgeführt, dass das Stuppfett mit zur vollständigen Lösung ungenügender Menge

Alkohols in Portionen zu 2 Kgrm. gekocht wurde. Das Unlösliche blieb im Kolben als schwarze, flüssige Masse zurück, von welcher die heisse, alkoholische Flüssigkeit abgegossen wurde. Dieser schwarze, geschmolzene, schwerlösliche Theil erstarrt beim Erkalten zu einer schwarzen, körnig krystallinischen Substanz, die wir als Fraction *A* bezeichnen.

Aus dem heiss abgegossenen Alkohol scheidet sich beim Kochen sehr bald eine bedeutende Quantität hellgelb gefärbter, krystallinischer Körner aus, die als Fraction *B* besprochen werden sollen, und welche weitaus die Hauptmenge des Materials ausmachen. Der von diesem abfiltrirte Alkohol wurde vollständig abdestillirt, der Rückstand enthält die Gesammtmenge der öligen Stuppfettbestandtheile als braune, dicke Flüssigkeit, aus welcher sich bei längerem Stehen noch ziemlich bedeutende Quantitäten gelber, krystallinischer Massen abscheiden, die durch Filtration an der Luftpumpe von dem Öle getrennt werden konnten. Zur vollständigen Entfernung des Öles wurde das Feste mit kaltem Alkohol in einer Reibschale verrieben, dieser abfiltrirt und das nach dem Abdestilliren rückständige Öl mit der Hauptmenge vereinigt.

Der etwa 4 Klgrm. betragende krystallinische Theil stellte sich als identisch mit *B* heraus, und wurde ganz so verarbeitet, wie bei Besprechung dieser Fraction beschrieben werden wird; den flüssigen Theil bezeichnen wir mit *C*.

Untersuchung der Fraction *A*.

Bei anhaltender Behandlung der schwarzen, krystallinischen Masse mit kochendem Alkohol ging ein bedeutender Antheil in Lösung, die alkoholische Flüssigkeit setzt beim Erkalten gelbe Krystalle ab, von denen noch mehr beim Abziehen des Alkohols erhalten werden; diese Krystallisationen wurden ganz so behandelt, wie dies später von Fraction *B* beschrieben werden soll, und zeigten sich mit dieser auch in Bezug auf ihre qualitative Zusammensetzung identisch; es soll also, trotzdem die Trennung mit denselben durchgeführt wurde, hier nicht weiter davon die Rede sein. Der vom Alkohol nicht aufgenommene Antheil stellte eine schwarze, zähflüssige Schmiere dar, welche nun mit siedendem Benzol erschöpfend behandelt wurde. Ungelöst blieb ein

schwarzes Pulver, welches nichts Organisches mehr enthielt, und dem Quecksilberkügelchen in geringer Menge beigemischt waren.

Das Gewicht dieser gesammten, von 32 Klgrm. Stuppfett stammenden mineralischen Bestandtheile betrug 150 Grm. Die Zusammensetzung derselben wurde durch die qualitative Analyse ermittelt.

In Säuren löslicher Antheil:

Quecksilber (theils regulinisch, theils in Form von Schwefelquecksilber), Eisen, Mangan, Thonerde, Kalk, Magnesia.

In Säuren unlöslicher Theil:

(2·29%) des Gesammtrückstandes) Gyps und Thon.

Der Gehalt an Quecksilber (regulinisch und in Form von Schwefelquecksilber) betrug Hg=76·35% des mineralischen Rückstandes.

Der niedere Procentsatz an mineralischen Stoffen, von welchen metallisches Quecksilber nur einen kleinen Bruchtheil ausmacht, dürfte die weitere hüttenmännische Verarbeitung des Stuppfettes auf Quecksilber kaum zu einer lohnenden machen.

Von der Lösung in Benzol wurde letzteres abdestillirt, wobei eine dunkelgefärbte Krystallmasse hinterblieb, aus welcher durch wiederholtes Auskochen mit grossen Mengen absoluten Alkohols ein gut krystallisirender Kohlenwasserstoff extrahirt werden konnte, während eine theerige Masse ungelöst blieb, welche um so weniger weiter berücksichtigt wurde, als ihre Menge eine geringe war.

Der so gewonnene rohe Kohlenwasserstoff wurde durch Extraction mit Schwefelkohlenstoff, Umkrystallisiren aus Benzol und schliesslich durch Sublimation gereinigt.

Der Schmelzpunkt der weissen Blättchen lag bei 248° und konnte durch weitere Krystallisation oder Sublimation nicht höher erhalten werden. Die Analyse führte zur Formel $C_{18}H_{12}$.

0·2000 Grm. Substanz gaben 0·6940 Grm. Kohlensäure und 0·0965 Grm. Wasser.

In 100 Theilen:

	Gefunden	Berechnet für $C_{18}H_{12}$
C	94·64	94·73
H	5·36	5·27

Auch die Dampfdichte, nach V. Meyer im Bleibade ausgeführt, wies auf dieselbe Molecularformel hin.

0·0835 Grm. Substanz lieferten bei $t = 21·5°$ und $B = 766·7$ Mm.: $V = 9·5$; woraus sich ableitet:

	Gefunden	Berechnet für $C_{18}H_{12}$
D....	7·54	7·89

Bei Oxydation einer kleinen Quantität dieses Kohlenwasserstoffes entstand ein rothes Oxydationsproduct, welches die für Chrysochinon charakteristische kornblumenblaue Färbung seiner Lösung in concentrirter SO_4H_2 lieferte, so dass wir wohl berechtigt sind, diesen Kohlenwasserstoff als Chrysen anzusprechen, wofür auch die analytischen Daten sprechen.

Im Stupp hat seinerzeit [1] der Eine von uns einen hochschmelzenden Kohlenwasserstoff aufgefunden, dessen procentische Zusammensetzung ebenfalls mit jener des Chrysens zusammenfiel. Damals ausgeführte Versuche, dessen Dampfdichte zu bestimmen, misslangen in Folge Zersetzung der Substanz; auch war der Schmelzpunkt höher liegend bei 254° beobachtet worden.

Es konnte daher nicht entschieden werden, ob der damals aufgefundene Körper Chrysen war.

Wir sind jetzt geneigt, diese Frage dahin zu entscheiden, dass der seinerzeit im Stupp gefundene Körper von Chrysen verschieden gewesen sei. Unmittelbar nach dem Erscheinen der ersten Arbeit über Idryl gelang es nämlich Knecht [2] anstandslos nach V. Meyer's Methode im Schwefeldampf unter Anwendung Wood'scher Legirung die Dampfdichte des Chrysens zu bestimmen, bei welcher Operation der bei 254° schmelzende Kohlenwasserstoff aus Stupp bei mehreren Versuchen Resultate lieferte, die eine stattgefundene Zersetzung ausser allen Zweifel stellten. Auch nach der Luftverdrängungsmethode lässt sich die Dichte des Chrysens leicht bestimmen, wie dies schon früher V. Meyer, [3] neuerdings wir nachgewiesen haben.

Bemerkenswerth ist übrigens, dass wir einen Körper, dem die an dem Kohlenwasserstoff aus Stupp beobachteten Eigenschaften zukämen, im Stuppfett nicht aufgefunden haben, trotzdem wir um so viel grössere Quantitäten des letzteren verarbeitet haben. Der Grund hiefür liegt wahrscheinlich darin, dass

---

[1] L. c.

[2] Ber. d. d. chem. Ges. X. pag. 2078.

[3] Ebendaselbst. XI. pag. 2259.

die geringe Menge dieses im Stupp vorkommenden Kohlenwas
stoffs bei der hohen Temperatur, der er bei der nochmaligen '
arbeitung des Stupp im Muffelofen ausgesetzt wird, zerfällt.

Untersuchung der Fraction *B*.

Dieses Kohlenwasserstoffgemenge entsprach, wie aus l
gendem ersichtlich, im Wesentlichen der Natur und (
Mischungsverhältnisse seiner Bestandtheile nach, jenen Stu
extracten, welche bereits vor längerer Zeit von dem Einen
uns untersucht worden sind. Die Trennungsmethode war wie
damals angewandte auf die verschiedene Löslichkeit der Pik
säureverbindungen in Alkohol beruhend.

Wir beschränken uns auf die Angabe, dass wir dieses
menge in Portionen à 1 Klgrm. in siedendem Alkohol auflös
und diese Lösung mit einer alkoholischen Auflösung von
1·2 Klgrm. Pikrinsäure, ebenfalls in der Siedehitze, zusamn
brachten, den sofort ausgeschiedenen Niederschlag durch Fil
tion durch grobe Leinwand und Pressen in einer Schraubenpre
von der Flüssigkeit trennten, aus welcher sich inzwischen wie
Pikrinsäureverbindungen abschieden, die wieder abfiltrirt wurc
und dies so lange fortsetzten, bis sich die Flüssigkeit g
abgekühlt hatte und nichts mehr absetzte. Es wurde dann e
die Hälfte des Alkohols abdestillirt, das nach dem Abkül
Auskrystallisirende wieder entfernt, und je zwei Filtrate von z
Portionen dann vereinigt, von denen wieder die Hälfte des Al
hols abdestillirt wurde. In dieser Weise wurde mit der gan
Masse verfahren und aus jeder Portion 4—5 Fractionen
Pikrinsäureverbindungen erhalten, deren Schmelzpunkt um
höher lag, je schwerer löslich dieselben waren. Die Verbindun
von gleichem Schmelzpunkt wurden immer vereinigt und
Alkohol umkrystallisirt bis die Temperatur, bei welcher Schmelzı
eintrat, sich nicht mehr änderte.

Diese in wenigen Zeilen beschriebene Trennung war e
ungemein zeitraubende und mühevolle Arbeit. Wir haben v
über tausend Fractionen in Händen gehabt und auf i
Schmelztemperatur untersucht. Wir können auch nicht unterlass
an dieser Stelle zu erwähnen, dass wir in diesem Theile
Untersuchung, welcher auch noch die weitere Unannehmlichk

mit sich brachte, dass wir durch viele Monate mit grossen Quantitäten Pikrinsäure operiren mussten, mit anerkennenswerthem Eifer durch Herrn Stud. chem. V. Tedeschi unterstützt wurden.

Es wurden schliesslich drei reine Pikrinsäureverbindungen erhalten, welche durch Ammoniak zerlegt wurden; die dadurch erhaltenen Kohlenwasserstoffe wurden einer weiteren Reinigung behufs Analyse unterzogen.

Die schwerstlösliche Pikrinsäureverbindung hatte den der Pyrenverbindung eigenthümlichen Schmelzpunkt 222°; der aus derselben durch Kochen mit Ammoniak leicht zu erhaltende Kohlenwasserstoff hatte als Rohproduct den Schmelzpunkt 146°, wie er seinerzeit von dem Einen von uns für Pyren beobachtet worden ist. Inzwischen fanden Fittig und Hintz,[1] dass dieses höher (bei 148 bis 149°) schmelze, und wir können dies nach unseren neuen Bestimmungen des aus grossen Quantitäten Alkohols umkrystallisirten und sublimirten Pyrens nicht nur bestätigen, sondern anführen, dass er bei 149 bis 150° liege.

Bei der Analyse gaben:

0·1760 Grm. Substanz 0·6120 Grm. Kohlensäure und 0·0811 Grm. Wasser.

In 100 Theilen:

	Gefunden	Berechnet für $C_{16}H_{10}$
C	94·83	95·05
H	5·12	4·95

Die zweite isolirte Pikrinsäureverbindung verflüssigte sich bei 185°, der ihr zu Grunde liegende Kohlenwasserstoff bei 110°. Er hatte, aus Alkohol umkrystallisirt, die dem Idryl eigenthümliche Krystallform, schöne, lange Nadeln. Auch seine Zusammensetzung entsprach jener für diesen Kohlenwasserstoff von dem Einen von uns ermittelten.

0·3082 Grm. Substanz gaben 1·0679 Grm. Kohlensäure und 0·1387 Grm. Wasser.

In 100 Theilen:

	Gefunden	Berechnet für $C_{15}H_{10}$
C	94·50	90·73
H	5·00	5·27

[1] Ber. d. d. chem. Ges. X. pag. 2143.

Als dritte reine Verbindung wurde eine bei 144° schmelzen
erhalten, deren Kohlenwasserstoff nahezu die Hälfte des ganz
Stuppfettes betrug. Dieser schmilzt nach einmaligem Umkrysta
lisiren aus Alkohol bei 100° und hat die Eigenschaften und d
Zusammensetzung des Phenanthrens.

0·2376 Grm. Substanz gaben 0·8202 Grm. Kohlensäure u
0·1233 Grm. Wasser.

In 100 Theilen:

	Gefunden	Berechnet für $C_{14}H_{10}$
C	94·15	94·38
H	5·77	5.62

Den unterhalb 144° schmelzenden Pikrinsäureverbindunge
waren, wenn auch in geringer Menge, weisse Blättchen von m
Pikrinsäure nicht verbundenen Kohlenwasserstoffen beigemeng
auch haftete, namentlich den leichter löslichen, deutlich Dipheny
geruch an, die allerletzten Fraktionen enthielten überdies auc
noch flüssige Bestandtheile, welche sich aus dem ganzen Material
hier angesammelt hatten, und welche ihnen eine etwas schmierig
Consistenz verliehen.

Es wurden diese Fractionen zunächst unter Zusatz von noc
etwas Pikrinsäure mit zur Lösung genügenden Mengen Alkohol
aufgekocht, worauf der Schmelzpunkt des zuerst beim Abkühle
herausfallenden, auf die Gegenwart der zuletzt besprochene
Kohlenwasserstoffe schliessen liess. Die so successive gewonnene
Partien wurden mit jenen von gleichem Schmelzpunkt aus de
Hauptmasse von *B* vereinigt. Immerhin blieb noch eine nich
unbeträchtliche Quantität von Pikrinsäureverbindungen, dere
Schmelzpunkt zwischen 87° und 120° lag, und welche durc
Krystallisation nicht reiner zu werden schienen, ausserdem noc
leichter schmelzbare, schmierige Antheile, welche weiter unte
besprochen werden sollen. Sie wurden daher mit Ammoniak
zerlegt und die Kohlenwasserstoffe für sich destillirt.

Beim Versuch, jetzt wieder Pikrate daraus darzustellen,
zeigte sich, dass dieselben sich beim Umkrystallisiren leich
zerlegen. Es gelang hingegen durch Pressen der Kohlenwasser-
stoffe zwischen Fliesspapier und öfteres Umkrystallisiren aus
Alkohol weisse, bei 210° schmelzende Blättchen zu isoliren,

welche nach einmaliger Sublimation bei 213° flüssig wurden. Bei Oxydation mit Chromsäure in Eisessiglösung entstand ein bei 270° schmelzendes Chinon, welches durch SO_4H_2 in eine Sulfosäure umgewandelt wurde, deren Kalischmelze die alizarinblaue Färbung hatte.

Es war dieser Kohlenwasserstoff also, wie auch dessen Analyse beweist, Anthracen.

0·1435 Grm. Substanz gaben 0·4956 Grm. Kohlensäure und 0·0748 Grm. Wasser.

In 100 Theilen:

	Gefunden	Berechnet für $C_{14}H_{10}$
C	94·19	94·38
H	5·79	5·62

Die Mutterlaugen enthielten noch Phenanthren und Diphenyl, welches an seinem Geruche erkannt wurde. Diese kleine Quantität wurde mit dem oben erwähnten leichtest löslichen, etwas schmierigen und dunkel gefärbten Antheile der Fraction *B* vereinigt und das Ganze in einer grossen Retorte mit Wasserdämpfen destillirt. Es geschah dies in der Erwartung, dass auf diese Weise das sich mit Pikrinsäure nicht verbindende Diphenyl zum grössten Theile übergetrieben werden könne, bevor die Pikrinsäureverbindungen der anderen Kohlenwasserstoffe durch die Wasserdämpfe zersetzt würden. Es gelang in der That, so eine kleine Quantität Diphenyl zu erhalten, welche mit jener vereinigt wurde, die später aus dem flüssigen Antheil des Stuppfettes abgesondert wurde.

Die in der Retorte zurückbleibende, beinahe schwarze Masse wurde nun mit Ammoniak versetzt und abermals mit gespanntem Wasserdampf destillirt, was hiebei überging, wurde als Phenanthren erkannt. Der Retortenrückstand wurde von der wässerigen Lösung abgehoben und für sich destillirt. Das Destillat wurde abermals mit Pikrinsäure in alkoholischer Lösung aufgekocht. Es schied sich aus der Lösung neben festen Pikrinsäureverbindungen ein rothes Öl aus, welches durch Absaugen entfernt wurde, die Pikrinsäureverbindungen wurden scharf gepresst, wiederholt umkrystallisirt und lieferten, so behandelt, nach dem Zerlegen mit Ammoniak eine weitere Menge Phenanthren.

Das rothe Öl wurde ebenfalls durch Ammoniak von Pik
säure befreit. Es erstarrt nach einiger Zeit zum Theile;
Flüssige wurde mit der Hauptmasse der flüssigen Producte
einigt, während das Feste nach entsprechender Reinigung
Eigenschaften des Anthracens hatte.

Untersuchung des flüssigen Theiles *C*.

Dieser 7—8 Liter betragende Theil, ein braunes, dickflüss
Öl, wurde zunächst aus einer grossen Kupferretorte destillirt.
Flüssigkeit fängt bei 200° an überzugehen. Das erste Dest
(α), welches in dem Intervall 200—260° übergeht, erst
grösstentheils nach dem Erkalten zu einer weissen, krystallinis
Masse; von 260—300° geht ein hellgelbes Öl (β) über, wel
erst nach längerem Stehen bei Winterkälte eine geringe Me
krystallinischer Körner ausscheidet; von 300 bis 350° er
man wieder zum grössten Theile krystallinisches Destillat (γ),
über der Thermometergrenze destillirt, ein theilweise erstarren
gelb gefärbtes Öl (δ), während in der Retorte eine relativ ger
Menge schwarzen, pechartigen Rückstandes zurückbleibt,
nicht weiter berücksichtigt wurde.

Diese Destillate waren in Schalen aufgefangen wor
welche über Nacht bei Winterkälte in Schnee gekühlt blie
um möglichst viel der in den Ölen aufgelösten festen Substanze
Ausscheidung zu bringen. Diese wurden dann möglichst r
durch eine Saugpumpe vom Flüssigen getrennt und zwis
Fliesspapier in einer Schraubenpresse gepresst. Diejenigen
erhaltenen Öle, deren Siedepunkt unter 360° lag, wurden
einigt, für sich nochmal destillirt, wobei wieder Desti
erhalten wurden, welche theilweise erstarrten; das Feste wu
abermals durch Filtration vom Flüssigen getrennt und mit
correspondirenden Fractionen der ersten Destillation verein
diese Behandlung wurde sehr häufig wiederholt, bis das gesam
noch flüssige Product, soferne es unter 360° überging, nur n
etwas über 300 Kubikcentimeter betrug.

Die aus den Fractionen (α) isolirten Krystalle wu
geschmolzen und nach dem Erstarren nochmals gepresst, w
wieder etwas Flüssiges erhalten wurde, welches mit der Ha
masse vereinigt wurde. Der Presskuchen, zweimal aus Alk

umkrystallisirt, wonach der Schmelzpunkt constant bei 79° blieb. Dieser, sowie Geruch und Aussehen, leichte Sublimirbarkeit und der Schmelzpunkt der beim Vermischen gesättigter alkoholischer Lösung mit Pikrinsäurelösung entstehenden gelben Nadeln der Pikrinsäureverbinbung (149°), liessen diesen Kohlenwasserstoff leicht als Naphtalin erkennen. Hiemit stimmen auch die analytischen Beobachtungen.

0·2577 Grm. Substanz gaben 0·8875 Grm. Kohlensäure und 0·1561 Grm. Wasser.

In 100 Theilen:

	Gefunden	Berechnet für $C_{10}H_8$
C	93·90	93·75
H	6·74	6·25

Die Dampfdichte wurde nach der Quecksilberverdrängungsmethode bestimmt.

Angewandte Substanz	= 0·0520
Angewandtes Quecksilber	= 1008·5
Ausgeflossenes Quecksilber	= 255·4
Anfangstemperatur des Quecksilbers	= 21°
Temperatur des Bades	= 246°
Höhe der wirksamen Quecksilbersäule	= 102 Mm.
Barometerstand	= 757 Mm.

	Gefunden	Berechnet für $C_{10}H_8$
D =	4·33	4·43

β. Die aus diesen Destillaten (260—300°) erhaltenen festen Substanzen hatten deutlichen Diphenylgeruch, waren aber leicht als nicht rein zu erkennen, nachdem sie theilweise Pikrinsäureverbindungen lieferten, die der fractionirten Krystallisation unterworfen, Productegaben, von denen die schwerstlöslichen bei 140°, die leichtest löslichen bei 100° schmolzen. Durch fortgesetzte fractionirte Krystallisation, Absublimiren des Diphenyls am Wasserbade auf grossen Uhrgläsern und unter Trichtern konnte einerseits Diphenyl als Sublimat, andererseits reine Naphtalinpikrinsäure (Schmelzpunkt 149°) erhalten werden. Ausserdem wurde noch eine bei weiterem Umkrystallisiren ihren Schmelzpunkt nicht mehr verändernde Substanz erhalten, welche bei 93°

flüssig wurde und citronengelbe, compacte Krystalle darstellte. Die Fractionen, deren Schmelzpunkte zwischen 90° und 149° lagen, wurden vorläufig bei Seite gestellt und später mit correspondirenden des flüssigen Theiles von β vereinigt.

Aus den Mutterlaugen wurden noch grössere Mengen Diphenyls durch entsprechende Behandlung rein erhalten. Schmelzpunkt 70°.

0·2438 Grm. Substanz gaben 0·8345 Grm. Kohlensäure und 0·1468 Grm. Wasser.

In 100 Theilen:

	Gefunden	Berechnet für $C_{12}H_{10}$
C....	93·39	93·51
H ...	6·69	6·49

Die von den krystallinischen Ausscheidungen von β getrennten Öle wurden nun einer systematischen, fractionirten Destillation unterworfen, und hiebei die Vorlage jedesmal gewechselt, wenn das Thermometer um 5 Grade gestiegen war. Der erste Tropfen ging bei 220° über. Das über 300° bis 350° Destillirende wurde mit (γ), die geringe Quantität des Rückstandes mit (δ) vereinigt. Beim Abkühlen war in jedem Destillat eine mehr oder weniger bedeutende Menge erstarrt. Es wurde nun das Feste überall entfernt und das Flüssige jeder Fraction, von der niedersten anfangend, wieder fractionirt, wobei wieder theilweise erstarrende Destillate übergingen. Als diese Operation etwa 30mal wiederholt wurde, war die Quantität des Flüssigen auf ein sehr geringes Quantum reducirt. Ein längeres Stehenbleiben des Thermometers war nie beobachtet worden, die Temperatur stieg bei jeder Destillation beinahe stetig. Bei Prüfung der Destillate stellte sich heraus, dass auch eine vollständige Trennung der hier vorhandenen Substanzen nicht durchgeführt sei, und es wurde daher abermals zur weiteren Reinigung die Darstellung der Pikrinsäureverbindung unternommen.

Es wurden die aus β erhaltenen 43 festen und flüssigen Fractionen einzeln in Alkohol aufgelöst und mit der entsprechenden Menge heisser, alkoholischer Pikrinsäurelösung versetzt. Aus den ersten festen Fractionen (220—245°) konnte nach mehrmaligem Umkrystallisiren leicht Naphtalinpikrinsäure identificirt

werden, während noch leichter schmelzbare Krystallisationen mit solchen von gleichem Schmelzpunkt aus höher siedenden Partien vereinigt wurden. Die festen Fractionen von 245—260° ergaben hauptsächlich Diphenyl, welches nach bereits oben beschriebener Art gereinigt wurde; in dem bei 260 - 280° Übergegangenen wurde in grösserer Menge jene auch schon erwähnte Verbindung vom Schmelzpunkt 93° vorherrschend neben wenig Diphenyl gefunden.

Die kleine Menge, welche zwischen 280—300° übergegangen war, ergab etwas Phenanthrenpikrinsäure und Diphenyl, welches am Geruche erkannt werden konnte, überdies noch wenig von dem bei 94° schmelzenden Körper und eine kleine Quantität einer Pikrinsäureverbindung, welche constant bei 156° schmolz.

Überblicken wir die Ergebnisse der Behandlung mit Pikrinsäure bei dem Flüssigen, so kommen wir zu folgenden Resultaten:

Die am leichtesten flüchtigen Fractionen 220—245° gaben jede beim Vermischen ihrer alkoholischen Lösung, selbst wenn diese siedend und verdünnt waren, sofort einen sehr hellgelben pulverigen Niederschlag, welcher sich durch seine ungemein grosse Schwerlöslichkeit in Alkohol und seine äusseren Eigenschaften, von allen anderen bisher vorgekommenen Pikrinsäurefällungen unterschied. Da der Schmelzpunkt aller dieser Niederschläge nahezu derselbe, um 190° liegend, war, wurden diese vereinigt aus Benzol umkrystallisirt, wobei der Schmelzpunkt der in hellgelben, feinen Nadeln anschiessenden Substanz auf 194° stieg. Aus den Filtraten gewinnt man Nadeln von bei 130° bis 150° schmelzenden Verbindungen, aus denen durch sehr häufiges Umkrystallisiren Substanzen von constantem Schmelzpunkt in geringer Menge isolirt wurden, und zwar eine bei 149° (Naphtalinpikrinsäure), eine zweite bei 119° und eine bei 99° schmelzende.

Aus den zwischen 246° und 300° siedenden flüssigen Partien wurden wieder kleine Quantitäten von allen in der niederer siedenden Fraction gefundenen Substanzen durch sehr häufige fractionirte Krystallisation abgeschieden, mit Ausnahme jener bei 194° schmelzenden. Überdies war hier Naphtalinpikrinsäure in sehr geringer Menge vorhanden.

Ausser jenen bereits besprochenen Substanzen sind demna in der Fraction β des flüssigen Antheiles noch eine Reihe von Su stanzen gefunden worden, deren Natur erst zu ermitteln wa und zwar:

1. Gelbe, in derben Krystallen auftretende Pikrinsäureverbi dungen vom Schmelzpunkt 93°.
2. In orangerothen Nadeln auftretende, bei 156° schmelzen Pikrinsäureverbindung.
3. Schwerlösliche, in hellgelben Nadeln aus Benzol erhalten bei 194° schmelzende Pikrinsäureverbindung.
4. Gelbe, bei 119° und
5. Gelbe, bei 99° schmelzende, in Nadeln krystallisiren Verbindung.

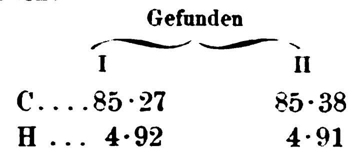
1. Die gesammten bei 93° schmelzenden Fractionen wurd nochmals aus Alkohol umkrystallisirt, wodurch der Schmelzpun auf 94° stieg. Bei weiterer Krystallisation blieb er unverände und die successive herausfallenden Krystalle wurden sämmtli bei derselben Temperatur flüssig, so dass der Körper als vo kommen rein angesehen werden konnte.

Die Pikrinsäureverbindung wurde nun mit Ammoni zerlegt, mit heissem Wasser, unter welchem die abgeschiede Verbindung schmilzt, wiederholt gewaschen und destillirt; ging das Ganze bei 280—283° (uncorrigirt) über. Aus Alkoh umkrystallisirt, stellt die Substanz grosse, weisse Blättchen v angenehm aromatischem, an Diphenyl erinnernden Geruche da die bei 80—81° schmelzen. Dieser Körper, welchen wir f einen Kohlenwasserstoff hielten, gab bei der Analyse Zahle welche bewiesen, dass er Sauerstoff enthält.

I. 0·2031 Grm. Substanz gaben 0·6350 Grm. Kohlensäure u 0·0900 Grm. Wasser.

II. 0·2597 Grm. Substanz gaben 0·8131 Grm. Kohlensäure u 0·1147 Grm. Wasser.

In 100 Theilen:



	Gefunden	
	I	II
C....	85·27	85·38
H ...	4·92	4·91

Diese Zahlen führen zur einfachsten Formel $C_{12}H_8O$, welche verlangt:

Berechnet für $C_{12}H_8O$

C....85·71
H ... 4.76
O ... 9·52

Diese Formel ist aber die des zuerst von Lesimple,[1] dann von Hofmeister[2] und zuletzt von Gräbe[3] nach verschiedenen Methoden dargestellten Diphenylenoxyds. Bei Vergleichung der Eigenschaften unserer Substanz mit jener des Diphenylenoxyds fand sich auch eine solche Übereinstimmung derselben, dass nicht mehr daran zu zweifeln war, wir hätten es wirklich mit diesem Körper zu thun. Auffallend war nur der Umstand, dass wir diese sauerstoffhältige Substanz als Additionsproduct mit Pikrinsäure erhalten hatten, da man damals nicht wusste, dass das Diphenylenoxyd, welches zur Zeit, als wir diese Versuche ausführten, der einzige bekannte Vertreter dieser Gruppe von Körpern war, sich mit Pikrinsäure verbinde. Wir stellten uns daher nach der Methode von Gräbe durch Destillation von Phenol mit Bleioxyd, reines Diphenylenoxyd dar, welches mit demselben Thermometer gemessen, gleichen Siede- und Schmelzpunkt hatte, wie das aus Stuppfett erhaltene, und welches auch eine bei 94° schmelzende, in gelben Krystallen anschiessende Pikrinsäureverbindung lieferte. Bemerken wollen wir hier, dass die Ausbeute an Diphenylenoxyd, die wir bei der allerdings nur einmal ausgeführten Darstellung hatten, eine viel bessere war, als von Gräbe angegeben wird, wir erhielten nämlich aus 100 Grm. Phenol 9·5 Grm. Diphenylenoxyd, während Gräbe „nie mehr wie im Maximum 3—4 $^0/_0$" gewinnen konnte.

Seither sind übrigens von Gräbe und Knecht,[4] dann von Knecht und Unzeitig[5] und v. Arx[6] mehrere in diese Körper-

---

[1] Ann. d. Chem. u. Pharm. 138, pag. 375.
[2] Ebendaselbst, 159, pag. 211.
[3] Ebendaselbst, 174. pag. 190.
[4] Ann. d. Chem. u. Ph. 202, pag. 1.
[5] Ber. d. d. chem. Ges. XIII, pag. 1724.
[6] Ebendaselbst, XIII, pag. 1716.

gruppe gehörende Substanzen entdeckt, und auch deren Pikrinsäureverbindungen dargestellt worden, so dass die Fähigkeit, sich additionell mit Pikrinsäure zu vereinigen, ihnen gerade so eigenthümlich zu sein scheint, wie den meisten aromatischen Kohlenwasserstoffen. Während aber von diesen neuen Substanzen angegeben wird, dass sich je ein Molekül derselben mit zwei Molekülen Pikrinsäure verbinde, geschieht dies, wie aus nachstehender Analyse hervorgeht beim Diphenylenoxyd nach gleichen Molekülen.

0·16246 Grm. Substanz gaben 0·6778 Grm. Diphenylenoxyd und 1·0156 Grm. pikrinsaures Ammoniak.

In 100 Theilen:

	Gefunden	Berechnet für $C_{12}H_8O + C_6H_2(NO_2)OH$
Diphenylenoxyd.	41·72	42·32
Pikrinsäure.....	58·19	57·68

2. Nachdem von dieser Verbindung nur sehr kleine Mengen, etwa zwei Gramm vorhanden waren, musste auf ein weiteres Umkrystallisiren verzichtet und sofort die Spaltung durch Ammoniak herbeigeführt werden. Der abgeschiedene Kohlenwasserstoff krystallisirte aus Alkohol sofort in vier bis fünf Centimeter langen, schönen Nadeln aus, deren Schmelzpunkt bei 94° lag; da er sich beim abermaligen Umkrystallisiren nicht änderte, konnte die Substanz analysirt, und deren Dampfdichte bestimmt werden.

I. 0·2343 Grm. Substanz gaben 0·8022 Grm. Kohlensäure und 0·1364 Grm. Wasser.

II. 0·2330 Grm. Substanz gaben 0·7982 Grm. Kohlensäure und 0·1352 Grm. Wasser.

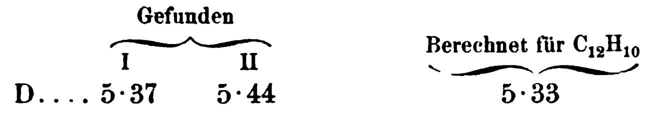
In 100 Theilen:

	Gefunden I	Gefunden II	Berechnet für $C_{12}H_{10}$
C...	93·37	93·55	93·51
H ..	6·47	6·45	6·49

Wie aus den, neben die gefundenen Zahlen gesetzten berechneten ersichtlich, entspricht die Zusammensetzung dieses Kohlenwasserstoffes der Formel $C_{12}H_{10}$ sehr genau, und die Dampfdichten beweisen, dass durch sie auch dessen Moleculargrösse ausgedrückt wird.

I. 0·1142 Grm. Substanz gaben bei $t = 20°$ und $B = 743·2$ Mm. $V = 18·4$ Cc.

II. 0·0434 Grm. Substanz gaben bei $t = 17·5°$ und $B = 748·6$ Mm. $V = 6·8$ Cc.



	Gefunden		Berechnet für $C_{12}H_{10}$
	I	II	
D....	5·37	5·44	5·33

Es sind bisher nur zwei Kohlenwasserstoffe von der Formel $C_{12}H_{10}$ bekannt, Diphenyl und Acenaphten. Nach dem bisher Mitgetheilten war ersteres in diesem Falle ausgeschlossen. Vergleicht man aber die Eigenschaften des letzteren mit jenen unseres Körpers, so findet sich eine sehr nahe Übereinstimmung sofern man auf die zuletzt durch Behr und van Dorp[1] ausgeführten Untersuchungen Rücksicht nimmt, welche insoferne grösseres Vertrauen verdienen, wie die früher von Berthelot[2] und Gräbe[3] publicirten, als die Versuche mit grösseren Mengen angestellt worden sind. Diese Übereinstimmung erstreckt sich auf alle Angaben mit Ausnahme des Schmelzpunktes der Pikrinsäureverbindung, welchen wir bei 154°, Behr und van Dorp bei 160°—161° bestimmt hatten. Als wir aber die kleine, von den Analysen erübrigte Quantität des Kohlenwasserstoffes wieder in Pikrat verwandelten und dessen Schmelzpunkt beobachteten, fanden wir ebenfalls 160°, können also behaupten, der zuletzt besprochene Körper sei Acenaphten.

3. Diese Verbindung zeigte die auffallende Erscheinung, dass sie mit wässerigem Ammoniak oder Kali zerlegt, eine Lösung des pikrinsauren Salzes lieferte, die ganz klar blieb.

Der Geruch, welcher bei Anwendung von Kali aber auftrat, erinnerte so sehr an denjenigen des Chinolins, dass hiedurch ein Fingerzeig gegeben war, der zur Identificirung der Substanz führen konnte. Die geringe Menge, welche wir von diesem Körper isoliren konnten, liess es rathsam erscheinen, durch Vergleich der Schmelzpunkte der Pikrate verschiedener Basen der Pyridin- und Chinolinreihe mit jenem unseres Körpers einen Anhaltspunkt zur

---

[1] Ann. d. Chem. u. Ph. 172, pag. 263.

[2] Ebendaselbst, Suppl. 5, pag. 372.

[3] Ebendaselbst, 163, pag. 363.

Beurtheilung der Natur desselben zu gewinnen, nachdem ja de Geruch dieser Körper ein sehr ähnlicher ist.

Wir haben daher zunächst aus Chinolin, welches wir au Cinchoninsäure durch Destillation mit Kalk darstellten, und welche wir in bekannter Weise reinigten, die Pikrinsäureverbindung dar gestellt, und fanden deren Schmelzpunkt bei 203° liegend. Ausser dem haben wir denselben Versuch mit Skraup's synthetischen Chinolin[1] ausgeführt, dessen Pikrat ebenfalls bei 203° flüssig wird. Beide Pikrate fallen beim Vermischen der alkoholischen Lösungen ganz so wie es bei unserer Verbindung der Fal gewesen, als hellgelbes Pulver heraus, welches beim Umkrystallisiren aus Benzol in Form von feinen, hellgelben Nadeln auskrystallisirt. Die nahe Übereinstimmung der Schmelzpunkte machte es daher schon wahrscheinlich, dass unsere Base aus dem Stuppfett wirklich Chinolin sei.

Das Pikrat wurde nun mit Ätzkali versetzt und mit Wasserdampf destillirt. Es ging eine milchig trübe, deutlich nach Chinolin riechende Flüssigkeit über, die auf Zusatz von Salzsäure klar wurde; die salzsaure Lösung lieferte, auf dem Wasserbade zur Syrupconsistenz eingedampft, sehr bald ein in Nadeln krystallisirendes Salz. Dieses wurde in ziemlich starker Salzsäure aufgelöst und mit Platinchlorid versetzt, die Flüssigkeit zur Auflösung des entstandenen gelben Niederschlages gekocht und dann im Vacuum über Schwefelsäure und Kalk stehen gelassen. Es krystallisiren bald schöne Nadeln des Platindoppelsalzes heraus, die abfiltrirt mit wenig Wasser gewaschen und zwischen Papier gepresst wurden.

0·3546 Grm. Substanz bei 100° getrocknet, gaben 0·4642 Grm. Chlorsilber und 0·1057 Grm. Platin.

In 100 Theilen:

	Gefunden	Berechnet für $2(C_9H_7NHCl)+PtCl_4$
Cl..	32·26	32·77
Pt..	29·75	29·44

[1] Die Herren Dr. Weidel und Dr. Skraup hatten die Freundlichkeit uns die zu diesen Versuchen nöthigen Quantitäten Cinchoninsäure und Chinolin zur Verfügung zu stellen.

0·6763 Grm. lufttrockenen Salzes verloren bei 100° getrocknet 0·0339 Grm. Wasser.

In 100 Theilen:

Gefunden	Berechnet für $2(C_9H_7NHCl)+PtCl_4+2H_2O$
H_2O . . 5·01	5·09

Unser Platindoppelsalz krystallisirt demnach unter den gegebenen Umständen mit zwei Molekülen Krystallwasser. Diese Beobachtung steht im Widerspruche mit den bisherigen Angaben über den Krystallwassergehalt des Chinolin-Platinchlorid-Doppelsalzes. Während von dem Wassergehalt dieses Salzes in früheren Arbeiten überhaupt nicht die Rede ist, gibt Baeyer[1] an, es krystallisire mit Einem Molekül Wasser.

Diese Verschiedenheit ist vielleicht dadurch veranlasst, dass Baeyer das Salz aus Wasser, wir aus viel Salzsäure enthaltendem Wasser umkrystallisirten, und ist desshalb um so weniger an die Identität des Chinolins aus Stuppfett mit dem, anderer Provenienz zu zweifeln, als es gelungen ist, von dem aus dem Platindoppelsalz durch Destillation über Kalk bei möglichst niederer Temperatur erhaltenen Chinolin, ein Pikrat darzustellen, welches bei 203°, also genau bei derselben Temperatur schmolz, wie jenes aus Cinchoninsäure-Chinolin und aus synthetischem Chinolin. Trotzdem hatten wir die Absicht den Wassergehalt, der Platindoppelsalze dieser Chinoline zu controliren, deren Ausführung aber durch die Mittheilung Dr. Skraup's überflüssig wurde, er habe diese Salze immer nur mit zwei Molekülen Krystallwasser zu beobachten Gelegenheit gehabt.

4. Die bei 119° schmelzende Pikrinsäureverbindung wurde mit NH_3 zerlegt und mit Wasserdämpfen destillirt, es geht mit denselben ein farbloses Öl über (etwa 2 CC.), welches abgehoben, mit Chlorcalcium getrocknet und für sich destillirt wurde, wobei der Siedepunkt 230—231° beobachtet wurde. In einer Kältemischung blieb die farblose Flüssigkeit vollkommen klar.

0·2146 Grm. Substanz gaben 0·7304 Grm. Kohlensäure und 0·1402 Grm. Wasser.

---

[1] Ber. d. d. chem. Ges. XII, pag. 1322.

In 100 Theilen:

	Gefunden	Berechnet für $C_{11}H_{10}$
C...	92·82	92·96
H..	7·25	7·04

Die Dampfdichte führte zur Molecularformel: $C_{11}H_{10}$.

0·0455 Grm. Substanz gaben bei $t = 22·5°$ und $B = 749·5$ $V = 8·0$ Cc.

	Gefunden	Berechnet für $C_{11}H_{10}$
D=..	4·91	4·91

Es ist dieser flüssige Kohlenwasserstoff also das Meth naphtalin, welches Fittig und Remsen[1] synthetisch dargest haben und als dessen Siedepunkt 231—232° fanden, währe Ciamician,[2] der dasselbe aus den Destillationsproducten (Abietinsäure über Zinkstaub rein darstellte, den Schmelzpu seiner Pikrinsäureverbindung bei 116—117° beobachtete.

5. Von dieser Verbindung war leider nur eine sehr gerin Menge vorhanden, auch ihr lag ein flüssiger Kohlenwasserst zu Grunde, dessen Siedepunkt nicht genau bestimmt werd konnte, aber jedenfalls zwischen 252—260° lag. Nach Fitt und Remsen[3] siedet Äthylnaphtalin constant bei 251—25 nach Carnelutti[4] bei 257—259·5° (Quecksilberfaden ganz Dampf).

Der Schmelzpunkt der Pikrinsäureverbindung liegt na diesem Forscher bei 98°, während wir 99° ablasen. Es ist a wohl sicher, dass wir es mit dem Äthylnaphtalin zu thun hatt eine Ansicht, die wir leider nicht durch analytische Bele stützen können, nachdem selbst die kleine Quantität, die v besassen, durch einen Unfall verloren ging.

Die Fraction (7) des flüssigen Theiles vom Stuppfett enthi nichts, was nicht schon in früher besprochenen Partien v gekommen wäre: vorherrschend war in derselben Phenanthr

[1] Ann. d. Chem. u. Pharm. 155. pag. 114.
[2] Ber. d. d. chem. G. XI. pag. 272.
[3] Ann. d. Chem. u. Pharm. 155. pag. 119.
[4] Ber. d. d. chem. Ges. XIII. pag. 1671.

Das mit (δ) bezeichnete, über 360° destillirende Öl wurde zunächst mit Wasserdampf abgeblasen, wobei eine geringe Menge unter 360° siedender Öle abgetrieben werden konnte, die mit den entsprechenden Destillaten aus β verarbeitet worden sind. Der Rückstand wurde sehr häufig destillirt, wobei im Destillate jedesmal ein theilweises Erstarren erfolgte. Die festen Partien waren Gemenge von Pyren, Idryl und Phenanthren, die wie gewöhnlich in Pikrinsäureverbindungen verwandelt und durch fractionirte Krystallisation dieser aus Alkohol getrennt wurden. So oft auch die Destillation des Öles noch vorgenommen wurde, so war es doch nicht zu erreichen, dadurch entweder nur Flüssiges oder nur Festes zu erhalten. Es wurde daher mit dem auf etwa 120 CC. reducirten Öle versucht, durch Oxydation einen Aufschluss über die Natur der neben den bekannten gelösten, festen Kohlenwasserstoffen vorhandenen flüssigen Körper zu erhalten. Diese Versuche führten zu keinem brauchbaren Resultate, nachdem immer nur schmierige, rothe Oxydationsproducte erhalten wurden, aus denen keine reinen Verbindungen darstellbar waren.

Wir sind daher nicht in der Lage, über den hier in geringer Menge vorliegenden, flüssigen Körper weitere Aufklärung zu geben.

Als Bestandtheile des Stuppfettes wurden demnach festgestellt:

Chrysen	0·1	Acenaphten	0·003
Pyren	20·	Naphtalin	3
Idryl	12·	Methylnaphtalin . .	0·005
Anthracen	0·1	Äthylnaphtalin . . .	0·003
Phenantren	45·	Diphenylenoxyd . .	0·3
Diphenyl.	0·5	Chinolin	0·003

Mineralische Bestandtheile 0·5.

Die neben diese Körper gesetzten Zahlen sollen eine Vorstellung von dem relativen Mengenverhältnisse geben und bedeuten Procente; selbstverständlich können sie aber nur annähernde Werthe sein, da ja die Trennungen unmöglich bis auf das Äusserste durchgeführt werden konnten und schliesslich doch noch gewisse Mengen von Gemischen übrigbleiben. Bei

Aufstellung dieser Zahlen musste also vielfach die Schätzung a
die Stelle der Wägung treten. Immerhin glauben wir doch dur
Aufführung derselben zur Vervollständigung der Kenntniss d
Stuppfettes beizutragen.

Die Entstehung des Stuppfettes, obwohl nicht unter ga
gleichen Bedingungen wie jene des Steinkohlentheers stattfinden
ist doch im gewissen Sinne derselben vergleichbar, da in beid
Fällen trockene Destillation von organischen Substanzen hie
Veranlassung gibt. Es ist daher einigermassen auffallend, da
obwohl die bei Destillation der Quecksilbererze, aus den
denselben enthaltenen bituminösen Stoffen entstehenden Körpe
der Mehrzahl nach schon im Steinkohlentheere gefunden wurde
doch die relativen Mengen derselben durchaus verschieden sin
so dass gerade jene Körper die in den meisten Steinkohlentheere
nur in sehr geringer Menge vorkommen, wie Pyren, Phenantre
hier vorherrschend sind. Es lässt dieses jedenfalls auf eine eige
thümliche Constitution dieser bituminösen Substanzen schliesse
Bemerkenswerth ist ferner das Vorkommen von Diphenylenoxy
welches bisher nur auf synthetischem Wege dargestellt worde
ist, um so mehr als keine Spur von Phenol oder anderen sauerstof
hältigen Substanzen aufgefunden wurde. Eigenthümlich ist ferne
auch, dass Chinolin als einziger basischer Körper auftritt, da e
sonst in Producten der trockenen Destillation immer nebe
anderen Verbindungen der Pyridin- und Chinolinreihe, und nebe
Anilin und dessen Homologen aufzutreten pflegt.

Nicht unerwähnt soll bleiben, dass auch nicht die geringst
Spur Idrialin im Stuppfett entdeckt werden konnte.

Schliesslich möchten wir noch die Ansicht aussprechen, das
das Stuppfett wohl auch in Zukunft eine technische Bedeutun
kaum erlangen dürfte, da selbst, wenn, wie dies ja leicht stat
finden könnte, Phenantren oder Pyren in der Farbenindustri
Verwendung finden sollte, die beschränkte Production des Stup
fettes dessen Verarbeitung im kleinen Massstabe nicht mit Vorthe
gestatten würde.

Über das Grössenverhältniss der elektrischen Ausdehnung bei Glas und Kautschuk.

Von **D. J. Korteweg** und **V. A. Julius.**[1]

(Mit 1 Holzschnitt.)

In Wiedemann's Annalen[2] hat der eine von uns über die elektrische Ausdehnung Berechnungen mitgetheilt, wobei von der Voraussetzung ausgegangen wurde, dass dabei keine anderen Kräfte als die längst bekannten elektrischen und elastischen Kräfte auftreten, dass also Gleichgewicht entsteht, sobald bei weiteren unendlich kleinen Formänderungen die Summe der Variationen der elektrischen und elastischen Arbeit Null ist. Es wurde so eine Formel gewonnen, nach welcher das Verhältniss der elektrischen Ausdehnungen bei zwei verschiedenen dielektrischen Stoffen, wohl nicht — wegen möglich verschiedenen Werthes der Constante k' — genau gleich dem umgekehrten Verhältniss der Elasticitätscoëfficienten zu sein braucht, aber doch mit diesem von derselben Grössenordnung sein muss. Die Ausdehnung musste also bei Kautschuk einige zehntausendmal grösser sein, als bei Glas. Dagegen fand Quincke[3] beide nicht sehr verschieden. Der von ihm verwendete schwarze Kautschuk wurde aber in Berührung mit Wasser so leitend, dass mit der Holtz'schen Maschine keine, und mit einer Leydener Batterie nur eine Ladung von wenigen Secunden Dauer zu erhalten war.[4] Nun war es uns schon früher gelungen, eine elastische, Wasser auf-

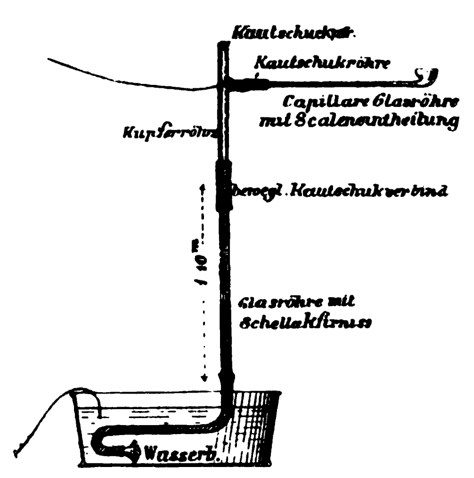
[1] Für die theoretischen Betrachtungen ist nur der erste von uns verantwortlich.

[2] N. F. Bd. 9, S. 48. (1880.)

[3] Quincke, Wied. Ann., Bd. 10, S. 514. (1880.)

[4] Quincke, a. a. O. S. 198.

saugende Substanz durch Tränkung mit Öl in Wasser isolirer
zu machen und dann damit grosse elektrische Ausdehnungen z
beobachten. [1] Wir entschlossen uns diesen Versuch zu wiede
holen und messend zu verfolgen. Mit schwarzem Kautschuk gelar
uns dieses nicht, weil dieser auch nach Tränkung mit Öl in Wass
nicht isolirte, mit weissem vulcanisirtem Kautschuk war d
gegen die Isolation sehr genügend.



Ein Schlauch dieser Substanz wurde 24 Stunden in Öl ge
legt, das eine Ende dann ungefähr wie bei Quincke wasserdicl
und isolirend verschlossen, in das andere eine 1 Meter lang
Glasröhre eingekittet, dann der Schlauch und ein Theil de
Röhre mit Wasser gefüllt und das freie Ende der letzteren mittel
einer kurzen Kautschukröhre beweglich mit einer verticalen Kupfe
röhre verbunden, die selbst wieder durch einen Seitenarm mit ein
horizontal gestellten mit einer Scaleneintheilung versehenen Ca
pillarröhre in Verbindung war. Die Kupferröhre war oben offe
Sie wurde bis an den oberen Rand mit Wasser gefüllt und dan
vorsichtig durch einen Kautschukstopfen verschlossen. Dabe
drang Flüssigkeit in die Capillarröhre und konnten also die Volun
änderungen des Schlauches durch dabei stattfindende Verschie
bung der Flüssigkeitskuppe gemessen werden. Ein Scalenthe

---

[1] Korteweg, Compt. rend. 88 p. 338. (1879.)

entsprach einem Volumen von 1·36 Mm^3. Durch Vertical- und Horizontalstellung der 1 M. langen Glasröhre konnte der hydrostatische Druck nach Belieben um $^1/_{10}$ Atm. geändert werden. Weil die Kupferröhre mit der inneren Flüssigkeit des Kautschukschlauches in leitender Verbindung stand, konnte dieser, nachdem er in ein Wasserbad getaucht war, mittelst der Holtz'schen Maschine leicht als Condensator geladen und entladen werden.

Folgende Resultate wurden so erhalten:

Kautschukröhre.

Volumänderung in Tausendstel des ursprünglichen Volumens

$$\frac{\Delta D}{D} \cdot 10^3.$$

Länge in M.	Äusserer Durchmesser in Mm.	Wandstärke in Mm.	Schlagweite in Mm.	Anzahl der Versuche	Mittelwerth $\frac{\Delta D}{D} \cdot 10^3$	Grösst erhaltener Werth
1·06	13	$2\frac{1}{4} \pm \frac{1}{4}$	2	5	0·52	0·56
„	„	„	4	4	2·22	2·29
„	„	„	5[1]	3	3·78	3·89
0·750	„	„	$2\frac{1}{2}$	15	0·95	1·05
„	„	„	4	10	2·38	2·75
1·08	8·5	$0·95 \pm \frac{1}{16}$	1	14	0·90	1·05
„	„	„	2	6	3·67	3·86

Die Volumänderung zeigt sich also dem Quadrate der Schlagweite und umgekehrt dem Quadrate der Wandstärke proportional.

Sie blieb dieselbe, mochte die innere Belegung positive oder negative Elektricität enthalten.

Bei Fortschaffung des hydrostatischen Druckes von $^1/_{10}$ Atmosphäre fand eine geringe Abnahme der Volumänderungen, die aber zugleich unregelmässiger wurden, statt. Im Mittel fanden wir zum Beispiel bei gleicher Schlagweite in dem einen Falle, eine Volumänderung von $68^1/_2$, im andern von 61 Scalentheilen.

---

[1] Bei 6 Mm. Schlagweite wurde die Röhre durchgeschlagen und dann auf 0·750 gekürzt.

Wir bestimmten dann die Elasticitätscoëfficienten der verw deten Röhren, die sich ziemlich gleich ergaben. Auf eine Lä von 113·44 Mm. fanden wir bei der ersten Röhre eine V längerung von 18·7 Mm. pro Kgrm. Belastung, die zwisc 100 und 500 Grm. variirte. Danach berechnet sich die Coëfficient auf 0·080 Kgrm. pro Quadratmillimeter. Quinc fand für Flintglas 3280 und 3044, das Verhältniss beider ist a ungefähr vierzig Tausend.

Zur besseren Vergleichung der elektrischen Ausdehnun beider Substanzen haben wir nun in folgender Tabelle die v Quincke bei Flintglas, von uns bei Kautschuk gefundenen A dehnungen bei 4 Mm. Schlagweite zusammengestellt. In der v letzten Columne haben wir alle Volumänderungen unter Vora setzung ihrer Proportionalität mit d^{-2} auf 1 Mm. Wanddicke zurü geführt, in der letzten aber, die bei Kautschuk so erhalten Zahlen durch das Verhältniss der Elasticitätscoëfficienten divid

Volumänderungen von Glas und Kautschuk.

(Bei 4 Mm. Schlagweite.)

Flintglas-Thermometer-kugel	Wand-stärke in Mm.	$\frac{\Delta D}{D} \cdot 10^6$	$\frac{\Delta D}{D} \cdot 10^6 \cdot d^2$.	$\frac{\frac{\Delta D}{D} \cdot d^2 \cdot 10^6}{40\cdot000}$
Nr. 22, Quincke, S. 190	0·286	11·77	0·96	
„ 21, „ „	0·319	6·651	0·68	
„ 17, „ „	0·346	5·889	0·70	
„ 61, „ „	0·407	2·950	0·49	
„ 60, „ „	0·591	0·744	0·26	
„ 35, „ 399	0·206	8·700	0·37	
Kautschukröhre von				
1·06 Met. Länge	2·25	2290	11600	0·29[2]
0·750 „ „	2·25	2750	13900	0·35[2]
1·08 „ „	0 95	15400[1]	13900	0·35[2]

[1] Mit 4 multiplicirte Volumänderung bei 2 Mm. Schlagweite.

[2] Aus den grössten Werthen berechnet, aus den Mittelwerthen e hält man: 0·28; 0·30; 0·33.

Es zeigt sich also, dass die Volumänderungen wirklich ungefähr im umgekehrten Verhältniss der Elasticitätscoëfficienten stehen. Man wird sie also denselben Ursachen zuschreiben müssen. Ob nun die von uns wahrgenommenen Volumänderungen des Kautschuks mit der von dem einen von uns entwickelten Theorie in Einklang stehen, wird sich am besten zeigen, wenn wir aus der Formel:

$$\frac{\Delta D}{D} = \frac{3k'V^2}{8\pi\varepsilon d^2}$$

k' berechnen, dessen Werth dann mit der specifisch inductiven Capacität des Kautschuks von derselben Grössenordnung sein muss.

Aus den Versuchen von Thomson,[1] de la Rue und Müller[2] und Mascart[3] lässt sich leicht ableiten, dass für 2 Mm. Schlagweite zwischen Kugeln von 40 Mm. Durchmesser die Potentialdifferenz in B. A. Units nicht weit von 30 entfernt sein kann. In diesen Einheiten ist weiter für die erste Röhre:

$$d = 0{\cdot}225;\ \varepsilon = 8 \times 10^6;\ \frac{\Delta D}{D} = 0{\cdot}56 \times 10^{-3}$$

und man findet also

$$k' = 2{\cdot}11$$

Gegen die Ansicht, dass sich die elektrische Ausdehnung durch die längst bekannten elektrischen Wirkungen, in erster Linie durch den elektrischen Druck[4] erklären lässt, sind von Quincke noch andere Einwendungen gemacht. Wo diese, von, unseres Erachtens, unrichtigen Voraussetzungen, z. B. von der

---

[1] Thomson, Reprint of papers, p. 258 oder Phil. mag. (1860.)

[2] De la Rue und Müller, Phil. trans. for the year 1878, p. 55.

[3] Mascart, Traité d'electricité stat. T. II, p. 86. (1876.)

[4] Dass der elektrische Druck auf der Innenseite des Condensators grösser sein muss, als auf der Aussenseite, ergibt sich sofort, wenn man nur beachtet, dass dieselbe Quantität sich auf der Aussenseite über eine grössere Oberfläche vertheilen muss, und dass der elektrische Druck dem Quadrate der elektrischen Dichte proportional ist.

Annahme einer zwischen Leitungsvermögen und Dielektricitä constante bestehende Proportionalität ausgehen, wollen wir ruhen lassen. Dagegen wird es nützlich sein können, zu zeige dass das von Quincke gefundene Verhältniss zwischen Volu und Längenänderung langer cylindrischer, dünnwandiger Co densatoren sich auch aus der von dem einen von uns entwickelt Theorie ergibt.

Es seien r, d, l Radius, Wanddicke und Länge der cyli drischen Röhre, Δr, Δd, Δl die Änderungen, welche diese Gröss erleiden, wenn der Condensator mit einer Quantität φ positiv Elektricität geladen wird, $\delta\Delta r$, $\delta\Delta d$, $\delta\Delta l$ weitere Variationen dies Grössen bei unendlich kleinen Formänderungen. V die Potenti differenz, k die specifisch inductive Capacität der isolirend Substanz, x_1 und x_2 die beiden Grössen, wodurch ihre Änderu bei Compression angegeben wird, dann ist:

$$\varphi = \frac{kSV}{4\pi d} = \frac{krlV}{2d}$$

also

$$V = \frac{2d\varphi}{krl} \text{ und } \Delta V = \frac{2\varphi}{krl}\Delta d - \frac{2d\varphi}{kr^2l}\Delta r - \frac{2d\varphi}{krl^2}\Delta l - \frac{2d\varphi}{k^2rl}\Delta k$$

wo

$$\Delta k = -x_1\frac{\Delta d}{d} - x_2\frac{\Delta l}{l} - x_2\frac{\Delta r}{r}$$

die bei der Formänderung geleistete elektrische Arbeit ist also

$$-\tfrac{1}{2}\varphi.\Delta V = \tfrac{1}{4}V^2\left[-\frac{(k+x_1)rl}{d^2}\Delta d + \frac{(k-x_2)l}{d}\Delta r + \frac{(k-x_2)r}{d}\Delta l\right.$$

und ihre Variation bei weiteren, unendlich kleinen Formänderung

$$\tfrac{1}{4}V^2\left[-\frac{(k+x_1)rl}{d^2}\delta\Delta d + \frac{(k-x_2)l}{d}\delta\Delta r + \frac{(k-x_2)r}{d}\delta\Delta l\right].$$

Die negative elastische Arbeit bei der Formänderung wi nach einem bekannten Theorem geschrieben.

$$\tfrac{1}{2}\omega\left[(\lambda+2\mu)\frac{\Delta d^2}{d^2} + (\lambda+2\mu)\frac{\Delta r^2}{r^2} + (\lambda+2\mu)\frac{\Delta l^2}{l^2} + 2\lambda\frac{\Delta d.\Delta r}{dr} + \right.$$

$$\left. + 2\lambda\frac{\Delta l.\Delta r}{lr} + 2\lambda\frac{\Delta d.\Delta l}{dl}\right]$$

wo ω das Gesammtvolum der Röhrenwand bezeichnet, also $\omega = 2rdl\pi$.

Die Variation dieser Arbeit ist also

$$2rdl\pi\left[(\lambda+2\mu)\frac{\Delta d}{d^2}+\lambda\frac{\Delta r}{dr}+\lambda\frac{\Delta l}{dl}\right]\delta\Delta d+$$

$$+2rdl\pi\left[(\lambda+2\mu)\frac{\Delta r}{r^2}+\lambda\frac{\Delta d}{dr}+\lambda\frac{\Delta l}{lr}\right]\delta\Delta r+$$

$$+2rdl\pi\left[(\lambda+2\mu)\frac{\Delta l}{l^2}+\lambda\frac{\Delta d}{dl}+\lambda\frac{\Delta r}{lr}\right]\delta\Delta l.$$

Gleichgewicht tritt ein, wenn bei weiteren unendlich kleinen Formänderungen beide Variationen einander gleich sind. Es ergeben sich so die drei Gleichungen:

$$(\lambda+2\mu)\frac{\Delta d}{d}+\lambda\frac{\Delta r}{r}+\lambda\frac{\Delta l}{l}=-\frac{V^2}{8\pi}\cdot\frac{k+x_1}{d^2}$$

$$(\lambda+2\mu)\frac{\Delta r}{r}+\lambda\frac{\Delta d}{d}+\lambda\frac{\Delta l}{l}=\frac{V^2}{8\pi}\cdot\frac{k-x_2}{d^2}$$

$$(\lambda+2\mu)\frac{\Delta l}{l}+\lambda\frac{\Delta d}{d}+\lambda\frac{\Delta r}{r}=\frac{V^2}{8\pi}\cdot\frac{k-x_2}{d^2}$$

Aus den beiden letzten folgt aber unmittelbar:

$$\frac{\Delta r}{r}=\frac{\Delta l}{l}$$

und weil das ursprüngliche Volumen $D=\pi lr^2$, so ist

$$\frac{\Delta D}{D}=2\frac{\Delta r}{r}+\frac{\Delta l}{l}=3\frac{\Delta l}{l}$$

was die von Quincke auf experimentellem Wege gefundene Relation darstellt.

Aus der ersten Gleichung ergibt sich dann die schon benutzte Formel:

$$\frac{\Delta D}{D}=\frac{3k'V^2}{8\pi\varepsilon d^2}.$$

die also zugleich für dünnwändige Kugeln und lange Cylinder giltig ist, aber aus leicht begreiflichen Gründen doch nicht auf Condensatoren von willkürlicher Gestalt angewandt werden darf. Die Volumänderung anderer, weniger einfach gestalteten Condensatoren im Voraus zu berechnen, würde meistens ein schwieriges mathematisches Problem darstellen. Sie ist im Allgemeinen nicht mit d^{-2} proportional, weil neben einer Dilatation der elastischen Hülle, auch, und oft vorwiegend, eine Biegung derselben stattfindet, und sie kann unter Umständen auch nicht mit V^2 proportional sein. Dadurch erklären sich wenigstens theilweise die von Quincke gefundenen Abweichungen von diesen Gesetzen.

Breda, Dec. 1880.

II. SITZUNG VOM 13. JÄNNER 1881.

In Verhinderung des Vicepräsidenten übernimmt Herr Dr. L. Fitzinger den Vorsitz.

Die Direction des k. k. militär-geographischen Institutes übermittelt zwanzig Blätter-Fortsetzungen der Specialkarte der österr.-ungar. Monarchie (1 : 75000).

Das w. M. Herr Prof. Dr. Alexander Rollett übersendet eine von Herrn Dr. Gustav Pommer in Graz ausgeführte Arbeit: „Über die lacunäre Resorption in erkrankten Knochen."

Das c. M. Herr Prof. E. Weyr in Wien übersendet eine Abhandlung: „Über die involutorische Lage sich berührender Kegelschnitte."

Das c. M. Herr Regierungsrath Professor Dr. Adolf Weiss übersendet als siebenten Beitrag seiner „Mittheilungen aus dem pflanzenphysiologischen Institute der Prager Universität" eine Abhandlung unter dem Titel: „Über die physiologische Bedeutung der Transpiration der Pflanzen", von Herrn Friedrich Reinitzer, Stipendisten am chemisch-analytischen Laboratorium des deutschen Polytechnicums in Prag.

Das c. M. Herr Professor S. Stricker übersendet eine Mittheilung des Assistenten am pharmakologischen Institute der Wiener Universität Herrn Dr. Josef Lazarski: „Über den Einfluss der Blausäure auf Athmung und Kreislauf" aus dem Institute für experimentelle Pathologie in Wien.

Von den Herren Dr. J. M. Eder und Hauptmann J. Pizzighelli in Wien wird eine Abhandlung unter dem Titel: „Beiträge zur Photochemie des Chlorsilbers" eingesendet.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. „Über die Beziehungen der homogenen Deformationen fester Körper zur Reactionsfläche“, von Herrn Prof. Dr. J. Finger an der technischen Hochschule in Wien.
2. „Über ein neues Derivat der Gallussäure“, von den Herren Prof. Dr. J. Oser und Präparator W. Kalmann an der technischen Hochschule in Wien.

Herr Eugen Goldstein in Berlin stellt das Ansuchen, dass das von ihm unter dem 17. November 1880 behufs Wahrung seiner Priorität an die kaiserliche Akademie gesendete und in der Sitzung der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe am 2. December v. J. vorgelegte versiegelte Schreiben eröffnet und dessen Inhalt publicirt werde.

Diesem Ansuchen entsprechend wurde das bezeichnete Schreiben eröffnet. Dasselbe enthält eine Notiz: „Über den Einfluss der Kathodenform auf die Vertheilung des Phosphorescenzlichtes“, welche im akademischen Anzeiger publicirt wird.

Das w. M. Herr Professor v. Barth überreicht eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit des Herrn Dr. H. Weidel: „Über eine Tetrahydrocinchoninsäure.“

Der Secretär Herr Hofrath J. Stefan überreicht eine Abhandlung: „Bestimmung magnetischer und diamagnetischer Constanten von Flüssigkeiten und Gasen in absolutem Masse“, von Herrn J. Schuhmeister, Assistenten am k. k. physikalischen Institute in Wien.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Academia regia scientiarum suecia: Fragmenta silurica e dono Caroli Henrici Wegelin. Opus studio Nicolai Petri Angelin inchoatum edendum curavit G. Lindström. Holmiae, 1880; gr. 4°.

— Palaeontologia scandinavica auctore N. P. Angelin. P. I. Crustacea formationis transitionis. Fasciculi I & II. Holmiae, 1878; 4°.

Académie impériale de Sciences de St. Pétersbourg: Mémoires, VIIe série. Tome XXVII. Nrs. 5, 6, 7, 10. 11 & 12. St. Pétersbourg, Riga, Leipzig, 1879—80; 4°.

Accademia, R. dei Lincei: Atti. Anno CCLXXVIII 1880—81. serie terza. Transunti. Vol. V. Fascicolo 1°. Seduta del 5. Dicembre 1880. Roma, 1881; 4°.

— — Sopra alcuni eclissi di sole antiqui e su quello di Agatocle in particolare. Memoria del Prof. G. Celoria. Roma, 1880; 4°.

— R. delle scienze di Torino: Atti. Vol. XV. Disp. 1ª—8ª. Torino, 1879—80; 8°.

Akademie der Wissenschaften, königl.: Öfversigt af Förhandlingar. 37ᵉ Arg. Nos 5—7. Stockholm, 1880; 8°.

Basel, Universität: Akademische Schriften pro 1875—79; 66 Stück, 4° & 8°.

Becker, M. A.: Topographie von Niederösterreich. II. Band, 8. Heft. Der alphabetischen Reihenfolge (Schilderung) der Ortschaften. 5. Heft. Wien, 1880; 4°.

Bibliothèque universelle: Archives des sciences physiques et naturelles. 3ᵉ période. Tome IV. Nr. 12.—15. Décembre 1880. Genève, Lausanne, Paris, 1880; 8°.

Central-Station, königl. meteorologische: Beobachtungen der meteorologischen Stationen im Königreich Bayern. Jahrgang II. Heft 3. München. 1880; 4°. — Übersicht über die Witterungsverhältnisse im Königreiche Bayern während der Monate Mai bis November 1880. Fol.

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Tome XCI. Nrs. 26. Paris, 1880; 4°.

Gesellschaft, österreichische, für Meteorologie: Zeitschrift. XVI. Band. Jänner-Heft 1881, Wien; 4°.

— physikal.-medicin. in Würzburg: Verhandlungen N. F. XV. Band, 1. & 2. Heft. Würzburg, 1881; 8°.

Hartwig, Ernst Dr.: Beitrag zur Bestimmung der physischen Libration des Mondes aus Beobachtungen am Strassburger Heliometer. Karlsruhe, 1880; 4°.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. X. Band. Jahrgang 1878. Heft 3. Berlin, 1881; 8°.

Kaltenegger, Ferd. Prof.: Die geschichtliche Entwicklung der Rinderracen in den österreichischen Alpenländern. Prag, 1881; 8°.

Landbote, der steirische: Organ für Landwirthschaft und Landescultur. XIII. Jahrgang, Nr. 14—24. Graz, 1880; 4⁰. — XIV. Jahrgang, Nr. 1. Graz, 1881; 4⁰.

Militär-geographisches Institut, k. k.: Specialkarte der österr.-ungar. Monarchie. 17. Lieferung, 20 Blätter.

Nature. Vol. XXIII. Nr. 584. London, 1881; 4⁰.

Observatorium, Tifliser physikalisches: Magnetische Beobachtungen im Jahre 1879. Tiflis, 1880; 8⁰.

— Materialien zu einer Klimatologie des Kaukasus. Abth. I Meteor. Beobachtungen, Bd. II. Lieferung 4. Tiflis, 1879; 8⁰

Observatory, the: A monthly Review of Astronomy. Nr. 45 1881, January 1. London; 8⁰.

Osservatorio della regia università di Torino: Bollettino. Anno XIV (1879). Torino, 1880; quer 4⁰.

Radcliffe Observations, 1876. Vol. XXXVI. Oxford, 1880; 8⁰.

Reichsanstalt, k. k. geologische: Verhandlungen. Nr. 15 & 16 1880. Wien; 8⁰.

Repertorium für Experimental-Physik etc., von Dr. Ph. Carl. XVII. Band, 2. & 3. Heft. München und Leipzig, 1881; 8⁰.

Simony, Oscar Prof.: Gemeinfassliche, leicht controlirbare Lösung der Aufgabe: In ein ringförmig geschlossenes Band einen Knoten zu machen und verwandter merkwürdiger Probleme. Wien, 1881; 8⁰.

Société botanique de France: Bulletin. Tome XXVII. (2ᵉ série. — Tome II) 1880. Comptes rendus des séances. 5 Paris; 8⁰.

— mathématique de France: Bulletin. Tome VIII, Nr. 6. Paris, 1880; 8⁰.

Society, the royal: Proceedings. Vol. XXIX. Nrs. 197—199. Vol. XXX. Nrs. 200, 202—205. London, 1879—80; 8⁰.

— — Philosophical Transactions for the year 1879. Vol. 170. Parts 1 & 2. London, 1879; gr. 4⁰. — for the year 1880. Vol. 171. Part 1. London, 1880; gr. 4⁰.

— : The Council of the Royal Society. Dec. 1, 1879. 4⁰.

— the zoological of London: Proceedings of the scientifique meetings for the year 1880. Part III. May and June. London; 8⁰.

Ufficio centrale di Meteorologia italiana: Annali, Série II. Vol. I. — 1879. Roma, 1880; gr. 4⁰.

Wiener Medicinische Wochenschrift. XXXI. Jahrgang. Nr. 2. Wien, 1881; 4⁰.

Über eine Tetrahydrocinchoninsäure.

Von Dr. H. Weidel.

(Aus dem Universitäts-Laboratorium des Prof. v. Barth.)

(Mit 1 Holzschnitt.)

Vor einigen Jahren[1] habe ich die Einwirkung von nascirendem Wasserstoff auf die, durch die Oxydation des Cinchonins gebildeten Säuren zu studiren begonnen. Ich habe damals aus Cinchomeronsäure eine stickstofffreie Säure erhalten, welche, wie ich später in Gemeinschaft mit Schmidt[2] nachwies, ein nach der Formel $C_6H_6O_3$ zusammengesetztes Pyroproduct (Pyrocinchonsäure) liefert.

Das Weiterstudium dieser Reaction habe ich nun schon seit langer Zeit wieder aufgenommen, und ich will im Folgenden die Entstehung einer neuen Verbindung aus der Cinchoninsäure beschreiben, weil ich durch Condensation derselben zu einer Reihe von Substanzen gelangt bin, die manches Verwandte mit den Chinaalkaloiden zeigen und ich mir für einige Zeit dieses Gebiet vorbehalten möchte.

Eine Anzahl von Versuchen, welche nothwendig waren, um die zweckmässigsten Reductionsmittel und die vortheilhaftesten Verhältnisse zu ermitteln, haben schliesslich zu folgendem Verfahren geführt:

Erhitzt man in einem geräumigen Kolben 20 Grm. Cinchoninsäure, der man circa 10 Grm. Zinnchlorür beigemengt hat, mit 28 Grm. Zinn und beiläufig 100 Grm. concentrirter Salzsäure, so findet eine lebhafte Einwirkung[3] statt. Die anfänglich farblose

[1] Sitzb. d. kais. Akad. d. Wissensch. 1874, April-Heft.

[2] Sitzb. d. kais. Akad. d. Wissensch. 1879, Mai-Heft.

[3] Führt man die Reaction mit verdünnter HCl aus, so wird erst die Lösung intensiv violett (wie übermangansaures Kali) gefärbt, nach langem Kochen tritt dann Wiederentfärbung ein, aber die Ausbeute an der neuen Verbindung ist wesentlich schlechter, da ein grosser Theil in harzige Producte umgewandelt worden ist.

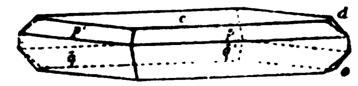
Lösung färbt sich hierbei orangegelb. Das Ende der Reaction welches schon nach einigen Minuten eintritt, gibt sich durch Wieder entfärbung kund.

Wird nun der Überschuss der Salzsäure auf dem Wasser bade verjagt, der Rückstand in Wasser gelöst und das Zinn mi Schwefelwasserstoff gefällt, so erhält man nach dem Eindampfen der fast farblosen Lösung bis zur Consistenz eines dünnen Syrup (hiebei tritt unmerkliche Braunfärbung ein) schon nach kurze Zeit eine reichliche Ausscheidung einer farblosen Krystallmasse welche in einer violettbraunen Mutterlauge eingebettet ist, di durch Absaugen entfernt wird. Nach mehrmaligem Umkrystalli siren der Rohausscheidung aus Wasser und Entfärben mit Thier kohle in der Kälte erhält man beim langsamen Verdunsten de Lösungsmittels grosse farblose, stark glänzende, gut ausgebildet Krystalle, welche sich bei längerem Liegen an der Luft schwacl röthlich färben.

Die krystallographische Bestimmung, welche Herr Dr Březina so freundlich war, auszuführen, ergab:

Krystallsystem: Monoklin.

Elemente (in roher Näherung) $a:b:c = 0{\cdot}9321 : 1 : 1{\cdot}9425$



$\beta = 90° \, 41'$

Formen $c(001)$ $d(012)$ $p(111)$ $q(\bar{1}11)$ Winkel:

	Flächen	Messung	Rechnung
c d	001 . 012	44° 9′	43° 12′
c p	001 . 111	70 13	70 16
c q	001 . $\bar{1}$11	71 6	71 13
p q	111 . $\bar{1}$11	87 18	87 11
p q′	111 . 11$\bar{1}$	38 41	38 20
p p′	111 1$\bar{1}$1	79 49	79 45
q q′	$\bar{1}$11 . $\bar{1}\bar{1}$1	80 20	80 20

Spaltbarkeit nicht bemerkbar.

Optische Orientirung: Optische Axe in der Symmetrieebene, auf c eine Axe nach rückwärts ((19·7°))Na in Glas, ρ nach vorne; positive stumpfe Bisectrix etwa ((60))Na in Glas nach vorne geneigt.

Diese Verbindung, welche die salzsaure Verbindung des Reductionsproductes darstellt, ist sowohl in kaltem als warmem Wasser leicht löslich, auch Alkohol vermag sie aufzunehmen.

Die wässerige Lösung wird durch Eisenchlorid anfänglich braungrün gefärbt, dann grün und entfärbt sich bei längerem Stehen vollständig.

Die Analyse der bei 100° im Wasserstoffstrom getrockneten Substanz ergab:

I. 0·3474 Grm. Substanz ergaben 0·7141 Grm. Kohlensäure 0·1743 Grm. Wasser.

II. 0·2411 Grm. Substanz gaben 0·1632 Grm. Chlorsilber

III. 0·2718 " " " 1·61 CC. Stickstoff bei 17·4° C. und 751·2 Mm.

In 100 Theilen:

	I	II	III
C	56·06	—	—
H	5·57	—	—
N	—	—	6.78
Cl	—	16·75	—

Aus diesen Zahlen berechnet sich die Formel $C_{10}H_{11}NO_2+HCl$

	Berechnet	Gefunden
C	56·20	56·06
H	5·62	5·57
N	6·55	6·78
Cl	16·62	16·75

Die lufttrockene Substanz enthält $1^1/_2$ Mol. Wasser. 1·5569 Grm. Substanz gaben 0·1818 Grm. Wasser.

In 100 Theilen:

	Gefunden	$_0H_{11}NO_2+HCl+1^1/_2H_2O$
H_2O	11·67	11·22

Die Substanz ist daher als die Salzsäure-Verbindung einer *Tetrahydrocinchoninsäure* anzusprechen, welche nach der Gleichung

$$\underbrace{C_{10}H_7NO_2}_{\text{Cinchonin-säure}}+2Sn+4HCl=\underbrace{C_{10}H_{11}NO_2}_{\text{Tetrahydrocin-choninsäure}}+2SnCl_2$$

aus der Cinchoninsäure hervorgeht.

Platindoppelverbindung. Wird zu der wässerigen Lösun der beschriebenen Verbindung, welche mit einigen Tropfe Salzsäure versetzt ist, Platinchlorid hinzugebracht, so scheid sich ein in kleinen Blättchen krystallisirendes Platindoppelsal welches zu Krusten verwachsen ist, aus, das eine dunkelgelb Farbe besitzt.

Die Platin-Bestimmung der bei 105° getrockneten Substar ergab:

0·6387 Grm. Substanz gab 0·1624 Grm. Platin.

In 100 Theilen:

		$2(C_{10}H_{11}NO_2+HCl)+PtCl_4$
Pt	25·42	25·75.

Die Tetrahydrocinchoninsäure selbst habe ich bisher noc nicht in reinem Zustande erhalten können, so dass sie zı Analyse tauglich gewesen wäre, da sich die von der Salzsäuı durch Silberoxyd befreiten Lösungen beim Abdampfen dunk färben.

Wird die salzsaure Tetrahydrocinchoninsäure mit eine Überschusse von Ätzkalk der trockenen Destillation unterworfe so erhält man ein öliges Product, welches nach der Analyse ei Tetrahydrochinolin zu sein scheint.

Das wichtigste und bemerkenswertheste Verhalten jedoc zeigt die salzsaure Tetrahydrocinchoninsäure gegenüber wasse entziehenden Substanzen, wodurch unter Kohlensäure- ur Wasser-Abspaltung basische Producte erzielt werden, welcl nach den Analysen C_{19} zu enthalten scheinen und mit den Chin alkaloiden manche Ähnlichkeiten zeigen. Das Studium dies Producte, welches in Bälde zu einem Abschlusse gebracht werde dürfte, behalte ich mir vor.

Bestimmung magnetischer und diamagnetischer Constanten von Flüssigkeiten und Gasen in absolutem Masse.

Von J. Schuhmeister,
Assistenten am k. k. physikalischen Institute.

Quantitative Bestimmungen über den Magnetismus schwach magnetischer oder diamagnetischer Körper liegen in ziemlich grosser Zahl vor von Plücker,[1] Becquerel,[2] G. Wiedemann[3] u. A; allein die meisten von denselben sind nur relative und grösstentheils, mit Ausnahme derer von Wiedemann, nach Methoden ausgeführt, welche keine verlässlichen Resultate lieferten. Erst in neuerer Zeit wurden mit Lösungen von Eisenchlorid Versuche angestellt von Silow[4] und Borgmann,[5] welche beide die Magnetisirungszahl dieser Salzlösung in absolutem Masse bestimmten, und im vorigen Jahre erschien eine Abhandlung von Rowland und Jaques,[6] in welcher die diamagnetischen Constanten von Wismuth und Kalkspath gegeben wurden. Es sind also einzig von diesen drei zuletzt genannten Körpern absolute Bestimmungen vorhanden.

Die Methode, welche Rowland in der citirten Abhandlung angegeben, und die von Jaques zu den Bestimmungen am Wismuth und Kalkspath benützt wurde, habe ich nun angewendet, um ebenfalls für eine Eisenchloridlösung die Magnetisirungsconstante zu bestimmen; ausserdem habe ich zur Controle dieselbe

[1] Plücker, Pogg. Ann. Bd. 75.
[2] Becquerel, Ann. de Chim. et de Phys. T. 28 [3].
[3] G. Wiedemann, Pogg. Ann. Bd. 76.
[4] Silow, Wied. Ann. Bd. I.
[5] Borgmann, Journal d. russ. phys. Gesellschaft, 1878.
[6] Rowland und Jaques, American Journal of Sciences and Arts, Vol. XVII.

Lösung nach einer zweiten Methode untersucht, welche v(
Wiedemann (l. c.) zu seinen Untersuchungen angewendet wurd

Die erste Methode besteht nun im Wesentlichen darin, da
in einem bezüglich seiner Intensität ausgemessenen, nicht hom
genen magnetischen Felde ein magnetischer oder diamagnetisch
Körper in Schwingungen versetzt und die Dauer derselbe
beobachtet wird. Aus dieser und den Constanten für das Potenti
des magnetischen Feldes lässt sich dann die Magnetisirungsza
berechnen.

Die zweite Methode ist die von Wiedemann angewende
statische: es wird die Anziehung oder Abstossung des magn
tischen oder diamagnetischen Körpers, der an einer Art Coulomb
schen Wage vor dem Pole eines starken Elektromagnetes au
gehängt ist, im Gleichgewicht gehalten durch die Torsion d
Aufhängedrahtes, dessen Torsionscoëfficient gemessen ist; wied
lässt sich dann aus dieser letzteren und den Constanten d
magnetischen Feldes das k berechnen.

Was die Ausmessung des magnetischen Feldes betrifft, s
wurde dieselbe in der bekannten, auch von Rowland benützte
Methode vorgenommen. In dem magnetischen Felde zwischen de
Polen oder vor dem Pole eines Elektromagnetes wird eine Rol
verschoben. Dadurch wird in der Rolle ein Strom inducirt, desse
Integralwerth gemessen werden kann. Die demselben en
sprechende elektromotorische Kraft ist gleich der Differenz d
elektromagnetischen Potentiale der Rolle in ihrer Anfangs- un
Endstellung. Diese Potentiale sind von der Beschaffenheit d
Rolle abhängig und können berechnet werden, wenn das Potenti
des magnetischen Feldes innerhalb des Raumes, durch welche
die Rolle verschoben wurde, gegeben ist. Umgekehrt kann auc
die gemessene elektromotorische Kraft zur Bestimmung de
Potentials des magnetischen Feldes benützt werden.

Die zu dieser Bestimmung verwendbaren Formeln sind auc
in Rowland's Abhandlung enthalten, ich habe jedoch ander
von Herrn Hofrath Stefan entwickelte benützt, welche ein
grössere Genauigkeit und Übersichtlichkeit gewähren.

Bezüglich des magnetischen Potentials des Feldes wir
vorausgesetzt, dass dasselbe bezüglich einer Axe symmetrisch se
Wird diese zur Abscissenaxe genommen, so lässt sich auf einer

begrenzten Stücke derselben, innerhalb dessen der Anfangspunkt der Coordinaten gewählt werden mag, das Potential durch

$$U = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^4 + \ldots\ldots$$

darstellen. Das Potential V in einem Punkte ausserhalb der Axe ist dann, wenn ρ die Distanz des Punktes von der Axe bedeutet, gegeben durch

$$V = U - \frac{\rho^2}{2^2}\frac{d^2U}{dx^2} + \frac{\rho^4}{2^2.4^2}\frac{d^4U}{dx^4} - \frac{\rho^6}{2^2.4^2.6^2}\frac{d^6U}{dx^6} + \ldots\ldots$$

oder wenn man die Reihe nach den Coëfficienten A_0, A_1, A_2 .... ordnet, durch

$$V = A_0 + A_1 x + A_2\left(x^2 - \frac{2.1}{2^2}\rho^2\right) + A_3\left(x^3 - \frac{3.2}{2^2}x\rho^2\right) + \ldots\ldots$$

Die Inductionsrolle wird so aufgestellt, dass ihre Axe mit jener des magnetischen Feldes zusammenfällt. Die Länge der Rolle sei λ, δ die Breite des Ringes, welcher von den Drahtwindungen ausgefüllt wird. In einer einzelnen Windungslage sollen n Windungen auf die Längeneinheit, in der Richtung des Radius der Rolle sollen n' Lagen auf die Längeneinheit entfallen, x sei die Abscisse des Mittelpunktes der Rolle.

Das elektromagnetische Potential der Rolle ist in folgender Weise zu berechnen. Der Ausdruck V ist mit $2n\pi\rho d\rho$ zu multipliciren und von o bis ρ zu integriren. Das Resultat muss wieder mit $n' d\rho$ multiplicirt und von $\rho - \frac{\delta}{2}$ bis $\rho + \frac{\delta}{2}$ integrirt werden, und zwar bedeutet das in diesen Integrationsgrenzen enthaltene ρ den mittleren Radius der Drahtwindungen. Endlich ist in dem so gewonnenen Resultate für x zuerst $x + \frac{\lambda}{2}$, dann $x - \frac{\lambda}{2}$ zu setzen und die Differenz der beiden Werthe zu nehmen. Man erhält, wenn man nach den Coëfficienten A ordnet,

$$P = N\pi\left\{A_1 Dx . \frac{D\rho^3}{1.3} + A_2 Dx^2 . \frac{D\rho^3}{1.3} + A_3\left(Dx^3 \frac{D\rho^3}{1.3} - \frac{3.2}{2^2} Dx \frac{D\rho^5}{2.5}\right)\right.$$
$$+ A_4\left(Dx^4 . \frac{D\rho^3}{1.3} - \frac{4.3}{2^2} Dx^2 . \frac{D\rho^5}{2.5}\right) + A_5\left(Dx^5 . \frac{D\rho^3}{1.3} - \frac{5.4}{2^2} Dx \frac{Dx^5}{2.5}\right.$$
$$\left.\left. + \frac{5.4.3.2}{2^2.4^2} Dx \frac{D\rho^7}{3.7}\right) + \ldots\ldots\right\}.$$

Darin bezeichnet $N = nn'\lambda\delta$ die Gesammtzahl aller Wi dungen.

$$Dx^n = \frac{\left(x + \frac{\lambda}{2}\right)^n - \left(x - \frac{\lambda}{2}\right)^n}{\lambda}$$

$$D\rho^n = \frac{\left(\rho + \frac{\delta}{2}\right)^n - \left(\rho - \frac{\delta}{2}\right)^n}{\delta}.$$

Wird nun die Rolle im Felde verschoben vom Potential I zum Potential P, so ist die inducirte elektromotorische Kraft

$$P_1 - P = N\pi \left\{ A_2 (Dx_1^2 - Dx^2) \frac{D\rho^3}{3} + A^3(\ldots.) \right\},$$

in welcher Gleichung alle Coëfficienten A, ausgenommen A vorkommen. Werden nun mehrere Verschiebungen mit der Rol vorgenommen, so erhält man eben so viele Gleichungen zu Bestimmung der A. Um dieselben in absolutem Masse zu erhalte ist nur die elektromotorische Kraft in absolutem Masse ausz drücken. Zu diesem Behufe wird ein Erdinductor in den Stron kreis der Inductionsrolle eingeschaltet mit einem empfindliche Galvanometer. Bei der Drehung desselben um 180° erhält ma einen Strom, dessen Intensität, wenn H die Horizontalcon ponente und F die Fläche des Inductors, gegeben ist dur folgenden Ausdruck, worin W den Gesammtwiderstand d Stromkreises bezeichnet:

$$\frac{2HF}{W} = C\alpha,$$

worin C eine Constante, α den Galvanometerausschlag bezeichne ist dieser letztere beim Verschieben der Inductionsrolle $= \alpha'$, d Widerstand W', so gilt für den Inductionsstrom beim Verschiebe der Rolle die Gleichung

$$\frac{P_1 - P}{W'} = C\alpha';$$

daraus erhält man für:

$$P_1 - P = 2HF. \frac{W'}{W}.\frac{\alpha'}{\alpha},$$

welcher Betrag in die obigen Bestimmungsgleichungen für die Constanten einzustellen ist.

Dadurch erhält man aber nur Gleichungen für A_2, A_3 u. s. f. Die Constante A_1 lässt sich dadurch nicht bestimmen. Um dieselbe zu erhalten, wird die Inductionsrolle plötzlich von irgend einer Stelle des Feldes weggezogen in unendliche Distanz vom Pol. In dieser letzteren ist das Potential des Magnetes auf die Rolle $= 0$; man hat mithin die Gleichung

$$P - P_\infty = 2HF\frac{W''}{W}\cdot\frac{\alpha''}{\alpha} = N\pi\left\{A_1\frac{D\rho^3}{1.3} + A_2 \ldots\ldots\ldots\right\},$$

welche den Coëfficienten A_1 liefert.

Zur Berechnung der Magnetisirungsconstante nach der Schwingungsmethode führt die Gleichung für die Schwingungsdauer

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{K}{D}},$$

worin K das Trägheitsmoment, D das Drehungsmoment des schwingenden Körpers ist. Zunächst ist also das Drehungsmoment zu berechnen, welches ein magnetischer Körper zwischen den Polen eines Elektromagnetes erfährt.

Es sei der Körper an einem Faden aufgehängt, die Z-Axe vertical und Drehungsaxe, die Pole symmetrisch zur ZY-Ebene und die X-Axe falle mit der Magnetaxe zusammen.

Das Drehungsmoment ist dann, wenn die auf die magnetische Masse 1 wirkenden nach den Axen geschätzten Componenten mit XYZ bezeichnet werden, für ein Volumelement dv an der Stelle xyz

$$(Xy - Yx)\mu dv,$$

wenn μ das Moment der Volumseinheit bezeichnet, und $\mu = kP$; k Magnetisirungszahl, P magnetisirende Kraft. Das Volumelement dv kann man sich denken als kleinen Magnet mit den Massen $\pm m$ an zwei Seiten belegt; im Punkte $xyz(+m)$ wirken die Componenten mX, mY; im Punkte $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$ $(-m)$ die Componenten

$$-mX' = -m\left(X + \frac{dX}{dx}dx + \frac{dX}{dy}dy + \frac{dX}{dz}dz\right),$$

$$-mY' = -m\left(Y + \frac{dY}{dx}dx + \ldots\ldots\right),$$

wenn man in der Entwicklung nach dem Taylor'schen Satze bei den Gliedern erster Ordnung stehen bleibt. Demnach ist das Drehungsmoment für das Volumelement

$$D_1 = mXy - mYx - m\left(X + \frac{dX}{dx}.dx + \ldots\right)(y+dy) +$$

$$+ m\left(Y + \frac{dY}{dx}dx + \ldots\right)(x+dx),$$

mdx, mdy, mdz sind die nach den Axen geschätzten magnetischen Momente des Volumelementes. Ist das Moment der Volumseinheit μ, die Componenten μ_x, μ_y, μ_z, so hat man

$$mdx = \mu_x dr = kXdr$$

u. s. w. und

$$D_1 = -k\left[y\left(X\frac{dX}{dx} + Y.\frac{dX}{dy} + Z.\frac{dX}{dz}\right) - \right.$$

$$\left. - x\left(X\frac{dY}{dx} + Y.\frac{dY}{dy} + Z.\frac{dY}{dz}\right)\right]dr;$$

ferner ist, wenn V das Potential bezeichnet

$$X = \frac{dV}{dx}, Y = \frac{dV}{dy}, Z = \frac{dV}{dz}$$

und man erhält dann durch einfache Transformationen für das Drehungsmoment des ganzen Körpers

$$D = -\frac{k}{2}\iiint\left\{y\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{d\rho}\right)^2\right] - x\frac{d}{dy}\left[\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{d\rho}\right)^2\right]\right\}dxdydz,$$

wobei die Integrationsgrenzen nach dem Körper zu nehmen sind.

Für unseren Fall, wo derselbe zwischen den Polen eines Rumkorff'schen Elektromagneten hing, enthält die Formel für das Potential wegen der symmetrischen Unordnung nur die Coëfficienten mit ungeradem Index $A_1 A_3 \ldots$

Bildet man nun die unter den $\int$-Zeichen stehenden Differentialquotienten und substituirt, so erhält man:

$$D = -\frac{k}{2}\iiint\Big\{18A_1A_3xy + 10A_1A_5\Big(10x^3y - \frac{15}{2}xy\rho^2\Big) +$$

$$+ 9A_3^2(4x^3y - xy\rho^2)\Big\}\,dxdydz\,,$$

wenn man nur die Coëfficienten bis A_5 berücksichtigt.

Die Integration ist zu erstrecken über den magnetischen Körper, bei meinen Versuchen über einen Cylinder, welcher symmetrisch zwischen den Polen aufgehängt ist. Ist l seine Länge r sein Radius und bildet seine Axe einen sehr kleinen Winkel θ mit der X-Axe, so ist es für die Berechnung des Drehungsmomentes bequemer, das Coordinatensystem so zu transformiren, dass die neue X-Axe mit der Cylinderaxe zusammenfällt; es vereinfachen sich dann die gewöhnlichen Transformationsformeln wegen des vorausgesetzten kleinen Winkels θ zu folgenden

$$x = x' - y'\theta$$
$$y = y' + x'\theta$$

und es ist dann nach x' zu integriren von $-\frac{l}{2}$ bis $+\frac{l}{2}$; für die Integration nach y und z führt man Polarcoordinaten ein und erhält dann nach diesen Substitutionen und Ausführung aller Integration für das Drehungsmoment des ganzen Cylinders

$$D = -k\frac{\pi r^2 l}{4}\theta\Big\{3A_1A_3(l^2 - 3r^2) + \frac{5}{2}A_1A_5(l^4 - 10l^2r^2 + 10r^4) +$$

$$+ \frac{9}{10}A_3^2\Big(l^4 - \frac{20}{3}l^2r^2 + \frac{10}{3}r^4\Big)\Big\}\,.$$

Dazu ist aber noch das Torsionsmoment des Fadens hinzuzufügen, welches bei diesen schwachen Kräften nicht vernachlässigt werden darf, auch wenn man als Aufhängefaden einen einfachen Coconfaden wählt, insbesondere bei geringerer Stromstärke.

Bezeichnet man den ganzen bei θ stehenden Ausdruck mit a^2 und den Torsionscoëfficienten des Fadens mit T, so ist die

Differentialgleichung für die Schwingungen

$$K.\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -(a^2+T).\vartheta,$$

worin K das Trägheitsmoment des Körpers ist. Nennt man τ di Schwingungsdauer, so erhält man für die Magnetisirungszahl folgende Formel

$$k = \frac{\frac{4\pi^2 K}{\tau} - T}{a^2}.$$

Bei der zweiten (Wiedemann's) Methode wurde ein Kugel mit der zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllt, an der längeren Ende eines aus Holz gefertigten leichten Hebels mittels Neusilber- oder Silberdrahtes vor dem Pole eines geradlinige Elektromagnetes aufgehängt. Wird derselbe erregt, so wird di Kugel angezogen oder abgestossen und man muss den Draht un einen gewissen Winkel tordiren, bis das Torsionsmoment desselbe Gleichgewicht hält dem Drehungsmoment der Kugel. Um diese letztere zu bestimmen, hat man wieder vom Potential

$$V = A_0 + A_1 x + A_2\left(x^2 - \frac{1}{2}\rho^2\right) +$$

auszugehen, worin aber jetzt auch die Coëfficienten mit geraden Index vorkommen. Der Anhangspunkt des Coordinatensystems falle mit dem Kugelmittelpunkte zusammen, die X-Richtung mit der Cylinderaxe des Elektromagnetes. Es kommen hier nur die X-Componenten der Kräfte in Betracht. Die durch den Mittelpunkt der Kugel gehende verticale Z-Axe sei vom Aufhängedraht um die Strecke l entfernt; dann ist das Drehungsmoment für irgend ein Volumelement der Kugel $= (l+y) \cdot \frac{dV}{dx}\mu_x dxdydz$ und das auf die gesammte Kugel

$$D = -k\iiint \frac{d}{dx}\left\{\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{d\rho}\right)^2\right\}(l+y)dxdydz,$$

wobei das Integral über die Kugel zu nehmen ist. Führt man Polarcoordinaten ein, so erhält man nach Ausführung der

Integration für das Drehungsmoment den Ausdruck

$$D = 2kvl\left(A_1 A_2 + \frac{9}{5} r^2 A_2 A_3\right)$$

und diesem hält Gleichgewicht das Torsionsmoment des Aufhängedrahtes $= T\varphi$, wenn T Torsionscoëfficient und φ der Drehungswinkel.

Man erhält daher für die Magnetisirungszahl k den folgenden Ausdruck

$$k = \frac{T\varphi}{2vl} \cdot \frac{1}{A_1 A_2 + \frac{9}{5} r^2 A_2 A_3}, \qquad \text{II)}$$

worin v das Volumen, r den Radius der Kugel bezeichnet.

Die Versuche nach dieser Methode mit stärker magnetischen Flüssigkeiten sind ziemlich schwierig auszuführen; dagegen eignet sich dieselbe sehr gut für diamagnetische Körper, welche ich auch einzig nach derselben untersucht habe.

Ich gebe nun im Folgenden die Daten, welche die einzelnen Versuche geliefert haben, und zwar zunächst die auf die Ausmessung des magnetischen Feldes bezüglichen.

Zu den Versuchen, welche nach der Schwingungsmethode ausgeführt wurden, diente ein grosser Rumkorff'scher Elektromagnet, wie er zur Untersuchung der Drehung der Polarisationsebene angewendet wird. Die beiden Eisenkerne waren mit kegelstutzförmigen Ankern versehen, deren Endflächen in einer Entfernung von 108·2 Mm. festgestellt wurden. Zwischen denselben festgeklemmt, war ein Massstab, auf welchem als Schiene die Inductionsrolle leicht verschiebbar aufgesetzt war. Auf diese Schiene konnten ferner vier Holzklötzchen aufgelegt werden, deren eines genau die halbe Länge derselben besass und die Bewegung der Rolle nach der einen Richtung begrenzte; die übrigen drei wurden der Reihe nach an die zweite Polfläche fest angedrückt und bildeten die zweite Grenze für die Verschiebung.

In den Stromkreis der Inductionsrolle war ein Erdinductor und ein Siemen'scher Widerstandskasten nebst einem äusserst empfindlichen Thomson'schen Spiegelgalvanometer eingeschaltet, wodurch die beim Verschieben der Rolle entstehenden

Inductionsströme gemessen und auf absolutes Mass reduci werden konnten.

Da es nicht möglich war, alle Ströme mit demselb Galvanometer ohne Widerstandseinschaltung zu messen, so wur der Widerstand des Inductionskreises für sich gemessen, und d Galvanometerausschläge bei **einem** primären Strom alle a gleichen Widerstand reducirt.

Die Erregung des Elektromagneten geschah durch ein primären Strom von 1—6 **Grove**'schen oder **Bunsen**'sch Elementen. Um bei den eigentlichen Versuchen wieder gen dieselbe Stärke des erregenden Stromes herzustellen, wie bei d Feldmessung, war eine Tangentenboussole in den primären Stro kreis eingeschaltet.

Die Dimensionen der zur Feldmessung verwendeten Appara waren folgende:

Länge der Inductionsrolle... $\lambda =$ 10 Mm.
Innerer Radius .... $r =$ 5 „
Äusserer Radius .... $R =$ 13·3 „
Windungszahl .... $=$ 410 „
Fläche des Erdinductors ..... $=$ $3{\cdot}66 . 10^6$ □Mm.

Die Horizontalcomponente des Erdmagnetismus wurde = in **Gauss**'schen Einheiten angenommen.

Die Länge des Schlittens, welchem die Rolle aufgeset war = 28·8 Mm., so dass also die Mitte der Rolle, wenn dieselt ganz an die Polfläche herangeschoben war, in einer Entfernun = 14·4 Mm. von der Fläche sich befand. Die Länge der a gewendeten Klötzchen war

$$A = 10{\cdot}25 \text{ Mm.} \quad B = 19{\cdot}8 \text{ Mm.} \quad C = 25 \text{ Mm.}.$$

In der folgenden Tabelle, welche die Daten zur Ausmessun des Feldes bei den Versuchen nach der Schwingungsmethod gibt, bezeichnet $abcd$ die Entfernung der Mitte der Rolle vo der Polfläche; in den entsprechenden Colonnen stehen di Galvanometerausschläge bei den Verschiebungen der Rolle, bei Wegziehen derselben aus der Mitte und beim Drehen de Erdinductors.

Tabelle I.

Nr.	*a*	*b*	*c*	*d*	Wegziehen aus der Mitte	Drehen des Erdinductors
I	155·	75·	31·33	16·96	216·	68·8
II	158·5	74·25	31·81	16·56	217·81	49·1
III	158·5	75·07	31·56	16·68	225·7	28·17
IV	172·95	81·7	33·08	17·48	239·9	17·16
V	210·14	100·0	42·4	22·1	289	19·37
VI	218·35	103·2	43·76	23·12	313·1	15·72

Diese Daten geben für die Constante A_1 A_3 A_5 die folgenden Werthe:

Tabelle II.

Nr.	A_1	A_3	A_5
I	379·7	0·0458	0·0000056
II	687·8	0·0782	0·0000104
III	1014	0·1122	0·0000146
IV	1492	0·1626	0·0000255
V	1846	0·2162	0·0000294
VI	2522	0·2792	0·0000351

Der mit Eisenchloridlösung vom specifischen Gewichte $s = 1·395$ gefüllte Cylinder, dessen Dimensionen $l = 31·44$ Mm. $r = 7·235$ Mm. waren, wurde in ein leichtes Gestell aus Kupferdraht eingelegt und das Trägheitsmoment desselben auf experimentellem Wege bestimmt. Beim eigentlichen Versuche wurde er möglichst genau centrirt, an einem einzelnen Coconfaden (oder bifilar an zweien) aufgehängt, und dann die Schwingungsdauer vor und während der Erregung des Elektromagnetes bestimmt. Die erstere gestattet, den Torsionscoëfficienten des Fadens zu ermitteln, die zweite gibt nach Formel I) die Magnetisirungsconstante der verwendeten Lösung.

Das Trägheitsmoment des Cylinders sammt Gestell wurde gefunden zu $1·763 . 10^{6 \text{ mgr mm}^2}$. Die erste Versuchsreihe lieferte

folgende Daten, in der die Zahlenwerthe für k mit 10^6 mul[illegible] plicirt sind.

Nr.	III.	IV.	V.	VI.
τ	67·5	49·06	35·89	26·97
$10^6 k$	34·03	32·02	38·17	39·47

Schwingungsdauer vor der Erregung = 229·05 Secunde
Also im Mittel $10^6 k$ = 36·17.

Eine zweite Versuchsreihe, bei welcher die Aufhängun bifilar geschah zur exacteren Bestimmung des Torsionscoëfficiente des Fadens, lieferte folgende Werthe:

Nr.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
τ	60·28	53·91	46·24	39·91	32·50	25·47
$10^6 k$	30·04	35·00	33·84	32·97	35·18	36·65

Schwingungsdauer von der Erregung = 63·38 Secunde
$10^6 k$ im Mittel = 33·94.

Die Temperatur, bei der die Beobachtungen gemacht wurde war ungefähr 20°C.

Die Ausmessung des magnetischen Feldes für die Versuch nach der zweiten Methode war ganz dieselbe. Der verwendet Elektromagnet war ein geradliniger, cylindrischer; die Ve schiebung der Inductionsrolle geschah auf demselben Massstab vom Pole bis zur Mitte, das Wegziehen der Rolle unmittelbar vo Pole weg. Die folgende Tabelle III enthält das dabei gewonnen Beobachtungsmateriale.

Tabelle III.

Nr.	a	b	c	d	Wegziehen der Rolle vom Pole	Drehen des Erdinductors
I	35·38	23·93	14·04	9·61	55·62	176·6
II	75·11	50·49	29·36	20·10	118·42	176·6
III	139·73	95·23	56·39	39·07	225·10	176·6

Die Fläche des zu diesen Versuchen verwendeten Erd- inductors war = 74·968 . 10^6 □ Mm.; die Galvanometerausschläge

wurden alle auf gleichen Widerstand = 148·89 S. E. reducirt, welchen der Stromkreis beim Drehen des Inductors besass.

Die Constanten A hängen natürlich von der Wahl des Coordinatenanfangspunktes ab. Die Kugel musste bei verschiedenen Flüssigkeiten und bei den Gasen in verschiedene Distanzen von der Polfläche gebracht werden, um alle Beobachtungen mit demselben Drahte ausführen zu können.

Tabelle IV.

1. Distanz des Kugelmittelpunktes von der Polfläche = 39·7 Mm.

Nr.	A_1	A_2	A_3	
I ...	271·1	4·002	0·0474	für Eisenchlorid.
II ...	626·7	7·66	0·1049	

2. Distanz des Kegelmittelpunktes von der Polfläche = 25·9 Mm.

Nr.	A_1	A_2	A_3	
I ...	615·2	7·774	0·0474	für die diamagnetischen Flüssigkeiten.
II ...	1308·0	16·581	0·1049	
III ...	2526·8	30·210	0·1704	

3. Distanz des Kugelmittelpunktes von der Polfläche = 22·55 Mm.

Nr.	A_1	A_2	A_3	
I ...	668·3	8·215	0·0474	für Sauerstoff.
II ...	1418·4	17·436	0·1049	
III ...	2721·8	31·798	0·1704	

Die Distanz des Kugelmittelpunktes vom Aufhängedrahte war = 100 Mm. Die Kugel selbst befand sich unterhalb des Hebelarmes ungefähr 50 Mm., so dass also der Hebelarm ausserhalb des Elektromagneten stand und war auf der andern Seite durch ein verschiebbares Laufgewicht äquilibrirt. Die Ablesung der jeweiligen Torsionen geschah mit Scala und Spiegel.

Die Distanz der Kugel vom Pole wurde so bestimmt, dass durch Verdrehen des Drahtes die Kugel mit der Polfläche in Berührung gebracht und der Scalentheil beobachtet wurde, auf den das Fadenkreuz einspielte; aus der bekannten Entfernung der Scala vom Spiegel liess sich dann der Scalentheil berechnen,

auf welchen der Faden einspielen musste, wenn der Kugelmittelpunkt sich in einer bestimmten Distanz vom Pol befinden sollte.

Zu den Versuchen mit Eisenchlorid diente als Messdraht ein Neusilberdraht von ungefähr 1 M. Länge und 0·3 Mm. Durchmesser; zu denen mit den übrigen Flüssigkeiten und den Gasen ein Silberdraht von derselben Länge und 0·2 Mm. Durchmesser. Die Torsionscoëfficienten der beiden waren:

Neusilberdraht......$T = 2 \cdot 1967 . 10^{6\,\mathrm{mgr\,mm}^2}$
Silberdraht ....$T = 0 \cdot 3322 . 10^{6\,\mathrm{mgr\,mm}^2}$

im Mittel aus mehreren Bestimmungen vor und nach den Versuchen.

Die Anziehung, welche die Kugel für sich unter Einfluss des Stromes erfährt, ist bei den magnetischen Körpern von dem Ausschlag der gefüllten Kugel abzuziehen, bei diamagnetischen hinzuzufügen. Die zu den Flüssigkeiten verwendete Kugel zeigte sich sehr schwach magnetisch, so dass deren Anziehung bei der Eisenchloridlösung kaum ein Procent der Gesammtabziehung betrug.

Dieselbe ist bei der entsprechenden Tabelle gleich abgezogen worden. Dagegen waren die zu den Gasen verwendeten Kugeln leider beide ziemlich stark magnetisch, sei es, dass das Glas für sich stärker magnetisch war, oder dass die Messingschraube, welche die beiden Theile des Hebelarmes zusammenhielt, etwas eisenhältig war, während bei der früheren Kugel keinerlei Metall angewendet wurde.

Die Versuche ergaben für die Torsionen, welche erforderlich waren, um der Anziehung der Kugel Gleichgewicht zu halten, folgende Werthe, wobei zu beachten ist, dass die unter a gegebenen Zahlen die Differenz der Scalenablesung bei geschlossenem und nicht geschlossenem primären Strom geben, d. h. also die Tangente des doppelten Torsionswinkels. Die Scala war bei allen Versuchen in einer Distanz von 1000 Mm. vom Spiegel aufgestellt; sie war in Millimeter eingetheilt. Die Temperatur war ungefähr 28° C.

Nr.	a	$10^6 k$	a	$10^6 k$
I......	86·7	31·89	82·9	30·48
II......	353·5	29·43	363·4	30·27.

Also $10^6 k = 30 \cdot 67$ im Mittel für eine Eisenchloridlösung vom specifischen Gewichte $s = 1 \cdot 388$.

Für die diamagnetischen Flüssigkeiten erhielt ich folgende Versuchsresultate mit dem Silberdraht als Messdraht. Unter a' füge ich die Anziehung bei, welche die Kugel für sich erfährt, die also zu der mit der Flüssigkeit beobachteten hinzuzufügen ist, um die derselben entsprechende Abstossung zu erhalten.

Tabelle V.

1. Wasser.

Nr.	a	a'	10^6k
I	38·2	4·1	—0·553
II	136·9	20·4	0·453
III	499·7	66·4	0·436

2. Alkohol.

Nr.	a	a'	10^6k
I	30·4	4·1	—0·451
II	124·1	20·4	0·416
III	411·3	66·4	0·376

3. Schwefelkohlenstoff.

Nr.	a	a'	10^6k
I	31·2	4·1	—0·462
II	115·5	20·4	0·392
III	404·9	66·4	0·368

4. Äther.

Nr.	a	a'	10^6k
I	26·3	4·1	—0·397
II	80·2	20·4	0·290

Der Radius der verwendeten Kugel war: $r = 14·55$ Mm.; die Berechnung von 10^6k geschah mittelst der Constanten A der Tabelle IV.

Tabelle VI.

Berechnung von 10^6k nach Tabelle IV; Radius der Kugel = 20·19 Mm.

1. Sauerstoff. Aus chlorsaurem Kali erzeugt.

Nr.	a	a'	10^6k
I	43·2	30·0	0·046
II	195·2	129·5	0·059
III	1048	498·5	0·1222

2. Neue Füllung; wie bei 1. erzeugt.

Nr.	a	a'	$10^6 k$
I	45·5	30·0	0·056
II	196·1	129·5	0·0667
III	1094	498·5	0·1285

3. Sauerstoff. Neue Füllung; der zur Füllung verwendete *O* war durch Elektrolyse gewonnen und unmittelbar durch die Kugel durchgeleitet; er war stark ozonhältig.

Nr.	a	a'	$10^6 k$
I	60·5	32·4	0·117
II	330·9	134·5	0·181

4. Sauerstoff. Neue Füllung, Erzeugung wie bei 3.

Nr.	a	a'	$10^6 k$
I	57·2	32·4	0·103
II	325·9	134·5	0·177

Als zweites magnetisches Gas wurde noch Stickoxyd untersucht mit einer neuen Kugel von 18·3 Mm. Radius, weil ich glaubte, dass dieselbe vielleicht weniger magnetisch sich erweisen würde, als die vorige.

Tabelle VII.

Stickoxyd.

Berechnung nach Tabelle IV. Radius der Kugel = 18·3 Mm.

1. Füllung.

Nr.	a	a'	$10^6 k$
I	20·5	15·6	0·0278
II	86·3	52·3	0·0377
III	357·5	220·5	0·0496

2. Füllung.

Nr.	a	a'	$10^6 k$
I	19·7	15·6	0·0232
II	82·5	52·3	0·0380
III	341·2	220·5	0·0437

Die Versuche mit den Eisenchloridlösungen nach der zweiten Methode geben für *k* einen etwas kleineren Werth als die nach

der Schwingungsmethode. Möglich, dass die bedeutend höhere Temperatur das bewirkt, da nach den Untersuchungen Wiedemann's das Moment nach der Formel $m_t = m_0 \ (1-0{\cdot}00325\, t)$ mit der Temperatur abnimmt.

Indess würde diese Temperaturzunahme nur eine Verringerung des k um ungefähr 3 Procent entsprechen, so dass also der Mittelwerth von k nach der zweiten Methode sich ergeben würde zu $10^6 k = 31{\cdot}6$ gegen $35{\cdot}05$ nach der Schwingungsmethode.

Die diamagnetischen Flüssigkeiten zeigen sämmtlich eine Abnahme der Magnetisirungsconstante mit steigender magnetisirender Kraft. Es scheint also, dass auch hier, ähnlich wie beim Eisen, der Werth von k abhängig ist von der Kraft und dass ich mit den angewendeten grossen Kräften, schon über den Maximalwerth hinausgekommen sei, dass derselbe bei den Flüssigkeiten ziemlich tief liege.

Da ich bei der gewählten Versuchsmethode nicht viel unter die angewendeten Kräfte herabgehen konnte, so bleibt also die Entscheidung über die Lage eines eventuellen Maximums von k weiteren Versuchen vorbehalten. Dass ein solches existire, ist wohl schon von mehreren Physikern [1] vermuthet worden.

Dem entgegen zeigen die untersuchten Gase gerade das entgegengesetzte Verhalten. Bei ihnen steigt der Werth von k mit wachsender Kraft in erheblichem Masse (ungefähr auf das Doppelte). Es zeigt sich also auch bei ihnen k nicht als constante, sondern von der magnetisirenden Kraft abhängige Grösse. Wollte man bei ihnen ein Maximum von k voraussetzen, so würde dieses jedenfalls erst bei sehr grossen Kräften eintreten können. Denn die magnetisirende Kraft bei meinen Versuchen, berechnet für den Kugelmittelpunkt, ist gegeben durch den Coëfficienten A_1, und selbst für den stärksten der angewendeten primären Ströme ist noch immer ein Wachsen des k bemerkbar, so dass also in der Nähe dieser Kraft (ungefähr 2700) das Maximum noch nicht liegen kann.

Ein sehr merkwürdiger Unterschied besteht, wie aus den Tabellen zu ersehen ist, zwischen dem auf gewöhnliche Weise aus Kaliumchlorat erzeugten Sauerstoff und dem durch Elektrolyse

---

[1] Plücker.

gewonnenen ozonhältigen. Für den letzteren ergaben die Versuche bei gleichen Kräften eine bedeutend grössere Magnetisirungszahl. Erwägt man, dass im günstigsten Falle nur wenige Procente Ozon darin enthalten sein konnten, so müsste man daraus den Schluss ziehen, dass die Constante *k* für Ozon unverhältnissmässig grösser sei; indess sind wohl noch genauere Versuche hierüber anzustellen, bei welchen auch die quantitative Bestimmung des beigemengten Ozons auszuführen wäre. Jedenfalls aber wäre dann das magnetische Verhalten eines Gemenges aus beiden Modificationen ein sehr empfindliches Kennzeichen für Ozon.

Ich unterlasse es, die Ergebnisse meiner Versuche mit denen früherer Beobachter zu vergleichen, weil bei der Veränderlichkeit des *k* und dem Umstande, dass man aus den früheren Beobachtungen über die Grösse der angewendeten Kräfte keinen Schluss ziehen kann, ein solcher Vergleich nur höchst unsichere Zahlen ergeben könnte.

Die Zahlen, die ich für die Eisenchloridlösung gefunden habe, sind etwas kleiner als die von Borgmann und Silow für Lösungen von gleichem specifischen Gewichte.

Über die involutorische Lage sich berührender Kegelschnitte.

Von Emil Weyr.

Unter den sämmtlichen Gruppen einer Involution n^{ten} Grades (erster Stufe) gibt es die $2(n-1)$ ausgezeichneten Gruppen, von denen jede ein Doppelelement enthält. Wenn man sich die Involution als eine Tangenteninvolution an einem Kegelschnitte K denkt, so ist ihr Erzeugniss bekanntlich eine Curve $(n-1)^{ter}$ Ordnung, welche jedoch nur für $n \leqq 4$ auch allgemeiner Natur ist. Jede Gruppe, welche ein Doppelelement enthält, liefert $(n-2)$ der Involutionscurve und dem Fundamentalkegelschnitte K gemeinschaftliche Tangenten; es sind dies die Tangenten von K, welche mit dem Doppelelemente einer Gruppe angehören und zwar sind ihre Berührungspunkte mit der Involutionscurve auf dem Doppelelemente gelegen.

Die Berührungspunkte von K mit den $2(n-1)$ Doppelelementen sind die Schnittpunkte von K mit der Involutionscurve.

Enthält eine Gruppe zwei Doppelelemente A, B, so ist der Punkt (AB) ein Doppelpunkt der Involutionscurve und seine beiden Tangenten sind conjugirte Strahlen bezüglich K; die übrigen derselben Gruppe angehörigen Tangenten sind offenbar Doppeltangenten der Involutionscurve und zwar liegen ihre Berührungspunkte auf dem Strahlenpaare A, B.

Enthält eine Gruppe ein dreifaches Element, so sind die übrigen Tangenten der Gruppe Inflexionstangenten der Involutionscurve und liegen ihre Berührunspunkte alle auf jenem dreifachen Elemente. In dem Berührungspunkte von K mit dem dreifachen Elemente wird der Kegelschnitt von der Involutionscurve berührt.

In ähnlicher Weise gestalten sich die Verhältnisse, wenn Gruppen mit einem oder mit mehreren mehrfachen Elementen vorkommen.

2. Es sei auf K eine cubische Tangenteninvolution mit einem dreifachen Elemente A; der Involutionskegelschnitt J_2 wird K im Berührungspunkte a von A berühren und kann betrachtet werden als ein Kegelschnitt, welcher K in a berührt und irgend einem dem K umschriebenen Dreiseite umschrieben ist. Betrachten wir irgend zwei solche Involutionskegelschnitte, welche K in demselben Punkte a berühren, so werden sie ausser diesem Berührungspunkte nur einen einzigen weiteren Punkt gemeinsam haben können, weil die beiden Involutionen, denen sie entsprechen, ausser dem dreifachen Elemente A nur noch ein Elementenpaar gemeinschaftlich haben können. Hieraus folgt, dass sich die beiden Involutionskegelschnitte in a osculiren müssen. Man sieht dies übrigens auch direct ein; denn die beiden Kegelschnitte sind ja dem unendlich kleinen Dreiecke umschrieben, welches von den drei in A vereinigten Tangenten gebildet wird.

„Alle Involutionskegelschnitte, welche den Fundamentalkegelschnitt K in einem und demselben Punkte berühren, haben in diesem Punkte gleiche Krümmung“.

Da man ausser dem dreifachen Elemente A noch zwei beliebige Elementenpaare für die cubische Involution willkürlich annehmen kann, so erkennt man sofort, dass durch zwei beliebig gewählte Punkte ein einziger Involutionskegelschnitt hindurchgeht, welcher K in einem gegebenen Punkte a berührt. Es wird also unter allen den in a berührenden Involutionskegelschnitten auch ein Kreis vorkommen, nämlich der allen den Involutionskegelschnitten gemeinsame Krümmungskreis. Den obigen Satz kann man offenbar auch so aussprechen:

„Alle Kegelschnitte, welche einen festen Kegelschnitt K in einem Punkte berühren und Dreiseiten umschrieben sind, deren Seiten Tangenten von K sind, haben im Punkte a einen gemeinschaftlichen Krümmungskreis“. Eine einfache Rechnung zeigt, dass die Krümmung eines Kegelschnittes in einem seiner Punkte viermal kleiner ist als die Krümmung der Kegelschnitte, welche ihn daselbst berühren und umschriebenen Dreiseiten umgeschrieben sind.

Nun ist bekanntlich die Beziehung zwischen dem Trägerkegelschnitte und dem Involutionskegelschnitte eine gegenseitige; der erstere ist nämlich auch ein Involutionskegelschnitt für eine auf letzterem befindliche Punktinvolution (die Involution der Berührungspunkte der Tangenteninvolution). Man kann also das obige Ergebniss etwa folgendermassen ausdrücken:

„Wenn sich zwei (cubisch-) involutorisch liegende Kegelschnitte [1] berühren, so verhalten sich ihre Krümmungen in dem Berührungspunkte wie 1:4; und zwar hat der Träger der Punktinvolution die viermal grössere Krümmung."

Man sieht auch sofort die Richtigkeit des folgenden Satzes ein:

„Zwei sich berührende Kegelschnitte sind in (cubisch-) involutorischer Lage, wenn sich ihre Krümmungen im Berührungspunkte verhalten, wie 1:4."

Ebenso folgt unmittelbar:

„Wenn sich zwei Kegelschnitte doppelt berühren und es hat einer von ihnen in einem der Berührungspunkte eine viermal grössere (kleinere) Krümmung als der andere, so findet dasselbe auch im zweiten Berührungspunkte statt."

Die beiden cubischen Involutionen haben in diesem Falle die Berührungselemente zu dreifachen Elementen.

3. Man kann den Werth des Verhältnisses der Krümmungen sich berührender involutorischer Kegelschnitte rein geometrisch in folgender Art entwickeln.

Nachdem man unmittelbar sieht, dass die einen Fundamentalkegelschnitt C_2 in einem Punkte a berührenden Involutionskegelschnitte J_2 sich gegenseitig osculiren, so kann man bei der Bestimmung der Krümmung irgend einen an Stelle eines anderen setzen. Nun ist aber umgekehrt der Fundamentalkegelschnitt auch ein Involutionskegelschnitt, wenn man den Involutionskegelschnitt J_2 umgekehrt als Fundamentalkegelschnitt betrachtet; man wird also ebenso den C_2 durch irgend einen Kegelschnitt

[1] Zwei Kegelschnitte, von denen jeder der Involutionskegelschnitt einer auf dem anderen befindlichen cubischen Involution ist; und zwar ist eine eine Punkt- und die andere eine Tangenteninvolution.

ersetzen können, welcher als Involutionskegelschnitt (anderer Art) den Fundamentalkegelschnitt J_2 im Punkte a berührt.

Die sämmtlichen Kegelschnitte J_2 berühren in a die sämmtlichen Kegelschnitte C_2; jedes der beiden Systeme hat in a eine bestimmte gemeinschaftliche Krümmung und zwar besteht das eine System aus Involutionskegelschnitten für Tangenteninvolutionen (dritten Grades), welche auf den Kegelschnitten des zweiten Systemes sich befinden und diese Kegelschnitte sind ebenso Involutionskegelschnitte für Punktinvolutionen (dritten Grades), welche sich auf den Kegelschnitten des ersteren Systemes befinden; und zwar kann man aus jedem der beiden Systeme irgend einen Kegelschnitt herausgreifen.

Wir wollen annehmen, dass die C_2-Kegelschnitte die cubischen Tangenteninvolutionen und die J_2-Kegelschnitte die cubischen Punktinvolutionen tragen; a sei wie früher der gemeinsame Berührungspunkt aller dieser Kegelschnitte und A die zugehörige Tangente. Dann haben also alle J_2-Kegelschnitte in a drei unendlich nahe gemeinsame Punkte und die C_2-Kegelschnitte sind dem von diesen drei Punkten gebildeten (durch A dargestellten) Dreiseite eingeschrieben. Wenn wir ein von drei unendlich nahen Punkten, deren Verbindungslinien auch unendlich nahe bei einander sind, gebildetes Dreieck als ein Elementardreieck bezeichnen, so sind also alle J_2-Kegelschnitte einem solchen Elementardreieck umgeschrieben und alle C_2-Kegelschnitte demselben Dreieck eingeschrieben. Hieraus folgt zunächst, dass die Krümmungsradien aller C_2- und aller J_2-Kegelschnitte gleichgerichtet sind.

Aus dem Umstande, dass die Kegelschnitte jedes der beiden Systeme in a eine Osculation der ersten Ordnung besitzen, folgt sofort, dass durch zwei Punkte oder durch zwei Tangenten nur ein einziger Kegelschnitt C_2 und ein einziger Kegelschnitt J_2 bestimmt ist; es wird also insbesondere unter den C_2-Kegelschnitten e i n Kreis existiren und ebenso unter den J_2-Kegelschnitten.

Betrachten wir nun irgend einen C_2- und einen J_2-Kegelschnitt; beide berühren sich in a und werden somit noch zwei gemeinschaftliche Punkte $i\,i'$ und zwei gemeinschaftliche Tangenten GG' besitzen, und nachdem sie in involutorischer Lage sind, so müssen die Tangenten von C_2 in $i\,i'$ durch die Berührungs-

punkte gg' von J_2 mit GG' hindurchgehen; es sei O der Schnittpunkt dieser Tangenten ig, $i'g'$, — d. h. also der Pol von ii' (oder U) bezüglich C^2.

Der Schnittpunkt von G und G' sei e, so ist dies offenbar der Pol der Geraden gg' (oder E) bezüglich des Kegelschnittes J_2; ferner sei o der Pol von U bezüglich J_2 und p sei der Schnittpunkt der Geraden gi' und $g'i$. Nach bekannten Elementarsätzen aus der Lehre über Kegelschnitte liegen die Punkte a, e, O, p, b in einer Geraden M, welche C_2 in c, J_2 in b, U in u, E in q schneiden möge; ebenso ist bekannt, dass $(abeq) = -1$, $(acOu) = -1$. $(uqOp) = -1$, $(abpO) = -1$ ist.

Ersetzen wir nun J_2 und C_2 durch die beiden Kreise, welche in den Systemen vorkommen, so ist U die unendlich weite Gerade, O der Mittelpunkt von C_2 und o jener von J_2, e der (ausser a) auftretende Ähnlichkeitspunkt, E seine Polare bezüglich J_2 und M die Centrale der beiden Kreise.

Weil e der Ähnlichkeitspunkt ist, so ist, wenn man mit r den Radius von J_2 und mit R jenen von C_2 bezeichnet:

$$\frac{oe}{eO} = \frac{r}{R}: \tag{1}$$

aus $(abeq) = -1$ folgt:

$$oe \,.\, oq = r^2 \tag{2}$$

ebenso aus $(abpO) = -1$:

$$op \,.\, oO = r^2 \tag{3}$$

Ferner folgt (da u der unendlich weite Punkt von U ist), aus $(uqOp) = -1$, dass

$$pq = qO \tag{4}$$

sein muss.

Aus 1) folgt $oe = \frac{r}{R}\, eO$ oder $oe = \frac{r}{R}(oO - oe)$, woraus sich ergibt (da $oO = R - r$ ist)

$$oe = r\left(\frac{R-r}{R+r}\right) \tag{5}$$

Nach 3) ist

$$op(R-r) = r^2,$$

somit

$$op = \frac{r^2}{R-r} \qquad 6)$$

und nach 2) und 5) ist

$$oq = r\left(\frac{R+r}{R-r}\right) \qquad 7)$$

und folglich ist

$$pq = oq - op = r\left(\frac{R+r}{R-r}\right) - \frac{r^2}{R-r} = \frac{rR}{R-r} \qquad 8)$$

Endlich ist:

$$qO = oO - oq = R - r - r\frac{R+r}{R-r} = \frac{R^2 - 3Rr}{R-r} \qquad 9)$$

und somit folgt aus 4), 8) und 9) die Relation

$$\frac{rR}{R-r} = \frac{R^2 - 3Rr}{R-}$$

oder also

$$R = 4.r \qquad 10)$$

Es hat also in der That der den C_2-Kegelschnitten gemeinschaftliche Krümmungskreis einen viermal grösseren Radius als der den J_2-Kegelschnitten gemeinschaftliche Krümmungskreis.

Raum-Epicycloiden.

Von J. S. Vaněček,
Professor in Jičín.

(Vorgelegt in der Sitzung am 16. December 1880.)

Die räumlichen Rollcurven sind verhältnissmässig weniger studirt worden als die ebenen.

Ausser der sphärischen Epicycloide von Hachette behandelte Th. Olivier in seinem Werke „Développements de Géométrie descriptive“ die Epicycloiden auf den Ringflächen, jedoch nur unvollständig. Vorliegende Abhandlung soll den von ihm aufgestellten Gedanken weiter ausführen.

Betrachten wir eine beliebige Kreislinie K, welche während der ganzen Operation fest bleiben soll, und eine bewegliche Kreislinie L. Beide schneiden sich in einem Punkte m und ihre Ebenen in der Geraden S. Die Tangente T der festen Kreislinie im Punkte m schliesst mit der Tangente U der beweglichen Kreislinie einen beliebigen Winkel a ein; ebenso bildet die Tangente T mit der Spur S den Winkel c und U mit S den Winkel b.

Da keine von diesen drei Geraden S, T, U mit den anderen zwei zusammenfällt; so bestimmen sie ein Dreikant, dessen Kantenwinkel a, b, c sind. Bezeichnen wir die ihnen gegenüberliegenden Seitenwinkel respective mit α, β, γ.

Lassen wir dann eine von diesen sechs Grössen a, b, c; α, β, γ ändern. Mit ihr ändern sich zugleich andere drei und zwei bleiben fest.

Bei dieser wechselseitigen Änderung der Winkel können wir folgende fünf allgemeine Fälle von Bewegung der Tangente U unterscheiden.

I. Die Tangente U der beweglichen Kreislinie dreht sich in der Ebene der beiden Tangenten.

II. Die Tangente U beschreibt eine Rotationskegelfläche, deren Axe die Tangente T ist, und die Ebene der beweglichen Kreislinie umhüllt eine andere Rotationsfläche mit derselben Axe T.

III. Die Tangente U dreht sich in der Ebene der beweglichen Kreislinie.

IV. Die Tangente U beschreibt eine Rotationskegelfläche, und die Ebene der Kreislinie L umhüllt eine andere solche Fläche. Beide Flächen haben eine gemeinschaftliche Axe, und zwar die Gerade, welche im Durchschnittspunkte m beider Kreislinien zu der Ebene der festen Kreislinie senkrecht steht.

V. Die Ebene der Kreislinie L dreht sich um die Tangente derselben im Punkte m.

Lassen wir in diesen Hauptfällen die constanten Winkel, respective alle Werthe von 0° bis 180° annehmen, dann erhalten wir für die Bewegung der Tangente U folgende besondere Fälle.

Ad. I. 1. Die Tangente dreht sich in der Ebene der festen Kreislinie, da die Ebenen der beiden Kreislinien coincidiren.

2. Die Ebene der beweglichen Kreislinie fällt mit der Ebene der beiden Tangenten zusammen, und diese Ebene ist geneigt oder steht senkrecht zu der der festen Kreislinie. Die Tangente dreht sich in der Fbene der beiden Tangenten.

3. Die Ebene der beiden Tangenten und die der beweglichen Kreislinie sind verschieden. Die Tangente dreht sich in der Ebene der beiden Tangenten, welche Ebene zu der der festen Kreislinie senkrecht steht.

4. Die Tangente dreht sich in der Ebene der beiden Tangenten, welche Ebene die Ebene der festen Kreislinie rechtwinkelig schneidet. Die Ebene der beweglichen Kreislinie steht senkrecht zur Ebene der beiden Tangenten.

Ad II. 1. Beide Tangenten coincidiren und dienen als Umdrehungsaxe für die Ebene der beweglichen Kreislinie.

2. Die Tangente erzeugt eine Rotationskegelfläche, und die bewegliche Kreislinie liegt in der Ebene der beiden Tangenten.

3. Die Tangente der beweglichen Kreislinie und deren Ebene erzeugen dieselbe Rotationskegelfläche, weil diese Ebene zu der der beiden Tangenten stets senkrecht steht.

4. Die Tangente dreht sich in einer Ebene, welche zur Tangente der festen Kreislinie senkrecht steht. Die bewegliche Kreislinie liegt in der Ebene der beiden Tangenten.

5. Die Tangente dreht sich in einer Ebene, welche zur Tangente der festen Kreislinie senkrecht steht. Die Ebene der beweglichen Kreislinie umhüllt eine Rotationskegelfläche.

6. Beide Kegelflächen des allgemeinen Falles reduciren sich zu einer Ebene, das heisst die Tangente der beweglichen Kreislinie dreht sich in einer senkrechten Ebene zur Tangente der festen Kreislinie. Diese senkrechte Ebene enthält zugleich die bewegliche Kreislinie.

Ad III. 1. Die Tangente der beweglichen Kreislinie dreht sich in ihrer Ebene, welche Ebene zu der der festen Kreislinie schief oder senkrecht steht und stets durch die feste Tangente geht.

2. Die Ebenen der beiden Kreislinien schliessen einen spitzen oder rechten Winkel ein, und die Tangente der beweglichen Kreislinie dreht sich in der Ebene derselben.

Ad IV. 1. Die Tangente dreht sich in der Ebene der festen Kreislinie und die Ebene der beweglichen Kreislinie umhüllt eine Rotationskegelfläche.

2. Die Tangente dreht sich in der Ebene der festen Kreislinie und dient stets als Spur der Ebene der beweglichen Kreislinie, welche Ebene zu der der festen Kreislinie senkrecht steht.

3. Die Tangente erzeugt eine Rotationskegelfläche, deren Axe die Ebene der beweglichen Kreislinie stets enthält, und diese Ebene steht zu der der festen Kreislinie senkrecht.

4. Sowohl die Tangente als auch die Ebene der beweglichen Kreislinie erzeugen dieselbe Rotationskegelfläche, denn die Tangente ist stets die Linie des grössten Falles dieser Ebene.

5. Die Tangente und die Ebene der beweglichen Kreislinie stehen senkrecht zur Ebene der festen Kreislinie; die Ebene der beweglichen Kreislinie dreht sich um die Tangente derselben.

Ad V. 1. Die Tangente befindet sich in der Ebene der festen Kreislinie, und um dieselbe dreht sich die Ebene der beweglichen Kreislinie. Beide Tangenten schliessen einen spitzen oder rechten Winkel ein.

2. Beide Tangenten stehen zueinander senkrecht, und die Ebene derselben schneidet schief die Ebene der festen Kreislinie.

3. Beide Tangenten schliessen einen spitzen Winkel ein, und ihre Ebene steht senkrecht zur Ebene der festen Kreislinie.

4. Die Tangente steht senkrecht zur Ebene der festen Kreislinie und ist zugleich Umdrehungsaxe der Ebene der beweglichen Kreislinie.

5. Beide Tangenten coincidiren und dienen der Ebene der beweglichen Kreislinie als Umdrehungsaxe.

Von den hier aufgezählten allgemeinen und speciellen Fällen der räumlichen Rollcurven werden wir vorläufig nur diejenigen näher betrachten, welche sich an die bisher bekannten Resultate am engsten anschliessen.

I.

Die Tangente dreht sich in der Ebene der festen Kreislinie.

Diese Drehung kann entweder in demselben Sinne geschehen wie die Abwickelung der Kreislinie L auf der Kreislinie K oder im entgegengesetzten Sinne.

1. Der Halbmesser der rollenden Kreislinie L ist die Hälfte derjenigen der festen K. Beide Bewegungen (die Drehung der Tangente U und das Rollen der Kreislinie L) geschehen in demselben Sinne. L liegt auf der Aussenseite der K und berührt dieselbe in der Anfangslage.

Der Mittelpunkt der rollenden Kreislinie beschreibt eine verlängerte Epicycloide.

Diese Epicycloide kann durch eine Kreislinie L beschrieben werden, welche einen gleichen Halbmesser wie K hat, und deren Centrum die feste Kreislinie K durchläuft.

2. Geht die feste Kreislinie K in einen Punkt c über, dann beschreibt der Mittelpunkt der rollenden Kreislinie L eine andere Kreislinie M, deren Centrum der Punkt c ist; beide haben gleiche Halbmesser.

Jeder Punkt der rollenden Kreislinie beschreibt eine Pascal's Schnecke.

Diese Schnecke hat zur Basis die Kreislinie M und zum Parameter den Halbmesser dieser Kreislinie.

3. Bleiben alle Bedingungen in 1. bestehen und nur die Bewegungen geschehen im entgegengesetzten Sinne, dann

beschreibt jeder Punkt der rollenden Kreislinie sowie jeder mit ihr fest verbundene Punkt (also auch der Mittelpunkt) eine Ellipse, ausgenommen den Anfangspunkt, der einen Durchmesser der festen Kreislinie durchläuft.

Beide Kreislinien berühren sich vor der Abwickelung in einem Punkte — Anfangspunkte. Der ihm diametral gelegene Punkt beschreibt eine Ellipse, deren grosse Axe mit dem Anfangsdurchmesser zusammenfällt und doppelt so gross ist; die kleine Axe gleicht dem Durchmesser der festen Kreislinie. Alle diese Ellipsen haben ihre Mittelpunkte im Centrum der festen Kreislinie.

Verbindet man die Anfangslage des erzeugenden Punktes mit diesem Centrum, so erhält man einen Durchmesser, und der zu ihm conjugirte Durchmesser geht durch die Lage des erzeugenden Punktes der halben Abwickelung.

Bis jetzt war bloss bekannt, dass jeder Punkt der Kreislinie, welche im Innern der festen Kreislinie rollt und deren Durchmesser gleich dem Halbmesser dieser Kreislinie ist, einen Durchmesser der festen Kreislinie, und jeder andere mit derselben fest verbundene Punkt eine Ellipse beschreibt.

4. Verwandelt sich die feste Kreislinie in ihren Mittelpunkt *a*, und bleiben alle übrigen Bestimmungen dieselben, dann

beschreibt das Centrum der beweglichen Kreislinie eine andere *M*, deren Mittelpunkt im Punkte *a* liegt; der Anfangspunkt *a* beschreibt eine Kreislinie *N*, welche mit der Rollenden einen gleichen Halbmesser hat und diese im Anfangspunkte *a* berührt; der Mittelpunkt von *N* liegt im Durchmesser, welcher die Mittelpunkte der beiden Kreislinien *L*, *M* verbindet.

5. Die Kreislinie *L* rollt auf der äusseren Seite der festen Kreislinie *K*; beide haben gleiche Halbmesser. Einer Umdrehung der Tangente *U* entspricht eine Abwickelung der Kreislinie *L*. Die Umdrehung und die Wälzung geschehen in demselben Sinne.

Das Centrum durchläuft eine Pascal's Schnecke, deren Basis die feste Kreislinie *K* ist, und deren Pol

in dieser Kreislinie liegt, und zwar diametral dem Ausgangspunkte (Anfangspunkte). Ihr Parameter ist gleich dem Halbmesser der Basis.

Der Anfangspunkt *a* beschreibt eine Curve vierter Ordnung, welche in ihm eine Spitze erster Art und einen ihm diametral gelegenen Doppelpunkt hat Die Entfernung der beiden besonderen Punkte beträgt drei Halbmesser der Kreislinie *K*.

Beide Kreislinien *K*, *L* haben gleiche Halbmesser. Die Kreislinie *L* rollt auf der äusseren Seite der Kreislinie *K*, und zwar im entgegengesetzten Sinne als die Drehung der Tangente geschieht.

Jeder Punkt der Kreislinie *L*, sowie jeder ihrer Ebene an sie gebundene Punkt beschreibt eine Kreislinie, deren Mittelpunkt im Anfangspunkte liegt, und deren Halbmesser der Entfernung des erzeugenden Punktes vom Anfangspunkte gleich ist.

Die Kreislinie des Anfangspunktes wird zu diesem Punkte selbst, das heisst dieser Punkt bleibt stabil.

Die rollende Kreislinie schneidet die Basis *K* successive in Punkten; verbindet man diese Punkte mit den Mittelpunkten der entsprechenden Lagen der Kreislinie *L*, dann sind diese Durchmesser mit der Centrale der beiden Kreislinien *K*, *L* (in der Anfangslage) parallel.

7. Beide Kreislinien *K*, *L* haben gleiche Halbmesser. Die Kreislinie *L* rollt auf der Aussenseite der *K* in der Weise, dass ihrer zweimaligen Abwickelung bloss eine Umdrehung der Tangente *U* in demselben Sinne entspricht.

Der Mittelpunkt beschreibt eine Curve sechster Ordnung mit zwei Doppelpunkten und der Anfangspunkt eine Curve achter Ordnung, welche drei Doppelpunkte und eine Spitze erster Art hat. Diese Spitze fällt mit einem von jenen Doppelpunkten (Anfangspunkte) zusammen.

Die successiven Durchschnittspunkte der beiden Kreislinien liefern Durchmesser, die eine Cardioide umhüllen. Die Basis derselben ist eine mit *K* concentrische Kreislinie, deren Halbmesser

gleich $^1/_3$ des Halbmessers der *K* ist, und ihr Pol liegt im Anfangsdurchmesser, und zwar zwischen dem Mittel- und Anfangspunkte. Die Cardioide berührt die feste Kreislinie in einem dem Anfangspunkte diametral gelegenen Punkte.

8. Gelten alle vorigen Bedingungen und geschehen beide Bewegungen im entgegengesetzten Sinne, dann

beschreiben der Mittel- und Anfangspunkt die sub 5. angeführten Curven.

Die früher erklärten Durchmesser der rollenden Kreislinie gehen alle durch einen fixen, dem Anfangspunkte diametral gelegenen Punkt der festen Kreislinie.

9. Beide Kreislinien *K*, *L* haben gleiche Halbmesser. Die Kreislinie *L* rollt auf der inneren Seite der *K* in der Weise, dass einer Abwickelung derselben eine volle Umdrehung der Tangente in demselben Sinne entspricht.

Betrachten wir den Anfangspunkt *a*, in welchem sich beide Kreislinien berühren (beide Kreislinien decken sich) und den ihm diametral gelegenen Punkt *b*.

Jeder Punkt *m* der Kreislinie *L* beschreibt eine Gerade *M*, welche durch seine Anfangslage und den Diametralpunkt *b* des Anfangspunktes *a* geht. Der Diametralpunkt *n* des Punktes *m* beschreibt eine andere Gerade *N*, welche zur Geraden *M* senkrecht steht.

Jeder andere Punkt des Durchmesssers *mn* beschreibt eine Ellipse, deren Axen der Richtung nach die Geraden *M* und *N* sind.

Die Längen der Axen bestimmen wir, gleichviel ob der Punkt ausserhalb oder innerhalb der Kreislinie *L* liegt, folgendermassen:

Seine Entfernung vom Punkte *b* ist die Länge der halben grossen Axe, und seine kürzere Entfernung von der Kreislinie *L* ist die Länge der halben kleinen Axe.

Sind beide diese Entfernungen des erzeugenden Punktes, sowohl vom Punkte *b*, als auch von der Kreislinie *L* einander gleich, dann beschreibt dieser Punkt eine Kreislinie, deren Mittelpunkt im Punkte *b* liegt. Diesen Bedingungen entspricht bloss

der Mittelpunkt der rollenden Kreislinie L; wir können als sagen:

das Centrum der rollenden Kreislinie L beschreibt eine Kreislinie, deren Mittelpunkt im Diametralpunkte b des Anfangspunktes a liegt.

10. Beide Kreislinien K, L haben gleiche Halbmesser, und die Kreislinie L rollt auf der inneren Seite der K in entgegengesetzter Richtung als in welcher sich die Tangente derselben dreht. Einer Abwicklung der L entspricht eine Umdrehung der Tangente U.

Benennen wir den Anfangspunkt a und seinen Diametralpunkt b. Wir können sie betrachten, als wenn sie einmal der einen, das andere Mal der anderen Kreislinie angehörten.

Alle Punkte der Ebene der rollenden Kreislinie L, welche vom Diametralpunkte b in der Entfernung ab abstehen, beschreiben gleiche Cardioiden, welche sämmtlich die feste Kreislinie K zur Basis haben. Für die Cardioide des Anfangspunktes ist dieser zugleich der Pol.

Diejenigen Punkte, welche vom Diametralpunkte b einen kleineren Abstand als ab haben, beschreiben Pascal's Schnecken. Alle diese Curven haben die feste Kreislinie K zur Basis und zum Parameter die Entfernung des erzeugenden Punktes vom Diametralpunkte b.

Alle übrigen Punkte der Ebene der beweglichen Kreislinie L erzeugen Descartes'sche Ovale.

Gehört der Diametralpunkt b der rollenden Kreislinie L an, so beschreibt er die feste Kreislinie K, welche doppelt gezählt werden muss, da die durch denselben erzeugte Pascal's Schnecke mit ihrer Schlinge coincidirt und in die Kreislinie K übergeht.

11. Rollt die Kreislinie L im Innern der Kreislinie K, welche mit jener gleichen Halbmesser hat, in der Weise, dass der zweifachen Abwickelung der Kreislinie L eine Umdrehung ihrer Tangente U entspricht, so

beschreibt der Mittelpunkt der rollenden Kreislinie eine Pascal's Schnecke.

Die Basis derselben ist die feste Kreislinie und ihr Pol der Diametralpunkt *b* des Anfangspunktes *a*. Der Parameter ist gleich dem Halbmesser der Kreislinie *L*.

Nach der zweifachen Abwickelung beschreibt jeder Punkt der Ebene der rollenden Kreislinie eine Curve vierter Ordnung. Diese Curve nimmt für den Diametralpunkt *b* (als erzeugenden Punkt) eine besondere Form an, sie wird nämlich zu einer geschlossenen Curve mit drei Schlingen, welche in einem dreifachen Punkte, der ursprünglichen Lage des Punktes *b*, zusammenhängen. Die Centrale der beiden Kreislinien in ihrer Anfangslage ist ihre Symmetrieaxe.

Die rollende Kreislinie *L* schneidet in jeder ihrer Lagen die Kreislinie *K* in einem Punkte, welcher gleiche Bögen an ihnen bestimmt. Jedem solchen Punkte gehört ein einziger Durchmesser der Kreislinie L an; alle diese Durchmesser gehen durch den Diametralpunkt *b*.

12. Behalten wir alle vorigen Bedingungen, ausgenommen die beiden Bewegungen, welche im entgegengesetzten Sinne geschehen. In diesem Falle sei nur erwähnt, dass die früher beschriebenen Durchmesser eine Cardioide umhüllen, deren Basis $^1/_3$ des Halbmessers der festen Kreislinie zum Halbmesser hat und deren Pol auf der Geraden *ab* zwischen *a* und dem Mittelpunkte liegt. Die Cardioide berührt die Kreislinie *K* im Diametralpunkte *b* des Anfangspunktes *a*.

13. Lassen wir die feste Kreislinie in eine Gerade *K* übergehen und die rollende Kreislinie *L* in der Art fortwälzen, dass einer ihrer Abwickelung eine Umdrehung ihrer Tangente in demselben Sinne entspricht, so

beschreibt das Centrum eine gewöhnliche Cycloide.

Diese kann nach der gewöhnlichen Art erzeugt werden, wenn wir das Centrum der rollenden Kreislinie die Basis *K* durchlaufen lassen.

14. Entspricht einer Abwickelung der Kreislinie *L* eine doppelte Umdrehung ihrer Tangente, und zwar in demselben Sinne, dann

beschreibt der Mittelpunkt derselben eine verlängerte Cycloide.

Diese können wir erzeugen, indem wir eine Kreislinie deren Halbmesser die Hälfte des Halbmessers der L beträgt und deren Centrum die Basis K durchläuft, abwickeln lassen.

Der Abstand des erzeugenden Punktes ist gleich dem Halbmesser derselben.

15. Der zweifachen Abwickelung der Kreislinie L entspricht eine Umdrehung ihrer Tangente. Beide Bewegungen geschehen in demselben Sinne.

Der Mittelpunkt beschreibt eine verkürzte Cycloide.

Der Halbmesser der Kreislinie M, welche dieselbe nach gewöhnlicher Art erzeugt, ist gleich dem Durchmesser der Kreislinie L und ihr Mittelpunkt durchläuft die Basis K. Der erzeugende Punkt liegt in der Mitte des Halbmessers der Kreislinie M

16. Einer Abwickelung der Kreislinie L entspricht eine Umdrehung der Tangente derselben. Die Bewegungen geschehen in entgegengesetzten Sinne.

Alle Punkte der Ebene der rollenden Kreislinie L beschreiben congruente, gewöhnliche, negative Cycloiden.

Die Halbmesser der erzeugenden Kreislinen sind gleich dem Halbmesser der Kreislinie L.

Alle Durchmesser der rollenden Kreislinie L bleiben mit ihren ursprünglichen Lagen parallel. Die Kreislinie L rückt also auf einer gemeinen Cycloide.

Die erzeugten Cycloiden sind der Grösse nach mit jener in 13. identisch.

17. Während sich die Kreislinie L einmal abwickelt, dreht sich ihre Tangente im entgegengesetzten Sinne zweimal um.

Das Centrum beschreibt eine negative verlängerte Cycloide.

Diese Cycloide ist der Grösse nach identisch mit der verlängerten Cycloide in 14.

18. Die Kreislinie L wickelt sich zweimal ab, und ihre Tangente dreht sich im negativen Sinne einmal um.

Der Mittelpunkt beschreibt eine verkürzte negative Cycloide.

Sie ist der Grösse nach dieselbe wie in 15.

Alle Punkte der Ebene der rollenden Kreislinie beschreiben in den Fällen 13—15, 17 und 18 mehr oder weniger gedrückte verkürzte oder verlängerte Cycloiden.

Bei Erzeugung der gewöhnlichen Cycloide können wir annehmen, dass die Kreislinie L auf der Geraden K rückt, das heisst sie berührt ohne zu rollen, und dass der erzeugende Punkt m auf der Kreislinie einen Bogen durchläuft, welcher der durchgelaufenen Strecke auf der Geraden K gleich ist.

Ertheilen wir dem Punkte m noch eine zweite Bewegung, nämlich dass er, an das Ende des Bogens angelangt, auf der Kreislinie entweder weiter oder zurückrückt. Mit anderen Worten, wenn sich von der Kreislinie L auf die Gerade K die Länge m abwickelt, durchläuft der Punkt auf der Kreislinie einen Bogen von der Länge n, und zwar in demselben Sinne, wie das Rollen geschieht, $+n$ oder im entgegengesetzten Sinne, das heisst $-n$.

Setzen wir diese Grössen in Verhältniss

$$\frac{m+n}{m} = \lambda.$$

Ändern wir n, so ändert sich auch λ. Wir erhalten

$$n = m \qquad \lambda = 2 \qquad (1)$$
$$n = -m \qquad \lambda = 0 \qquad (2)$$
$$n = -2m \qquad \lambda = -1 \qquad (3)$$
$$n = 0 \qquad \lambda = 1 \qquad (4)$$

Relation (1) stellt eine verlängerte Cycloide dar. Für jeden positiven Werth von n erhalten wir immer eine solche Cycloide. Wir können sagen, dass in diesem Falle der erzeugende Punkt eine gleichmässig beschleunigte Bewegung hat.

Relation (4) sagt aus, dass die zweite Bewegung gleich Null ist, oder mit anderen Worten, dass die Bewegung der Punktes normal ist. Dieser Fall kommt bei der gewöhnlichen Cycloide vor.

Betrachten wir die Relation (2), wo $n = -m$ ist, das heisst die eine Bewegung gleicht der anderen. Der Punkt m durchläuft die Basis K.

Für ein negatives n, dem absolutem Werthe nach kleiner als m, erhalten wir die verkürzte Cycloide. Die Bewegung des Punktes m ist eine gleichförmig verzögerte.

In der Relation (3) finden wir denselben absoluten Werth des Verhältnisses. Dieses Verhältniss stellt also wieder eine gewöhnliche Cycloide dar. Weil aber sein Werth negativ ist, so können wir die durch denselben dargestellte Cycloide negativ nennen.

Diese Curve hat ihren Scheitel dort, wo die durch die Relation (4) dargestellte Cycloide ihre Spitze hat und umgekehrt. Durch die Relation (3) ist daher eine gewöhnliche negative Cycloide gegeben.

Für die Werthe zwischen $\lambda = 0$ und $\lambda = -1$ erhalten wir die verkürzten negativen Cycloiden; für die Werthe von $\lambda = -1$ bis $\lambda = -\infty$ haben wir verlängerte negative Cycloiden.

Nach diesem kann also jeder Punkt der Kreislinie L alle Arten von Cycloiden beschreiben.

Es wirft sich nun die Frage auf: wie finden wir für die so erzeugte verkürzte oder verlängerte Cycloide jene Kreislinie M, deren jeder Punkt nach der gewöhnlichen Erzeugungsweise eine gewöhnliche Cycloide beschreibt?

Die Antwort ist leicht und kurz. Der Halbmesser r der Kreislinie L ist bekannt; ebenso λ. Benennen wir ρ den Halbmesser der gesuchten Kreislinie M, so erhalten wir

$$\frac{m+n}{m} = \frac{r}{\rho},$$

woraus

$$\rho = \frac{m}{m+n} \cdot r.$$

II.

Beide Tangenten der rollenden und der festen Kreislinie fallen zusammen und dienen als Umdrehungsaxe für die bewegliche Kreislinie.

Bei der so bestimmten Bewegung der rollenden Kreislinie haben wir drei Axen zu unterscheiden, nämlich: die senkrechte Gerade im Mittelpunkte der festen Kreislinie zu ihrer Ebene — die feste Axe A; die in jedem Augenblicke gemeinschaftliche

Tangente — die Umdrehungsaxe B, und zuletzt die Abwickelungsaxe C, das heisst die Gerade, welche im Mittelpunkte der rollenden Kreislinie zu der Ebene derselben senkrecht steht.

Während der Umdrehung und Abwickelung erzeugt die rollende Kreislinie L eine gewundene Fläche, auf welcher alle die Epicycloiden liegen, welche die Punkte der Kreislinie L beschreiben. Der Mittelpunkt l der Kreislinie L beschreibt eine Curve, welche sich auf einer Ringfläche befindet. Diese entsteht durch das Umdrehen einer Kreislinie M um die feste Axe, und deren Halbmesser gleich der Entfernung des Mittelpunktes l vom Berührungspunkte t der beiden Kreislinien K und L ist.

Bei der oben angegebenen Bewegung der Kreislinie L erhalten wir vorzugsweise drei Flächen.

1. Die Abwickelungsaxe C erzeugt eine windschiefe Regelfläche, deren Leitgebilde sind:

1.) die feste Axe A;
2.) die Schraubenlinie, welche der Punkt l auf der Ringfläche beschreibt, und
3.) diese Ringfläche, welche die Axe C stets berührt und ihre parallelen Kreislinien rechtwinkelig schneidet.

1. Anmerkung. Geht die feste Kreislinie K in eine Gerade über, so verwandelt sich die oben erwähnte gewundene Fläche in eine andere bekannte Fläche, deren erzeugende Kreislinie L sich so bewegt, dass ihr Centrum eine cylindrische Schraubenlinie durchläuft, und dass die Ebene die feste Axe A stets enthält.

1.) Die feste Axe A wird zu einer unendlich entfernten Geraden.
2.) Die Schraubenlinie auf der Ringfläche verwandelt sich in eine gewöhnliche Schraubenlinie.
3.) Die Ringfläche geht in eine Rotationscylinderfläche über, deren Basis in der Ebene der unendlich entfernten Axe A liegt.

2. Anmerkung. Degenerirt diese Cylinderfläche in ihre Axe, dann wird die Regelfläche zu einer rechtwinkeligen Schraubenfläche.

2. Irgend ein Durchmesser der Kreislinie L erzeugt eine windschiefe Regelfläche, welche zu Leitgebilden hat:

1.) Die successiven Tangenten der festen Kreislinie K in den Berührungspunkten mit der rollenden Kreislinie L;

2.) die ringflächige Schraubenlinie, welche durch das Centrum der K beschrieben wird;

3.) die räumliche Epicycloide, welche der eine Endpunkt des erzeugenden Durchmessers beschreibt.

1. Anmerkung. Geht die feste Kreislinie K in eine Gerade über, dann

1.) fallen alle ihre Tangenten mit ihr zusammen;

2.) jene ringflächige Schraubenlinie verwandelt sich in eine gewöhnliche cylindrische Schraubenlinie, und

3.) die räumliche Epicycloide wird zu einer cylindrischen räumlichen Cardioide.

2. Anmerkung. In diesem Falle verwandelt sich die Regelfläche in eine allgemeine Schraubenfläche, welche die rechtwinkelige sowie alle die schiefwinkeligen Schraubenflächen als Specialflächen enthält.

3. Alle Tangenten der ringflächigen Schraubenlinie bilden eine entwickelbare Fläche. Sie schliessen mit den entsprechenden Parallelkreislinien der Berührungspunkte verschiedene Winkel zwischen 0° und 90°.

Anmerkung. In dem Falle, dass die feste Kreislinie K in eine Gerade übergeht, verwandelt sich jene entwickelbare Fläche in die bekannte Schraubenfläche, deren alle Erzeugungslinien mit jenen der Cylinderfläche einen constanten Winkel einschliessen.

4. Die sub 1. Anmerkung angeführte Regelfläche hat die cylindrische Schraubenlinie zur Strictionslinie.

Die Ebene, welche durch die Axe der Cylinderfläche gelegt wird, schneidet die Regelfläche in einer Secantoide der Basis der Cylinderfläche.

Berührt die Schnittebene die Cylinderfläche, dann schneidet sie die Regelfläche in einer doppelt verlängerten Tangentoide der Basis der Cylinderfläche.

Jede andere mit der Axe der Cylinderfläche parallele Schnittebene schneidet die Regelfläche in einer verschobenen Tangentoide, welche auf der orthogonalen Projection der Contur-

geraden der Cylinderfläche in Bezug auf die Schnittebene in diese ihren Inflexionspunkt hat.

5. Behalten wir dieselben Bedingungen für die Bewegung der Kreislinie L und lassen die feste Kreislinie K in ihren Mittelpunkt a übergehen, dann beschreibt das Centrum der rollenden Kreislinie L eine Raumcurve, welche ein Durchschnitt zweier sich rechtwinkelig schneidenden Cylinderflächen zweiten Grades ist. Die eine hat zur Basis eine Kreislinie, deren Durchmesser gleich dem Halbmesser der rollenden Kreislinie ist, und die andere hat zur Basis eine Parabel, deren Parameter dem Halbmesser der erwähnten Basis gleich ist.

III.

Behalten wir alle in II. angeführten Bedingungen bei und lassen die feste Kreislinie K in eine Gerade K übergehen, dann erhalten wir verschiedene räumliche Cycloiden, deren Formen und Constructionen wir näher untersuchen wollen.

Die frühere gewundene Fläche verwandelt sich in eine Cylinderfläche, deren Erzeugenden mit der Geraden K parallel laufen. Jedem erzeugenden Punkte entspricht eine solche Cylinderfläche, auf welcher sich seine Trajectorie (Cycloide) befindet.

Der normale Schnitt einer jeden solchen Cylinderfläche liefert bekannte ebene Curven, nämlich Cardioide, Pascal's Schnecke, Descartes'sches Oval oder Kreislinie.

Aus der räumlichen Construction der Cycloide ergibt sich unmittelbar die Construction dieser Curven, mit welcher wir uns zuerst beschäftigen wollen, um erst hernach zu der Construction der räumlichen Cycloide zurückzukehren.

1. Setzen wir zwei zu einander senkrechte Axen X, Y voraus. Ihr Durchschnittspunkt a ist das Centrum einer Kreislinie N. Diese schneidet die Axe Y im Punkte b. Aus diesem als Mittelpunkt beschrieben wir mit einem beliebigen Halbmesser eine andere Kreislinie M, welche Y im Punkte s schneidet.

Beide diese Kreislinien theilen wir in gleich viele gleiche Theile.

Die Theilungspunkte auf beiden Kreislinien zählen wir von der Axe Y im Sinne der Bewegung der Uhrenzeiger, und zwar jene der Kreislinie M immer auf der linken (negativen) Seite, die der Kreislinie N aber auf der linken oder rechten (positiven)

Seite von Y, je nachdem der Halbmesser von M grösser oder kleiner ist als der Halbmesser von N.

Den Theilungspunkt m der Kreislinie M projiciren wir orthogonal in die Axe Y; m_1 ist die Projection.

Die Länge am_1 tragen wir auf den Halbmesser an, welcher den dem Punkte m zugeordneten Punkt n der Kreislinie N geht. Dadurch erhalten wir den Punkt p. Der geometrische Ort dieses Punktes p ist die gesuchte Curve.

Bezeichnen wir den Halbmesser der Kreislinie M mit ρ und jenen der Kreislinie N mit r, dann können folgende Fälle eintreten:

$\rho > r$, die erzeugte Curve ist eine Pascal's Schnecke;
$\rho = r$, die erzeugte Curve ist eine Cardioide:
$\rho < r$, die erzeugte Curve ist ein cartesisches Oval; und zuletzt
$\rho = 0$, die erzeugte Curve ist die Kreislinie N.

Denn im letzten Falle sind die Längen am_1 sämmtlich gleich dem Halbmesser r. Alle Pascal's Schnecken und die Cardioide haben ihren Pol im Anfangspunkte a. Die Basis jeder dieser Curven hat den Halbmesser gleich dem entsprechenden halben ρ; der Parameter für alle ist derselbe, und zwar gleich dem Halbmesser r. Alle die Curven haben Y zur Symmetrieaxe.

Wird also Basis und Parameter der gesuchten Curve gegeben, so können wir mittelst dieser Grössen die Kreislinien M, N und mithin auch die Curve selbst construiren.

2. Welche Gestalt nehmen die Cycloiden im Raume an?

Die bewegliche Kreislinie L dreht sich um die feste Gerade X, welche wir in der Grundrissebene voraussetzen. Einer Umdrehung der Kreislinie L entspricht eine Abwickelung derselben auf der Geraden X, welche sie stets berührt.

Der Anfangspunkt (Berührungspunkt) a und alle auf dessen Durchmesser liegenden Punkte beschreiben räumliche Cycloiden, deren Grund- und Aufrisse wir auf folgende Weise erhalten. Rectificiren wir die bewegliche Kreislinie L auf die Gerade X, und zwar vom Punkte a rechts; ihre rectificirte Länge theilen wir in ebenso viele gleiche Theile wie die Kreislinie selbst.

Dadurch erhalten wir auf der Geraden X Theilungspunkte 1, 2, 3..., welche den Punkten 1, 2, 3... auf der Kreislinie L entsprechen, die wir von der zur X in a senkrechten Geraden Y und zwar auf der linken Seite derselben von a zu zählen aufangen.

Projiciren wir den ersten Theilungspunkt 1 der Kreislinie L orthogonal in die Gerade Y. Die Länge dieser projicirenden Geraden tragen wir vom Theilungspunkte 1 der X links auf dieselbe. Dadurch erhalten wir auf X den Punkt I. Die Strecke aI ist die gesuchte Abscisse des erzeugenden Punktes im Raume, welche der Abwickelung des ersten Bogens der Kreislinie L entspricht. Die Längen der so aufzutragenden Längen der projicirenden Geraden wachsen bis zur Grenze des Halbmessers der Kreislinie L.

Sodann nehmen sie ab, und für den Diametralpunkt des Punktes a ist diese Länge gleich Null. Von nun an werden diese Längen von den entsprechenden Theilungspunkten auf der Geraden X rechts aufgetragen.

Kehren wir jetzt zu der Construction des Punktes p im vorigen Paragraphe zurück, indem wir im Anfangspunkte a als Centrum eine andere, mit L gleiche Kreislinie beschreiben.

Die Entfernung pp_1 des Punktes p von der Geraden X, welcher dem ersten Theilungspunkte 1 entspricht, tragen wir auf die Gerade, welche in I zur X senkrecht errichtet wird, auf.

Alle so erhaltenenen Punkte bestimmen die Curve A_1, welche der Grundriss der räumlichen Cycloide des Punktes a ist. Befindet sich der Punkt unter der Geraden X, so wird seine Entfernung pp_1 auch auf die unter X befindliche Hälfte jener Senkrechten aufgetragen, u. s. w.

Tragen wir dagegen die Entfernungen pp_2 des Punktes p von der Geraden Y auf jene Senkrechte auf, so erhalten wir einen Punkt, dessen geometrischer Ort eine andere Curve A_2 ist. Diese ist der Aufriss der räumlichen Cycloide des Punktes a.

Liegt die Strecke pp_2 von Y links, so wird sie unter die Gerade X aufgetragen, und umgekehrt.

Mittelst dieser zwei Curven A_1, A_2 können wir die im vorigen Paragraphe erzeugte Cardioide construiren. Schneiden wir nämlich durch eine im Punkte r' der Geraden X zu ihr errichtete Senkrechte die Curve A_2 in r_2 und A_1 in r_1, so erhalten wir r_2r'

als Abscisse und $r_1 r'$ als Ordinate der Cardioide. Diese Coordinaten werden im früher schon erwähnten Sinne aufgetragen.

Wir können demnach A_2 als Abscissencurve und A_1 als Ordinatencurve der Cardioide benennen.

Aber nicht nur Cardioide, sondern alle im Paragraphe 1 angeführten Curven können aus solchen Curven construirt werden.

Jeder andere Punkt c des Durchmessers (Halbmessers) ab beschreibt eine andere Curve C im Raume, deren Grund- und Aufriss wir ebenso wie früher erhalten. Es sei nur bemerkt, dass für jeden solchen Punkt blos die rollende Kreislinie L auf X rectificirt wird, und dass der Punkt c auf einer mit L concentrischen Kreislinie M liegt; diese Kreislinie wird in eben so viele gleiche Theile getheilt wie L, und die projicirenden Geraden ihrer Theilungspunkte in Y werden nach der früheren Regel von den Theilungspunkten der rectificirten Länge auf der Geraden X aufgetragen.

Fällt der Punkt c mit dem Mittelpunkte b zusammen, dann sind alle diese projicirenden Geraden gleich Null, und die erzeugten Curven B_1, B_2 sind gewöhnliche Sinusoiden.

Dem Erzeugungsgesetze gemäss können wir die Abscissen- und Ordinatencurven unter dem gemeinschaftlichen Namen sinusoidale Curven vereinigen.

Bezeichnen wir wie im vorigen Paragraphen die Halbmesser mit r und ρ, dann bleiben auch die dort entwickelten Consequenzen auch für den Raum giltig.

Daraus, dass sich die projicirenden Geraden für jeden Punkt c ändern, ersehen wir, dass sich die räumlichen Cycloiden auf windschiefen Regelflächen befinden, welche die feste Gerade X zur Leitlinie und die zu ihr senkrechte Ebene zur Richtungsebene gemeinschaftlich haben. Das dritte Leitgebilde ist die erzeugte Cycloide selbst.

Diese Cycloide ist also der Durchschnitt zweier Flächen, nämlich dieses Conoides und einer Cylinderfläche der vierten Ordnung. Erst dann, wenn die räumliche Cycloide zur gewöhnlichen Schraubenlinie geworden ist, ist das Conoid eine rechtwinkelige Schraubenfläche.

Alle jene Cylinderflächen vierter Ordnung haben zwei Erzeugungslinien gemeinschaftlich, welche Geraden in der festen

Ebene zu beiden Seiten der Axe X in der Entfernung des Halbmessers der rollenden Kreislinie L diametral gelegen sind.

Die so erzeugten räumlichen Cycloiden benennen wir cylindrische Cardioide, Pascal's Schnecke, Descartes'sches Oval und Schraubenlinie.

Die Cylinderfläche der Schraubenlinie ist vom zweiten Grade. Ebenso ist die Basis jeder dieser räumlichen Curven eine Rotationscylinderfläche.

Nach dem vorigen sehen wir, dass die cylindrische Cardioide der gewöhnlichen ebenen, die Pascal's Schnecke der gedehnten das Descartes'sche Oval der verkürzten Cycloide und die cylindrische Schraubenlinie einer Geraden entspricht.

IV.

Behandeln wir weitere, unter II., 6. angeführte Beispiele.

Die Tangente der beweglichen Kreislinie L dreht sich in einer zur Tangente der festen Kreislinie senkrechten Ebene, die zugleich die bewegliche Kreislinie enthält.

Die bewegliche Kreislinie L erzeugt eine gewundene Fläche; auf dieser befindet sich die räumliche, durch irgend einen Punkt der Kreislinie L erzeugte Epicycloide.

Bei der oben angegebenen Bewegung der Kreislinie L haben wir zwei besondere Gerade zu unterscheiden, nämlich die Gerade A, welche im Mittelpunkte der festen Kreislinie K zu ihrer Ebene senkrecht steht, und die wir die Umdrehungsaxe nennen wollen; so die Gerade B, die Abwickelungsaxe, welche im Mittelpunkte b der beweglichen Kreislinie zur Ebene derselben senkrecht steht.

Die Abwickelungsaxe B erzeugt eine windschiefe Fläche, deren Leitgebilde sind:

1.) die durch den Mittelpunkt b beschriebene ringflächige Schraubenlinie;
2.) die unendlich entfernte Gerade der Ebene der festen Kreislinie K; und
3.) das Ebenenbüschel A, welches die Gerade A zum Träger hat.

1. Anmerkung. Verwandelt sich die feste Kreislinie in eine Gerade K, dann wird die gewundene Fläche, welche die

Kreislinie L erzeugt, zu einer anderen, welche durch das Hingleiten einer Kreislinie, deren Mittelpunkt eine cylindrische Schraubenlinie durchläuft und deren Ebene zur Axe der Schraubenlinie senkrecht steht, erzeugt wird.

2. Anmerkung. Im Falle, dass die feste Kreislinie in eine Gerade übergeht, verwandelt sich die windschiefe Fläche in eine Rotationscylinderfläche, die mit der Ringfläche, auf welcher sich die Trajectorie (Schraubenlinie) des Mittelpunktes b befindet, zusammenfällt.

Die Erzeugungsgeraden der Cylinderfläche sind parallel mit der festen Geraden K.

Irgend ein Durchmesser der beweglichen Kreislinie L erzeugt eine windschiefe Fläche, deren Leitgebilde sind:

1.) die ringflächige Schraubenlinie, welche der Mittelpunkt b beschreibt;

2.) die räumliche Epicycloide, welche die Trajectorie eines Endpunktes des erzeugenden Durchmesser ist, und

3.) die Umdrehungsaxe A.

Anmerkung. Entfernt sich die Umdrehungsaxe A in's Unendliche, das heisst wird die feste Kreislinie zur Geraden K, dann hat jene windschiefe Fläche alle ihre Erzeugungsgeraden mit der zu K senkrechten Ebene parallel.

Ihre Strictionslinie liegt auf einer Cylinderfläche vierter Ordnung, deren Erzeugungsgeraden parallel mit der Geraden K laufen. Die Basis dieser Cylinderfläche ist eine Curve vierter Ordnung, deren grösster Durchmesser der doppelten Entfernung des Mittelpunktes der Kreislinie L von der Geraden K und deren kleinster Durchmesser dieser Entfernung gleich ist.

Untersuchen wir bloss den Fall, wo die feste Kreislinie K zur Geraden wird. Dabei finden wir wieder eine neue Erzeugungsart von ebenen und von räumlichen Cardioiden, Pascal's Schnecken und Descartes'schen Ovalen.

Wir wollen zuerst die ebenen Curven construiren.

1. Es seien gegeben zwei zu einander senkrechte gerade Linien X, Y und zwei beliebige gleiche Kreislinien M, N, welche ihre Mittelpunkte auf der Geraden X haben, und von denen jede durch den Mittelpunkt der anderen geht.

Die Kreislinie N hat ihren Mittelpunkt im Durchschnittspunkte a der Geraden X, Y.

Theilen wir beide Kreislinien in gleichviele gleiche Theile. Die Theilungspunkte zählen wir von der negativen (linken) Seite der Axe X. Den ersten Theilungspunkt 1 der Kreislinie M verbinden wir mit dem Punkte a. Diese Gerade schneidet die Kreislinie M im Punkte u; von diesem tragen wir auf dieselbe im Sinne der Bewegung der Uhrzeiger einen von ihren Theilen. Dadurch erhalten wir den Punkt v, welcher mit dem Punkte a durch eine Gerade verbunden wird. Auf diese Gerade av tragen wir von a aus die Länge $a1$ auf. Der so erhaltene Punkt m ist der Punkt der gesuchten Curve. Dem 2., 3.,... Theilungspunkte der Kreislinie M entsprechen 2, 3,... Theile der Kreislinie N, welche auf dieselbe von den Geraden $a2$,, $a3$,... aufgetragen werden. Werden alle Punkte m mit dem Pole der Curve verbunden, so schliessen die Radienvectoren gleiche Winkel ein.

Ändern wir den Halbmesser ρ der Kreislinie M, so ändert auch die Curve ihre Form, und wir erhalten, wenn wir den Halbmesser der Kreislinie N mit r bezeichnen, folgende Arten von Curven; für

$\rho > \frac{r}{2}$, die Pascal's Schnecke,

$\rho = \frac{r}{2}$, die Cardioide,

$\rho < \frac{r}{2}$, das cartesische Oval,

$\rho = 0$, die Kreislinie N.

Der Parameter aller dieser Curven ist gleich r und ρ gleich dem Halbmesser der Basis, welche ihren Mittelpunkt im Punkte a hat.

Ist demnach der Parameter und die Basis der Curve gegeben, so können wir mittelst dieser Grössen die Kreislinien M und N und somit auch die Curven construiren.

Die Gerade X ist die Symmetrieaxe derselben.

2. Wollen wir die räumlichen Cycloiden construiren, dann behalten wir alle vorhergehenden Constructionen, die sich auf

die Kreislinie M und N beziehen, und rectificiren die Kreislinie N auf die Gerade X von ihrem Mittelpunkte a angefangen. Die rectificirte Länge theilen wir in ebensoviele gleiche Theile als die Kreislinie selbst getheilt wurde. In den Theilungspunkten errichten wir senkrechte Gerade und auf dieselben tragen wir folgende Längen auf.

Erinnern wir uns auf die Construction des Punktes m des vorigen Paragraphes. Tragen wir dessen Entfernung von der Geraden X auf jene in dem demselben entsprechenden Theilungspunkte der rectificirten Kreislinie errichtete Senkrechte und führen dasselbe für alle übrigen Punkte durch, so erhalten wir den Grundriss A_1 der räumlichen Cycloide A.

Tragen wir aber in derselben Ordnung anstatt der Entfernung des Punktes m von X seine Entfernung von der Geraden Y, so erhalten wir den Aufriss A_2 der Cycloide A.

Kennen wir beide diese ebenen Curven A_1, A_2, dann können wir mittelst derselben die im vorigen Paragraphe besprochene Curve construiren. Nehmen wir nämlich die Ordinaten der A_1 als Abscissen und die der A_2 als die ihnen entsprechenden Ordinaten der construirenden Curve A_3, dann haben wir diese construirt.

Die Curve A_1 kann also die Abscissen- und A_2 als die Ordinatencurve der Cutve A_3 benannt werden.

Nach der Entfernung ρ des erzeugenden Punktes b von dem Mittelpunkte c der rollenden Kreislinie L richtet sich auch die Form der räumlichen Cycloide. Für die im vorigen Paragraphe erwähnten Werthe von ρ erhalten wir räumliche Cardioide, Pascal's Schnecke, Cartesisches Oval oder die gewöhnliche Schraubenlinie.

Die räumliche Cycloide befindet sich auf einer Cylinderfläche vierter Ordnung, deren Erzeugungslinien parallel mit der Geraden X laufen und nebstdem auf einer windschiefen Regelfläche, die früher beschrieben wurde.

Da die Cycloide auf einer Cylinderfläche liegt, so können wir sie eine cylindrische Cardioide etc. nennen. Ihre Projectionen A_1, A_2 bezeichnen wir mit dem gemeinschaftlichen Namen sinusoidale Curven.

Die ebenerwähnte windschiefe Fläche führt uns auf eine Construction der Cardioide, der Pascal's Schnecke und des Cartesischen Ovals.

Die Construction ist folgende.

Die gegebene Kreislinie N theilen wir in n gleiche Theile. Dadurch wird auch der volle Winkel in n gleiche Theile getheilt. Ziehen wir die Theilungsgeraden. Von einer dieser Geraden zählen wir die Theilungspunkte und auch die Theilungsgeraden. Im ersten Theilungspunkte ziehen wir eine Parallele mit der zweiten Theilungsgeraden, im zweiten mit der vierten, u. s. w.

Tragen wir dann auf die construirten Geraden von der Kreislinie N gleiche Strecken, so erhalten wir eine von den erwähnten Curven. Wird diese Strecke mit ρ und der Halbmesser der Kreislinie N mit r bezeichnet, dann ist die erzeugte Curve für

$\rho > \frac{r}{2}$, eine Pascal's Schnecke,

$\rho = \frac{r}{2}$, eine Cardioide,

$\rho < \frac{r}{2}$, ein cartesisches Oval,

$\rho = 0$, die Kreislinie N.

Im Übrigen gilt Alles, was wir im vorigen Paragraphe gesagt haben.

Über die Normalen der Ellipse.

Von Carl Lauermann in Böhmisch-Leipa.

(Vorgelegt in der Sitzung am 16. December 1880.)

Bekanntlich liegen die Fusspunkte der von einem Punkte der Ebene aus auf eine Ellipse gefällten Normalen auf einer gleichseitigen Hyperbel, welcher der gegebene Punkt und der Mittelpunkt der Ellipse als Curvenpunkte angehören.

Diese gleichseitige Hyperbel, deren Gleichung

$$\frac{a^2 \alpha \eta}{c^2} - \frac{b^2 \beta \xi}{c^2} = \xi \eta \tag{1}$$

ist, wenn

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2 \tag{2}$$

die Gleichung der Ellipse vorstellt, und α, β die Coordinaten des gegebenen Punktes bedeuten, lässt sich, wie folgende Betrachtung zeigt, in äusserst einfacher Weise construiren.

Man findet leicht, dass

$$x' = \frac{a^2 \alpha}{c^2}, \quad y' = -\frac{b^2 \beta}{c^2} \tag{3}$$

die Coordinaten des Hyperbelmittelpunktes sind, und erhält durch deren Substitution und nachheriger Division mit (ξ, η)

$$\frac{x'}{\xi} + \frac{y'}{\eta} = 1. \tag{4}$$

Denkt m n sich nun für einen Augenblick x', y' als laufende Coordinaten, so ist 4) die Gleichung einer geraden Linie, welche durch den Mittelpunkt der gleichseitigen Hyperbel geht und auf den Axen die Stücke ξ, η abschneidet.

Nachdem jedoch ξ und η als allgemeine Coordinatensymbole durch die Coordinaten eines jeden Punktes der Hyperbel ersetzt werden können, so gibt es unendlich viele Gerade von besagter Eigenschaft, welche durch die Gleichung 4) bestimmt sind.

Alle diese Geraden bilden einen Strahlenbüschel, dessen Träger der Mittelpunkt der gleichseitigen Hyperbel ist.

Legt man also durch den Mittelpunkt der gleichseitigen Hyperbel einen Strahlenbüschel und bestimmt für jeden Strahl desselben einen Punkt in der Ebene so, dass seine Coordinaten den Abschnitten des Strahles auf den Axen, der Grösse und Richtung nach gleichkommen, so bildet die Gesammtheit dieser Punkte die verlangte Hyperbel.

Was nun den Mittelpunkt der gleichseitigen Hyperbel anbelangt, so lässt sich derselbe auch sehr einfach bestimmen, da er einerseits auf der Verbindungslinie der Axenprojectionen des Punktes α, β liegen muss (dieser Punkt gehört, wie schon früher bemerkt, der Hyperbel an), andererseits aber auf dem Durchmesser der Ellipse sich befindet, welcher zu dem, der die Gleichung

$$y = \frac{\alpha}{\beta} x \qquad 5)$$

hat, conjugirt ist; ist also der Schnittpunkt der beiden Geraden.

Diese Hyperbel wird mit der Ellipse entweder vier Schnittpunkte oder zwei Schnittpunkte und einen Berührungspunkt oder auch nur zwei Schnittpunkte haben; der Fall, dass die beiden Kegelschnitte sich nicht schneiden, bleibt durch die erwähnte Eigenschaft der Hyperbel, immer durch den Mittelpunkt der Ellipse zu gehen, ausgeschlossen.

Dem entsprechend wird also der unendliche Flächenraum, in welchem sich die Ellipse befindet, in zwei Theile zerlegt; einen, welcher alle jene Punkte enthält, von welchen sich auf die Ellipse vier Normalen fällen lassen; den anderen, dem alle Punkte angehören, von welchen sich auf die Ellipse nur zwei Normalen fällen lassen.

Diese Theilung des Flächenraumes wird durch eine Curve durchgeführt, welcher alle Grenzpunkte angehören, das sind alle jene Punkte, die der, die Ellipse berührenden, Hyperbel entsprechen, von welchen sich also auf die Ellipse 3 Normalen fällen lassen.

Dass diese Curve keine andere, als die Evolute der Ellipse sein kann, leuchtet im Vorhinein ein; jedoch es lässt sich aber

in ganz einfacher Weise die Gleichung derselben aus den gegebenen Bedinguugen ableiten.

Diese Bedingungen sind durch die 3 Gleichungen

$$v\beta + u\alpha \quad = c^2\left(\frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2}\right) \tag{6}$$

$$-b^2 u\beta + a^2 v\alpha = c^2 uv \tag{7}$$

$$b^2 u^2 + a^2 v^2 = a^2 b^2 \tag{8}$$

ausgedrückt, in welchen u, v die Coordinaten des Berührungspunktes bedeuten.

Aus 6) und 7) folgt

$$\alpha = \frac{c^2 u^3}{a^4}, \quad \beta = -\frac{c^2 v^3}{b^4}, \tag{9}$$

aus welchen u und v berechnet und in 8) eingeführt ergeben

$$a^{2/3}\alpha^{2/3} + b^{2/3}\beta^{2/3} = c^{4/3}; \tag{10}$$

die Gleichung der Evolute der Ellipse.

Führen wir nun jetzt in die Gleichung der gleichseitigen Hyperbel

$$a^2\alpha\eta - b^2\beta\xi = c^2\xi\eta$$

statt α und β die in 9) gefundenen Werthe ein, so wird dadurch die Gleichung der Berührungshyperbel gebildet, nämlich jener Hyperbel, welche mit der Ellipse nur 3 Punkte, zwei Schnittpunkte und einen Berührungspunkt gemein hat.

Wir erhalten auf diese Weise:

$$\frac{u^3}{a^2\xi} + \frac{v^3}{b^2\eta} = 1. \tag{11}$$

Es lässt sich nun leicht nachweisen, dass der Berührungspunkt mit den beiden Schnittpunkten in einem einfachen constructiven Zusammenhang steht.

Aus 11) und der Bedingungsgleichung

$$b^2 u^2 + a^2 v^2 = a^2 b^2 \tag{12}$$

folgt leicht

$$\frac{b^2(u-\xi)}{a^2(v-\eta)} = -\frac{v^2\xi}{u^2\eta}. \tag{13}$$

Ebenso folgt aber aus 12) und der Gleichung der Ellipse

$$b^2\xi^2+a^2\eta^2=a^2b^2 \tag{14}$$

$$\frac{b^2(u-\xi)}{a^2(v-\eta)}=-\frac{v+\eta}{u+\xi} \tag{15}$$

Die Werthe 13) und 15) gleichgestellt, führen auf die Gleichung:

$$(v\xi+u\eta+uv)(v\xi-u\eta)=0 \tag{16}$$

und da

$$(v\xi-u\eta)$$

nicht gleich Null werden kann, so muss sein:

$$v\xi+u\eta+uv=0, \tag{17}$$

was in Worten ausgedrückt, besagt:

Die Verbindungslinie der Axenprojectionen eines Ellipsenpunktes schneidet die Ellipse in zwei Punkten, deren Normalen sich im Krümmungsmittelpunkte des dem gegebenen Punkte diametral gegenüberliegenden Punktes treffen.

Aber auch noch in einer anderen Art stehen die 3 Punkte im interessanten Zusammenhange.

Denken wir uns nämlich die Coordinaten derselben in der Form:

$$u=a\cos\alpha,\qquad v=b\sin\alpha;$$
$$u'=a\cos\beta,\qquad v'=b\sin\beta;$$
$$a''=a\cos\gamma,\qquad v''=b\sin\gamma;$$

in die Gleichung 17) substituirt, so ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta+\cos\alpha\sin\alpha=0 \tag{18}$$

$$\sin\alpha\cos\gamma+\cos\alpha\sin\gamma+\cos\alpha\sin\alpha=0 \tag{19}$$

Durch Subtraction folgt aus ihnen

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha+\gamma),$$
$$2\alpha+\beta+\gamma=180^\circ.$$

Theoretische Untersuchungen über die Verschiebungen der Radiationspunkte aufgelöster Meteorströme.

Von Prof. G. v. Niessl in Brünn.

(Vorgelegt in der Sitzung am 16. December 1880.)

Schon durch eine Reihe von Jahren beschäftigt man sich eifriger als sonst mit der Bestimmung der Radiationspunkte, welche zu verschiedenen Epochen Meteore liefern. Die entsprechenden Beobachtungen erstrecken sich wohl nicht überall gleichmässig auf alle Theile des Jahres und werden häufig auf die Perioden reichlicher Fälle beschränkt; dennoch verdankt man den allseitigen Bemühungen bereits werthvolles Material, welches so manche Eigenthümlichkeiten aufweist, deren Discussion und allgemeine Betrachtung schon deshalb nicht ohne Vortheil sein dürfte, weil eine solche über die noch zu sammelnden Thatsachen nähere Aufschlüsse und so den Beobachtungen selbst eine bestimmtere Richtung geben könnte.

Die Zahl der gegenwärtig bekannten Radianten ist sehr gross, und sie würde sich noch höher stellen, wenn nicht, wegen der Unsicherheit der Bestimmung, nahe beisammen liegende Positionen gewöhnlich vereinigt würden. Es ist ferner gewiss, dass in jeder meteorreichen Nacht sehr viele Radianten auftreten, und man braucht nur ein entsprechendes Material zu reduciren, um selbst zu finden, dass, wenigstens in den Epochen grösserer Frequenz, wohl mehr als fünfzig verschiedene Ströme gleichzeitig angenommen werden müssen, um den Beobachtungen zu genügen. So hat z. B. Denning aus 621 Meteoren, welche in 34 Stunden beobachtet wurden, 42 Radianten abgeleitet, die fast alle in den wenigen Nächten vom 28. Juli bis 1. August vorkommen. [1] In dieser Liste fehlen aber noch ziemlich viele für diese Epoche

[1] Rep. of the brit. Assoc. 1879.

sehr sicher nachgewiesene, namentlich südlichere Radiationspunkte. Heis gibt („Resultate etc.) für Juli 28—29, neununddreissig Radianten an, darunter aber auch nur sehr wenig südliche. Ferner sind unter den von Heis angeführten Positionen mindestens 20 nicht identisch mit den von Denning verzeichneten. Ströme können an einem Beobachtungsorte in einer Nacht reichlich genug auftreten, um die Radiationsbestimmung zu ermöglichen, während sie an anderen Orten nur sporadische Meteore liefern.

Die Vergleichung der in verschiedenen Epochen auftretenden Radiationspunkte lässt nun häufig wahrnehmen, dass während eines ziemlich langen Zeitraumes Radianten ohne sehr merklicher Ortsveränderung in Thätigkeit zu sein scheinen. Man wird im Interesse wissenschaftlicher Sicherheit gut thun, vorläufig dieses letztere Wort nicht durch einen bestimmteren Ausdruck zu ersetzen, denn es ist noch nicht völlig nachgewiesen, dass die betreffenden Radiationen während der ganzen Dauer einer solchen Periode beständig vorkommen. Allein sicher ist diese Erfahrung, wenigstens in der oben ausgedrückten beiläufigen Form, so vielseitig und bei so zahlreichen Radiationspunkten gemacht worden, sie wird auch durch die Beobachtung von Feuerkugeln und Meteoriten bestätigt und ist so wichtig, dass sie gewiss verdient, in Bezug auf die zu Grunde liegenden Ursachen sorgfältig untersucht zu werden. Man konnte diesem merkwürdigen Beobachtungsergebnisse so lange sehr gegründete Zweifel entgegen stellen, als in den von verschiedenen Seiten mitgetheilten Radiantenkatalogen fast immer grössere Zeiträume zusammengezogen und so die Detailwahrnehmungen verwischt wurden. Auch gegenwärtig, wo schon mancherlei blos auf eng begrenzte Perioden bezügliche Reductionen vorliegen, wird man die angegebene „Dauer der Radiation“ häufig als Folge zufälliger Complexionen ansehen können. Aber es gibt nicht wenig Fälle, für welche die äusserliche Realität dieser Erscheinung nach dem vorliegenden Materiale wenigstens einen hohen Grad von Wahrscheinlichkeit besitzt.

Greg, einer der erfahrensten Forscher auf diesem Gebiete, hat in letzterer Zeit, [1] gestützt auf die Verzeichnisse von Heis und Schmidt und auf Dennings, wie auch auf seine eigenen

[1] Monthly Notices B. 38.

Materialien eine Zusammenfassung der Resultate über die Dauer einzelner Radiationen mitgetheilt. Er ist der Ansicht, man dürfte es als feststehend betrachten, wenigstens bis es als falsch erwiesen wird, dass die mittlere Dauer eines Meteorschwarmes, der ein ziemlich constantes Strahlungsgebiet besitzt — etwa von 3°—8° im Durchmesser — nicht kleiner ist, als drei Wochen, ja es sei nicht unberechtigt, während einige Schwärme nur einen bis zwei Tage anhalten, als Maximum für andere sechs Wochen, wenn nicht mehr, anzunehmen, wobei sie in den meisten Fällen einen ziemlich fixen Radianten am Himmel geben.

Ich selbst kann versichern, dass ich nach sorgfältiger Untersuchung häufig zu ähnlichen Resultaten gelangt bin. Ohne in die Mittheilung aller einzelnen Fälle so nebenher einzugehen, will ich hier nur ein ziemlich ausgeprägtes und auch durch zahlreiche gute Beobachtungen von Feuerkugeln belegtes Beispiel anführen.

Fast alle Verzeichnisse geben für den Monat November einen recht ausgiebigen Radiationspunkt in der Nähe der Plejaden an; so z. B.

	AR.	Decl.
Greg, 1875. Oct. 21— Nov. 30:	60°	+19°5
Heis R_4, Nov.	55	16
Denning, 1872, Oct. 29—Nov. 13	62	20
„ 1876, Oct. 21—Nov. 20	60	19
„ 1877, Oct. 2—Nov. 13	60	20
Corder, 1876, Oct. 21—Nov. 20...........	60	18
Gruber, Nov. 1—18	55	19
Tupman, 1869, Nov. 7	57	19·5
„ „ „ 9	59	18
„ „ „ 10—12	53	+18
Im Mittel..	58·0	+18·5

Es ist möglich, dass hier zwei nahe nebeneinander liegende Radianten im Spiele sind, was vorläufig unerheblich ist, da sie beide jedenfalls gleichzeitig vorkommen.

Von correspondirend beobachteten Feuerkugeln führe ich hier folgende an, welche wohl recht gut auf diesen Radianten bezogen werden können.[1]

---

[1] Die Nachweisungen für diese hier nur beispielsweise mitgetheilten Angaben, behalte ich mir vor, bei einer späteren Gelegenheit, mit vielen

	AR.	Decl.	Helioc. Geschwindigk.
(?) 1805 October 23	52	+16·5	4·4 g. M.
1849 November 5	64	18	11 „
1869 „ 6	56·5	22	7·7 „
1876 „ 8	55	21	9·0 „
1864 „ 11	55	21	10·8 „
1861 „ 12	61	20	7·2 „
1865 „ 13	61	17	13·3 „
1859 „ 15	64	25	>8 „
1848 „ 17	58	20	—
1865 „ 21	58	18	5·0 „
1877 „ 23	62	21	5·5 „
1872 „ 28	61	+21	—
Im Mittel..	59·0	+20·0	8·2 g. M.

Es wäre nun freilich die erste Bedingung, falls man eine gewisse Zusammengehörigkeit annehmen wollte, dass die heliocentrische Geschwindigkeit überall die gleiche sei. Aber wer in diesen Dingen einige Erfahrung hat, weiss, dass eben diese unter allen Elementen am wenigsten sicher bestimmt werden kann. Namentlich hängen die gefundenen Werthe sehr von der beobachteten Bahnlänge ab. Die meisten Abweichungen von dem Durchschnittswerthe sind indessen nicht grösser, als diejenigen, welche man bei einem und demselben Meteore aus verschiedenen Beobachtungen häufig erhält.

Was die Differenzen der einzelnen Positionen betrifft, so liegen sie durchwegs inner den annehmbaren Genauigkeitsgrenzen, doch könnte etwa die erste Beobachtung (welche indessen sehr

---

anderen derartigen Fällen zu bringen, und bemerke hier nur, dass ich dieselben überall aus den Originalbeobachtungen ermittelt habe, mit Ausnahme von 1877 November 23, wofür die Resultate von Tupman's Untersuchungen angeführt sind.

Eine der sichersten Bestimmungen darunter ist jene von 1865, November 13, bezüglich welcher u. A. Crumplen, der viele Beobachtungen gesammelt und mitgetheilt hat (Rep. of the brit Ass. 1865, p. 125), sagt: „The velocity is certainly very great — 66 e. m. per sec., but I am convinced, that it was not less“.

unsicher ist) auf eine geringe Vorrückung des Radianten hindeuten.[1]

Die Durchschnittszahlen aus den sieben Positionen bis zum 13. November sind:

AR.: 57°8 ± 1·1 Decl.: +19°2 ± 0·6

und aus jenen vom 15—28. November:

AR.: 60°5 ± 0·9 Decl.: +21°0 ± 0·5,

woraus man wohl auf eine Verschiebung von etwa $2^1/_2$° während eines Monates schliessen könnte; allein die Zahl der Beobachtungen ist im Vergleiche zu ihrer Unsicherheit noch viel zu gering, um einen solchen Schluss zu begründen. So wenig Sicheres sich jedoch über die Quantität der Ortsveränderung dieses Radianten behaupten lässt, so bleibt es im Allgemeinen doch höchst wahrscheinlich, dass die grosse Annäherung der einzelnen Positionen, sowohl was die Sternschnuppen, als auch die Feuerkugelbeobachtungen betrifft, nicht ganz zufällig ist. Dies vorausgesetzt, wäre dann jedenfalls zu erkennen, dass die Verschiebung des Radiationspunktes klein genug ist, um durch die Beobachtungsfehler verdeckt zu bleiben.

Man kann nun immer noch annehmen, dass ein solches Zusammentreffen dem succesiven Auftreten verschiedener nebeneinander liegender Ströme von kleinem Querschnitte und ungleichen Bahnen — besonders mit sehr verschiedenen Aphelen — entspringt, obgleich die grosse Zahl verschiedener Radianten, bei welchen Ähnliches beobachtet wurde, denn fast scheint es die Regel zu sein, diese Annahme erschwert. Man könnte jedoch im Gegensatze hierzu die Erscheinung auch unter der Voraussetzung zu erklären suchen, dass man Meteorströme grossen Querschnittes annimmt, welche in das Sonnensystem eindringen, denen also, soweit es sich um einen und denselben Radiationspunkt handelt, auch in allen einzelnen Gliedern der gleiche Ausgangspunkt in den Sternenräumen, oder, wenn man so sagen darf, das gleiche Aphel entspricht. Diese Voraussetzung scheint mir an sich nicht absurd, und wenn sie anderweitig mit unseren Erfahrungen in

[1] Übrigens wird auch für October 17—25 ein Radiant: 58°, +19° (Gruber) angegeben.

Harmonie stünde, würde sie den Vorzug einer gewissen Einfachheit haben. Der Zweck vorliegender Abhandlung ist es nun, die Consequenzen einer solchen Annahme auf die Verschiebung der Radianten mit der Veränderung der Knotenlänge zu ziehen. Allerdings sind schon von Capt. Tupman, gelegentlich der vorerwähnten Greg'schen Mittheilung die Eigenschaften parabolischer Bahnen ungefähr angegeben worden, für welche die zugehörigen Radianten durch einige Wochen nahezu stabil bleiben, nämlich: dass die Bahn nahezu mit der Ebene der Ekliptik zusammenfallen, die Periheldistanz der Centralposition etwas kleiner als Eins und die Bewegung direct sein müsse. Allein, abgesehen davon, dass diese Bezeichnung nur eine beiläufige ist, und keinen Schluss gestattet, auf die Bewegung des Radianten unter verschiedenen Verhältnissen, gilt sie auch nicht für Geschwindigkeiten, welche die kometarische wesentlich überschreiten. Die Fälle, wo stabile Radianten durch Ströme grossen Querschnittes mit parabolischen Bahnen von gleichem Aphel erklärt werden könnten, sind, wie aus dem Folgenden hervorgehen wird, äusserst beschränkt. Es liegt also nahe, die Untersuchung nicht durch einen im Voraus angenommenen Werth der Geschwindigkeit zu beengen.

Vielleicht bedarf es jedoch gegenwärtig noch einer Rechtfertigung des Versuches, derlei Betrachtungen mit grösseren Werthen der Geschwindigkeit anzustellen, welche, um den Zusammenhang der folgenden Entwicklungen nicht zu stören, wohl am besten hier angebracht sein wird.

In denselben wird nämlich für die Geschwindigkeit im Allgemeinen nur angenommen, dass sie gleich oder grösser als die kometarische sei. Specialisirungen finden sich jedoch dann auch für verschiedene Werthe, von der kometarischen bis zu 12 geogr. Meilen. Hierüber ist zu bemerken: 1. Dass die theoretische Untersuchung der Form einer Erscheinung auf Grund irgend einer Annahme, noch nicht gleichbedeutend ist mit der Anerkennung der Realität dieser Annahme; 2. dass aber in der That, wenn wir dem Beobachtungsmateriale trauen dürfen, Geschwindigkeiten, welche die kometarische weit überschreiten, bei Meteoren doch nicht gar so selten sein müssen, als man gewöhnlich annimmt. Die merkwürdige Übereinstimmung parabolischer Elemente

einiger Meteorströme mit den Bahnen bekannter Kometen, hat vielleicht allzu schnell zu einer nachtheiligen Generalisirung geführt. Etwas anders stellt sich die Sache, wenn man directe Geschwindigkeitsschätzungen von Meteoren der verschiedensten Radiationspunkte betrachtet.

Bei sorgfältiger Analyse der Bahnverhältnisse aus allen mir zugänglich gewordenen Beobachtungen von solchen Feuerkugeln und grossen Meteoren überhaupt, welche nicht aus den bekannten Punkten im Perseus, Löwen und der Leier kommen, konnte in 153 Fällen die heliocentrische Geschwindigkeit mit einiger Sicherheit bestimmt werden. Es fanden sich darunter nur 23 Meteore, oder 15 Percent, bei welchen diese den Betrag von 5·6 g. M., also die kometarische Geschwindigkeit nicht überstieg, während sich 26, oder 17 Percent vorfinden, bei welchen man mehr als 10 g. M. Geschwindigkeit erhält. Die Durchschnittszahl aus sämmtlichen 153 Bestimmungen ist 8·3 g. M. Es ist dies kein wirkliches Mittel, weil die einzelnen Bestimmungen dabei als gleichgewichtig angesehen sind. Wollte man auf Gewichte Rücksicht nehmen, so würde der Mittelwerth noch grösser werden, weil es in der Regel gerade die zuverlässigsten Bestimmungen sind, welche grosse Geschwindigkeiten ergeben. Überhaupt lassen sich an der Hand dieses ziemlich reichhaltigen Materiales manche nicht unwichtige Betrachtungen anstellen, welche für eine andere Gelegenheit vorbehalten sein mögen, da es hier nicht beabsichtigt ist, ohne Beibringung der Einzelnheiten diese Erfahrungen weiter zu verfolgen.

Die obigen Daten betreffen, wie gesagt, zumeist Feuerkugeln oder Meteoriten. Allein zwischen diesen und dem, was man der äussern Erscheinung nach als Sternschnuppe bezeichnet, wird man wohl heute kaum mehr einen Unterschied im Sinne der Geschwindigkeit aufstellen wollen, zumal man ja weiss, dass die Feuerkugeln auch aus den bekannten Radianten der Sternschnuppen kommen. [1]

---

[1] Ich möchte diese Gelegenheit benützen, um eine missverständliche Auffassung meiner Ansichten über diesen Punkt richtig zu stellen. In einem Referate über meine im LXXV. Bande dieser Sitzungsberichte erschienene Abhandlung wird gesagt: .. „in the conclusion to which in commun with

Hiermit dürfte es wohl hinreichend gerechtfertigt sein, dass bei Beleuchtung der wichtigen Frage, welche uns hier beschäftigt, ein etwas allgemeinerer Standpunkt eingenommen wurde, und dass im Folgenden beispielsweise auch Annahmen für die Geschwindigkeit vorkommen, welche zwar mit der jetzt gangbaren Hypothese, nicht aber mit den Beobachtungen im Widerspruche sind.

---

1. Man kann Betrachtungen über die Verschiebung der Radiationspunkte mit der Veränderung der Knotenlänge nicht anstellen, ohne über die physische Constitution der Meteorströme irgend eine Voraussetzung zu machen. Erfahrungsgemäss wissen wir von dieser nur soviel, dass die Massen der einzelnen Theile derselben im Vergleiche mit ihren Abständen ausserordentlich klein sind. Es soll demnach als äusserste und nächstliegende Annäherung an die wirklichen Verhältnisse hier die Annahme gemacht werden, dass die Massenanziehung der einzelnen Partikel untereinander verschwindend klein sei im Vergleiche zur Wirkung der Sonne auf dieselben. Die Zusammengehörigkeit in ein materielles System soll dadurch charakterisirt sein, dass für den Eintritt in die Anziehungssphäre der Sonne, sämmtlichen zu

Prof. Galle, Prof. v. Niessl has been led from his investigastion, that aerolitic fireballs differ from ordinary meteor showers by moving in hyperbolic, instead of in nearly parabolic orbits...“ (Annual Rep. of the Royal Astr. Soc. 1878, p. 223.) Darnach wäre ich der Meinung, dass sich Feuerkugeln und Sternschnuppen durch hyperbolische, beziehungsweise parabolische Bahnen unterscheiden. Dies ist jedoch gerade das Gegentheil meiner Anschauung. Auch scheint es mir, dass ich nichts Ähnliches ausgesprochen, da ich mich begnügt habe, bei einigen Gelegenheiten zu erwähnen, dass sorgfältige Untersuchungen gut beobachteter Feuerkugeln in der Regel hyperbolische Bahnen für diese geben. Das Missverständniss ist jedoch erklärlich; denn bei der fast allgemein angenommenen Ansicht von der einheitlich kometarischen Geschwindigkeit der Sternschnuppen ist man geneigt, vorauszusetzen, dass Jemand, der den Beobachtungen gemäss, den meisten Feuerkugeln hyperbolische Bahnen zuschreibt, hiemit diesen Unterschied stillschweigend gelten lässt. Ich halte jedoch die obige Ansicht für unerwiesen und bin vielmehr der Meinung, dass nach Allem, was wir in dieser Hinsicht wissen, hyperbolische Bahnen bei Sternschnuppen wenigstens nicht minder wahrscheinlich sind als parabolische. (Man vergleiche hierüber auch Astr. Nachr. 2222 u. 2223.)

einem Strome gehörigen Theilen dieselbe Geschwindigkeit und Bewegungsrichtung zugeschrieben wird. Im Planetensysteme hat man es dann nicht mehr mit Einer Bahn des ganzen Stromes, sondern mit besonderen Bahnen der einzelnen Theile desselben zu thun, welche zwar je nach dem angenommenen Werthe der Eintrittsgeschwindigkeit wohl Kegelschnittslinien derselben Art, aber von sehr verschiedenem Parameter, beziehungsweise Axenverhältnissen sein werden, sobald man annimmt, dass der Strom einen sehr grossen Querschnitt habe und dessen Theile bei stets verschiedenen Knotenlängen mit der Erde zusammentreffen.

Dies ist die einzige Voraussetzung, welche hier gemacht wird, und es schien mir gut, um keinen Zweifel über die Grundlagen dieser Erörterungen bestehen zu lassen, dieselbe schon im Titel dadurch auszudrücken, dass diese Ströme als „aufgelöste" bezeichnet wurden. Über die Realität dieser Vorstellung lässt sich zwar, wie mir scheint, im Vorhinein nichts Bestimmtes angeben; sobald man sich aber überhaupt mit dieser Frage von dem Standpunkte aus beschäftigt, dass Meteorströme von so grossem Querschnitte gedacht werden, dürfte auch wohl zugestanden werden, dass die obige Annahme über die physische Constitution derselben den wirklichen Verhältnissen jedenfalls sehr nahe kommen wird.

Wenn ausser der heliocentrischen Geschwindigkeit, die Tangente an die Bahn am Knoten, durch die Lage des wahren Radiationspunktes gegeben ist, so sind dadurch bekanntlich die Bahnelemente bestimmt. Als den stellaren Ausgangspunkt des Meteores wird man — soferne von planetarischen Störungen abzusehen ist — jenen Ort betrachten, welcher der Richtung der Asymptote entspricht.

Die Anwendung auf parabolische Bahnen ist darnach selbstverständlich. Es braucht kaum daran erinnert zu werden, dass die zweite Asymptote die Richtung angibt, in welcher das Meteor das Sonnensystem wieder verlässt.

Wir nehmen nun als gegeben an, den Ort des kosmischen Ausgangspunktes, durch Länge und Breite: l und b, sowie die heliocentrische Geschwindigkeit am Knoten: v (jene der Erde $= 1$ gesetzt). Es soll die Lage des scheinbaren Radianten für eine gegebene Knotenlänge bestimmt werden. Die geometrische

Aufgabe besteht demnach zunächst in der Ableitung des Bahnstückes der Hyperbel am Knoten aus der Asymptote, dann in der Bestimmung der Verschiebung desselben durch die aus der Erdbewegung entspringende Aberration. Auf den Einfluss der Erdrotation, welcher hier verhältnissmässig zu unbedeutend ist, soll vorläufig keine Rücksicht genommen werden. Auch die sogenannte Zenitattraction, eine Wirkung der Erdschwere, wird hier ausser Betracht bleiben. In Folge derselben müssen die scheinbaren Radianten im Laufe der täglichen Bewegung kleine Verschiebungen erleiden, welche aber bei einigermassen grösseren Geschwindigkeiten kaum je durch die Beobachtungen nachweisbar sein werden, da in sehr geringen Höhen höchst selten Radiationen so zahlreich sind, dass die Bestimmung eine sichere werden kann, während in grösseren dagegen dieser Einfluss bald verschwindend klein wird.

Für die Aufgabe, aus den Bahnelementen eines Stromes (oder eines Kometen) dessen Radiationspunkt zu bestimmen, hat Director Dr. Edm. Weiss sehr elegante Ausdrücke entwickelt.[1] Hiervon unterscheidet sich der vorliegende Fall im Allgemeinen nicht wesentlich, weil, sobald Asymptote und Geschwindigkeit am Knoten gegeben, hierdurch die Bahnelemente eben auch bestimmt sind. Allein zur gegenwärtigen Anwendung müssten diese immer erst für jede Knotenlänge besonders berechnet werden. Da ferner diese Elemente theilweise voneinander abhängig sind, so müssten sie in den allgemeinen Gleichungen reducirt werden, um brauchbare Differentialausdrücke zu erhalten.

Es ist jedoch nicht schwer, die von Weiss für andere Voraussetzungen gegebenen Gleichungen auf die vorliegende Aufgabe bequem anwendbar zu machen. Dieselben sind (wenn statt dem dort vorkommenden Buchstaben v, welcher in unseren Entwicklungen für die heliocentrische Geschwindigkeit gewählt ist, $\mathfrak{V}$ gesetzt wird, ferner λ und β Länge und Breite des scheinbaren Radianten, v' die relative oder geocentrische Geschwindigkeit und r den Radiusvector bezeichnen):

[1] Sitzungsberichte der k. Akademie in Wien, LVII. Bd., II. Abth. pag. 286.

$$\begin{cases} v'\cos\beta\sin(\lambda - \odot) = \sqrt{\dfrac{1+\varepsilon\cos\mathfrak{V}}{r}}\cos i - \dfrac{1}{\sqrt{p}}[1 - e\cos(\Pi - \odot)] \\ v'\cos\beta\cos(\lambda - \odot) = \dfrac{\varepsilon\sin\mathfrak{V}}{\sqrt{r(1+\varepsilon\cos\mathfrak{V})}} - \dfrac{1}{\sqrt{p}}e\sin(\Pi - \odot) \\ v'\sin\beta \qquad = \mp\sqrt{\dfrac{1+\varepsilon\cos\mathfrak{V}}{r}}\cos i. \end{cases}$$

Nimmt man nun an, es sei statt der gewöhnlichen Bahnelemente gegeben: die heliocentrische Geschwindigkeit v am Knoten, sowie l und b (Lage der Asymptote), bezeichnet man ferner mit γ den Winkel der Asymptote mit dem Radiusvector der Erdposition zur Epoche des Zusammenstosses, sowie im weiteren mit α den analogen Winkel der Tangente an die Hyperbel am Knoten und mit i die Neigung der durch Asymptote und Knotenlinie gelegten Ebene gegen die Ekliptik, so sind diese Grössen durch folgende Gleichungen miteinander verbunden:

$$\text{I)} \begin{cases} \sin i\sin\gamma = \sin b \\ \cos i\sin\gamma = \cos b\sin(l - \odot) \\ \cos\gamma = -\cos b\cos(l - \odot). \end{cases}$$

Um diese Ausdrücke unzweideutig zu machen, ist zu erinnern, dass die Lage des Ausgangspunktes durch die zwei Winkel i und γ jedesmal bestimmt ist, wenn einer von beiden durch alle vier, der andere durch zwei Quadranten gezählt wird. Für jeden ausserhalb der Ekliptik liegenden Punkt ist es nun am bequemsten, γ stets nur durch die ersten zwei Quadranten und i durch alle vier zu zählen. i ist demnach hier in etwas anderer Anwendung gedacht, als es bei den Planetenbahnen üblich. Es wird, gleichviel, ob im auf- oder absteigenden Knoten, stets von der Seite her, aus welcher die Erde kommt (Antiapex) über die nördliche Kugelhälfte gegen den Apex und dann über die südliche zurück gezählt, so zwar, dass i für nördliche Breiten (b) des Ausgangspunktes im 1. oder 2. für südliche, im 3. oder 4. Quadranten liegt, oder dass $\sin i$ und $\sin b$ stets das gleiche Vorzeichen erhalten. Bei consequentem Festhalten der Zählung von i und γ in Anwendung dieser Gleichungen kann irgend eine Zweideutigkeit nicht entstehen.

Für die **Ekliptik** ist es vortheilhaft, mit Beibehaltung eines Zeichens für $\cos i = 1$, γ durch alle vier Quadranten zu zählen, so dass für $b = 0$ stets $\gamma = 180 - (l - \odot)$ ist.

Der wahre Radiant ist nun gegen den Ausgangspunkt l, b um den Bogen $\gamma - \alpha$ in der durch i bestimmten Bahnebene verschoben. Durch v und α lassen sich ε und $\mathfrak{B}$ ersetzen, was bequem ist, da v bei irgend einer Annahme (abgesehen von dem äusserst geringen Einflusse der Excentricität der Erdbahn) für alle Werthe von $\odot$ constant bleibt.

Zur Bestimmung von α aus γ ist die Polargleichung der Hyperbel für diesen Fall, wenn ρ der Radiusvector und w der Richtwinkel:

$$\frac{\rho}{r} = \frac{v^2 \sin^2\alpha}{1 + \sqrt{1 + (v^2 - 2)v^2 \sin^2\alpha \cos w}}.$$

Im Knoten ist $\rho = r$, und für die Asymptote $\frac{\rho}{r} = \infty$, so dass man hieraus leicht erhält:

$$\cos(2\alpha - \gamma) = \frac{2 + (v^2 - 2)\cos\gamma}{v^2}. \qquad 1)$$

Hieraus kann α sehr leicht für alle Werthe von γ bei angenommenem v berechnet und in eine bequeme Tafel gebracht werden. Übrigens kann diese Beziehung auch dargestellt werden durch die Ausdrücke:

$$\operatorname{tang}\frac{\gamma}{2} = \frac{\sin\alpha}{\frac{\sqrt{v^2-2}}{v} + \cos\alpha} = \frac{\frac{v}{\sqrt{v^2-2}}\sin\alpha}{1 + \frac{v}{\sqrt{v^2-2}}\cos\alpha} \qquad 2)$$

$$\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} = \frac{v \mp \sqrt{v^2 + 2\operatorname{tang}^2\frac{\gamma}{2}}}{v - \sqrt{v^2-2}\operatorname{tang}\frac{\gamma}{2}}, \qquad 3)$$

wobei in der Gleichung 2) von dem Doppelzeichen im Nenner nur das positive beibehalten wurde, weil das negative für die zweite Asymptote gilt, welche hier nicht in Betracht kommt. Dagegen entsprechen, wie man aus 1) und 3) sieht, jedem Werthe von γ

zwei solche von α, wodurch die jedesmal möglichen zwei Hyperbeln bestimmt sind.

Diese zwei Fälle müssen wohl unterschieden werden. Man erkennt namentlich aus 3), dass die zwei jedem Werthe von γ zugehörigen α_1 und α_2 von der Beschaffenheit sind, dass, sobald α_1 im 1. oder 2. Quadranten, α_2 im 3. oder 4. Quadranten liegt, und umgekehrt, was geometrisch dadurch ausgedrückt werden kann, dass $\sin\alpha_1$ und $\sin\alpha_2$ stets entgegengesetzte Vorzeichen besitzen, von welchen das eine mit dem von $\sin\gamma$ übereinstimmt. Für $v = \sqrt{2}$ oder die Parabel ist $\alpha_1 = \frac{\gamma}{2}$, $\alpha_2 = 180 + \frac{\gamma}{2}$, welche also eine und dieselbe Bahnform mit entgegengesetzter Bewegungsrichtung darstellen.

Im Allgemeinen erhält man demnach für jedes γ eine rechtläufige und eine rückläufige Bahn. Beide Fälle können so zusammengefasst werden, dass entweder i ungeändert gelassen, dagegen α durch alle vier Quadranten in der betreffenden Ebene gezählt wird, oder dass die α stets ebenso wie γ nur im 1. und 2. Quadranten genommen, also für die zweite Hyperbel, bei welcher α im 3. oder 4. Quadranten, die Ergänzung zu 360° in Rechnung gezogen und zugleich statt i, $180° + i$ gesetzt wird. Beides sind nur verschiedene Vorstellungen für dieselbe Sache und die im Folgenden entwickelten Ausdrücke liefern nach der einen oder anderen Art angewendet dieselben Resultate. Für alle ausser der Ekliptik liegenden Punkte ist es bequemer, α blos in den beiden ersten Quadranten zu zählen, also die letztere Alternative anzuwenden, so dass dann i jedesmal im 1. oder 4. Quadranten für rechtläufige, im 2. oder 3. Quadranten für rückläufige Bahnen liegt. In der Ekliptik ist es zweckmässiger α durch die vier Quadranten zu zählen und durchweg $\cos i = +1$ zu nehmen. Es wird also auf diese Weise dann α ganz analog gezählt wie γ.

Ist die Position des wahren Radianten in Länge und Breite λ' und β', so werden die betreffenden Beziehungen ganz unzweideutig festgestellt durch die Gleichungen:

$$\text{II)} \quad \begin{cases} \sin\beta' = \sin i \sin\alpha \\ \cos\beta' \sin(\lambda' - \odot) = \cos i \sin\alpha \\ \cos\beta' \cos(\lambda' - \odot) = -\cos\alpha . \end{cases}$$

Für die Ekliptik ist demnach durchweg:

$$\lambda' = 180 + \odot - \alpha.$$

Es wäre hier noch auf Folgendes aufmerksam zu machen: Ist $b = 0$, oder der Ausgangspunkt in der Ekliptik, so ist im Allgemeinen auch $\beta' = 0$. Eine Ausnahme tritt jedoch ein, für $l - \odot = 0$, wobei für jeden Werth von i, $\gamma = 180°$, tang $\alpha = -\sqrt{\frac{2}{v^2 - 2}}$ wird. Da nun in diesem Falle i unbestimmt bleibt, so entsprechen unendlich viele Positionen λ', β' demselben kosmischen Ausgangspunkte $l = \odot$, und ihr Ort ist ein um den Sonnenort ($\odot$) mit dem Radius arctang $\sqrt{\frac{2}{v^2 - 2}}$ beschriebener Kleinkreis. Für $v = \sqrt{2}$ geht derselbe in den grössten Kreis durch Apex und Antiapex über. Umgekehrt, wird also für jeden in dem betreffenden Kleinkreise liegenden wahren Radianten bei Zurückrechnung mit der betreffenden Geschwindigkeit derselbe Ausgangspunkt $l = \odot$ erhalten.

Das obige Gleichungssystem wurde hier nur angesetzt, um die Beziehungen zwischen λ', β' und i, α festzustellen. Rechnet man aus demselben wirklich die wahre Position des Radianten (was, wie wir sehen werden, auch unterbleiben kann), so ist die weitere Bestimmung der scheinbaren Position den Aberrationsrechnungen völlig analog, ja man kann sich, soferne man die Excentricität der Erdbahn vernachlässigt, der gewöhnlichen Aberrationsformeln mutatis mutandis bedienen. Dieser bekannte Weg wird hier nicht weiter verfolgt. Man erkennt jedoch, dass die sphärische Curve, welche der scheinbare Radiant für alle Werthe von $\odot$ am Himmel beschreibt, aus Elementen von Ellipsen besteht, deren Mittelpunkte selbst wieder auf einer den Ausgangsort l, b einschliessenden Curve liegen.

Ist α einmal bestimmt, so können in dem zuerst angeführten Gleichungssysteme ε und $\mathfrak{B}$ ersetzt werden. Es ist nämlich:

$$\sqrt{1 + \varepsilon \cos \mathfrak{B}} = v \sin \alpha$$

$$\frac{\varepsilon \sin \mathfrak{B}}{\sqrt{1 + \varepsilon \cos \mathfrak{B}}} = -v \cos \alpha,$$

ferner ist:

$$r' = \sqrt{v^2+1-2v\sin\alpha\cos i}. \qquad 4)$$

Lässt man der Kürze halber vor der Hand das Zeichen v' stehen, so erhält man nun:

$$\text{III)} \begin{cases} v'\cos\beta\sin(\lambda-\odot) = \frac{v\sin\alpha\cos i}{\sqrt{r}} - \frac{1}{\sqrt{p}}[1-e\cos(\Pi-\odot)] \\ v'\cos\beta\cos(\lambda-\odot) = -\frac{v\cos\alpha}{\sqrt{r}} - \frac{1}{\sqrt{p}}e\sin(\Pi-\odot) \\ v'\sin\beta = \frac{v\sin\alpha\sin i}{\sqrt{r}}. \end{cases}$$

Man kann hieraus für irgend eine angenommene heliocentrische Geschwindigkeit v und mit der Position l, b des stellaren Ausgangspunktes, für jeden (durch $\odot$ bestimmten) Ort der Erde oder des Knotens, die Lage des scheinbaren Radianten λ, β rechnen. Da, wie schon gezeigt, zugleich mit i aus dem Systeme (I) leicht γ und aus diesem α gefunden wird, so sind die Vorbereitungen zur Auflösung dieser Gleichungen nicht bedeutend.

Handelt es sich um eine weitere allgemeine Discussion dieser Ausdrücke, so können die von der Excentricität der Erdbahn herrührenden Glieder auch füglich wegbleiben, da ihr Einfluss einstweilen weit unter den Grenzen derjenigen Sicherheit liegt, mit welchen die Orte und Verschiebungen der scheinbaren Radianten bestimmt werden können. Setzt man somit $e=0$, $r=1$, $p=1$, wobei also überall das betreffende Element der Erdbahn normal zum Radiusvector gedacht wird, so hat man:

$$\text{IV)} \begin{cases} v'\cos\beta\sin(\lambda-\odot) = v\sin\alpha\cos i-1 \\ v'\cos\beta\cos(\lambda-\odot) = -v\cos\alpha \\ v'\sin\beta = v\sin\alpha\sin i. \end{cases}$$

Man kann dieselben Gleichungen (und selbstverständlich auch jene mit Berücksichtigung von e) auch auf einem anderen Wege direct erhalten.

Wir führen den Winkel a ein, den die Tangente an die Hyperbel am Knoten mit der Richtung der Erdbewegung bildet, und zwar gezählt von dem Punkte, aus welchem die Erde

kommt (Antiapex, $90° + \odot$). Für alle Radianten ausserhalb der Ekliptik wird man diesen Bogen immer nur in den beiden ersten Quadranten zu nehmen haben, sobald i in der schon früher festgesetzten Weise gezählt wird. In der Ekliptik ist es dagegen bequem, $a = 90 - \alpha$ durch alle vier Quadranten zu rechnen. Ist ferner σ die Aberrationsgrösse, oder der Bogen zwischen dem wahren und scheinbaren Radianten, und zwar stets als spitzer Winkel mit seinem Zeichen an a anzubringen, so hat man:

$$\cos a = \sin \alpha \cos i \tag{5}$$

$$\operatorname{tang} \sigma = \frac{\sin a}{v - \cos a} \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned} \sin(a+\sigma) &= \frac{v \sin a}{\sqrt{v^2 + 1 - 2v \cos a}} \\ \cos(a+\sigma) &= \frac{v \cos a - 1}{\sqrt{v^2 + 1 - 2v \cos a}}, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

wodurch jede Zweideutigkeit ausgeschlossen ist. Sobald man eine Reihe solcher Rechnungen für irgend eine bestimmte Annahme von v vornehmen will, empfiehlt es sich für σ Tafeln mit dem Argumente a vorzubereiten, welche sehr rasch hergestellt werden können.

In dem betreffenden sphärischen Dreiecke ist nun, wenn der obigen Voraussetzung gemäss $e = 0$ genommen wird, eine Seite $90°$ und man erhält:

$$\text{V)} \left\{\begin{aligned} \cos\beta \sin(\lambda - \odot) &= \cos(a+\sigma) \\ \cos\beta \cos(\lambda - \odot) &= -\cos\alpha \cdot \frac{\sin(a+\sigma)}{\sin a} \\ \sin\beta &= \sin\alpha \sin i \cdot \frac{\sin(a+\sigma)}{\sin a}. \end{aligned}\right.$$

Man findet leicht, dass

$$\frac{\sin(a+\sigma)}{\sin a} = \frac{v}{v'}, \tag{8}$$

und weil nach dem früheren:

$$\cos(a+\sigma) = \frac{1}{v'}(v \sin \alpha \cos i - 1),$$

so ist die Identität dieses Gleichungssystemes mit (IV) ersichtlich. Die Anwendung desselben scheint mir am bequemsten, sobald man sich damit beschäftigt, die Rechnungen für eine bestimmte Hypothese von v vorzunehmen, und bereits Tafeln für α mit dem Argumente γ und für σ (oder $a+\sigma$ und das Verhältniss $\frac{\sin(a+\sigma)}{\sin a}$) besitzt. Der Gang der Rechnung ist dann folgender: Zuerst werden i und γ aus (I) bestimmt, dann α aus der Tafel (beziehungsweise aus 1) oder 3), a aus 5), $a+\sigma$ aus der Tafel oder mit Benützung von 7), so dass dann die zur logarithmischen Auflösung geeigneten Schlussgleichungen V angewendet werden können.

Für einen in der Ekliptik liegenden Radianten gehen die allgemeinen Gleichungen über in:

$$\gamma = 180 + \odot - l \qquad 9)$$

$$a = 90 - \alpha, \quad \operatorname{tang} \sigma = -\frac{\cos\alpha}{v - \sin\alpha} \qquad 9a)$$

$$\text{VI)} \qquad \lambda = 180 + \odot - \alpha + \sigma;$$

hierbei ist angenommen, dass α und a durch alle vier Quadranten gezählt werden.

Es ist vielleicht hier am Platze zu erwähnen, dass die Curven, welche der wahre und der scheinbare Radiant im Laufe der jährlichen Bewegung beschreiben, sich auch ziemlich leicht graphisch construiren lassen. Der wahre Radiant $\lambda' \beta'$ bewegt sich um den kosmischen Ausgangspunkt $l\, b$ in dem Abstande $\gamma - \alpha$, eine sphärische Eilinie beschreibend. Trägt man für jeden Werth von $\odot$ aus dem gegebenen Punkte $l\, b$, in der Richtung $180 + \odot$ den für die angenommene Geschwindigkeit v vorgerechneten Bogen $\gamma - \alpha$ auf, wozu also aus den Grundgleichungen I) nur γ früher zu bestimmen ist, so erhält man den entsprechenden wahren Radianten $\lambda' \beta'$.

Die Curve, welche der scheinbare Radiant $\lambda\beta$ beschreibt, umschliesst die des wahren, und ist wegen der Form der letzteren ebenfalls eine sphärische Eilinie. $\lambda\beta$ ist gegen den zuge-

hörigen Punkt $\lambda'\beta'$ verschoben, um den Bogen σ in der Richtung $270°+\odot$ (oder $\odot-90°$). Man hat also nur diese Grösse in der angegebenen Richtung aufzutragen. Die Aberrationsgrösse σ kann ebenfalls graphisch gefunden werden. In einem rechtwinkligen Dreiecke wird die Hypothenuse $= v$ und der eine Winkel $= \beta'$ genommen, so ist die an diesem Winkel liegende Kathete die Projection von v auf die Ekliptik. Es wird ferner ein Dreieck construirt, in welchem diese Kathete die eine, dann die Einheit von v die andere und $\lambda'-\odot-90°$ der von beiden eingeschlossene Winkel ist. Wird die diesem Winkel gegenüberliegende Seite als die eine, die dem Winkel β' in dem ersterwähnten Dreiecke gegenüberliegende als andere Kathete eines rechtwinkligen Dreieckes genommen, so ist dessen Hypothenuse $= v'$. Wird nun aus den Seiten v, v' und 1 ein Dreieck gebildet, so ist der von den Strecken v und v' eingeschlossene Winkel $= \sigma$. Es braucht kaum erinnert zu werden, dass hier von Dreiecken in der Ebene die Rede ist.

Die Construction der Curven wird in centraler Projection, wo die grössten Kreise Gerade sind, recht einfach, doch bleibt der Massstab für das Auftragen der Bogen natürlich nicht constant.

2. Ist die Aufgabe in umgekehrter Ordnung zu lösen, so dass man also bei gegebener Epoche ($\odot$) mit irgend einer — etwa aus directen Beobachtungen geschöpften — Annahme von v, dann λ und β, l und b zu rechnen wünscht, so sind zunächst α und i zu bestimmen, weil sich aus diesen γ und die gesuchten Grössen mittelst 2) und I) leicht ergeben. Will man zur Ermittlung von α und i die entwickelten Endformeln benützen, so erhält man zunächst:

$$v' = \sqrt{v^2-1+\sin^2(\lambda-\odot)\cos^2\beta}-\sin(\lambda-\odot)\cos\beta \qquad 10)$$

$$\cos\alpha = -\frac{v'}{v}\cos(\lambda-\odot)\cos\beta \qquad 11)$$

$$\cos i = \frac{1-v\cos\alpha\tang(\lambda-\odot)}{v\sin\alpha}, \qquad 12)$$

wobei keine Zweideutigkeit entstehen kann, da, solange β nicht

Null ist, α stets im 1. oder 2. Quadranten und i immer so zu nehmen ist, dass $\sin i$ und $\sin\beta$ gleiches Zeichen erhalten.

Für $\beta = 0$ oder die Ekliptik ist also

$$v' = \sqrt{v^2 - \cos^2(\lambda - \odot)} - \sin(\lambda - \odot) \tag{13}$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{v}[1 + v'\sin(\lambda - \odot)]$$

$$\cos\alpha = -\frac{v'}{v}\cos(\lambda - \odot). \tag{14}$$

Wünscht man jedoch die gesuchten Grössen für die numerische Rechnung durch die Tangenten in Ausdrücken dargestellt, welche zur logarithmischen Benützung geeigneter sind, so ist es besser, die Arbeit in zwei Theile zu zerlegen. Wird der Hilfswinkel k eingeführt — welcher, nebenher bemerkt, den Neigungswinkel der Ebene durch das scheinbare Bahnstück des Meteores und die Tangente an die Erdbahn (beide am Knoten) gegen die Ebene der letzteren darstellt — so können die Endformeln auch so geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \sin(a+\sigma)\sin k &= \sin\beta \\ \sin(a+\sigma)\cos k &= \cos\beta\cos(\lambda - \odot) \\ \cos(a+\sigma) &= \cos\beta\sin(\lambda - \odot), \end{aligned} \tag{15}$$

woraus sich für gegebene λ, β und $\odot$, $a+\sigma$ und k bequem bestimmen lassen. Aus

$$\sin\sigma = \frac{\sin(a+\sigma)}{v} \tag{16}$$

erhält man σ, also auch a, und da, wie man aus der Vergleichung von V) mit 15) sieht, auch folgendes System besteht:

$$\text{VII)} \begin{cases} \sin\alpha\cos i = \cos a \\ \sin\alpha\sin i = \sin a\sin k \\ \cos\alpha = -\sin a\cos k \end{cases}$$

ergeben sich hieraus α und i.

Obgeich diese Rechnung complicirter erscheint, als durch durch die früheren Ausdrücke 10)—12), geht sie doch erfahrungsgemäss im Allgemeinen rascher und sicherer.

Für die Ekliptik hat man wieder wegen $\beta = 0$ und $a = 90 - \alpha$

$$\sin\sigma = -\frac{\cos(\lambda - \odot)}{v} \qquad 17)$$

wobei σ je nach dem Zeichen stets als spitzer Winkel zu nehmen ist

$$\alpha = 180 + \odot - \lambda + \sigma$$
$$l = 180 + \odot - \gamma\,.$$

Überhaupt erfolgt, sobald α und i bestimmt ist, die Berechnung von γ, sodann von l und b nach den Formeln 2) und I).

3. Nimmt man den Ort des stellaren Ausgangspunktes l, b als gegeben und unveränderlich an, und setzt für $\odot$ jene verschiedenen Werthe der Sonnenlänge, welche der betreffenden Epoche, für die man die Lage des scheinbaren Radianten bestimmen will, entsprechen, so erhält man die jedesmal zugehörige Position λ, β. Eine allgemeine Betrachtung der Veränderungen der Länge und Breite des Radianten mit $\odot$, d. i. von $\frac{d\lambda}{d\odot}$ und $\frac{d\beta}{d\odot}$ gewährt jedoch ungleich mehr Interesse, besonders in Hinsicht auf die Beantwortung der Frage, wann und innerhalb welchen Grenzen diese Ortsveränderung Null, oder durch die Beobachtungsfehler verdeckt werden könnte.

Es besteht aber die Übertragung aus dem Orte l, b in jenen λ, β aus zwei Theilen, von welchen der eine in der Differenz $\gamma - \alpha$, der andere in dem Übergange von a in $a + \sigma$ begründet ist. Die eine Verschiebung erfolgt in der Bahnebene des Meteors, die andere in der Ebene, welche durch die beiden Bewegungselemente der Erde und des Meteors am Knoten gelegt werden kann. Beide Bewegungen erleiden im Allgemeinen zugleich mit $\odot$ gewisse Veränderungen. Soll nun dabei der Radiant stationär bleiben, so müssen sich diese Veränderungen gegenseitig aufheben, also vor Allem in derselben Ebene erfolgen. Es ist klar, dass dies nur in der Ekliptik möglich ist. Der Fall, in welchem $\beta' = 0$ ist, wäre demnach zunächst in Betracht zu ziehen, wenn es sich darum handelt, die Stelle zu finden, wo scheinbare Radianten durch eine gewisse Zeit stationär bleiben könnten.

Für die Ekliptik ist aus 9) und VI) $d\gamma = d\odot$,

$$d\lambda = d\odot - d\alpha + d\sigma,$$

durch Differentiation von 2) und 6) erhält man ferner

$$\frac{d\alpha}{d\odot} = \frac{v^2 - 1 + v\sqrt{v^2 - 2}\cos\alpha}{v^2 + v\sqrt{v^2 - 2}\cos\alpha}$$

$$\frac{d\sigma}{d\alpha} = \frac{1 - v\sin\alpha}{v^2 + 1 - 2v\sin\alpha},$$

also

$$\text{VIII)}\quad \frac{d\lambda}{d\odot} = \left[\frac{1}{v^2 - 1 + v\sqrt{v^2 - 2}\cos\alpha} + \frac{1 - v\sin\alpha}{v^2 + 1 - 2v\sin\alpha}\right] \frac{v^2 - 1 + v\sqrt{v^2 - 2}\cos\alpha}{v^2 + 1 + v\sqrt{v^2 - 2}\cos\alpha}.$$

Es ist hier die Ortsveränderung als Function von α dargestellt. Je nachdem man nun als Argument λ, β oder l, b wünschte, müsste jenes durch diese ausgedrückt werden. Allein zum Zwecke der folgenden Betrachtungen genügt die gegenwärtige Form vollkommen und sie ist übersichtlicher als die entwickelte; auch ergibt sich für jeden Werth von α sogleich der wahre und scheinbare Radiant, nämlich $\lambda' = 180 + \odot - \alpha$ und $\lambda = \lambda' + \sigma$.

Ehe auf eine Specialisirung dieses Ausdruckes in Hinsicht auf v eingegangen wird, darf vielleicht noch Folgendes erinnert werden. Für die Lagen $\lambda - \odot = 0$ und $180°$, oder in der Conjunction und Opposition, ist bekanntlich die Veränderung in Aberration, welche hier dem zweiten Theile in der Klammer entspricht, Null. Dies geht auch aus der obigen Gleichung hervor, deren zweiter Theil Null wird, für $\alpha = \text{arc sin}\,\frac{1}{v}$ und für $\alpha = \pi - \text{arc sin}\,\frac{1}{v}$, und weil für diese speciellen Werthe von α jedesmal $\sigma = \pm\,\text{arc sin}\,\frac{1}{v}$ ist, so folgen aus VI) die zwei Werthe

$$\lambda = \begin{cases} 180 + \odot \\ \odot \end{cases},$$

für welche also im Aberrationsgliede keine Veränderung entsteht. Der erste Theil in der Klammer nimmt jedoch für einigermassen

grössere Werthe von v annähernd im verkehrten quadratischen Verhältnisse zu diesem ab, so lange $\cos\alpha$ positiv bleibt, also auf der Seite der Opposition. In der Opposition der scheinbaren Radianten wird also, der Einfluss verschiedener Geschwindigkeitsannahmen auf die Ortsveränderungen ganz besonders hervortreten.

Wir wollen nun zunächst auf den Fall parabolischer Bahnen übergehen und $v = \sqrt{2}$ setzen. Es folgt dann aus VIII)

$$\frac{d\lambda}{d\odot} = \frac{4-3\sqrt{2}\sin\alpha}{6-4\sqrt{2}\sin\alpha}. \qquad 18)$$

Damit $\frac{d\lambda}{d\odot} = 0$ werde, muss demnach

$$\alpha = \begin{cases} \arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \pi - \arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3} \end{cases}$$

sein, und weil dann aus 6)

$$\sigma = \pm\frac{1}{2}\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

wird, so sind die beiden Längen des scheinbaren Radianten, bei welchen unter Voraussetzung parabolischer Bahnen die Verschiebung unendlich klein ist:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \pi + \odot - \frac{1}{2}\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \lambda_2 &= \quad\;\; \odot + \frac{1}{2}\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}, \end{aligned} \qquad 19)$$

welchen entspricht:

$$\lambda_1 - \odot = +144^3/_4{}^\circ \text{ und } \lambda_2 - \odot = +35^1/_4{}^\circ.$$

Diese beiden Stillstands- oder Wendepunkte befinden sich demnach in $125^1/_4{}^\circ$ Elongation vom Apex ($\lambda - \odot = 270$) zu beiden Seiten hin. Da der Eine der Sonne schon sehr nahe liegt,

kann wenigstens für Sternschnuppenbeobachtungen nur der erstere praktisch in Betracht kommen.[1]

Schreitet die Erde in jenem Theile ihrer Bahn vor, welcher sich zwischen dem ersten und zweiten Wendepunkte befindet, d. i. während $250^1/_2{}^\circ$ Längenänderung derselben, so bewegt sich der Radiant im selben Sinne, also direct. Im anderen, $109^1/_2{}^\circ$ umfassenden Theile der Erdbahn geht der Radiant retrograd. Da diese Wege offenbar gleich gross sein müssen, geht der Radiant durchschnittlich in dem Verhältnisse von $\frac{250\cdot5}{109\cdot5}$ oder retrograd etwa $2^1/_2$ mal so schnell als direct.

Der Umstand, dass die Bewegungsrichtung die entgegengesetzte wird, sobald die Erde über die dem Stillstand entsprechende Lage hinaus kommt, kann dazu beitragen, die Verschiebung auf eine ziemlich lange Dauer zu verdecken. Sei z. B. $\odot_0$ jene Epoche, für welche $\frac{d\lambda}{d\odot} = 0$ wird, also z. B. für den einen Fall $\lambda_0 = \odot_0 + 144^3/_4{}^\circ$, und sucht man λ und λ_1 für $\odot = \odot_0 \mp 15^\circ$, also die Längen des scheinbaren Radianten für zwei Epochen, welche nahe um einen halben Monat von der mittleren ($\odot_0$) abstehen, so erhält man:

		Differenz
Anfang	$\lambda = \odot_0 + 143^\circ$	
Mitte	$\lambda_0 = \odot_0 + 144^3/_4$	$+1^3/_4{}^\circ$
Ende	$\lambda_1 = \odot_0 + 142^1/_2$	$-2^1/_4$

so, dass der Radiant am Ende des Monates nicht mehr als $^1/_2{}^\circ$ von jenem Punkte absteht, den er zu Anfang desselben eingenommen, und überhaupt während der ganzen Zeit keine grössere Ortsverschiebung als $2^1/_4{}^\circ$ erlitten hat. Ist der Radiationspunkt aber für verschiedene Epochen nicht ausnehmend genau bestimmt, oder befinden sich in den Beobachtungsreihen hinsichtlich der Epochen Lücken, so kann diese und selbst eine grössere Bewegung kaum erkannt werden.

---

[1] Radianten von grossen Meteoren können jedoch noch bestimmt werden, auch wenn sie der Sonne sehr nahe sind. So lag z. B. der des Meteoriten von Orgueil nahe an der Ekliptik in der Stellung $\lambda - \odot = 34^\circ$. Überhaupt können die Radianten solcher Meteore, welche bald nach Sonnenuntergang von der Westseite herkommen, in der Nähe dieses Wendepunktes liegen.

Obgleich sich, wie man sieht, auf diese Weise, auch unter der Voraussetzung parabelähnlicher Bahnen die Stabilität von Radiationspunkten für eine recht lange Dauer in einzelnen besonderen Fällen allerdings erklären lässt, so ist damit doch im Allgemeinen nicht viel gewonnen, denn nur wenige aus Beobachtungen gefundene Meteorradianten befinden sich in dieser ganz speciellen Lage oder in deren Nähe. Die grössere Zahl liegt in dem der Sonne opponirten Punkte (soferne man sich auf die Gegend um die Ekliptik beschränkt) und von hier gegen den Apex zu.

Ich will jedoch nicht unterlassen, beispielsweise einen aus Feuerkugeln sehr genau bestimmten Radianten anzuführen, welcher immerhin beiläufig dieser Bedingung entspricht. Es ist jener des grossen Meteores vom 17. Juni 1873, für welchen man recht genau $\lambda = 250°$ $\beta = 0$ nehmen kann (nämlich nach Galle: AR = 246°7 Decl. = —19°3 und nach meiner Bestimmung: AR = 248°6 Decl. = —20°2). Zu Anfang Juli (genauer am 6. oder 7.) hat die Erde jene Lage: $\odot = 250° - 144^3/_4°$, welche dem Wendepunkte entspricht, und es würden also nach dem obigen Beispiele die Radiationspunkte beiläufig in der letzten Hälfte Juni's und Juli's kaum merklich und auch im ganzen Verlaufe dieser Periode nur wenig differiren. In der That habe ich erst vor Kurzem [1] den Radiationspunkt einer anderen grossen detonirenden Feuerkugel: 1879 Juli 13, AR = 246° Decl. = —19° ermittelt. Gut bestimmte, wahrscheinlich auch hierher zu ziehende Fälle sind unter anderen noch:

1878 Juni 7	(England)	AR = 249°	Decl. = —21°	
1872 Juli 22	„	„ = 249	„ = —15	(minder sicher)

aber auch noch:

1847 Aug. 19 (Frankreich) AR = 246° Decl. = —22°.

Übrigens ergeben sich für die Geschwindigkeiten aller dieser Feuerkugeln Werthe, welche die parabolische wesentlich übersteigen, was insbesondere für jene vom 17. Juni 1873 ganz ausser Zweifel gestellt ist. Wenn also in diesem Beispiele, sobald

[1] Verhandlungen des naturforschenden Vereines in Brünn 18. Bd.

man geneigt ist, jene Feuerkugeln als Glieder Eines Stromes zu betrachten, die Übereinstimmung der Radianten verschiedener Epochen auch unter Voraussetzung parabolischer Bahnen wohl erklärlich ist, so sprechen andererseits gerade hier die directen Beobachtungen der Geschwindigkeit für die Annahme hyperbolischer Bahnen, welche zugleich jene Stabilität nicht minder gut erklärt. —

$\frac{d\lambda}{d\odot}$ wird ein Maximum für $\cos\alpha = 0$, also für $\alpha = \pm 90°$, d. i. weil in beiden Fällen $\sigma = 0$ ist, für

$$\lambda = \odot \mp 90° \text{ (Apex und Antiapex)},$$

und zwar wird hiefür

$$\frac{d\lambda}{d\odot} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$ [1]

Bei der Opposition und Conjunction des scheinbaren Radianten wird, wie wir schon früher gesehen haben, für alle Werthe von v der zweite Theil in der Klammer Null und es bleibt für $v = \sqrt{2}$ bei

$$\lambda - \odot = \begin{cases} 180 \\ 0 \end{cases} \quad \frac{d\lambda}{d\odot} = +0\cdot5.$$

Es ist ferner leicht ersichtlich, dass $\frac{d\lambda}{d\odot}$ in Bezug auf die Lage gegen den Apex und Antiapex symmetrisch ist.

Übersichtlich zusammengestellt, haben wir demnach für parabolische, in der Ebene der Ekliptik liegende Ströme folgende Hauptpunkte:

Länge des scheinbaren Radianten $\lambda =$	Verschiebung desselben $\frac{d\lambda}{d\odot} =$
$\odot$ (Conjunction)	$+0\cdot50$
$\odot + 35^1/_4{}^\circ$	$0\cdot00$
$\odot + 90$ (Antiapex)	$-0\cdot71$ Maxim.

[1] Allgemein ist überhaupt aus VIII) für $\alpha = \pm 90°$, $\frac{d\lambda}{d\odot} = \pm \frac{1}{v}$; doch ist nur für $v = \sqrt{2}$ dieser Werth ein Maximum.

Länge des scheinbaren Radiante $\lambda =$	Verschiebung desselben $\frac{d\lambda}{d\odot} =$
$\odot + 144^3/_4$	0·00
$\odot + 180$ (Opposition)	+0·50
$\odot + 270$ (Apex)	+0·71 Maxim.

Hieraus ist ersichtlich, dass auf dem weitaus grösseren Theile der Ekliptik die tägliche Bewegung des Radianten $^1/_2$ Grad übersteigt, und namentlich in der wichtigen, der Beobachtung am meisten zugänglichen Gegend zwischen Opposition und Apex recht bedeutend ist.

Wirft man nun etwa noch einen Blick auf das im Eingange mitgetheilte Beispiel des Radianten in der Nähe der Plejaden, welcher jedenfalls der Ekliptik sehr nahe liegt, so findet man, wenn dessen Länge zu etwa 62° angenommen wird, dass er sich in der zweiten Hälfte Novembers in Opposition, in der ersten sogar etwas mehr gegen den Apex zu befindet, so dass seine durchschnittliche tägliche Bewegung um diese Zeit etwas grösser als $^1/_2{}^\circ$, oder für einen Monat etwa 15° (mit wachsender Länge) sein müsste, wenn man ihn von einem parabolischen Strome grösseren Querschnittes ableiten wollte. Man erkennt wohl sogleich, wie wenig dies den Beobachtungen entsprechen würde.

Wir wollen aber nun den allgemeinen Ausdruck von $\frac{d\lambda}{d\odot}$ für $r > \sqrt{2}$, also für Hyperbeln untersuchen.

Wird der in der Klammer befindliche Theil gleich Null gesetzt, so ergibt sich, dass stets zwei Wendepunkte in λ (nämlich $\frac{d\lambda}{d\odot} = 0$) vorhanden sind, welche vorkommen, für Werthe von α im 1. und 2. Quadranten, also zwischen Conjunction und Antiapex einerseits, dann zwischen letzterem und der Opposition andererseits und dass diese speciellen nullmachenden Werthe von α sich mit zunehmender Geschwindigkeit (v) mehr und mehr gegen 0 und 180° bewegen. Da in der Opposition und Conjunction für alle endlichen Werthe von v, $\frac{d\lambda}{d\odot}$ stets positiv ist, wie am Apex, so müssen auch für hyperbolische Bahnen die beiden Stillstands-

punkte in einer Elongation vom Apex liegen, welche grösser als 90° ist, jedoch nicht mehr symmetrisch, wie aus den Coëfficienten von $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ hervorgeht.

Im Allgemeinen kann die Bedingung $\frac{d\lambda}{d\odot}=0$ durch eine Gleichung des vierten Grades mit zwei reellen Wurzeln dargestellt werden; die Auffindung der besonderen Werthe von α, welche dieser Bedingung Genüge leisten, kann jedoch viel einfacher und mit jeder wünschenswerthen Genauigkeit durch Annäherung bewirkt werden.

Es ergibt sich nämlich als Bedingungsgleichung:

$$\sin\alpha_0=\frac{2v+\sqrt{v^2-2\cos\alpha_0}}{v^2+1+v\sqrt{v^2-2\cos\alpha_0}}, \tag{20}$$

welcher Gleichung stets zwei Werthe von α_0 entsprechen, wobei $\cos\alpha_0$ einmal positiv, einmal negativ, aber verschieden gross ist. Man findet nun z. B. den ersteren, zwischen Opposition und Antiapex liegenden Punkt für alle Werthe von $v>2$ angefangen, schon durch die erste Annäherung $\cos\alpha_0=1$ auf 1—2° genau. Ganz ähnlich kann der zweite Punkt (für α_0 im zweiten Quadranten) leicht gefunden und dann mittelst 9a) und VI), σ und $\lambda-\odot$ bestimmt werden.

Auf diese Weise erhält man zum Beispiele:

$\frac{d\lambda}{d\odot}=0$ (Stillstandspunkt)

	I.		II.	
bei $v=2\cdot0$	für $\alpha=45°2$;	$\lambda-\odot=163°0$	für $\alpha=116°0$;	$\lambda-\odot=42°3$
„ „ $2\cdot5$	„ „ $35\cdot5$	„ $167\cdot5$	„ „ $121\cdot0$	„ $41\cdot6$
„ „ $3\cdot0$	„ „ $29\cdot4$	„ $169\cdot2$	„ „ $124\cdot7$	„ $40\cdot7$

Was die Maximalwerthe von $\frac{d\lambda}{d\odot}$ in der Ekliptik betrifft, so kann deren allgemeine Ableitung füglich übergangen werden. Man findet, dass, wie bei der Parabel, ein positives und ein negatives vorkommt. Das erstere erscheint sehr nahe für $\alpha=180$, wobei $\lambda-\odot$ stets im 4. Quadranten ist, der Radiant sich also zwischen Apex und Conjunction nicht weit von der Sonne befindet; und zwar nähert sich der Werth von $\lambda-\odot$, für welchen das

Maximum stattfindet, umsomehr 360°, je grösser v wird. Der Betrag dieses Maximums ist stets grösser als bei parabolischen Bahnen und nähert sich mit steigendem v asymptotisch der Grösse $\frac{d\lambda}{d\odot} = 1$, welche er (in der Ekliptik) nicht überschreitet. Das positive Maximum rückt also, wenn man von parabolischen Bahnen ausgeht und die Geschwindigkeiten wachsen lässt, vom Apex bis zur Conjunction und wächst von $\frac{1}{\sqrt{2}}$ bis an 1. Wie oben erwähnt, liegt dieser Maximalpunkt bei einigermassen grösseren r schon sehr nahe an der Sonne, so dass der Fall für Sternschnuppenbeobachtungen keine praktische Bedeutung hat. Es ist jedoch wenigstens hinsichtlich der Feuerkugeln immerhin bemerkenswerth, dass etwas herwärts der Sonne gegen den Apex zu, keine stabilen Radianten zu erwarten sind, da sich diese fast ebenso schnell und nach derselben Richtung in Länge weiterbewegen müssen als die Sonne. Diese Gegend der Ekliptik geht Morgens kurz vor der Sonne auf.

Das negative Maximum entfernt sich für alle praktisch wahrscheinlichen Werthe von v nur wenig von dem Orte, den es für parabolische Bahnen einnimmt. Es liegt nahe an $\lambda - \odot = 90$ (Antiapex) im ersten Quadranten und rückt erst für sehr grosse Werthe von v merklich weiter gegen die Opposition zu. Dasselbe übersteigt für hyperbolische Bahnen nur höchst unbedeutend die Grösse: $-\frac{1}{r}$ und ist für alle v von $\sqrt{2}$ bis ∞ zwischen den Grenzen $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ und 0 eingeschlossen.

Für die Opposition ($\lambda - \odot = 180$) und Conjunction ($\lambda - \odot = 0$) des scheinbaren Radianten bleibt wegen $d\sigma = 0$ nur der erste Theil in der Klammer, welcher, weil $\sin\alpha = +\frac{1}{r}$, $\cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{r^2-1}}{r}$ wird, übergeht in

$$\frac{d\lambda}{d\odot} = \frac{1}{r^2 \pm \sqrt{(r^2-1)(r^2-2)}}, \tag{21}$$

wo das oberе Zeichen für die Opposition, das untere für die

Conjunction gilt. In der Opposition nimmt also die Verschiebung nicht ganz im verkehrt quadratischen Verhältnisse mit v ab, in der Conjunction mit v langsam zu. In beiden Lagen ist sie für alle endlichen Werthe von v positiv, d. i. direct.

Für den Vergleich mit Sternschnuppenbeobachtungen hat nur der erste Fall Bedeutung, und es ist leicht einzusehen, dass es eben nicht absurd grosser Werthe von v bedarf, um für die so wichtige und so häufig vorkommende Opposition der Radianten sehr geringe tägliche Verschiebungen zu erhalten. So wird z. B. für die Opposition bei:

$$v = 2\cdot 0 \quad \frac{d\lambda}{d\odot} = 0\cdot 15$$
$$\text{„} = 2\cdot 5 \quad \text{„} = 0\cdot 09$$
$$\text{„} = 3\cdot 0 \quad \text{„} = 0\cdot 06 \text{ u. s. w.}$$

was für einen Monat ungefähr $4^1/_2{}^\circ$, $2^1/_2{}^\circ$ und $1^3/_4{}^\circ$ Ortsveränderung gibt. Für diese der Sonne gegenüberliegende Gegend des Himmels erhalten wir demnach sehr rasch die Möglichkeit stabiler Radianten, wenn wir über die parabolische Geschwindigkeit mit unseren Annahmen hinausgehen.

Da ferner, sobald die Opposition überschritten ist und der Radiant gegen den Antiapex rückt, sich derselbe dem Punkte nähert, wo $\frac{d\lambda}{d\odot} = 0$ und noch weiterhin die Bewegung wieder, zuerst sehr langsam, retrograd wird, so kann selbst durch mehrere Monate die Ortsveränderung völlig inner den Grenzen der Genauigkeit liegen, mit welcher die Positionen der Radiationspunkte bestimmt werden.

Für den Apex und den Antiapex, d. i. für $\lambda - \odot = \mp 90^\circ$ ist wegen

$$\alpha = \mp 90^\circ: \ \frac{d\lambda}{d\odot} = \pm \frac{1}{v}. \qquad 22)$$

In diesen beiden Hauptpunkten steht demnach die Verschiebung immer nur im verkehrten Verhältnisse zur Geschwindigkeit.

Folgende kleine Tafel, welche für vier verschiedene Annahmen von v die zugehörigen Werthe von $\frac{d\lambda}{d\odot}$ (d. i. die Ver-

schiebung $d\lambda$ in Graden für einen Grad Änderung in $\odot$, oder nur ein wenig mehr als die mittlere tägliche Verschiebung) in Epochen von 10 zu 10° gibt, wird diese Betrachtung vielleicht in wünschenwerther Weise ergänzen. Man erkennt aus derselben, dass der Unterschied in dem Verhalten parabolischer Ströme, im Vergleiche gegen solche von wesentlich grösserer Geschwindigkeit, gerade in der Gegend zwischen $\lambda - \odot = 170°$ und $\lambda - \odot = 230°$, d. i. von der Opposition gegen den Apex zu am stärksten hervortritt und zwar am meisten in der Opposition selbst.

Es ist noch zu bemerken, dass sich die vorstehenden Betrachtungen auf den allgemeinen Fall beziehen, wo ein in der Ekliptik befindlicher Radiant sich auch nur in derselben weiter bewegen kann. Die beiden besonderen Lagen, in welchen der Radiant die Ekliptik verlassen kann, werden im folgenden Abschnitte angedeutet werden. Sie sind jedoch paraktisch ohne Belang.

Tafel I

für die Veränderung $\left(\frac{d\lambda}{d\odot}\right)$ in Länge, eines in der Ekliptik liegenden scheinbaren Radianten

$\lambda - \odot$	$v = \sqrt{2}$	$a = 2 \cdot 0$	$v = 2 \cdot 5$	$v = 3 \cdot 0$	
0°	+0·50	+0·64	+0·65	+0·67	Conjunction
10	0·40	0·49	0·47	0·45	
20	0·25	0·35	0·31	0·28	
30	+0·09	0·19	0·16	0·13	
40	—0·09	+0·04	+0·02	+0·01	
50	0·27	—0·11	—0·10	—0·10	
60	0·45	0·24	0·21	0·18	
70	0·58	0·36	0·29	0·25	
80	0·68	0·45	0·35	0·30	
90	0·71	0·50	0·40	0·33	Antiapex
100	0·68	0·50	0·40	0·34	
110	0·58	0·49	0·40	0·32	
120	0·45	0·43	0·36	0·29	
130	0.27	0·34	0·29	0·26	
140	—0·09	0·24	0·22	0·20	
150	+0·09	0·13	0·14	0·12	
160	0·25	—0·03	—0·06	0·06	
170	0·40	+0·06	+0·02	—0·00	
180	+0·50	+0·15	+0·09	+0·06	Opposition

$\lambda-\odot$	$v=\sqrt{2}$	$v=2\cdot0$	$v=2\cdot5$	$v=3\cdot0$	
190°	+0·57	+0·23	+0·15	+0·11	
200	0·62	0·29	0·21	0·16	
210	0·65	0·33	0·25	0·20	
220	0·68	0·37	0·28	0·23	
230	0·69	0·40	0·31	0·26	
240	0·70	0·43	0·34	0·28	
250	0·70	0·45	0·36	0·30	
260	0·71	0·48	0·38	0·32	
270	0·71	0·50	0·40	0·33	Apex
280	0·71	0·54	0·43	0·35	
290	0·70	0·58	0·46	0·38	
300	0·70	0·65	0·52	0·42	
310	0·69	0·75	0·63	0·49	
320	0·68	0·83	0·75	0·64	
330	0·65	0·88	0·88	0·84	
340	0·62	0·85	0·91	0·93	
350	0·57	0·77	0·84	0·86	
360	+0·50	+0·64	+0·65	+0·67	Conjunction

4. Bisher wurde angenommen, dass der scheinbare Radiant in der Ekliptik liege, und es sind damit wohl alle Fälle erschöpft, wo das Verschiebungsdifferential Null werden könnte. Eine etwas weitere Ausdehnung der Untersuchung ist jedoch immerhin noch von Interesse.

Wünscht man für die Position λ, β in einem besonderen Falle die Verschiebung zu finden, so kann man entweder nach den früher angegebenen Ausdrücken die zugehörigen l, b und aus diesen für die zweite Epoche die neue Länge und Breite finden — und dies wird insbesondere geschehen müssen, wenn der Unterschied der Epochen beträchtlich ist — oder man kann die allgemeinen Gleichungen unter sofortiger Einführung der speciellen Werthe schrittweise differentiiren. Es hat zwar keine Schwierigkeiten $\frac{d\lambda}{d\odot}$ und $\frac{d\beta}{d\odot}$ allgemein als Functionen von $(\lambda-\odot)$ und β darzustellen, aber die betreffenden Ausdrücke sind so complicirt und so wenig übersichtlich, wenn sie ganz entwickelt werden, dass sie nicht viel nützen. Ich habe deshalb vorgezogen, sie hier in nicht völlig entwickelter Form mit den Hilfsgleichungen anzuführen, um einerseits daran einige allgemeine Betrachtungen zu knüpfen, andererseits durch mehrere besondere Annahmen von v

die Übersicht der Resultate auch demjenigen Leser zu erleichtern, der zu vermeiden wünscht, sich in eine allgemeine Discussion schwerfälliger Ausdrücke zu vertiefen.

Aus dem System IV) erhält man durch Differentiation zunächst:

$$\text{IX)}\quad\begin{cases}\dfrac{d\lambda}{d\odot} = 1 - \cos^2(\lambda-\odot)\left\{[\cos i - \operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}(\lambda-\odot)]\dfrac{d\alpha}{d\odot} + \right.\\ \qquad\left. + \operatorname{tang}\beta\sec(\lambda-\odot)\dfrac{di}{d\odot}\right\} \\ \dfrac{d\beta}{d\odot} = \dfrac{v}{v'^2}\sec\beta\left\{[v'\sin i + \sin\beta\cos i]\cos\alpha\dfrac{d\alpha}{d\odot} + \right.\\ \qquad\left. + [v'\cos i - \sin\beta\sin i]\sin\alpha\dfrac{di}{d\odot}\right\},\end{cases}$$

worin:

$$\left.\begin{aligned}v' &= \sqrt{v^2 - 1 + \sin^2(\lambda-\odot)\cos^2\beta} - \sin(\lambda-\odot)\cos\beta \\ \cos\alpha &= -\frac{v'}{v}\cos(\lambda-\odot)\cos\beta \\ \sin i &= -\frac{\operatorname{tang}\beta}{\cos(\lambda-\odot)\operatorname{tang}\alpha} = \frac{v'\sin\beta}{\sqrt{v^2 - v'^2\cos^2(\lambda-\odot)\cos^2\beta}} \\ \cos i &= \frac{1 - v\cos\alpha\operatorname{tg}(\lambda-\odot)}{v\sin\alpha} = \frac{1 + v'^2\sin(\lambda-\odot)\cos\beta}{\sqrt{v^2 - v'^2\cos^2(\lambda-\odot)\cos^2\beta}} \\ \operatorname{tang}\frac{\gamma}{2} &= \frac{\sin\alpha}{\frac{\sqrt{v^2-2}}{v} + \cos\alpha} \\ \frac{d\alpha}{d\odot} &= \frac{v^2 - 1 + v\sqrt{v^2-2}\cos\alpha}{v^2 + v\sqrt{v^2-2}\cos\alpha}\,.\cos i \\ \frac{di}{d\odot} &= -\sin i\operatorname{cotang}\gamma\,.\end{aligned}\right\}\quad 23)$$

Die Reduction kann, wenigstens mit einigem Vortheil für die praktische Rechnung, noch etwas weiter geführt werden, nämlich:

$$
\mathrm{X)}\left\{
\begin{aligned}
\frac{d\lambda}{d\odot} &= 1 - \frac{\operatorname{tang}\beta}{\operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\gamma} - \\
&\quad - \left[\frac{1}{v} - \frac{\operatorname{tang}(\lambda - \odot)}{\cos\alpha}\right] \frac{\cos^2(\lambda - \odot)}{\sin\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{d\odot} \\
\frac{d\beta}{d\odot} &= - \frac{\sin\beta}{r\sin\alpha} \Big\{ [\cos\beta + v'\sin(\lambda - \odot)] \operatorname{cotg}\gamma + \\
&\quad + [v'^2 + 1 + v'\sin(\lambda - \odot)\cos\beta] \frac{\cos(\lambda - \odot)}{v'} \cdot \frac{d\alpha}{d\odot} \Big\}
\end{aligned}
\right.
$$

Die beiden letzteren Ausdrücke sind für die specielle Benützung bequemer, auch entfällt die Berechnung von $\frac{di}{d\odot}$.

Für die von der Sonne abgewendete Halbkugel und die angrenzenden Partien (nicht aber für die ganze Kugel) können $\frac{d\lambda}{d\odot}$ und $\frac{d\beta}{d\odot}$ vollständig reducirt durch Reihen dargestellt werden, welche nach Potenzen von $\sin\beta$ oder $\cos\beta$ fortschreiten, wobei die Coëfficienten der einzelnen Glieder wieder Reihen nach $\sin(\lambda - \odot)$ und $\cos(\lambda - \odot)$ sind. Es scheint mir indessen vorläufig überflüssig, dies hier weiter zu verfolgen.

Wird beispielsweise für den Hauptradianten der „Perseiden" als Mittel aus vielen Bestimmungen für August 10·5: AR = 44°0, Decl. = +57°0 oder rund $\lambda = 60°0$ $\beta = +38°0$ genommen und $v = \sqrt{2}$ gesetzt, so erhält man:

$$v' = 2{\cdot}031, \quad \alpha = 103°2, \quad i = 114°1$$

$$\gamma = 206°4, \quad \frac{d\alpha}{d\odot} = -0{\cdot}204,$$

woraus folgt:

$$\frac{d\lambda}{d\odot} = +1{\cdot}12, \quad \frac{d\beta}{d\odot} = +1{\cdot}12,$$

welche Zahlen also, wenn man $d\odot = 1°$ nimmt, die Verschiebung des Radianten in Graden nach Länge und Breite für einen Grad Änderung der Sonnenlänge darstellen. Nimmt man sie für einige Grade der Veränderung in $\odot$ als constant an, so würden sich

dann die Positionen des Radianten in den nächst liegenden Epochen (auf halbe Grade abgerundet) wie folgt, ergeben:

		λ	β	AR.	Decl.
August	7·5	57°0	+35°0	42°0	+53°0
„	10·5	60·0	+38·0	44·0	+57·0
„	13·5	63·5	+41·5	45·5	+60·5.

Die Verschiebung im grössten Kreise während dieser sechs Tage würde also etwas mehr als 8° betragen.[1]

Man kann aus den obigen Ausdrücken jene besonderen Fälle finden, in welchen jedesmal $\frac{d\lambda}{d\odot} = 0$ oder $\frac{d\beta}{d\odot} = 0$ werden, d. h. die Wendepunkte in Länge oder Breite, aber man findet auch, dass beide zugleich nur dann Null werden können, wenn der Differentialquotient der Breite für alle möglichen Werthe von $\lambda - \odot$ Null ist, d. h. in der Ekliptik. Es gibt also ausser den schon bestimmten Stillstandspunkten in der Ekliptik keine anderen mehr. Dagegen lässt sich leicht zeigen, dass das allgemeine Maximum für Positionen ausserhalb der Ekliptik eintritt. Wäh-

---

[1] Dieser gut bekannte und viel beobachtete Radiant wurde hier nur beispielsweise gewählt, ohne die Annahme damit zu verbinden, dass die fundamentale Voraussetzung, auf welche sich diese Betrachtungen gründen, gerade auf denselben anwendbar sein müssten.

Die von Weiss (a. a. O., p. 301) gelegentlich berechneten Alternativen der Verschiebung dieses Radianten basiren auf etwas anderen Voraussetzungen. In dem einen Falle wird von der Bahn des Kometen 1862 III die Neigung und der Abstand des Perihels vom Knoten, im anderen, Neigung und Länge des Perihels als constant angesehen. In Folge der unverändert beibehaltenen Neigung erscheint dort die Veränderung in Breite ganz unbedeutend, während jene in Länge wohl ungefähr mit den obigen Resultaten übereinstimmt. Nach unserer Voraussetzung wird nur die Position des Aphels als constant betrachtet.

Ob irgend eine Verschiebung des Perseidenradianten thatsächlich beobachtet wurde, und welche, dies festzustellen müsste Gegenstand besonderer und viel sorgfältigerer Untersuchungen sein, als wir solche hierüber besitzen, denn die neueren Reductionen geben für diese Epoche in jener Gegend des Himmels eine Anzahl sehr nahe beisammen liegender Radianten, welche den älteren Bearbeitern nicht bekannt waren, so dass ihre Resultate durch Verwechslungen oder irrige Zusammenfassungen möglicherweise sehr entstellt sein können.

rend nämlich, wie wir gesehen haben, für Verschiebungen in der Ekliptik $\frac{d\lambda}{d\odot}$ endlich bleibt, werden ausser derselben beide Differentialquotienten für jeden Werth von v in gewissen Fällen unendlich. Dies tritt, wie man aus dem System IX erkennt, ein, wenn $\frac{di}{d\odot} = \infty$ ist. Für $\gamma = 0$ oder $\gamma = 180$ wird cotang $\gamma = \pm\infty$. Im ersteren Falle wird jedoch auch $\alpha = 0$, $i = 0$ und $\frac{di}{d\odot} = 0$. Für $\gamma = 180$ tritt der in der Discussion des Gleichungssystems I) schon erwähnte Fall der Unbestimmtheit von i ein, und es wird $\frac{di}{d\odot} = \infty$.

Wie dort schon auseinandergesetzt wurde, liegen die Positionen des wahren Radianten, für welche dies eintritt, in einem Kleinkreise vom Radius arctang $\sqrt{\frac{2}{v^2-2}}$ um den Sonnenort. In Folge der Aberration wird hieraus eine sphärische Ellipse, deren Mittelpunkt gegen den Sonnenort in der Richtung des Apex verschoben ist, und deren Axenverhältnisse sich nach dem Gesagten unschwer ausmitteln lassen. Übrigens ist diese Curve bestimmt durch die Gleichung

$$\text{tang}\,\beta = \cos(\lambda-\odot)\sqrt{\frac{2-[1+\sqrt{v^2-2}\,\text{tang}(\lambda-\odot)]^2}{v^2-2}},$$

aus welcher sie sich leicht construiren lässt.

So beträgt z. B. für $v = 2$ die in der Ekliptik liegende Halbaxe 37°95, die andere 41·5° und der Mittelpunkt liegt in $\lambda-\odot = 338{\cdot}3°$ oder 21·7° von der Sonne gegen den Apex. Punkte dieser Curve sind beispielsweise folgende:

Für $v = 2$, wird $\frac{d\lambda}{d\odot} = \infty$, $\frac{d\beta}{d\odot} = \infty$, bei:

$\lambda-\odot$	β	$\lambda-\odot$	β
300°5	2°0	340°	41°4
301	8·3	345	41·0
302	13·4	350	39·8
305	21·7	355	37·0

$\lambda - \odot$	β	$\lambda - \odot$	β
310°	29°4	0°	35°3
315	34·1	5	30·8
320	37·2	10	24·8
325	39·3	15	12·1
330	40·7	16	5·0
335	41·4	—	—

Wenn die beiden Differentialquotienten unendlich werden, so hat dies natürlich nicht die Bedeutung unendlich grosser Verschiebungen. Vielmehr werden dann $d\lambda$ und $d\beta$ endlich, für unendlich kleine Änderungen in $\odot$. Dieselben lassen sich auch in jedem Falle bestimmen, und bestehen immer in der Übertragung der betreffenden Position in die Ekliptik, sobald der betreffende Werth von $\lambda - \odot$ eine unendlich kleine Veränderung erleidet. Um dies einzusehen, muss man sich an die Voraussetzungen über die Constitution der Ströme erinnern. Denkt man sich den kosmischen Ausgangspunkt eines solchen in absoluter Conjunction mit der Sonne, so werden die Theile desselben je nach ihrem linearen Abstande von der Conjunctionslinie, sehr verschiedene Periheldistanzen und ihre Bahnen alle möglichen Neigungen haben können. Alle jene von gleicher Periheldistanz gehen in congruenten Hyperbeln, von welchen die eine Asymtote gegen den gleichen kosmischen Ausgangspunkt gerichtet ist, während die anderen Äste sich in einem Punkte der Conjunctionslinie schneiden. Der geometrische Ort dieser Bahnen ist also eine hyperbolische Umdrehungsfläche, deren Axe durch den Sonnenort und den Ausgangspunkt bestimmt ist. Trifft nun der eine Hyperbelast die Erde, so wird, weil i im Allgemeinen jeden Werth haben kann, gemäss Gleichung II) auch allgemein weder der wahre noch der scheinbare Radiant in der Ekliptik liegen, vielmehr sind die möglichen Orte derselben eben die früher erörterten sphärischen Curven.

Sobald jedoch eine Veränderung in $\odot$ eintritt, befindet sich die Erde nicht mehr in der Axe dieser hyperbolischen Umdrehungsfläche, und nur jene zwei Hyperbeläste können sie treffen, welche in der Ekliptik liegen. Die Verschiebung des scheinbaren Radianten findet demnach statt, aus der Position der gedachten Curve in einen der beiden Schnitte derselben mit der Ekliptik.

Zur Ergänzung der im vorhergehenden Abschnitte hinsichtlich der Radianten der Ekliptik angestellten Betrachtungen kann also auch erinnert werden, dass, wenn der kosmische Ausgangspunkt genau in der Ekliptik gedacht wird, im Falle der absoluten Conjunction desselben der wahre Radiant nicht allein in der Ekliptik, sondern auch noch in jedem Punkte der erörterten sphärischen Curve liegen kann, sowie dass diese unendlich vielen, demselben Ausgangspunkte entsprechenden Radianten, je nach der räumlichen Constitution des Stromes, gleichzeitig vorkommen können. Die reale Wahrscheinlichkeit dieses Falles ist jedoch, da er an eine genaue theoretische Bedingung gebunden ist, unendlich klein.

Nach dieser mehr geometrischen Abschweifung kommen wir auf die Discussion der allgemeinen Gleichungen IX) zurück.

Einfache Ausdrücke der beiden Differentialquotienten erhält man für einige Hauptlagen, nämlich für den Breitenkreis durch Apex und Antiapex, sowie für den um 90° davon abstehenden.

Für die beiden ersten Fälle ist $\lambda - \odot = \mp 90°$, und man findet aus den allgemeinen Gleichungen nach einiger Reduction hiefür:

$$\text{XI)}\quad \begin{cases} \cos\beta \dfrac{d\lambda}{d\odot} = \pm \dfrac{\sqrt{v^2 - \sin^2\beta}}{v^2} \\[2ex] \dfrac{d\lambda}{d\odot} = \pm \dfrac{\sqrt{v^2 - \sin^2\beta}}{v^2 \cos\beta} \\[2ex] \dfrac{d\beta}{d\odot} = \mp \dfrac{\sqrt{v^2 - \sin^2\beta}}{v^2\sqrt{v^2 - 2}} \cdot \sin\beta \\[2ex] \dfrac{d\beta}{d\lambda} = - \dfrac{\sin 2\beta}{2\sqrt{v^2 - 2}}, \end{cases}$$

wobei das obere Zeichen für die Länge des Apex ($\lambda - \odot = -90°$), das untere für jene des Antiapex ($\lambda - \odot = +90°$) gilt.

Die Grössen der Verschiebung liegen also in diesen beiden Breitenkreisen für jede Geschwindigkeit v symmetrisch. Während jedoch die Bewegung in Länge für den Breitenkreis des Apex direct ist, wird sie für jenen des Antiapex retrograd. Entwickelt man, um Näherungswerthe zu erhalten, die beiden Ausdrücke in

Reihen, welche bei etwas grösseren Werthen von v stark convergiren, so ist:

$$\text{XI}a)\quad \begin{cases} \cos\beta\,\dfrac{d\lambda}{d\odot} = \pm\dfrac{1}{v}\left\{1 - {}^1/_2\,\dfrac{\sin^2\beta}{v^2} - {}^1/_8\,\dfrac{\sin^4\beta}{v^4} - \ldots\right\} \\ \dfrac{d\beta}{d\odot} = \mp\dfrac{\sin\beta}{v\sqrt{v^2-2}}\left\{1 - {}^1/_2\,\dfrac{\sin^2\beta}{v^2} - {}^1/_8\,\dfrac{\sin^4\beta}{v^4} - \ldots\right\} \end{cases}$$

Da für $r \gtreqless \sqrt{2}$ schon das zweite Glied in beiden Ausdrücken sehr klein wird, kann man sagen, dass der Parallelbogen, welcher der Längenverschiebung entspricht, für alle Breiten fast constant und r verkehrt proportionirt ist, während die Verschiebung in Breite mit dem sinus der letzteren wächst.

Ist $\dfrac{ds}{d\odot}$ die Gesammtverschiebung im grössten Kreise, so kann wenigstens auf einige Hundertel des Differentialquotienten genau gesetzt werden:

$$\text{XII})\quad \frac{ds}{d\odot} = \frac{1}{v}\left[1 + \frac{\sin^2\beta}{v^2(v^2-2)}\right].$$

Dieselbe nimmt also für $v > 2$ gegen den Pol etwas zu, und ist übrigens für etwas grössere Werthe von v nahezu der Geschwindigkeit verkehrt proportional.

Ist $\beta = 90°$, oder der Radiant im Pol der Ekliptik, so kann wohl eigentlich nur von einer Verschiebung in Breite die Rede sein, da die Länge der ursprünglichen Position unbestimmt ist. Allein, die beiden Ausdrücke geben auch hier die zwei Componenten, in welche man sich die Gesammtverschiebung zerlegt denken kann, nämlich:

$$\text{XIII})\quad \begin{cases} \cos\beta\,\dfrac{d\lambda}{d\odot} = \dfrac{\sqrt{v^2-1}}{v^2} \\ \dfrac{d\beta}{d\odot} = \dfrac{\sqrt{v^2-1}}{v^2\sqrt{v^2-2}} \\ \dfrac{ds}{d\odot} = \dfrac{v^2-1}{v^2\sqrt{v^2-2}}. \end{cases}$$

Für $v = \sqrt{2}$ erhält man, im Sinne der früheren Betrachtungen, da der Kleinkreis in den grössten Kreis durch Apex, Po- und Antiapex übergeht, $\frac{d\beta}{d\odot} = \infty$.

Etwas weniger einfach werden die Ausdrücke für die Breitenkreise der Opposition ($\lambda - \odot = 180$) und Conjunction ($\lambda - \odot = 0$). Führt man dies in die allgemeinen Gleichungen ein, und setzt zur Abkürzung:

$$\sqrt{\frac{v^2-2}{v^2-1}} = n, \tag{24}$$

so erhält man für diese beiden Fälle:

$$\text{XIV} \left\{ \begin{aligned} \cos\beta \frac{d\lambda}{d\odot} &= \frac{1 \pm n\cos\beta}{\pm n + \cos\beta} \cdot \frac{1}{v^2 \pm (v^2-1) n \cos\beta} \\ \frac{d\beta}{d\odot} &= \pm \left\{ 1 - \frac{\pm n}{[\pm n + \cos\beta][v^2 \pm (v^2-1) n \cos\beta]} \right\} \frac{\sin\beta}{\sqrt{v^2-1}}, \end{aligned} \right.$$

wobei für $\lambda - \odot = 180°$ das obere,
" $\lambda - \odot = 0$ das untere Zeichen gilt.

Für $v = \sqrt{2}$ wird wegen $n = 0$

$$\frac{d\lambda}{d\odot} = \frac{1}{2\cos^2\beta} \quad \frac{d\beta}{d\odot} = \pm \sin\beta.$$

Ist $\lambda - \odot = 180$, so kann für grössere Werthe von v als Näherung genommen werden:

$$\text{XIV } a) \left\{ \begin{aligned} \cos\beta \frac{d\lambda}{d\odot} &= \frac{1}{v^2 + \sqrt{(v^2-1)(v^2-2)}\cos\beta} \\ \frac{d\beta}{d\odot} &= \frac{\sin\beta}{\sqrt{v^2-1}}. \end{aligned} \right.$$

Es ist wesentlich zu bemerken, dass also bei der Opposition in Länge die Verschiebung im Parallel für nicht allzugrosse Werthe von β von der Ekliptik aus nur sehr langsam, dagegen jene in Breite ungefähr nach dem sinus derselben wächst. In Bezug auf die Geschwindigkeit wird also auch beiderseits der Ekliptik bei Vergrösserung von v die erstere Verschiebung un-

gefähr im quadratischen, die anderen aber nur nahe im einfachen Verhältnisse von v abnehmen. Da, wie wir früher gesehen haben, für die Opposition die Verschiebung in der Ekliptik, bei ausgeprägt hyperbolischen Bahnen sehr klein ist, so hängt ihre Zunahme in höheren Breiten hauptsächlich von sin β ab, und man kann demnach das für die Ekliptik Gesagte ungefähr so weit ausdehnen als dieser Einfluss noch nicht sehr merklich wird.

Ist dagegen $\lambda - \odot = 0$, so erleiden beide Differentialquotienten mit β grosse Veränderungen. Im Allgemeinen werden sowohl $\frac{d\lambda}{d\odot}$ als $\frac{d\beta}{d\odot}$ unendlich, für $\cos\beta = \sqrt{\frac{v^2-2}{v^2-1}}$.

Dies ist jener Punkt, in welchem die früher erwähnte Curve den Breitenkreis der Conjunction schneidet. Andererseits befindet sich in dieser Länge auch ein Wendepunkt in Breite, weil

$$\frac{d\beta}{d\odot} = 0 \text{ wird, für } \cos\beta = \frac{\sqrt{v^2-1}-1}{\sqrt{v^2-2}}.$$

Dagegen kommt in derselben ein Wendepunkt in Länge nicht vor, da n stets kleiner als 1 sein muss.

Da sich die meisten beobachteten Sternschnuppenradianten auf der Kugelhälfte befinden, welche der Sonne gegenüber liegt, so concentrirt sich unser Interesse zunächst hauptsächlich auf diese. In der folgenden Tafel findet man für die opponirte Kugelhälfte eine Übersicht der Verschiebungen in je um 30° abstehenden Breitenkreisen, und für $v = \sqrt{2}$, wie auch für $v = 2$. Der letztere Werth von rund 8 geographischen Meilen heliocentrischer Geschwindigkeit wurde gewählt, nicht um damit die Annahme zu verbinden, dass dies die wirkliche durchschnittliche Geschwindigkeit der Meteore sei, sondern weil sich bei dieser noch immer mässigen und oft mit Sicherheit beobachteten Grösse die Eigenschaften ausgeprägter Hyperbeln schon sehr entschieden herausstellen.

Die III. Tafel dient zur Ergänzung, indem sie die Verschiebungen auch noch für grössere Geschwindigkeiten, wenigstens in den vier Hauptlagen darstellt.

Tafel II.

Für die Verschiebung des scheinbaren Radianten $\left(\frac{d\lambda}{d\odot}\right.$, $\cos\beta\frac{d\lambda}{d\odot}$, $\frac{d\beta}{d\odot}$ und $\left.\frac{ds}{d\odot}\right)$ auf der der Sonne gegenüberliegenden Kugelhälfte, d. i. zwischen den Breitenkreisen $\lambda - \odot = 90°$ (Antiapex) und $\lambda - \odot = 270°$ (Apex) für $v = \sqrt{2}$ und $v = 2$ oder nahe für 5·6 g. M. und 8 g. M. angenommene heliocentrische Geschwindigkeit der Meteore.

Der Einfachheit halber sind nur nördliche Breiten angesetzt; für die südlichen hat man die Vorzeichen von β und $d\beta$ gleichzeitig zu wechseln.

$\beta°$	$v = \sqrt{2}$				$v = 2$			
	$\frac{d\lambda}{d\odot}$	$\cos\beta\frac{d\lambda}{d\odot}$	$\frac{d\beta}{d\odot}$	$\frac{ds}{d\odot}$	$\frac{d\lambda}{d\odot}$	$\cos\beta\frac{d\lambda}{d\odot}$	$\frac{d\beta}{d\odot}$	$\frac{ds}{d\odot}$
	$\lambda - \odot$ 90°							
0	—0·71	—0·71			—0·50	—0·50	+0·00	0·50
10	0·71	0·70			0·51	0·50	0·06	0·50
20	0·73	0·69			0·52	0·49	0·12	0·50
30	0·76	0·66			0·56	0·49	0·17	0·51
40	0·81	0·62	∞	∞	0·62	0·47	0·21	0·51
50	0·94	0·59			0·72	0·46	0·25	0·52
60	1·12	0·56			0·90	0·45	0·28	0·52
60	1·55	0·53			1·29	0·44	0·29	0·53
80	—2·94	—0·51			—2·51	—0·43	+0·30	0·53
	$\lambda - \odot = 120°$							
0	—0·45	—0·45	+0·00	0·45	—0·43	—0·43	+0·00	0·43
10	0·44	0·44	0·50	0·66	0·43	0·43	0·10	0·44
20	0·42	0·39	1·18	1·24	0·44	0·41	0·19	0·46
30	0·33	0·29	1·75	1·77	0·46	0·40	0·28	0·48
40	—0·20	—0·15	2·21	2·22	0·49	0·38	0·34	0·51
50	+0·06	+0·01	2·66	2·66	0·55	0·35	0·40	0·53
60	0·68	0·34	3·15	3·17	0·64	0·32	0·43	0·54
70	2·58	0·88	3·95	4·04	0·85	0·29	0·46	0·54
80	+13·69	+2·38	+6·34	6·77	—1·48	—0·26	+0·47	0·54
	$\lambda - \odot = 150°$							
0	+0·09	+0·09	+0·00	0·09	—0·13	—0·13	+0·00	0·13
10	0·11	0·11	0·33	0·35	0·14	0·13	0·11	0·18
20	0·15	0·14	0·65	0·66	0·14	0·13	0·22	0·26
30	0·23	0·20	0·94	0·96	0·14	0·12	0·32	0·34
40	0·38	0·29	1·18	1·22	0·14	0·11	0·40	0·41
50	0·68	0·44	1·37	1·44	0·14	0·09	0·46	0·47
60	1·36	0·68	1·62	1·76	0·14	0·07	0·50	0·51
70	3·41	1·17	1·92	2·24	0·12	0·04	0·53	0·53
80	+15·01	+2·61	+2·72	3·77	—0·01	—0·00	+0·53	0·53

β°	$r=\sqrt{2}$: $\frac{d\lambda}{d\odot}$	$\cos\beta\frac{d\lambda}{d\odot}$	$\frac{d\beta}{d\odot}$	$\frac{ds}{d\odot}$	$v=2$: $\frac{d\lambda}{d\odot}$	$\cos\beta\frac{d\lambda}{d\odot}$	$\frac{d\beta}{d\odot}$	$\frac{ds}{d\odot}$
				$\lambda-\odot=180^\circ$				
0	+0·50	+0·50	+0·00	0·50	+0·15	+0·15	+0·00	0·15
10	0·52	0·51	0·17	0·54	0·16	0·16	0·12	0·20
20	0·56	0·53	0·34	0·63	0·17	0·16	0·19	0·25
30	0·67	0·58	0·50	0·77	0·19	0·17	0·26	0·31
40	0·85	0·65	0·64	0·91	0·22	0·17	0·32	0·36
50	1·21	0·78	0·77	1·09	0·28	0·18	0·39	0·43
60	2·00	1·00	0·87	1·32	0·42	0·21	0·44	0·49
70	4·28	1·46	0·94	1·74	0·67	0·23	0·46	0·51
80	+16·53	+2·87	+0·98	3·03	+1·50	+0·26	+0·46	0·53
				$\lambda-\odot=210^\circ$				
0	+0·65	+0·65	+0·00	0·65	+0·33	+0·33	+0·00	0·33
10	0·67	0·66	0·05	0·67	0·34	0·33	0·05	0·34
20	0·74	0·69	0·11	0·70	0·36	0·34	0·11	0·36
30	0·86	0·74	0·17	0·76	0·41	0·35	0·16	0·39
40	1·08	0·83	0·21	0·85	0·49	0·37	0·20	0·43
50	1·49	0·96	0·25	0·99	0·60	0·39	0·24	0·46
60	2·39	1·18	0·36	1·23	0·81	0·41	0·27	0·49
70	4·89	1·67	0·64	1·76	1·27	0·43	0·29	0·52
80	+16·90	+2·95	+1·48	3·30	+2·64	+0·45	+0·26	0·53
				$\lambda-\odot=240^\circ$				
0	+0·70	+0·70	−0·00	0·70	+0·43	+0·43	+0·00	0·43
10	0·72	0·71	0·05	0·71	0·43	0·43	0·01	0·43
20	0·79	0·74	0·11	0·75	0·46	0·43	0·02	0·43
30	0·93	0·81	0·16	0·82	0·52	0·45	0·03	0·45
40	1·16	0·89	0·29	0·93	0·61	0·46	0·03	0·46
50	1·61	1·03	0·47	1·13	0·75	0·48	0·03	0·48
60	2·58	1·29	0·79	1·51	1·00	0·50	0·02	0·50
70	5·22	1·79	1·50	2·33	1·51	0·52	+0·01	0·52
80	+18·73	+3·25	−3·86	5·04	+3·04	+0·53	−0·02	0·53
				$\lambda-\odot=270^\circ$				
0	+0·71	+0·71			+0·50	+0·50	−0·00	0·50
10	0·71	0·70			0·51	0·50	0·06	0·50
20	0·73	0·69			0·52	0·49	0·12	0·50
30	0·76	0·66			0·56	0·49	0·17	0·51
40	0·81	0·62	∞	∞	0·62	0·47	0·21	0·51
50	0·94	0·59			0·72	0·46	0·25	0·52
60	1·12	0·56			0·90	0·45	0·28	0·52
70	1·55	0·53			1·29	0·44	0·29	0·53
80	+2·94	+0·51			+2·51	+0·43	−0·30	0·53

Tafel III.

Für die Verschiebung des scheinbaren Radianten in vier Hauptlagen, bei verschiedenen Werthen der heliocentrischen Geschwindigkeit v. (Zur Abkürzung ist hier für die Verschiebung in Länge nur der betreffende Bogen des Parallels: $\cos\beta\frac{d\lambda}{d\odot}$ angesetzt.)

β°	$v=\sqrt{2}$			$v=2$			$v=2\cdot5$			$v=3$		
	$\cos\beta\frac{d\lambda}{d\odot}$	$\frac{d\beta}{d\odot}$	$\frac{ds}{d\odot}$	$\cos\beta\frac{d\lambda}{d\odot}$	$\frac{d\beta}{d\odot}$	$\frac{ds}{d\odot}$	$\cos\beta\frac{d\lambda}{d\odot}$	$\frac{d\beta}{d\odot}$	$\frac{ds}{d\odot}$	$\cos\beta\frac{d\lambda}{d\odot}$	$\frac{d\beta}{d\odot}$	$\frac{ds}{d\odot}$
	$\lambda-\odot=0^\circ$. (Breitenkreis der Conjunction.)											
0	+0·50	−0·00	0·50	+0·64	−0·00	0·64	+0·65	−0·00	0·65	+ 0·67	− 0·00	0·67
10	0·51	0·17	0·54	0·72	0·53	0·89	0 84	0·58	1 02	0·97	0 77	1·24
20	0·53	0·34	0·63	1·12	0·95	1·47	+2·13	−2·00	2·92	+13·34	−12·62	18·36
30	0·58	0·50	0·77	+3·15	−2·82	4·23	−2·91	+2·43	3·79	− 1·09	+ 0·77	1·33
40	0·65	0·64	0·91	−3·67	+2·59	4·49	0·88	0·43	0·98	0·51	+ 0·16	0·53
50	0 78	0·77	1·09	1·13	+0·41	1·20	0·51	+0·03	0·51	0·32	− 0·06	0·33
60	1·00	0·87	1·32	0·66	−0·03	0·66	0·35	−0·16	0·38	0·23	0·18	0·29
70	1·46	0·94	1·74	0·48	0·28	0·56	0·27	0·27	0·38	0·18	0·25	0·31
80	+2·87	−0·98	3·03	−0·35	−0·37	0·51	−0·21	−0·33	0·39	− 0·14	− 0·29	0·32

$\beta°$	$r = \sqrt{2}$			$r = 2$			$r = 2\cdot5$			$r = 3$		
	$\cos\beta\,\frac{d\lambda}{d\odot}$	$\frac{d\beta}{d\odot}$	$\frac{ds}{d\odot}$	$\cos\beta\,\frac{d\lambda}{d\odot}$	$\frac{d\beta}{d\odot}$	$\frac{ds}{d\odot}$	$\cos\beta\,\frac{d\lambda}{d\odot}$	$\frac{d\beta}{d\odot}$	$\frac{ds}{d\odot}$	$\cos\beta\,\frac{d\lambda}{d\odot}$	$\frac{d\beta}{d\odot}$	$\frac{ds}{d\odot}$
	$\lambda-\odot = 90°$. (Breitenkreis des Antiapex, oberes Zeichen.) $\lambda-\odot = 270°$. „ „ Apex, unteres „											
0	∓0·71			∓0·50	±0·00	0·50	∓0·40	±0·00	0·40	∓0·33	∓0·00	0·33
10	0·70			0·50	0·06	0·50	0·40	0·03	0·40	0·33	0·02	0·33
20	0·69			0·49	0·12	0·50	0·40	0·07	0·40	0·33	0·04	0·33
30	0·66			0·49	0·17	0·51	0·39	0·09	0·40	0·33	0·06	0·33
40	0·62	∞	∞	0·47	0·21	0·51	0·39	0·12	0·41	0·33	0·08	0·33
50	0·59			0·46	0·25	0·52	0·38	0·14	0·41	0·32	0·09	0·34
60	0·56			0·45	0·28	0·52	0·37	0·16	0·41	0·32	0·10	0·34
70	0·53			0·44	0·29	0·53	0·37	0·17	0·41	0·32	0·11	0·34
80	∓0·51			∓0·43	±0·30	0·53	∓0·37	±0·18	0·41	∓0.31	∓0·12	0·34
	$\lambda-\odot = 180°$. (Breitenkreis der Opposition.)											
0	+0·50	+0·00	0·50	+0·15	+0·00	0·15	+0·09	+0·00	0·00	+0·06	+0·00	0·06
10	0·51	0·17	0·54	0·16	0·12	0·20	0·09	0·07	0·11	0·06	0·06	0·08
20	0·53	0·34	0·63	0 16	0·19	0·25	0·09	0·14	0·17	0·06	0·12	0·14
30	0·58	0·50	0·77	0·17	0·26	0·31	0·10	0·21	0·23	0·06	0·17	0·18
40	0·65	0·64	0·91	0·17	0·32	0·36	0·10	0·26	0 28	0·07	0·22	0·23
50	0·78	0·77	1·09	0·18	0·39	0 43	0·11	0 31	0·33	0·07	0·26	0·27
60	1·00	0·87	1·32	0·21	0 44	0·49	0·12	0·35	0·37	0·08	0·29	0·30
70	1·46	0·94	1·74	0·23	0·46	0·51	0·13	0·37	0·40	0·09	0·31	0·32
80	+2·87	+0·98	3·03	+0·26	+0·46	0·53	+0·15	+0·38	0·41	+0·10	+0·32	0·34

Für den Pol der Ekliptik sind:

bei $v = \sqrt{2}$	die beiden Componenten:	0·50 und ∞;	$\frac{ds}{d\odot} = \infty$
„ $v = 2·0$	„ „ „	: 0·43 „ 0·31;	„ $= 0·53$
„ $v = 2·5$	„ „ „	: 0·37 „ 0·21;	„ $= 0·42$
„ $v = 3·0$	„ „ „	: 0·31 „ 0·12;	„ $= 0·34$.

Die Differentialquotienten in diesen Tafeln geben die betreffenden Verschiebungen für je einen Grad Änderung in der Sonnenlänge. Man erhält hieraus die tägliche Verschiebung, wenn man dieselben mit der täglichen Veränderung der Sonnenlänge, also durchschnittlich mit 0·986 multiplicirt.

Diese Tafeln dienen, in Verbindung mit der früher mitgetheilten ersten für die Ekliptik, nicht allein zur Erleichterung der allgemeinen Übersicht, sondern sie ermöglichen auch, wenn der für v supponirte Werth den Tafel-Argumenten entspricht, in irgend einem besonderen Falle für gegebene $\lambda - \odot$ und β wenigstens auf der, der Sonne gegenüber liegenden Hälfte, die Grösse der täglichen Verschiebung des Radianten durch Interpolation zu finden.

Nimmt man z. B. den Radianten der „Geminid" Meteore für December 11: AR = 107° Decl. = +33·5°.[1] oder $\lambda = 111°$ $\beta = +10·5°$, so ist $\lambda - \odot = 212°$.

Hiemit folgt aus der II. Tafel

$$\text{für } v = \sqrt{2} \quad \frac{d\lambda}{d\odot} = +0°67 \quad \frac{d\beta}{d\odot} = +0°05$$

$$„ \; v = 2 \quad \frac{d\lambda}{d\odot} = +0·34 \quad \frac{d\beta}{d\odot} = +0·05$$

und dies wären auch ziemlich genau die täglichen Veränderungen für die eine oder die andere Geschwindigkeit. Insoferne man diese Verschiebung für einige Tage nahe als constant nehmen kann, beträgt dieselbe also in 10 Tagen im ersten Falle rund 6·5°, im zweiten 3·5°, im selben Sinne wie die Veränderung

[1] Epoche und Position entsprechen einer übersichtlichen Zusammenstellung der verschiedenen Bestimmungen dieses Radianten in dem Report of the brit. Ass. 1879.

in ⊙, so dass z. B. für die kometarische Geschwindigkeit, aus der obigen Mittelposition die Orte für December 6: $\lambda = 107^3/_4$, $\beta = 10^1/_4$ und für December 16: $\lambda = 114^1/_4$, $\beta = 10^3/_4{}^\circ$ wären.

In einem früheren Abschnitte wurde gezeigt, wie die Curve, welche der scheinbare Radiant beschreibt, auch construirt werden könne. Die graphische Bestimmung der täglichen Bewegung ergibt sich daraus von selbst.

Wegen der Unsicherheit, welche der Bestimmung der Radiationspunkte stets anhaftet, können diese durch längere Zeit scheinbar stabil bleiben, so lange $\frac{ds}{d\odot}$ innerhalb gewisser Grenzen ist. Es lassen sich demnach für jede Geschwindigkeitshypothese auch zwei, um die beiden absoluten Stillstandspunkte liegende Räume begrenzen, innerhalb welchen der betreffenden Forderung genügt wird. Die Dimensionen derselben wachsen, sobald man grössere Geschwindigkeiten annimmt, nur im Sinne der Länge beiläufig im quadratischen Verhältnisse, in den Breiten jedoch nahe im einfachen. Innerhalb jener Grenzen, welche dieser Näherung entsprechen, wachsen also die Flächen für stabile Radianten, ungefähr nach der dritten Potenz der Geschwindigkeit. Sie befinden sich, wie wir gesehen haben, beiderseits der Ekliptik und mit ihren Centren zwischen Antiapex und Conjunction einerseits, sowie zwischen jenem und der Opposition anderseits, und befinden sich über dem Horizonte, wenn nach Eintritt der Dunkelheit Meteorbeobachtungen begonnen werden, während jene Partien, welche für alle Geschwindigkeitsannahmen die grösste Verschiebung zeigen, beiläufig im Kugelausschnitte zwischen Apex und Conjunction liegen, also erst gegen Morgen zur Wirksamkeit gelangen. Die Angaben über lange dauernde und fast stabile Radiationen können daher für einige Radianten, selbst unter Voraussetzung von Geschwindigkeiten, welche die kometarische kaum übersteigen, richtig sein (was auch schon früher an einem Beispiele gezeigt wurde) und sich thatsächlich auf denselben Strom beziehen. Doch ist der Raum für dieselben sehr beschränkt. Bei vielen wird dies nur unter Voraussetzung wesentlich grösserer Geschwindigkeiten zugestanden werden können, während

man endlich bei manchen wohl auch bei Annahme sehr grosser Geschwindigkeit zu dem Schlusse gelangen muss, dass die lange Dauer der Radiation durch eine Complication verschiedener Ströme veranlasst sein mag, wobei die Einzelheiten der Erscheinung wegen Mangel an Beobachtungsmaterial und durch die Methode des Zusammenziehens der Bestimmungen aus verschiedenen Epochen verdeckt geblieben sind.

Würde man sich die Aufgabe vorsetzen, aus den Beobachtungen mit einer gewissen überzeugenden Sicherheit festzustellen, ob es denn wirklich Ströme grossen Querschnittes, also reell anhaltende Radianten gibt, welche sich dann durch ihre Verschiebung zu erkennen geben müssten, so wären dazu jene Partien des Himmels am geeignetsten, wo die Verschiebung für alle Geschwindigkeitshypothesen am grössten ist, nämlich vom Breitenkreise des Apex gegen die Sonne zu, entsprechend den Morgenbeobachtungen. Wollte man dann, sobald sich in dieser Hinsicht ein greifbares Resultat herausstellt, gewissermassen Proben auf die Grösse der Geschwindigkeit anstellen, so wären die Lagen in der Gegend der Opposition in Betracht zu ziehen, wo die tägliche Verschiebung für kometarische Geschwindigkeiten noch recht ansehnlich, dagegen für einigermassen grössere schon sehr klein wird.

Ich will mich vorläufig enthalten, hier Proben solcher Versuche mitzutheilen. Die bisher bekannten Radiantenverzeichnisse lassen zwar manche Vermuthungen zu, aber es fehlt den Schlüssen, welche man aus einzelnen Reihen vielleicht ziehen könnte, noch die überzeugende Kraft, weil jene noch zu viele Lücken aufweisen. Überhaupt sind eigentlich alle Radiantenkataloge für solche Detailarbeiten wenig brauchbar. Es müssten, gestützt auf die Originalbeobachtungen, besondere Reductionen und monographische Bearbeitungen einzelner Radiationen vorgenommen werden, für welche im Nothfalle die Materialien verschiedener Orte und Jahre, aber stets nur weniger Tage je zu einer Reduction in Verwendung kommen dürften. Hiebei zeigt sich vor der Hand freilich die Schwierigkeit, dass für viele Epochen überhaupt noch zu wenig Beobachtungen vorliegen, so dass also die letzeren noch eine weitere Ausdehnung erlangen müssen.

Im Allgemeinen ist, was gegenwärtig zu thun wäre, nie treffender charakterisirt worden, als schon vor 12 Jahren von Dr. Weiss, indem er (a. a. O. p. 302) sagt: ... „es ist durch die neueren Untersuchungen unsere Meteorastronomie bereits in jenes Stadium getreten, in welchem nur mehr Detailstudien sie wesentlich fördern können“.

Solche Detailstudien sind jedoch seit jener Zeit fast ausschliesslich auf dem Wege vorgenommen worden, welcher von der Annahme einheitlich kometarischer Geschwindigkeit der Meteore als einer feststehenden, nicht weiter zu beweisenden Thatsache ausgeht, wobei man also um die Ermittlung der Geschwindigkeit gar nicht mehr bekümmert ist. Es müsste indessen aber auch Jenen, welche von der Realität dieser Voraussetzung, gegen welche doch so viele Beobachtungen sprechen, unerschütterlich überzeugt sind, wichtig erscheinen, die Bestätigung derselben auch auf diesem Wege zu erlangen.

Sollte es gelingen, aus der Verschiebung der Radianten sichere Schlüsse auf die Geschwindigkeit der Meteore vor ihrem Eintritte in die Atmosphäre zu erlangen, so wären solche Resultate, abgesehen von der Erweiterung unserer kosmischen Kenntnisse, auch in manch' anderer Hinsicht von hohem Interesse, indem sie uns gestatten würden, unsere Erfahrungen, durch Vergleichung der reellen Geschwindigkeit mit der auf dem Wege durch die Atmosphäre beobachteten zu erweitern.

Beiträge zur Photochemie des Chlorsilbers.

Von Dr. **J. M. Eder** und Hauptmann **G. Pizzighelli.**

Über die Natur des latenten Lichtbildes auf Chlorsilber, und sein Verhalten gegen chemische Entwickler, liegen nur sehr spärliche und widersprechende Angaben vor.

Russel, der Entdecker der chemischen Entwicklung des latenten Lichtbildes auf Bromsilber, untersuchte zwar das Chlorsilber auch, jedoch ohne günstigen Erfolg. Er schreibt:[1] „Chlorsilber-Collodion mit alkalischem Entwickler (Pyragollol) gab ein Bild, welches rasch verschleierte"; fügt aber selbst hinzu, dass er das Chlorsilber noch nicht recht zu behandeln wisse.

Sutton, welcher diese Versuche wiederholte,[2] konnte keine Spur eines latenten Lichtbildes auf Chlorsilber erhalten.

Berkeley, welcher sich in neuerer Zeit mit demselben Gegenstande beschäftigte,[3] erhielt, wie aus seinen Notizen hervorgeht, keine entscheidenden Resultate, was seinen Grund darin haben mag, dass er mit Hydrosulfiten als Entwickler operirte.

Dieser Theil der Photochemie des Chlorsilbers war also so gut wie unbekannt; wir gingen desshalb an die Lösung folgender Fragen:

1. In welcher Weise ist lichtempfindliches, zur chemischen Entwicklung taugliches Chlorsilber herzustellen?
2. Welche Eigenschaften zeigt das auf Chlorsilber enstandene latente Lichtbild im Allgemeinen?
3. Welche Agentien eignen sich am besten zur chemischen Entwicklung des latenten Lichtbildes auf Chlorsilber?

---

[1] Photogr. Archiv 1867. pag. 41. (Aus den Photogr. News.)

[2] British Journal 1871. pag. 379.

[3] British Journal 1877. pag. 202. — Photogr. News 1880. pag. 233.

Mit der Lösung dieser Frage war zugleich ein anderes Ziel zu erreichen, nämlich: Die Herstellung von Photogrammen auf Chlorsilber mit chemischer Entwicklung — die Realisirung eines neuen Principes der Photographie.

Nachdem wir unsere Untersuchungen zu einem günstigen Abschlusse gebracht haben, legen wir die wesentlichen Resultate derselben hiemit vor.

I. Über das Verhalten des auf verschiedene Weise erzeugten Chlorsilbers gegen Licht und chemische Entwickler im Allgemeinen.

Homogene Chlorsilberschichten lassen sich nur dadurch erhalten, dass man das Chlorsilber in einem Bindemittel zu einer Emulsion vertheilt und derartige Emulsionen zur Präparation von lichtempfindlichen Schichten verwendet.

Das Chlorsilber verhält sich sehr verschieden, je nachdem es in einer indifferenten Substanz, wie Pyroxylin, oder in einer leicht oxydirbaren (chlorabsorbirenden) Substanz, wie Gelatine, vertheilt ist. Von nicht minder grossem Einflusse erweist sich der Umstand, ob das Chlorsilber mittelst überschüssigen Chlorides oder überschüssigen Silbernitrates dargestellt wurde.

1. Chlorsilber in einer indifferenten Substanz (Pyroxylin) vertheilt.

Die zu unseren Versuchen benützte Chlorsilber-Collodion-Emulsion wurde dargestellt durch Versetzen einer ätheralkoholischen Lösung von reiner Collodionwolle mit Chlormagnesium und allmähligen Zusatze von Silbernitrat.[1] Zur Entfernung der löslichen Salze wurde die Emulsion mit Wasser gefällt, gewaschen, getrocknet und wieder in Ätheralkohol gelöst; nach viermaligem Fällen und Wiederauflösen benützten wir sie zu unseren Versuchen.

[1] Als nähere Vorschrift zur Darstellung von Chlorsilber-Collodion-Emulsion mit überschüssigem Chloride kann man benützen:

Alkohol Äther (1:1) 100 Cub.-Cent., Chlormagnesium 2·0 Grm., Pyroxylin 2 Grm., Silbernitrat 4·4 Grm.

Die Lichtempfindlichkeit der Schichte stellten wir in den meisten Fällen dadurch fest, dass wir dünne damit überzogene Glasstreifen unter der Skala eines Vogel'schen Photometers belichteten; zunächst verglichen wir das bei Gegenwart von überschüssigem Silbernitrate erzeugte, dann gewaschene Chlorsilber, mit dem bei Gegenwart von überschüssigem Chlorid dargestellten. Es ergab sich, dass das mit überschüssigem Silbernitrat gefällte Chlorsilber sich im Lichte ein wenig rascher färbte, als das mit überschüssigem Chlorid erzeugte.[1] Wurde diese Schichte der Einwirkung eines chemischen Entwicklers (siehe unten) unterworfen, so fand eine durchgreifende Reduction, nicht nur jener Stellen statt, an welchen das Chlorsilber sichtlich dunkler gefärbt worden war, sondern die Reduction erstreckte sich um 5—10° des Photometers weiter; es steht somit ausser Zweifel, dass hier eine Entwicklung des latenten Lichtbildes stattfand.

Das mit überschüssigem Silbernitrat präparirte Chlorsilber war in Combination mit einem chemischen Entwickler lichtempfindlicher, als das mit überschüssigem Chlorid erzeugte, erlitt jedoch leicht eine unregelmässige Reduction, indem auch die nicht vom Lichte getroffenen Stellen reducirt wurden. War jedoch das Chlorsilber mit überschüssigem Chlorid dargestellt und demselben dann eine leicht oxydable organische Substanz (Tannin, Gallussäure, Morphinacetat etc.) beigemengt, so erreichte sie nicht nur die Lichtempfindlichkeit des mit überschüssigem Silbernitrat dargestellten Chlorsilbers völlig, sondern es übertraf das letztere sogar noch weit bezüglich der Regelmässigkeit, womit das latente Lichtbild durch den Entwickler reducirt wurde. Aus unseren Versuchen geht hervor, dass die chemische Entwicklung des latenten Bildes auf Chlorsilber weitaus besser und regelmässiger erfolgt, wenn Silbernitrat nicht einmal in Spuren zugegen ist.

---

[1] Dies stimmt mit den Angaben Monckhoven's (Photographie Notes, August. 1862, auch Poggendorff. Annal. Bd. 195. pag. 502) und H. W. Vogel's (Poggendorff Annal. Bd. 195. pag. 502) überein.

2. Über das Verhalten des in einer leicht oxydablen organischen Substanz vertheilten Chlorsilbers und den Einfluss von chemischen Sensibilisatoren auf dasselbe.

Bei Anwesenheit von organischen Substanzen muss jeder Überschuss an Silbernitrat vermieden werden, weil dasselbe sich in diesem Falle in kurzer Zeit zersetzt und schädlich wirkt (sogenannte Schleierbildung).

Als wir reine Chlorsilber-Collodion-Emulsion mit einer Emulsion verglichen, welcher Tannin, Gallussäure oder Morphinacetat beigemengt war, fanden wir, dass die erwähnten Zusätze die Empfindlichkeit des Chlorsilbers merklich gesteigert hatten. Diese Erhöhung der Empfindlichkeit machte sich nach zwei Richtungen hin geltend:

a) Die reine Chlorsilber-Collodionschichte färbte sich unter dem directen Einflusse des Lichtes langsamer, als bei Gegenwart der genannten organischen Substanzen.

b) Auch mit chemischer Entwicklung erwiesen sich Schichten von reinem Chlorsilber-Collodion merklich unempfindlicher als jene, welche mit den organischen Substanzen versetzt waren.

Über die Beziehungen zwischen den durch die Lichteinwirkung directe veranlassten und den durch Entwicklung hervorgebrachten Veränderungen bei Abwesenheit oder Gegenwart von Sensibilisatoren gibt folgende Tabelle Aufschluss:

Lichtempfindliche Substanz	Photometergrade sichtbar		
	durch blosse Belichtung	nach dem Behandeln mit neutralem Pyrogallol	nach d. Behandeln mit Pyrogallol + Natriumbicarbonat
Reines Chlorsilber	3	4	5
Chlorsilb. + Tannin	4	6	11
„ + Gallussäure	4	6	12
„ + Morphinacetat	5	13	25

Daraus folgt, dass die sensibilisirende Wirkung chlorabsorbirender organischer Substanzen, sowohl auf die Raschheit der unmittelbaren Schwärzung des Chlorsilbers durch das Licht, als auch auf die Schnelligkeit, womit das Chlorsilber ein entwicklungsfähiges latentes Lichtbild aufnimmt, in demselben Sinne stattfindet.

Durch diese Beobachtung erfährt das Vogel'sche Gesetz über die Sensibilisatoren eine neue Bestätigung. Ferner zeigt sich, dass die Fähigkeit des Chlorsilbers, ein latentes entwicklungsfähigen Lichtbild aufzunehmen, durch die Sensibilisatoren viel mehr gesteigert wird, als die Fähigkeit, sich im Lichte direct zu schwärzen. Der etwaige Einwand, dass die genannten organischen Substanzen während der Belichtung einen reducirenden (entwickelnden) Einfluss auf das Chlorsilber hätten ausüben können, erscheint unhaltbar; wir überzeugten uns nämlich durch wiederholte Versuche, dass weder Tannin und Gallussäure noch Morphinacetat auf Chlorsilber reducirend einwirken, sei es nun belichtetes oder unbelichtetes.

Noch viel günstiger, als die Beimengung organischer Substanzen zum Chlorsilber-Collodion, erweist sich die directe Suspendirung des Chlorsilbers in einem leicht oxydablen organischen Bindemittel, z. B. Gelatine. Das in Gelatine suspendirte Chlorsilber[1] schwärzt sich nicht nur rascher im Lichte, als das in Collodion vertheilte, sondern ist auch bei Einwirkung verschiedenartiger chemischer Entwickler viel lichtempfindlicher als letzteres wie folgende Tabelle zeigt:

[1] Die Chlorsilber-Gelatine-Emulsion wird in vortheilhafter Weise auf folgende Art dargestellt: 25 Grm. Gelatine werden in 200 CC. Wasser aufquellen gelassen; hierauf 7 Grm. Chlornatrium hinzugefügt und durch Erwärmung auf 40—50° C, die Lösung der Gelatine bewerkstelligt. Anderseits werden 15 Grm. Silbernitrat in 100 CC. Wasser gelöst, auf obige Temperatur erwärmt und in kleinen Partien der Gelatinelösung zugesetzt. Die nun gebildete Emulsion wird erkalten gelassen, und nach dem Erstarren, durch längeres Waschen mit kaltem Wasser von den löslichen Salzen befreit.

Lichtempfindliche Substanz	Photometergrade sichtbar				
	durch blosse Belichtung	nach Behandlung mit neutralem Pyrogallol	nach Behandlung mit Pyrogallol + Natriumcarbonat	nach Behandlung mit Ferrocitrat	nach Behandlung mit Hydrochinon + Ammoniumcarbonat
Chlorsilber in Collodion.......	2	7	10	14	10
Chlorsilber in Gelatine........	4	14	17	25	20

Dünne Schichten von Chlorsilber-Gelatine-Emulsion erscheinen unmittelbar nach der Darstellung im reflectirten Lichte rein weiss, und lassen gelbe und rothe Strahlen durch; beim längeren Digeriren in der Wärme wird die Emulsion etwas undurchsichtiger, zugleich erleidet das Chlorsilber eine molekulare Veränderung.

Eine dünne Schichte erscheint in der Durchsicht nach 12 bis 24 Stunden Digestion bei 35—40° C. rothviolett; sie lässt jetzt neben rothem und gelbem auch viel blaues Licht durch. Zugleich wird die Lichtempfindlichkeit des Chlorsilbers etwas gesteigert, ähnlich wie dies beim Bromsilber schon lange sichergestellt wurde; allerdings bei ersterem bei Weitem nicht in jenem Masse, wie bei letzterem. Lange digerirte Chlorsilber-Emulsion färbt sich am Tageslichte nur unbedeutend rascher, als kurz digerirte; auch mit chemischer Entwicklung ist die lang digerirte etwas, jedoch nicht erheblich empfindlicher und der Unterschied beträgt nur 1 bis 2 Photometergrade.

Unsere hiemit mitgetheilten Erfahrungen über das photochemische Verhalten des Chlorsilbers vor und nach der Digestion in der Wärme finden ihre Erklärung in den Beobachtungen, welche Stas bei seinen eingehenden Untersuchungen über die verschiedenen Molecularformen des Chlorsilbers machte.[1] Es erscheint hiemit auch die interessante Thatsache sichergestellt,

[1] Compt. rend. Bd. LXXIII, pag. 998. Chem. Centrbl. 1871, p. 710.

dass die Modificationen des Chlorsilbers eine verschiedene Lichtempfindlichkeit zeigen und sich dasselbe daher analog dem Bromsilber verhält. Über den Einfluss der molecularen Beschaffenheit des Chlorsilbers auf die Farbe des reducirten metallischen Silbers, siehe VIII.

II. Über den Einfluss fremder Stoffe auf die Lichtempfindlichkeit des Chlorsilbers.

Über die Wirkung von überschüssigem Silbernitrat, sowie organischen Substanzen als Sensibilisatoren wurde schon im Vorhergehenden gesprochen. Über den Einfluss anderer Substanzen wäre noch zu bemerken:

1. Dass bei Gegenwart von überschüssigem Alkalichlorid und in noch höherem Grade bei Gegenwart von Säuren, wie Salzsäure, Salpetersäure, das Entstehen des latenten Lichtbildes verzögert, beziehungsweise gänzlich gehemmt wird.
2. Dass Ammoniak die Zersetzung im Lichte ausserordentlich befördert.

Wir fanden, dass Chlorsilber-Ammoniak sich nicht nur viel rascher am Lichte schwärzt, als reines Chlorsilber, sondern dass es auch rascher ein unsichtbares latentes Lichtbild aufzunehmen im Stande ist, und zwar ungefähr in dem dritten Theil der für reines Chlorsilber nöthigen Zeit; dies lässt sich auch nach kurzer Einwirkung von Ammoniakdämpfen auf Chlorsilberplatten bemerken.

Erzeugt man eine Chlorsilber-Emulsion [1] mit ammoniakalischer Silbernitratlösung, wäscht [2] und trocknet sie, so enthält sie kein Ammoniak mehr, hat aber nichtsdestoweniger ihre Eigenschaften verändert. Das Chlorsilber erhält eine etwas grössere Lichtempfindlichkeit, ungefähr in demselben Verhältnisse als

---

[1] Bei unseren Versuchen benützten wir Gelatine-Emulsion; es wurde unter Beibehaltung der oben angegebenen Relationen, der Silbernitratlösung so viel Ammoniak zugesetzt, dass der anfangs entstandene Niederschlag sich wieder auflöste.

[2] Merkwürdigerweise gehen nur geringe Spuren von Chlorsilber in das Waschwasser.

dies bei längerer Digestion in der Wärme eintritt. Die molekulare Form des erhaltenen Chlorsilbers ist aber auf die Farbe des durch den Entwickler reducirten Silbers von grossem Einflusse. (S. VIII.)

III. Über die Natur des Lichtbildes.

Durch längere Belichtung wird Chlorsilber dunkel gefärbt, (violett bis schwarzviolett) indem, wie man wohl als erwiesen anzusehen hat, Silbersubchlorid entsteht; durch sehr kurze, fast momentane Belichtung erleidet das Chlorsilber keine sichtbare Färbung; dennoch tritt eine Zersetzung desselben durch das Licht ein, wie wir aus seinem Verhalten gegen Reductionsmittel feststellten. (Siehe V.)

Viele reducirende Substanzen, sogenannte chemische Entwickler, reduciren nämlich auch das nur momentan belichtete, wenn auch nicht geschwärzte Chlorsilber, ohne das vor Lichteinwirkung geschützt gewesene im geringsten zu afficiren.

Wir fanden bei unseren Untersuchungen die bemerkenswerthe Thatsache, dass das unsichtbare latente Lichtbild gegen Reagentien sich ganz ähnlich wie das im Lichte geschwärzte verhält, wie aus folgender Zusammenstellung hervorgeht:

	Wirkung auf	
	das durch das Licht geschwärzte Chlorsilber (Silbersubchlorid)	den unsichtbaren Lichteindruck bezüglich dessen Entwicklungsfähigkeit
Salpetersäure $d = 1\cdot15$	selbst nach 15 Minuten ohne Wirkung.	selbst nach 15 Minuten ohne Wirkung.
Salpetersäure $d = 1\cdot33$	dtto	dtto
Salpetersäure $d = 1\cdot40$	nach 30—60 Sekunden ohne Wirkung, nach längerer Einwirkung partielle Lösung von Silber.	wird geschwächt, nach längerer Einwirkung zerstört.
Salzsäure $d = 1\cdot20$	führt es langsam in weisses Chlorsilber über.	zerstört denselben.
Schwefelsäure $d = 1\cdot32$	sehr geringe Schwächung.	sehr geringe Schwächung.

	Wirkung auf	
	das durch das Licht geschwärzte Chlorsilber (Silbersubchlorid)	den unsichtbaren Lichteindruck bezüglich dessen Entwicklungsfähigkeit
Salpetrige Säure	?	schwächt denselben.
Königswasser, Eisen-, Kupfer-, Quecksilberchlorid	bilden weisses Silberchlorid	zerstört denselben.
Ferridcyankalium	führt es in Silberchlorid und Ferrocyansilber über.	dtto
Bromwasser	bildet ein Gemenge von Silberchlorid und Silberbromid	dtto
Jodtinctur	bildet ein Gemenge von Silberchlorid und Silberjodid.	dtto
Quecksilberoxydnitrat	bildet weisses Quecksilberchlorid und Silbernitrat.	dtto
Concentrirte Chlorammoniumlösung	äusserst langsame Bildung von Silberchlorid.	geringe Schwächung.
Kalium bichromat „ permanganat	Bildung von Silberoxychlorid (?)	dtto

Die Übereinstimmung der Reactionen des Silbersubchlorides und des durch kurze Belichtung nicht sichtlich veränderten Chlorsilbers ist auffallend. Der Schluss, dass das latente Bild auf Chlorsilber ebenfalls aus Silberchlorid bestehe, erscheint demnach gerechtfertigt; die Veränderung des Chlorsilbers in beiden Fällen dürfte somit qualitativ gleich und nur quantitativ verschieden sein. Diese Annahme wird durch die Thatsache unterstützt, dass das Chlorsilber dort wo es geschwärzt ist, durch passende Reductionsmittel rascher und durchgreifender reducirt wird als dort, wo es nur kurz belichtet und nicht geschwärzt wurde.[1]

[1] Bei sehr lang fortgesetzter Belichtung verliert das geschwärzte Chlorsilber wieder etwas von seiner Fähigkeit, sich im chemischen Entwickler

Dass im Lichte veränderte Chlorsilber kein metallisches Silber, sondern Silbersubchlorid enthält, und nach dem Behandeln mit chemischen Entwicklern zu Metall reducirt wird, zeigt folgender hübsche Versuch:

Werden zwei mit Chlorsilber-Collodion überzogene Glasstreifen gleich lange bis zur deutlichen Dunkelfärbung belichtet, hierauf der eine mit einem der unten angegebenen chemischen Entwickler behandelt, dann beide in Salpetersäure ($d = 1 \cdot 15$) gelegt, so bleibt der blos belichtete ganz unverändert, während das entwickelte Glas blank wird, weil sich metallisches Silber gebildet hatte, welches jetzt aufgelöst wurde.

IV. Über die Solarisationserscheinungen auf Chlorsilber.

Wir constatirten, dass das Chlorsilber in ähnlicher Weise der Solarisation unterworfen ist wie das Bromsilber; allerdings bedarf es hiezu einer relativ längeren Zeit. Wird nämlich Chlorsilber andauernd dem Lichte ausgesetzt, so steigt anfänglich die Fähigkeit sich im Entwickler zu reduciren, indem es sich zugleich allmälig dunkler färbt; bei weiterer Belichtung dunkelt es zwar weiter nach, jedoch die Fähigkeit, sich im Entwickler zu reduciren, nimmt allmälig wieder ab.

Diese Erscheinung beobachteten wir bei allen von uns untersuchten Entwicklern. Dass das bis zur Solarisation belichtete Chlorsilber von dem kurz belichteten auch in anderer Richtung vollständig verschieden ist, zeigt folgender Versuch:

Es wurde eine mit einer Chlorsilberschichte überzogene Platte unter der Photometerskala so lange belichtet, bis beim Entwickeln Grad 1 und 2 solarisirt erschien; eine andere ebenso lange belichtete Platte wurde nach dem Belichten mit Salpetersäure ($d = 1 \cdot 33$) behandelt, bei darauf folgender Entwicklung zeigte sich aber gar keine Solarisationserscheinung.

Daraus geht hervor, dass das solarisirte Chlorsilber seinem Wesen nach von dem normal belichteten Chlorsilber verschieden ist, indem nur ersteres von Salpetersäure angegriffen wird, letzteres aber nicht.

---

zu reduciren (sogenannte Solarisation), was auf einen secundären Process beruht. Siehe Abschnitt IV.

Stark reducirende Lösungen bringen die Solarisations-Erscheinungen besser zum Vorschein, als schwach reducirende. Das verschiedene Verhalten des solarisirten und des normal belichteten Chlorsilbers gegen Reductionsmittel drückt sich in folgender Weise aus.

	Starker Entwickler und langandauernde Entwicklung	Schwacher Entwickler und kurz andauernde Entwicklung
Solarisirtes Chlorsilber	wird weniger durchgreifend reducirt, als normal belichtetes	wird stärker reducirt als normal belichtetes

V. Über die Analogie des latenten Lichteindruckes auf Chlorsilber mit jenem auf Bromsilber.

Bromkalium bringt im belichten Chlorsilber eine merkwürdige Veränderung hervor; das gedunkelte Chlorsilber verwandelt sich nämlich, ohne wesentliche Farbenveränderung in dunkles Bromsilber.

Eine ganz analoge Umwandlung konnten wir durch Behandlung mit Bromkalium an dem latenten Lichteindrucke auf Chlorsilber hervorbringen.

Es wurde ein mit Chlorsilber-Emulsion überzogener Glasstreifen so lange unter der Photometerskala belichtet, dass durch Entwicklung mit Ferrocitrat Grad 16 noch sichtbar geworden wäre; dieser Streifen wurde sodann durch einige Stunden in Bromkaliumlösung gelegt. Das latente Lichtbild liess sich jetzt nicht mehr mit dem für Chlorsilber geeigneten chemischen Entwickler (Ferrocitrat, neutrales Pyrogallol) hervorrufen, hingegen bei Behandlung mit den für Bromsilber passenden Entwicklern, wie Kaliumferrooxalat oder ammoniakalischem Pyrogallol, fand die Entwicklung des latenten Lichteindruckes vollständig statt.

Beim Behandeln mit Bromkalium findet also eine vollständige Substitution des Chlors durch Brom statt und das latente Chlorsilberbild lässt sich durch einfache Substitution des Chlors durch Brom in ein latentes Bromsilberbild umwandeln.

Hiedurch erscheint der Schluss gerechtfertigt, dass in beiden Fällen die durch einen latenten Lichteindruck veränderten Silberverbindungen analog zusammengesetzt sind.

VI. Über jene Reductionsmittel, welche geeignet sind, den latenten Lichteindruck auf Chlorsilber zu entwickeln.

Im Allgemeinen wird Chlorsilber durch reducirende Agentien viel rascher zu Metall reducirt als Bromsilber, worauf schon in den „Beiträgen zur Photochemie des Bromsilbers“ [1] hingewiesen wurde.

Die für Bromsilber geeigneten Reductionsmittel, als: Kaliumferrooxalat, Pyrogallol + Ammoniak, Pyrogallol + Ätzkali, Pyrogallol + Ammoniumsesquicarbonat, Natriumhydrosulfit, Hydrochinon + Ätzammoniak, wirken auf Chlorsilber so energisch, dass nicht nur die belichteten Theile, sondern mehr oder weniger auch die nicht belichteten Theile desselben reducirt werden.

Für belichtetes Chlorsilber fanden wir nur schwächere Reductionsmittel geeignet; im Folgenden sind selbe in der Reihenfolge ihrer Brauchbarkeit angeführt:

1. Ammoniumferrocitrat bei Gegenwart von freier Citronensäure. [2]
2. Verdünnte Hydrochinonlösung + Ammoniumsesquicarbonat. [3]
3. Hämatoxylin + Ammoniumsesquicarbonat.
4. Neutrales Pyrogallol ($^1/_2$—1 Perc.)
5. Pyrogallol + Natriumbicarbonat.
6. Gallussäure + Ammoniak.

---

[1] Sitzb. d. k. Akad. d. Wissensch. II. Abth. Bd. LXXXI, pag. 679.

[2] Wir bedienen uns mit Vorliebe dieses Entwicklers und stellen denselben folgendermassen dar: 600 Grm. Citronensäure werden in der Wärme in 2 Liter Wasser gelöst und mit Ammoniak neutralisirt; hierauf werden 400 Grm. Citronensäure hinzugefügt und die Flüssigkeit auf 4 Liter verdünnt. 90 CC. dieser Lösung werden mit 30 CC. einer kalt gesättigten Eisenvitriollösung und 6 CC. Chlornatriumlösung 1:30 gemischt. Überschuss von Eisenvitriol drückt die Wirksamkeit des Entwicklers bedeutend herab. Das Natriumferrocitrat vermag bei diesem Verfahren das Ammoniumsalz nicht zu ersetzen.

[3] Auf 150 CC. Wasser, 0·3 Grm. Hydrochinon, 0·6 Grm. Chlornatrium und 1 Grm. Ammoniumsesquicarbonat.

Ein, wenn auch nur schwaches und unregelmässiges, Entwicklungsvermögen besitzen ferner noch:

Tannin + Ammoniak, Brenzcatechin + Ammoniumcarbonat, Resorcin + Ammoniumcarbonat, Glucose + Ätzkali, Natriumferrocitrat, Ferroacetat, Ferrosuccinat, Ammoniumferrotartrat.

Gar kein Entwicklungsvermögen besitzen:

Angesäuertes Pyrogallol, reines Tannin, Brenzcatechin, Resorcin, Hämatoxylin, Gallussäure, Morphinacetat, Eisenvitriol und viele andere unorganische Eisensalze etc.

Im Anschlusse an das oben Gesagte erscheinen noch folgende Bemerkungen von Belang:

Bei allen den angeführten Entwicklern ist ein Zusatz von 0·1—0·3 Perc. Chlornatrium höchst förderlich, um bei verlängerter Einwirkung des Reductionsmittels die Schwärzung der nicht belichteten Theile des Chlorsilbers hintanzuhalten. Zusatz von Bromkalium an Stelle des Chlornatriums ist nicht anzurathen, da es die Entwicklung verzögert, unter Umständen ganz aufhebt.

VII. Über die relative Lichtempfindlichkeit des Chlorsilbers und über den Einfluss der Qualität des chemischen Entwicklers auf dieselbe.

Das Chlorsilber mit chemischer Entwicklung braucht in allen uns vorgekommenen Fällen eine längere Belichtung, als das Bromsilber.

Um den latenten Lichteindruck auf Chlorsilber kräftig zur Entwicklung zu bringen, muss man je nach der Qualität der reducirenden Lösung 40—500mal länger belichten, als bei Bromsilber (mit Ferroxalat-Entwicklung).

Ähnlich wie beim Bromsilber erweist sich die Lichtempfindlichkeit des mit chemischer Entwicklung combinirten Chlorsilbers, als eine Function der Beschaffenheit des Chlorsilbers und jener des Entwicklers. Im Allgemeinen fanden wir, dass die erforderliche Belichtungszeit um so geringer ist, je concentrirter der Entwickler ist, je energischer er reducirend wirkt und je länger seine Einwirkung dauert. Mit Bezug auf den letzteren Punkt namentlich, ist es aber schwierig, absolut genaue Angaben über die

jedem Entwickler entsprechenden Expositionszeiten zu machen; den folgenden Zahlen jedoch kommt eine ziemlich grosse Genauigkeit zu, da sie das Mittel von vielen Versuchen sind.

Wir bringen in nachstehender Tabelle eine vergleichende Zusammenstellung des Chlorsilbers mit andern Silberverbindungen, wobei die für Bromsilber mit chemischer Entwicklung erforderliche Belichtungszeit = 1 und die dem entsprechende Lichtempfindlichkeit = 100 angenommen wurde.

Zur Berechnung der weiteren Daten gingen wir von der Voraussetzung aus, dass die Lichtempfindlichkeit einer Verbindung umgekehrt proportional sei, mit der zur Hervorbringung eines beobachteten Effectes nöthigen Belichtungszeit.

Schliesslich muss noch erwähnt werden, dass bei den anzuführenden Silberverbindungen kein überschüssiges Silbernitrat vorhanden war, sondern dass bei ihrer Darstellung lösliche Bromide respective Chloride und Jodide vorwalteten; ausgenommen sind nur diejenigen, bei welchen das Lichtbild auf physikalischem Wege entwickelt wurde.

Lichtempfindliche Substanz		Nöthige Belichtungszeit, um ein kräftiges Lichtbild hervorzubringen	Lichtempfindlichkeit der Verbindung
Bromsilber mit chem. Entwicklung	(Kaliumferrooxalat)	1	100
Bromsilber mit physikalischer Entwicklung	(nasses Collodionverfahren)	5—7	16—25
Jodsilber mit chem. Entwicklung	(Kaliumferrooxalat)	—	0
Jodsilber mit physik. Entwicklung	(nasses Collodionverfahren)	4—5	20—25
Chlorsilber mit chemischer Entwicklung	Ammoniumferrocitrat	50	2
	Pyrogallol	100	1
	Hydrochinon + Ammoniumcarbonat	150	0·7
	Hämatoxylin + Ammoniumcarbonat	500	0·2
Chlorsilber ohne Entwicklung	Entstehen eines nach dem Fixiren kräftig erscheinend. Bildes	18000—45000	0·002—0·006
	Beginn der oberflächlichen Schwärzung	150—200	0·5—0·7

VIII. Einfluss des molecularen Zustandes des Chlorsilbers und der Qualität des Entwicklers auf die Farbe des reducirten metallischen Silbers.

Wie schon erwähnt, wird das mit chemischen Entwicklern behandelte Chlorsilber an den vom Lichte getroffenen Stellen zu metallischem Silber reducirt. Obwohl letzteres keine organische Substanz beigemengt enthält (namentlich bei Entwicklung mit Ammoniumferrocitrat[1]), erscheint es doch, in dünner Schichte und bei durchfallendem Lichte betrachtet, je nach der Operationsmethode in den verschiedensten Farben.

Kurz angedeutet, fanden wir folgende Gesetzmässigkeit bei unseren zahlreichen Versuchen zum Ausdrucke kommen:

1. Das längere Zeit in der Wärme digerirte, sowie das mit ammoniakalischem Silbernitrat dargestellte Chlorsilber, welches also in beiden Fällen eine moleculare Veränderung erlitten hat (siehe sub IV), gibt ein dunkler gefärbtes Silber als gewöhnliches ganz analog entwickeltes Chlorsilber. Letzteres liefert metallisches Silber, welches mehr zu gelben, rothen bis rothbraunen Tönen neigt; ersteres gibt dunkelbraune, schwarzviolette bis schwarze Töne.
2. Der Ammoniumferrocitrat-Entwickler gibt bei dem gewöhnlichen Chlorsilber rothbraun, bei dem modificirten schwarzbraun gefärbtes Silber.
3. Hydrochinon + Ammoniumcarbonat reducirt das Chlorsilber in beiden Modificationen mit rother bis roth-violetter Farbe.
4. Pyrogallol, Gallussäure + Ammoniumcarbonat geben braungefärbtes Silber.
5. Je kürzer das Chlorsilber belichtet wurde und je langsamer sich das latente Bild entwickelte, desto dunkler wird die Farbe. Kurz entwickelte Schichten nehmen immer hellere Farbentöne an.

---

[1] Nachweisbare Mengen organischer Substanz fanden aber sich vor, wenn mit Hämatoxylin entwickelt wurde. Die hiebei angewendeten Mischungsverhältnisse sind folgende: Wasser 130 CC., Hämatoxylin 0·5 Grm., Chlornatrium 0·5 Grm., Ammoniumcarbonat 0·5 Grm.

Offenbar hängt die Farbe der Silberschichte in den einzelnen Fällen hauptsächlich von der molekularen Beschaffenheit, welche das Silber bei der Reduction erhielt, ab.

IX. Über die Bedeutung des Chlorsilbers mit chemischer Entwicklung für die Photographie.

Die Regelmässigkeit, womit das belichtete Chlorsilber mit den oben genannten chemischen Entwicklern, Lichtbilder zu erzeugen gestattet, macht es zur Verwendung in der Photographie vorzüglich geeignet.

Wohl wird es an Lichtempfindlichkeit vom Bromsilber mit chemischer Entwicklung und vom Jodsilber mit physikalischer Entwicklung übertroffen, so dass es zu Aufnahmen in der Camera nicht empfohlen werden kann; immerhin hat aber Chlorsilber-Gelatine eine genügende Lichtempfindlichkeit, um bei directem Gaslichte in 20—30 Minuten nach einem photographischen Negative ein vollständig ausgearbeitetes Positiv zu geben.

Der Vorzug des Chlorsilber-Copirverfahrens mit Entwicklung, liegt hauptsächlich darin, dass er Bilder von ausserordentlicher Zartheit und Brillanz, mit ungewöhnlich schönen warmen Tönen liefert, und dadurch unter den photographischen Copirverfahren eine hervorragende Stelle einnimmt.

Als besonders geeignet erscheint es zur Herstellung von Dispositiven auf Glas nach photographischen Negativen; derartige Bilder übertreffen in jeder Beziehung die nach den bisher bekannten Methoden erzeugten.

Von jenen nach dem Pigmentverfahren (Gelatine mit Kaliumbichromat und Pigmenten) hergestellten, haben sie den Vortheil der Kornlosigkeit und der rascheren Herstellung voraus.

Erstere Eigenschaft macht sie hauptsächlich zum Vergrösserungsprocess, zu Projectionsbildern verwendbar; letztere ist besonders bei trüben Wetter von unschätzbarem Vortheile.

Sorgfältig angestellte Versuche ergaben, dass zur Erzielung gleich dichter Lichtbilder, bei unserem Verfahren eine Belichtung von 5 Secunden genügend, während bei dem Pigmentverfahren hiezu eine Belichtung von 8 Stunden nöthig war.

Wollte man durch directe Schwärzung des Chlorsilbers, ein gegenwärtig sehr häufig geübtes Verfahren, ähnliche Resultate

erhalten, wie bei unserem Verfahren mit Entwicklung, so müsste man, wie aus der vorhergehenden Tabelle ersichtlich ist, 900mal länger belichten, was übrigens noch sehr gering berechnet ist.

Vor dem empfindlicheren Bromsilber hat das Chlorsilber zu den angegebenen Zwecken den Vorzug, modulirtere Bilder zu geben und bei der Entwicklung leichter controlirt werden zu können.

Das Fixiren der auf Chlorsilber entwickelten Bilder erscheint am geeignetsten durch unterschwefligsaures Natron; Cyankalium wirkt zu energisch und löst leicht die zarteren Bildstellen auf.

Durch Behandlung mit Goldlösungen lässt sich die Farbe der Bilder nach Belieben modificiren.

Schliesslich bemerken wir, dass die gegenwärtige ungünstige Jahreszeit uns hinderte, die Wirkungen des Sonnenspectrums auf Chlorsilber mit chemischer Entwicklung zu studiren und die Lösung der damit zusammenhängenden Fragen ins Auge zu fassen; wir behalten uns jedoch vor, diese Untersuchungen durchzuführen und die Resultate derselben nachträglich vorzulegen.

Wien, Photographische Anstalt des k. k. technischen und administrativen Militär-Comité.

Über ein neues Derivat der Gallussäure und dessen Anwendung zur Bestimmung der gebundenen Kohlensäure.

Von Dr. Johann Oser und Wilhelm Kalmann.

In einer früheren Abhandlung[1] über die Einwirkung von übermangansaurem Kali und Schwefelsäure auf Gallussäure, wurde von dem Einen von uns die Bildung einer gelbgefärbten krystallinischen Verbindung nachgewiesen, welcher die Formel $C_{14} H_{10} O_8$ beigelegt wurde, und für welche wir wegen ihrer Beziehungen zur Ellagsäure den Namen Tetrahydroellagsäure vorschlagen. An demselben Orte wurde schon erwähnt, dass durch Schmelzen mit Ätzkali daraus ein neuer krystallinischer Körper erhalten werden könne, welcher damals wegen Mangels an Substanz nicht weiter untersucht werden konnte, und über welchen nun hier Weiteres mitgetheilt werden soll.

Um eine möglichst grosse Ausbeute zu erhalten, verschmilzt man in kleinen Portionen mit der fünffachen Menge von Ätzkali so lange, bis die Schmelze an den Rändern der Silberschale eine dunkelrothviolette Färbung zeigt und eine gezogene Probe beim Absättigen mit Schwefelsäure nicht mehr einen lichtorangegelben, sondern einen grünlichgelben Niederschlag liefert. Es wird hierauf die ganze Schmelze ebenso behandelt, und die beim Ansäuern mit Schwefelsäure sich ausscheidende Substanz auf ein Filter gebracht und mit kaltem Wasser gewaschen. Die so erhaltene Rohsubstanz wird in kochendem Wasser gelöst und fällt dann beim Abkühlen in feinen mikroskopischen Nadeln heraus. Nach auf diese Art wiederholter Reinigung erhält man eine Ausbeute von beiläufig 11% des Ausgangsproductes.

[1] Sitzungsberichte d. k. Akad. d. Wissenschaften, Bd. LXXII, II. Abth. October-Heft, Jahrgang 1875.

Die reine Substanz hat eine grünlichgelbe Farbe und ist frei von Krystallwasser. In einem Strome von Wasserstoffgas kann sie bis auf 200° C. ohne Veränderung erhitzt werden, zwischen 200—220° C. beginnt sie ohne Farbenänderung schwach zu sublimiren, zwischen 220—230° C. färbt sie sich dunkler, und über diese Temperatur hinaus tritt volle Zersetzung ein.

Die Analyse der bei 160° C. im Wasserstoffstrome getrockneten Substanz ergab folgende Resultate:

0·3625 Grm. Substanz lieferten 0·730 Grm. Kohlensäure und 0·101 Grm. Wasser.

0·3605 Grm. Substanz gaben 0·7255 Grm. Kohlensäure und 0·100 Grm. Wasser.

0·2867 Grm. Substanz gaben 0·5749 Grm. Kohlensäure und 0·0811 Grm. Wasser.

In 100 Theilen:

	I.	II.	III.
C	54·92	54·89	54·69
H	3·096	3·082	3·143.

Daraus berechnet sich die Formel $C_{14}\,H_{10}\,O_8$, welche verlangt

	$C_{14}\,H_{10}\,O_8$	Gefunden im Mittel
C	54·90	54·83
H	3·27	3·11.

Es kommt hiernach dieser Verbindung dieselbe Formel zu wie jener, aus der sie durch Schmelzen mit Ätzkali erhalten wurde, und hat hiernach dabei nur eine molekulare Umlagerung stattgefunden. Dass hier nicht mehr die ursprüngliche Substanz vorliegt, zeigt nicht blos das wesentlich verschiedene Aussehen derselben, sondern auch ihr verschiedenes Verhalten gegen Lösungsmittel und Reagentien.

Sie ist in kaltem Wasser nur sehr schwer löslich, in viel höherem Grade in Alkohol, in Äther weniger als in Alkohol. In kochendem Wasser ist sie in bedeutender Menge löslich und fällt beim Abkühlen krystallinisch heraus. Unter bisher noch nicht näher ermittelten Umständen tritt eine Ausscheidung oft erst nach mehreren Tagen ein, kann aber durch Zusatz von etwas Salzsäure oder Schwefelsäure zur erkalteten Lösung schon nach wenigen Minuten hervorgerufen werden.

In wässeriger Lösung gibt sie mit Eisenchlorid eine rothbraune Färbung, welche bei vorsichtigem Zusatze von kohlensaurem Natron nur etwas heller wird. Mit Eisenvitriol-Lösung entsteht eine olivengrüne Färbung der Flüssigkeit.

Die alkoholische Lösung der Substanz gibt mit einer ebensolchen von essigsaurem Kupferoxyd nur eine geringe Trübung, mit alkoholischer Bleizuckerlösung einen gelbgrünen Niederschlag, der auf dem Filter rasch eine dunkelbraune Färbung annimmt.

Charakteristisch ist das Verhalten gegen Alkalien. Setzt man zu der in Wasser aufgerührten Substanz successive Ätzkali- oder Ätznatronlösung hinzu, so tritt anfangs nur eine Lösung mit olivengrüner Färbung ein, wenn aber einmal Ätzalkalien im Überschusse vorhanden sind, so färbt sich die Lösung, besonders schnell beim Schütteln mit Luft, karminroth. Diese rothe Lösung ist sehr stark tingirend; wenige Tropfen derselben genügen, um eine grosse Menge von Wasser damit deutlich roth zu färben. Durch Einleiten von Kohlensäure im Überschusse wird diese Färbung durchaus nicht modificirt, beim vorsichtigen Zusatze von verdünnter Salzsäure oder Schwefelsäure schlägt bei dem geringsten Säureüberschusse die Farbe ohne Zwischennuancen aus roth in gelb um. Nach diesen Eigenschaften empfiehlt sich die durch Ätzalkalien an der Luft oxydirte Lösung nach der genauen Neutralisation durch Säuren als Indicator bei der Titrirung von Soda und Pottasche, indem man damit neben der aussergewöhnlich scharfen Fixirung des Neutralisationspunktes auch noch den Vortheil hat, die beim Titriren freiwerdende Kohlensäure, welche die Farbe hier ganz unbeeinflusst lässt, nicht durch Kochen entfernen zu müssen.

Die Empfindlichkeit des Körpers gegen alkalisch reagirende Substanzen ist so gross, dass minimale Mengen derselben, die in der Luft enthalten sind, beim Auswaschen der Rohsubstanz auf dem Filter eine Rothfärbung des letzteren hervorrufen. Diese Reaction beschränkt sich nicht blos auf die Alkalien und deren Carbonate, sie wird schon durch geringe Mengen von Calcium- oder Magnesiumcarbonat, die im Wasser, gleichgiltig ob für sich oder in Kohlensäure gelöst, vorhanden sind, hervorgerufen. Gibt man beispielsweise zu gewöhnlichem Brunnen- oder Quellwasser einige Cubikcentimeter des nach der beschriebenen Weise hergestellten Indicators hinzu, so färbt sich dasselbe sehr deutlich roth,

und tritt diese Rothfärbung ebenso auf, wenn man etwas der kalten wässerigen Lösung der ursprünglichen Substanz, die eine schwach gelbe Farbe hat, hinzusetzt und mit Luft einige Zeit in Berührung lässt. Es lag nahe, dieses Verhalten zur Ermittlung der in einem Wasser vorhandenen gebundenen Kohlensäure zu benützen. Bis jetz wurde diese Bestimmung entweder direct durchgeführt durch Eindampfen von 1000 CC. Wasser auf einen kleinen Rest und Titriren desselben unter Anwendung von Lakmustinctur durch Salzsäure oder Salpetersäure, oder indirect durch Rechnung aus der Menge der direct bestimmten Basen und der neben der Kohlensäure vorhandenen Säuren [1].

Die erste dieser Methoden gibt, abgesehen davon, dass man hier vor dem Titriren die Mühe des Eindampfens hat, bei Wässern, welche Chlormagnesium enthalten, zu hohe Zahlen und ist auch bei solchen, wo kohlensaures Eisenoxydul in etwas grösserer Menge vorhanden ist, ungenau.

Bei der zweiten Methode ist die Verlässlichkeit des Resultates abhängig von der Genauigkeit der vorausgegangenen Bestimmungen, und können sich die dabei stattgefundenen Fehler unter Umständen bis zu beträchtlicher Höhe summiren, abgesehen davon, dass man dann auch keine Controle für die Richtigkeit der Gesammtanalyse hat.

Eine andere Methode der Bestimmung der gebundenen Kohlensäure ist die, dass man zuerst die Gesammtkohlensäure und nach der Methode von v. Pettenkofer die freie und halbgebundene Kohlensäure bestimmt, woraus sich dann die gebundene Kohlensäure aus der Differenz ergibt.[2] Da aber eine jede dieser Bestimmungen viele Fehlerquellen darbietet und auch umständlich ist, so ist auch dieser Weg durchaus nicht zu empfehlen. Man kann daher wohl behaupten, dass gute Methoden zur Ermittlung der gebundenen Kohlensäure bisher noch fehlen. Mittelst des neuen Indicators lässt sich diese Bestimmung nun sehr rasch und, wie aus den folgenden Beleganalysen hervorgeht, auch mit grosser Genauigkeit durchführen. I. Chemisch reines Calciumcarbonat wurde in Wasser aufgeschlämmt und durch einige

---

[1] Fresenius quant. Analyse VI. Aufl., Bd. II., pag. 164.

[2] Mohr Titrirmethode IV. Aufl., pag. 576.

Stunden aus Magnesit und Schwefelsäure entwickelte gewaschene Kohlensäure durchgeleitet und hierauf filtrirt.

50 CC. des Filtrates, zur Trockene eingedampft, ergaben einen Rückstand von 0·0614 Grm. $CaCO_3$. In 50 CC. desselben Filtrates wurden nach Zugabe von 2 CC. des Indicators durch Titrirung mit Salzsäure gefunden 0·0617 Grm. $CaCO_3$.

II. Durch Zugabe neutraler Salze, wie $CaSO_4$, $CaCl_2$, K_2SO_4, KCl, Na_2SO_4, NaCl, wird die Empfindlichkeit der Reaction durchaus nicht beeinflusst:

50 CC. einer Lösung von Calciumcarbonat in kohlensäure hältigem Wasser ergaben einen Trockenrückstand von 0·0329 Grm. $CaCO_3$.

50 CC. derselben Lösung, nach Zusatz obiger Salze titrirt, ergaben einen Gehalt von 0·0324 Grm. $CaCO_3$.

50 CC. derselben Lösung, ohne Zusatz von Salzen titrirt, ergaben 0·0326 Grm. $CaCO_3$.

III. 50 CC. einer wie oben dargestellten Lösung von Magnesiumcarbonat ergaben, mit verdünnter Schwefelsäure versetzt, zur Trockene gebracht und schwach geglüht 0·0526 Grm. $MgSO_4$, entsprechend 0·0368 Grm. $MgCO_3$. Durch Titration wurden in derselben Menge gefunden 0·0365 Grm. $MgCO_3$.

Der Zusatz von neutralen Salzen hatte auch hier auf das Resultat durchaus keinen Einfluss:

50 CC. der Lösung von Magnesiumcarbonat, direct titrirt, ergaben 0·06153 Grm. $MgCO_3$.

50 CC. derselben Lösung, nach Zusatz von neutralen Salzen titrirt, ergaben 0·06150 Grm. $MgCO_3$.

IV. In 50 CC. einer Lösung von Calcium- und Magnesiumcarbonaten in CO_2 hältigem Wasser wurden diese in Sulfate verwandelt, nach dem Trocknen und schwachen Glühen die darin enthaltene Schwefelsäure bestimmt und auf Kohlensäure gerechnet, und dann in 50 CC. der Lösung die gebundene Kohlensäure durch Titriren mit Salzsäure bestimmt:

Lösung *a)*: Gefunden $BaSO_4 = 0·0770$ Grm., entsprechend 0·0145 Grm. CO_2.

Durch Titriren gefunden 0·0138 Grm. CO_2.

Lösung *b)*: Gefunden 0·1120 Grm. $BaSO_4$, entsprechend
0·0211 Grm. CO_2.
Durch Titriren gefunden 0·0203 Grm. CO_2.

V. Die Bestimmung der gebundenen Kohlensäure in Wässern wird selbst durch in Kohlensäure gelöstes kohlensaures Eisenoxydul oder Manganoxydul nicht gehindert, indem auch diese durch den Indicator angezeigt werden, wie aus den folgenden Versuchen hervorgeht:

Es wurde gewaschene Kohlensäure durch Wasser hindurchgeleitet, in welchem Eisenfeilspäne aufgerührt wurden. Nach dem Filtriren der Lösung wurde gefunden:

In 50 CC. mit Chamäleonlösung titrirt 0·00876 Grm. $FeCO_3$.
In 50 CC. mit Salzsäure titrirt 0·00910 Grm. $FeCO_3$.

In einer Auflösung von kohlensaurem Manganoxydul in kohlensäurehältigem Wasser wurde das Mangan durch Eindampfen und Glühen als Manganoxyduloxyd, dann aber auch direct durch Titriren bestimmt:

50 CC. der Lösung gaben 0·0100 Grm. $Mn_3 O_4$, entsprechend 0·0150 Grm. $MnCO_3$.

50 CC. der Lösung, mit Salzsäure titrirt, ergaben 0·0149 Grm. $MnCO_3$.

VI. In einem Brunnenwasser der Station Steinach wurde die gebundene Kohlensäure nach der directen Methode (Fresenius quant. Analyse, VI. Aufl., Bd. II., pag. 164) bestimmt, und in 1 Liter desselben 0·0105 Grm. gebundene Kohlensäure gefunden. $^1/_4$ Liter desselben Wassers, direct mit dem Indicator versetzt und mit Salzsäure titrirt, ergab für 1 Liter 0·0092 Grm. gebundene Kohlensäure.

Von Luckow wurde schon im Jahre 1862 die Cochenilletinctur zur Bestimmung des im Wasser gelösten kohlensauren Kalkes vorgeschlagen. [1]

Es ist dieselbe aber bei eisenhältigen Wässern nicht anwendbar, und zeigt auch beim Übergang der zu titrirenden Flüssigkeit aus dem basischen in den saueren Zustand einen weitaus nicht so deutlichen Farbenwechsel wie unser Indicator, sowie auch

---

[1] Zeitschrift f. anal. Chemie, I., pag. 386.

freie Kohlensäure den Farbenton, wenn auch in einem geringeren Grade wie bei Lakmus, aber doch in erheblichem Masse stört.

Unter Anwendung unseres Indicators kann auch die bleibende Härte eines Wassers auf einem einfacheren als dem gewöhnlichen Wege bestimmt werden. Man braucht hierbei nur die durch Titriren ermittelte gebundene Kohlensäure auf Kalk zu rechnen und von der durch einen zweiten Versuch nach der Methode von Clark ermittelten und in Kalk ausgedrückten Gesammthärte abzuziehen, um dadurch die bleibende Härte zu erfahren.

III. SITZUNG VOM 20. JÄNNER 1881.

Herr Prof. Dr. Richard Maly in Graz übersendet den ersten Theil seiner gemeinsam mit Hrn. F. Hinteregger ausgeführten „Studien über Caffeïn und Theobromin."

Die Herren Prof. J. Habermann und M. Hönig in Brünn übersenden eine vorläufige Mittheilung: „Über die Einwirkung von Kupferoxydhydrat auf einige Zuckerarten."

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. „Untersuchungen über die Anatomie, Physiologie und Entwicklung von Sternaspis", von Herrn Dr. F. Vejdovský, Docent für Zoologie an der Universität und an der böhmisch-technischen Hochschule zu Prag.
2. „Der Flug der Libellen. Ein Beitrag zur Anatomie und Physiologie der Flugorgane", von Herrn stud. phil. R. v. Lendenfeld an der Universität zu Graz.
3. „Beiträge zur Construction eines Kegelschnittbüschels mit vier imaginären Mittelpunkten", von Herrn F. Bergmann, Lehrer an der Staatsrealschule in Jägerndorf.

Das w. M. Herr Prof. v. Barth überreicht eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit des Herrn Dr. M. Kretschy: „Untersuchungen über die Kynurensäure." I. Abhandlung.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ritter v. Brücke überreicht zu seiner Mittheilung vom 7. Jänner l. J. „Über eine durch Kaliumhypermanganat aus Hühnereiweiss erhaltene stickstoff- und schwefelhaltige unkrystallisirbare Säure" eine nachträgliche Berichtigung.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Academia real de ciencias medicas, fisicas y naturales de la Habana. Anales. Entrega 197. Tomo XVII. Diciembre 15. Habana, 1880; 8°.

Académie de Médecine: Bulletin. 15e Année, 2e série. Tome X. Nrs. 1 u. 2. Paris, 1881; 8°.

Accademia, R. dei Lincei: Atti. Anno CCLXXVIII. 1880—81. Serie terza. Transunti, Vol. V. Fascicolo 2. Roma, 1881; 4°.

Akademie der Wissenschaften, königl. zu Berlin: Abhandlungen aus dem Jahre 1879. Berlin, 1880; gr. 4°.

— kaiserliche Leopoldino-carolinische deutsche der Naturforscher: Leopoldina. Heft XVI. Nr. 23—24. Halle a. S. December 1880; 4°.

Ackerbau-Ministerium, k. k.: Statistisches Jahrbuch für 1879. 3. Heft, 2. Lieferung. Wien, 1880; 8°.

Apotheker-Verein, allgem. österr.: Zeitschrift (nebst Anzeigen-Blatt). XIX. Jahrgang, Nr. 2. Wien, 1880; 8°.

Chemiker-Zeitung: Central-Organ. Jahrgang V, Nr. 1 u. 2. Cöthen, 1881; 4°.

Comptes rendus des Séances de l'Académie des Sciences. Tome XCII. Nr. 1. Paris, 1881; 4°.

Geschichtsverein und naturhistorisches Museum in Kärnthen: Carinthia, Zeitschrift. LXX. Jahrgang 1880. Klagenfurt; 8°.

Gesellschaft, deutsche chemische: Berichte. XIII. Jahrgang. Nr. 19. Berlin, 1881; 8°.

Journal für praktische Chemie. Neue Folge, Band 23. 1. u. 2. Heft. 1881. Leipzig; 8°.

— the American, of Science. Third Series. Vol. XXI. (Whole Number, CXXI.) Nr. 121 — January, 1881. New Haven; 8°.

Marburg, Universität: Akademische Schriften pro 1879—80. — 37 Stücke; 4° & 8°.

Nature: Vol. XXIII. Nr. 585. London, 1881; 8°.

Observatoire de Moscou: Annales. Volume VII, 1re Livraison. Moscou, 1880; 4°.

Osservatorio del reale Collegio Carlo Alberto in Moncalieri Bullettino meteorologico. Anno XV. 1879—80. Nr. 7. — Giugno 1880; 4°.

Société des Ingénieurs civils: Mémoires et compte rendu des travaux de la Société. 4e série, 33e année, 11e cahier. Novembre 1880. Paris, 1880; 8°.

Society, the American geographical: Bulletin. 1879. Nr. 5. New York 1880; 8°.

— the Royal geographical: Proceedings and Monthly Record of Geography. Vol. III. Nr. 1. January 1881. London; 8°.

United States, Departement of the Interior: Bulletin of geological and geographical Survey of the Territories. Vol. V. Number 4. Washington, 1880; 8°.

Verein der czechischen Chemiker: Listy chemické. V. Jahrgang Nr. 1—4. Prag, 1880—81; 8°.

Vierteljahresschrift, österreichische für wissenschaftliche Veterinärkunde. LIV. Band. — 2. Heft. (Jahrgaag 1880. IV.). Wien, 1880; 8°.

Wiener Medizinische Wochenschrift. XXXI. Jahrgang, Nr. 3. Wien, 1881; 4°.

Untersuchungen über Kynurensäure.

Von Dr. **M. Kretschy.**

I. Abhandlung.

(Aus dem Universitätslaboratorium des Prof. v. Barth.) (LVII.)

Das überaus kostbare Materiale zu den im Nachfolgenden beschriebenen Versuchen, die Kynurensäure selbst, ist seinerzeit von Herrn Professor Schneider gesammelt und mir von ihm in zuvorkommendster Weise überlassen worden. Es sei mir gestattet, demselben hiemit für dieses unschätzbare Geschenk meinen herzlichsten Dank zu sagen.

Die erste zuverlässige empirische Formel der Kynurensäure, welche bekanntlich Liebig im Hundeharn entdeckte, stellte F. C. Schneider [1] auf. Auf Grund einer grossen Zahl von Analysen des Baryumsalzes dieser Säure berechnete er die Formel derselben mit $C_{20}H_9NO_6$, d. i. nach neuerer Schreibweise mit $C_{10}H_9NO_3$.

Im Jahre 1872 ertheilten O. Schmiedeberg und O. Schultzen [2] auf Grund neuer Analysen der Kynurensäure die Formel $C_{20}H_{14}N_2O_6$, wornach das Molecül verdoppelt und 2H aus Schneider's Formel eliminirt erscheinen.

Es gelang mir vor etwa $1^1/_2$ Jahren, die Kynurensäure als ein Chinolinderivat zu erkennen, und ich habe darüber in einer vorläufigen Mittheilung (Septemberheft der deutsch. chem. Ges. 1879) berichtet. Diese Mittheilung enthält bereits implicite, was ich nunmehr ausführlich nachweisen werde, nämlich, dass der Kynurensäure die empirische Formel $C_{10}H_7NO_3$ zukomme, dass sie eine Chinolinoxysäure und das Kynurin ein Chinolinphenol sei.

Leider hielten der Wunsch nach möglichster Vollständigkeit, und, nebst manchem Missgeschicke, zuletzt eine mehrmonatliche Arbeitsunfähigkeit die Publication allzulang auf.

---

[1] Sitzungsber. der k. k. Akad. d. Wiss. 59, 24.

[2] Ann. der Chem. & Pharm. 164. S. 155.

Erhitzt man Kynurensäure auf ihre Schmelzpunktstempera tur so gibt sie, wie O. Schmiedeberg und O. Schulzen[1] fanden, Kohlensäure ab und es hinterbleibt eine krystallinische Verbindung, welche die Entdecker Kynurin nannten. Erhitzt man Kynurin oder, was dasselbe ist, Kynurensäure mit Zinkstaub zur Rothgluth, so wird auch der O des Kynurin fortgenommen, und es destillirt Chinolin über.

Kynurensäure.

Da ich ausser dem vom Herrn Hofrathe Prof. Schneider überlassenen Materiale auch selbst Dargestelltes verarbeitete, so bin ich in der Lage, über die Gewinnung der Säure einiges zu berichten.

Der mit abgebrühtem Fleische reichlich und nahezu ausschliesslich zu nährende Hund muss abgerichtet werden, seinen Harn zur bestimmten Stunde in ein Gefäss zu entleeren. Der Harn wird sofort filtrirt, mit Salzsäure angesäuert, die Harnmengen je eines Tages vereinigt und etwa 24 Stunden stehen gelassen. In der Regel trübt sich der angesäuerte Harn erst nach Stunden, und dann plötzlich. Die Trübung setzt sich allmählig am Boden des Gefässes und an den Wänden, wo der Glasstab dieselben beim Umrühren berührte, als gelblich- oder bräunlichgrüner Niederschlag ab. Derselbe ist seiner Hauptmenge nach Kynurensäure nebst etwas Schwefel. Lässt man nach dem Abfiltriren des Niederschlages das Filtrat noch weiter durch mehrere Stunden stehen, so erfolgt meist abermals eine Trübung in Form einer flockigen Ausscheidung. Dieselbe unterscheidet sich dem Ansehen nach nicht vom ersten Niederschlage, enthält wieder Schwefel, ist aber ihrer Quantität nach verschwindend klein. Man trennt durch Decantiren, sammelt die Fällungen etwa von je fünf Tagen auf einem Filter, und wäscht jedesmal sehr gut aus. Nach fünf Tagen ist bereits so viel compacter Rückstand auf dem Filter, dass es verlohnt oder doch gerathen ist, dasselbe zu wechseln. Der lufttrockene Filterinhalt reibt sich leicht vom Filter ab, er wird sofort zur Befreiung vom Schwefel in verdünntem kalten Ammoniak, oder in kohlensaurem Ammon gelöst,

---

[1] l. c.

wieder gefällt etc. Die Filterpapiere sammelt man, um die im Laufe eines Monats nicht unbeträchtlichen Mengen von mechanisch nicht ausbringbarer Kynurensäure zu gewinnen. Im Wesentlichen verfuhr nach dieser Methode auch Prof. Schneider.

Mein Versuchshund, der annähernd 34 Kilogrm. wiegt, und der täglich 1 Kilo vom besten Pferdefleisch, circa 70 Grm. Brot und 1 Liter Wasser bekommt, lieferte, erst nachdem er ungefähr einen Monat in dieser Fütterung gestanden, reichlichere Mengen der Säure (0·8 Grm. Rohsubstanz per Tag). Den ersten Monat der Fütterung betrug die Ausbeute circa 0·1 Grm. per Tag.

Nach Schneider's und nach eigenen Erfahrungen ist die Reinigung der Säure nicht bloss schwierig, sondern auch kostspielig, da sie nur mit ziemlichem Materialverluste bewerkstelligt werden kann. Schneider reinigte, indem er die verdünnte Lösung des Ammonsalzes mit guter Thierkohle kochte und in verdünnte heisse Salzsäure filtrirte, oder er stellte mittelst verdünnter Lösungen von Ätzbaryt oder Ätzkalk die betreffenden Salze dar, liess krystallisiren, löste, fällte wieder etc.

Die Vereinigung von fractionirter Krystallisation mit Ausfällungsmethode leistete auch mir die besten Dienste. Arbeitet man mit dem Ammonsalze und hat überschüssiges Ammon in Lösung, so ist wohl zu beachten, dass diese Salzlösung, die Kynurensäure mag nun roh oder bereits mehrfach gereinigt sein, leicht einer weitgehenden Zersetzung schon nach einem eintägigen Stehen verfallen kann, namentlich in der wärmeren Zeit.

Zur Darstellung des für die Analysen nöthigen Materials wählte ich die weissesten Portionen der Säure Schneider's, und folgte in der Reinigung den Autoren O. Schmiedeberg und O. Schultzen, welche mit Ammon lösten, unter Zusatz von Thierkohle erwärmten und die heisse, verdünnte Lösung mit Essigsäure fällten. Nach etwa achtmaliger Ausführung dieses Verfahrens zu reinigen, bekam ich eine nahezu farblose Salzlösung (— weisse, anscheinend also sehr reine Kynurensäure löst sich in Ammoniak mit mehr minder dunkler Farbe), dieselbe mit Essigsäure angesäuert und auf dem Wasserbad über Nacht auskühlen gelassen, lieferte eine prachtvolle Krystallisation von brillantglänzenden, längeren Nadeln, welche die Schale erfüllten.

Analysen, welche in den verschiedenen Intervallen dieser Reinigung ausgeführt wurden, zeigten bald, dass die Zahl für den Kohlenstoff, die anfangs viel zu niedrig gefunden wurde, stetig etwas zunehme, bis sie endlich innerhalb der Grenze der Analysefehler stehen blieb. Die Zahl für den Wasserstoff hingegen fand ich vom Anfang an nahezu constant.

Bemerkenswerth ist, dass mit der Reinheit der Säure auch die Haltbarkeit ihres Silbersalzes zunimmt, welche schliesslich sogar die des Chlorsilbers erheblich übertreffen dürfte.

Proben der erhaltenen Krystallisation hatte Prof. v. Lang die Güte zu messen. Er theilt mit:

„Die sehr schmalen Nadeln sind wahrscheinlich rhombische Prismen; da mit Sicherheit keine anderen Flächen beobachtet wurden, so bleiben die Elemente theilweise unbestimmt. Für das beobachtete Prisma ist

$$a : b = 1 \cdot 282 : 1."$$

Die Nadeln schmolzen unter leichtem Schäumen bei 257 bis 258°;[1] sie führen 1 Molecül Krystallwasser und gaben dasselbe bei 140° bis 145° ab:

1·3084 Grm. lufttrockener Kynurensäure, bei 140° getrocknet, verloren H_2O 0·1151 Grm.; in Procenten 8·79.

0·3095 Grm. lufttrockener Kynurensäure, bei 145° getrocknet, verloren Wasser 0·0273 Grm.; in Procenten 8·88.

	$C_{10}H_7NO_3 + H_2O$		
	Berechnet	Gefunden	
H_2O	8·69	8·79	8·88

Die Verbrennungsanalyse gab genau die Procentzahlen der Formel nach O. Schmiedeberg und O. Schultzen:

0·2330 Grm. getrockneter Säure gaben Kohlensäure 0·5429 Grm., Wasser 0·0814 Grm., auf 100 berechnet C = 63·54, H = 3·88.

0·2820 Grm. getrockneter Säure gaben Kohlensäure 0·6550 Grm., Wasser 0·0991 Grm., auf 100 berechnet C = 63·34, H = 3·90.

---

[1] Nach den genannten beiden Autoren schmilzt die Kynurensäure bei 265—266°; da sie kein haltbares („traitables") Silbersalz erhalten konnten, muss ich mein Präparat für das reinere ansehen.

0·3140 Grm. getrockneter Säure lieferten N 20·8 CC. bei 12·8° C und 736·231 reducirtem Barometerdruck; d. i. N = 0·0239091 Grm., auf 100 berechnet 7·68.

	$C_{10}H_7NO_3$ Berechnet	Gefunden	
C =	63·49	63·54	63·34
H =	3·70	3·88	3·90
N =	7·40	7·68	—
O =	25·41	—	—
	100		

$C_{10}H_9NO_3$ würde verlangen:

C ... 62·82
H ... 4·71
N ... 7·32
O ... 25·15

Die Kynurensäure löst sich fast nicht in kaltem, schwer in heissem Wasser. 1000 Theile Wasser von 99·6° lösten im Mittel 0·9 Theile.

Sie löst sich leicht in freiem Alkali in der Kälte, ebenso in kohlensaurem Ammon; beim Erwärmen mit kohlensaurem Baryt oder kohlensaurem Kalk und Wasser treibt sie deren Kohlensäure aus. Sie bildet gut charakterisirte neutrale Salze; ein basisches Salz konnte nicht erhalten werden.

Barytsalz. $(C_{10}H_6NO_3)_2$ Ba + $4^1/_2 H_2O$. Das Barytsalz ist in kaltem Wasser schwer, weit leichter in heissem löslich. Es krystallisirt in Schüppchen oder in Nadeln. Das rohe Barytsalz krystallisirt in glimmerartigen, stark glänzenden Schuppen, die, wenn sie in grösserer Menge vereinigt sind, einen eigenthümlichen, charakteristischen Metallglanz zeigen. Das Barytsalz zur Analyse wurde aus reiner Säure durch Erhitzen mit kohlensaurem Baryt dargestellt. Es wurde in 1^cm^ langen, seidenglänzenden, etwas geschwungenen, pfriemenähnlichen dickeren Nadeln erhalten. O. Schmiedeberg und O. Schultzen geben den Krystallwassergehalt desselben mit 9·52 Procenten an und berechnen daraus $3H_2O$, ich habe gefunden:

0·2912 Grm. kynurensaures Baryum, welches nach dem Absaugen zwei Tage zwischen trockenem Filterpapier an der

Luft gelegen, verloren bei 145°C. 0·0385 Grm. H_2O; d. i. in Procenten 13·22.

0·3088 Grm. desselben Salzes, welche sieben Tage lang zwischen trockenem Filterpapier gelegen, verloren bei 155°C. 0·0403 Grm. Wasser oder in Procenten 13·05.

0·9202 Grm. eines von Prof. Schneider dargestellten, sehr schönen Baryumsalzes, das viele Jahre gelegen hatte, verloren bei 145°C. 0·1209 Grm. H_2O; d. i. in Procenten 13·13.

$(C_{10}H_6NO_3)_2Ba + 4^1/_2 H_2O$

	Berechnet	Gefunden		
H_2O...	13·64	13·22	13·05	13·13

Beim Stehen über Schwefelsäure scheint nahezu 1 Molecül Wasser zu entweichen.

0·2676 Grm. eines sieben Tage über Schwefelsäure getrockneten Salzes verloren bei 150—155° 0·0310 Grm. Wasser.

$(C_{10}H_6NO_3)_2Ba + 3^1/_2 H_2O$

	Berechnet	Gefunden
H_2O...	10·94	11·50

Die Analyse des getrockneten Baryumsalzes ergab:

0·2527 Grm. Substanz gaben Kohlensäure 0·4093 Grm; CO_3Ba—0·0972 Grm., H_2O—0·0554 Grm.

Den 0·0972 Grm. CO_3Ba entspricht Kohlensäure 0·021709 Grm. und Baryum = 0·067595 Grm., auf 100 berechnet C—46·51, H—2·43, Ba—26·74.

0·2366 Grm. getrockneten Baryumsalzes verglüht gaben CO_3Ba—0·095 Grm.; in Procenten Ba = 26·60.

0·2642 Grm. getrockneten Baryumsalzes gaben 12·7 CC. N bei 13·7°C. und 731.24 Mm. reducirter Barometerhöhe, d. i. N = 0·014621 Grm.; in Procenten N = 5·53.

$(C_{10}H_6NO_3)_2Ba$

	Berechnet	Gefunden	
C...	46·78	46·51	
H...	2.34	2.43	
Ba..	26·70	26·75	26·60
N...	5·45	5·53	
O...	18·71	—	

Da Schneider seine Formel ausdrücklich auf die Analyse des Baryumsalzes stützte, so führe ich zum Vergleiche auch das Baryumsalz nach seiner Formel an. Dasselbe verlangt:

	$(C_{10}H_6NO_3)_2Ba$
C...	46·42
H...	3·09
Ba..	26·49
N...	5·41
O...	18·56

Die Versuche, ein basisches Baryumsalz herzustellen, gaben ein negatives Resultat, wie den genannten beiden Autoren. Bringt man, um das Waschen auf ein Minimum einschränken zu können, in eine heisse Lösung des neutralen Salzes nur sehr wenig mehr als die berechnete Menge von Ätzbaryt, so erstarrt beim Erkalten die Salzlösung in Form aufgequollener, zu Kugeln radiär vereinigter Fäden, Pilzvegetationen ähnlich. Diese Krystallisation ist ganz eigenthümlich, ich bin ihr sonst nie beim Barytsalz begegnet. Sie ist abér nicht analytisch fassbar; je nach der Dauer des Waschens hat das Salz mehr oder weniger Baryum und zeigt endlich den Barytgehalt des neutralen Salzes.

Kalksalz. $(C_{10}H_6NO_3)_2Ca + 2H_2O$ durch Erwärmen von Kynurensäure mit kohlensaurem Kalk und etwas Wasser dargestellt, stellt es feine, seidenglänzende, schneeweisse Nadeln dar, welche in heissem Wasser löslicher sind als das Barytsalz. Sie krystallisiren mit 2 Molecülen Krystallwasser.

0·2825 Grm. des lufttrockenen Kalksalzes, bei 145° getrocknet, verloren 0·0225 Grm. Wasser; in Procenten 7·96,

0·2792 Grm. des lufttrockenen Kalksalzes, bei 140—145° getrocknet, verloren 0·0225 Grm. Wasser; in Procenten 8·05.

$(C_{10}H_6NO_3)_2Ca + 2H_2O$

	Berechnet	Gefunden	
H_2O...	7·96	7·96	8·05

Die Kalkbestimmung ergab:

0·260 Grm. des getrockneten Kalksalzes gaben CO_3Ca 0·0630, entsprechend Ca — 0·0252; d. i. in Procenten Ca = 9·69.

	$(C_{10}H_6NO_3)_2Ca$	
	Berechnet	Gefunden
Ca...	9·61	9·69

Die Kalkbestimmung wurde zugleich benützt, um das Verhalten des Kalksalzes beim Erhitzen für sich zu erfahren. Zu diesem Zwecke wurde das Salz in einem Platinschiffchen im Wasserstoffstrome schwach geglüht. Sobald die Erhitzung so weit vorgeschritten ist, dass das Salz dunkler wird, erscheint im Rohre ein krystallinischer Anflug, der weiter zunimmt, hinter diesem endlich ein schwerer, röthlicher Öltropfen; dabei geht die Farbe des Rückstandes in braun über, und kurze Zeit darauf, ohne eigentliche Verkohlung, erscheint der Schiffcheninhalt weiss, so dass man annehmen muss, es habe sich beim Erhitzen eine völlig glatte Reaction abgewickelt. Der röthliche Öhltropfen erstarrt beim Erkalten krystallinisch und ist Kynurin.

Dem Kalksalze zunächst kommt in diesem Verhalten das Silbersalz. Das Baryt- und Kupfersalz verkohlen.

Kupfersalz. $(C_{10}H_6NO_3)_2Cu + 2H_2O$. Fällt man die vom überschüssigen Ammon durch Erwärmen befreite Lösung des Ammonsalzes der Kynurensäure mit Kupferchlorid, so erhält man einen gelblich-grünen Niederschlag mikroskopischer Nadeln. Dieselben sind im kalten und heissen Wasser äusserst schwer löslich. Ein Versuch, das Kupfersalz aus kochendheissem Wasser umzukrystallisiren, ergab, dass in circa $1^1/_2$ Liter Wasser sich nur 80 Milligramm gelöst hatten. Das Kupfersalz führt 2 Molecüle Krystallwasser und gibt dieses bei 145° getrocknet ab.

0·2883 Grm. des lufttrockenen Kupfersalzes verloren bei 150° 0·0235 Grm. Wasser; in Procenten 8·15.

0·2482 Grm. des lufttrockenen Kupfersalzes verloren bei 145° 0·0192 Grm. Wasser; in Procenten 7·73.

	$(C_{10}H_6NO_3)_2Cu + 2H_2O$		
	Berechnet	Gefunden	
H_2O....	7·70	8·15	7·73

0·2648 Grm. des getrockneten Kupfersalzes gaben verbrannt Kohlensäure 0·5296 Grm., Wasser 0·0694 Grm., CuO 0·0485 Grm. Auf 100 berechnet: C — 54·54, H = 2·91, Cu 14·62.

0·2290 Grm. des getrockneten Kupfersalzes gaben CuO 0·0413 Grm., auf 100 berechnet Cu = 14·40.

$(C_{10}H_6NO_3)_2Cu$

	Berechnet	Gefunden	
C...	54.62	54·54	
H ..	2·73	2·91	
Cu..	14·42	14·62	14·40
N ..	6·37	—	
O ..	21·84	—	

Silbersalz. $C_{10}H_6NO_3Ag + H_2O$. Fällt man eine vom überschüssigen Ammon freie Lösung des Ammonsalzes der Kynurensäure mit salpetersaurem Silber, so erhält man einen dicken, weissen Niederschlag, der, wie bereits bemerkt, recht beständig ist, sobald die angewendete Kynurensäure rein war. Das Silbersalz ist in Wasser weit schwerer löslich als die freie Säure; es führt Krystallwasser, welches aber durch Erhitzen ohne Bräunung des Salzes nicht vollständig ausgetrieben werden kann, daher nur indirect bestimmt werden konnte.

0·2744 Grm. des lufttrockenen Silbersalzes gaben verbrannt 0·3809 Grm. CO_2, 0·0652 Grm. H_2O, 0·0944 Grm. Ag; in Procenten C 37·85, H 2·64, Ag. 34·40.

0·2830 Grm. des lufttrockenen Silbersalzes gaben verglüht A 0·0973 Grm. Ag; in Procenten 34·38.

$C_{10}H_6NO_3Ag + H_2O$

	Berechnet	Gefunden	
C...	38·22	37·85	
H ..	2·55	2·64	
Ag..	34·38	34·40	34·38
N...	4·45		
O...	20·38		

Kynurensaures Ammon. $C_{10}H_6NO_3NH_4$. Das Ammonsalz der Kynurensäure ist wasserfrei. Es wird erhalten, wenn man über die lufttrockene Säure trockenes Ammoniakgas leitet. Das Ammonsalz löst sich ganz besonders leicht in kaltem Wasser. Es kann aus der wässerigen Lösung aber durch Abdunsten auf dem Wasserbade nicht erhalten werden, weil beim Eintrocknen der Salzmasse das Ammon entweicht.

Leitet man über lufttrockene Kynurensäure trockenes Ammoniakgas, so verliert sie ihren Glanz, es entweicht Wasser und sie bekommt völlig das Aussehen der bei höherer Temperatur getrockneten Säure.

0·2204 Grm. lufttrockener Säure wogen nach dem Darüberleiten von Ammoniak, nachdem sie zum Abdunsten des etwa mechanisch anhaftenden Gases eine Zeit an freier Luft gestanden hatten, 0·2215 Grm. und nach ungefähr zwölf Stunden 0·2206 Grm., also fast genau das Ausgangsgewicht. Da wasserfreies, kynurensaures Ammon zu Krystallwasser führender Kynurensäure sich verhält wie 206 : 207, so hätten für die zum Versuche angewandten 0·2204 Grm. gefunden werden sollen 0·21934 Grm. gegen wirklich gefundene 0·2206 Grm.

Der Beweis, dass in der That das Ammonsalz vorliege, stellte sich sehr einfach ohne Analyse her. Denn der Schiffcheninhalt in kaltes Wasser gegeben, löste sich augenblicklich; die Lösung längere Zeit auf dem kochenden Wasserbade erhitzt, dann auf dem Sandbade geradezu gekocht und zwar so, dass die abziehenden Dämpfe durch einen Will-Varentrap'schen mit Nessler's Reagens beschickten Apparat streichen mussten, erzeugte nicht die geringste Trübung des Reagens; diese Trübung erschien sofort, als zur selben Lösung etwas Kalilauge gegeben wurde, dann war auch Ammoniak deutlich durch den Geruch erkennbar. Dunstet man die Lösung des Ammonsalzes, welches mittelst trockenen, gasförmigen Ammoniaks hergestellt worden war, auf dem Wasserbade ein, so bleibt ein Rückstand, der unlöslich in Wasser ist; das Ammonsalz ist also wieder zerlegt worden.

Dass ammonikalische Lösungen der Kynurensäure unter Umständen grosse Neigung haben, sich weitergehend zu zersetzen, ist bereits bemerkt worden.

Kaliumsalz. $C_{10}H_6NO_3K + 2H_2O$. Das Kaliumsalz wurde erhalten durch gelindes Erwärmen von überschüssiger Kynurensäure in einer Lösung von gewogenem kohlensauren Kalium. Das Kaliumsalz ist in Wasser sehr leicht löslich. Es krystallisirte in längeren, flaumigen, seidenglänzenden Nadeln; die Hauptmasse der Salzlösung trocknete übrigens vom Rande her faltig ein und witterte daselbst in feinen, senkrecht gegen die Wand gestellten

Nadeln aus. Der faltig eingetrocknete Rand ist opak und haftet fest an der Schale. Das Salz scheint zwei Molecüle Krystallwasser zu führen, es verwittert aber so leicht an der Luft, dass gut stimmende Zahlen nicht zu erhalten waren; nach mehrtägigem Trocknen über Schwefelsäure hielt es noch ein halbes Molecül Krystallwasser zurück; letzteres wird beim Trocknen auf 145—150° vollständig ausgetrieben.

0·5052 Grm. lufttrockenes Kaliumsalz, bei 145—150° getrocknet, verloren 0·0629 Grm. Wasser; in Procenten 12·45

	$C_{10}H_6NO_3K + 2 H_2O$ Berechnet	Gefunden
H_2O	13·68	12·45

0·4595 Grm. über Schwefelsäure getrockneter Substanz verloren bei 145—150° 0·0172 Grm. Wasser

	$C_{10}H_6NO_3K + {}^1/_2 H_2O$ Berechnet	Gefunden
H_2O	3·81	3·77

0·4423 Grm. bei 150° getrockneter Substanz gaben 0·1694 SK_2O_4.

	$C_{10}H_6NO_3K$ Berechnet	Gefunden
K	17·22	17·20

Übereinstimmend mit der Angabe Brieger's, der eine Verbindung der Kynurensäure mit Salzsäure beschrieb,[1] scheint die Säure auch ein Doppelsalz mit Platinchlorid zu geben.

Die mit der Kynurensäure isomere synthetische Oxycinchoninsäure König's, von welcher der Autor mir gütigst eine Probe gegeben, ist schon durch das Verhalten ihres Kupfer- und Silbersalzes und durch ihren Schmelzpunkt scharf geschieden. Die Kynurensäure schmilzt ohne zu sublimiren bei 257—258°, die Säure König's noch nicht bei 300° und ist sublimirbar. Das Kupfer- und Silbersalz der Kynurensäure ist auch in heissem Wasser sehr schwer löslich, die gleichnamigen Salze der Säure König's hingegen sind daraus umkrystallisirbar.

[1] Zeitschr. f. physiol. Chem. IV., 92.

Das Silbersalz der Säure König's wird bei 110° vollständig trocken, das der Kynurensäure gibt sein Krystallwasser auch bei über 140° gesteigerter Temperatur nicht vollständig ab, sondern bräunt sich vorher.

Kynurin.

O. Schmiedeberg und O. Schultzen haben das Kynurin entdeckt, indem sie Kynurensäure eine Zeit lang bei deren Schmelztemperatur erhitzten. Hiedurch spalteten sie glattweg Kohlensäure ab und erhielten eine aus Wasser vortrefflich krystallisirende Verbindung von der empirischen Formel C_9H_7NO. Sie haben diese Verbindung zutreffend beschrieben und analysirt, entschieden sich aber ohne nähere Begründung für die Verdoppelung der Formel und für die aromatische Natur des Körpers.

Zur Darstellung des Kynuren folgte ich genau den beiden Autoren, nur dass ich im Wasserstoffstrom erhitzte und zwar im Ölbad.

Die Kohlensäureabspaltung vollzieht sich bei einer Temperatur von 253—258°, worauf zu achten ist. Gut ist es, nicht zu grosse Mengen auf einmal zu verarbeiten, weil es längere Zeit währt, bis die ganze Masse ohne Schäumen ruhig fliesst, und weil die hohe Schmelztemperatur nicht mehr weit von der Zersetzungstemperatur des Kynurins entfernt ist.

Nähert sich die Erhitzung der Schmelztemperatur, so tritt jedesmal nebst geringen Mengen krystallinischen Sublimats ein eigenthümlicher, aromatischer, an Fenchelsamen erinnernder Geruch auf. War die Kynurensäure erst wenig gereinigt, so ist der Geruch urinös oder geradezu dem von trocken erhitzten Eiweiss ähnlich. Zieht man dann die erkaltete Schmelze mit heissem Wasser aus, so bleibt nebst kohligen Resten eine theerige Schmiere zurück. Das ist aber nur bei unreiner Kynurensäure der Fall, war diese rein, so ist der Erfolg so, wie die beiden Entdecker beschrieben. Die Ausbeute an Kynurin betrug circa 90 Procent der berechneten Menge.

Der heisse, wässerige Auszug der (jedesmal bräunlich gefärbten) Schmelze wurde mit Thierkohle behandelt und in geeigneter Concentration krystallisiren gelassen. Durch mehr-

maliges Umkrystallisiren und unter Anwendung von guter Kohle gelangt man sehr rasch zu schönen Krystallen.

Je reiner das Kynurin ist, um so leichter und schöner krystallisirt es, und es lohnt, die Reinigung so weit zu treiben, dass die Lösung wasserhell wird.

Das Kynurin krystallisirt in farblosen, brillantglänzenden, prismatischen, meist zu Drusen vereinigten Krystallen. Professor v. Lang hatte die Güte, die Krystallmessung auszuführen; er theilt Folgendes mit:

Krystallsystem: monosymmetrisch.

Elemente: $a:b:c = 1\cdot0764:1:1\cdot6056$

$ac = 107°34'$

Beobachtete Formen: 100, 001, 101, $\bar{1}01$, 110, 121, $12\bar{1}$.

Die Krystalle sind plattenförmig durch das Vorherrschen der flachen 001.

Die Krystalle sind brüchig; sie enthalten kein Krystallwasser, dagegen ist die Nadelform, in welcher das Kynurin gern erscheint, wenn es plötzlich auskrystallisirt, Krystallwasser-hältig.

Die Nadeln ordnen sich strahlenförmig oder zu gekreuzten Büscheln, oder zu kugeligen Aggregaten; sie verwittern rasch. Die Krystallwasserbestimmung ist daher schwierig, muthmasslich krystallisiren sie mit 3 Molecülen Krystallwasser. Sie verlieren es beim Trocknen auf 110—115°.

0·2497 Grm. Krystallwasser-hältiges Kynurin, getrocknet bei 110—115°, verloren 0·0679 Grm. Wasser; in Procenten 27·18.

0·3056 Grm. derselben Krystallisation, getrocknet bei 145°, verloren 0·0805 Grm. Wasser; in Procenten 26·34.

$C_9H_7NO + 3H_2O$

	Berechnet	Gefunden	
$3H_2O$ ..	27·13	27·18	26·34

Das Kynurin ist in kaltem Wasser wenig löslich, leichter in kaltem Alkohol, sehr leicht in angewärmtem Wasser und Alkohol. 100 Theile Wasser von 15° lösen 0·477 Theile Kynurin. Dasselbe ist schwer löslich in absolutem Äther, Petroleumäther, Benzol.

Das Kynurin schmilzt (wie auch seine Entdecker fanden) bei 201° C., und zwar ohne Bräunung zu einer wasserhellen Flüssigkeit, beim Abkühlen erstarrt es plötzlich rein weiss bei 159—160° C.

Krystallwasserführendes Kynurin schmilzt im eigenen Krystallwasser bei circa 52°.

Das Kynurin hat nur geringe Neigung zu sublimiren. Beim Schmelzen einer grösseren Menge Kynurins erschien in der Nähe von 205° C. im Retortenhalse ein Sublimat, welches unter dem Mikroscope die prismatischen Krystallformen sofort erkennen liess.

Das Kynurin siedet bei 300°C. noch nicht, wie ich gelegentlich einer nach Goldschmiedt und Ciamician ausgeführten Dampfdichtebestimmung erfuhr. Erhitzt man zur Ermittlung der Siedetemperatur Kynurin für sich, so steigt das Thermometer unter starker Bräunung der Substanz rasch auf 300°C., zwar siedet die braunschwarze Masse und kann eine Zeit lang im Sieden erhalten werden, aber das Destillat ist kein Kynurin, sondern ein Öl, das auch nach Wochen nicht erstarrt. Endlich verkohlt der Rückstand in der Retorte, es entweichen Dämpfe von Chinolin, Ammoniak etc.

Das Kynurin reagirt schwach alkalisch. Es schmeckt rein bitter wie Chinin, nur lange nicht so intensiv. Eisenchlorid färbt die Lösung des Kynurins schwach carminroth, Eisenvitriol schwach gelblich; Millon's Reagens allmälig intensiv gelbgrün.

Kynurin wird gefällt durch Pikrinsäure, Silbernitrat, Platinchlorid, Goldchlorid. In verdünnteren Lösungen fällen die beiden Metallchloride erst nach einiger Zeit, das Platinchlorid in Form orangegelber, das Goldchlorid in Form grünlichgelber Nadeln; beide Doppelsalze sind in Alkohol erheblich löslich.

Die Analyse der von Prof. v. Lang gemessenen wasserfreien Krystalle ergab:

0·3345 Grm. Kynurin gaben verbrannt CO_2 0·9124 Grm., H_2O 0·1483 Grm., C 74·39, H 4·92.

0·3075 Grm. Kynurin gaben 26·5 CC. N bei 14·7 °C. 729·78 Mm. reducirten Barometers, d. i. N 0·302727 Grm.; in Procenten N 9·8.4

	C_9H_7NO Berechnet	Gefunden
C.....	74·48	74·39
H.....	4·82	4·92
N.....	9·65	9·84
O.....	11·03	—

Kynurin bei vollkommenem Luftabschlusse auf 300° erhitzt, siedet zwar noch nicht, verträgt aber diese Temperatur noch gut, es färbt sich bloss schwach gelblich. Man konnte demnach vielleicht hoffen, es werde die Vergasung bei der Temperatur des siedenden Schwefels nach V. Meyer's Dampfdichtemethode vertragen. Aber die Substanz verkohlte im Eimerchen.

Dagegen kann man im luftverdünnten Raume Kynurin ganz gut, d. h. unter geringer Verfärbung, destilliren. Aber eine geringe Zersetzung findet doch statt, und ich muss es dieser zuschreiben, wenn Prof. v. Sommaruga's vortreffliche Modification der Dampfdichtemethode Dumas ein nur mittelmässiges Resultat nachgab. Prof. v. Sommaruga hatte die Güte, mir seine Apparate und seine Hilfe freundlichst zur Verfügung zu stellen, wofür ich hiemit verbindlich danke.

Die Bestimmungen ergaben:

Gewicht des Ballons + Luft 19·1701 Grm., bei b 751·683 und t 21°C.

Angewendete Substanz rund 0·265 Grm.

Ballon + Dampf 19·0478 Grm.

Manometerstand beim Abschmelzen des Ballons 664 Mm., b 751·3, wirksame H Quecksilbersäule 87·3 Mm.

Volumen des den Ballon füllenden Quecksilbers 131·1 CC.

Volumen der Luftblase 0·9 CC. gemessen bei t 21° und b 751·4.

Temperatur des siedenden Schwefels 447·7°.

Volumen der Luftblase bei 447·7°, 18·997 CC.

Dampfvolumen 114·539 CC.

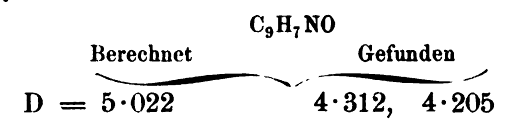
Gewicht des Dampfes 0·02663.

D = 4·312.

Gewicht des Ballons + Luft 17·1440 Grm. bei b = 747·45 und t = 18·5°C.

Angewendete Substanz rund 0·260 Grm.
Ballon + Dampf 17·0020 Grm.
Manometerhöhe beim Abschmelzen des Ballons 676 Mm., $b = 744·7$, wirksame Quecksilbersäule 68·7 Mm.
Volumen des den Ballon füllenden Quecksilbers 141·5 CC.
Luftblase 1·3 CC. gemessen bei $t = 21°$C. und $b = 744·57$.
Volumen des Ballons 142·8.
Temperatur des siedenden Schwefels 447·2°.
Volumen der Luftblase beim Zuschmelzen des Ballons 34·53 CC.
Volumen des Dampfes 109·591 CC.
Gewicht des Dampfes 0·01955 Grm.
D = 4·205.

C_9H_7NO



	Berechnet	Gefunden	
D =	5·022	4·312,	4·205

Die Substanz im Ballon zeigte Spuren von Bräunung. Beim Befeuchten mit Wasser aber erschien die im Ballon verbliebene Substanz in nahezu farblosen, schönen Krystallen wieder. Aus diesem Grunde und weil das Kynurin nur wenig gefärbt überdestillirt, glaube ich die beiden angeführten Bestimmungen als verwendbar ansehen zu dürfen. Sie scheinen mir mit einer an Gewissheit grenzenden Wahrscheinlichkeit darzuthun, dass die Dampfdichte des Kynurins nicht 10, sondern 5 sei, kurz dass für Kynurin die eben gebrauchte einfache Formel angenommen werden müsse.

Das Kynurin gibt mit Säuren gut krystallisirende Verbindungen, in salzsaurer Lösung Doppelverbindungen mit Platinchlorid und Goldchlorid.

Salzsaures Kynurin. Platinchlorid. $2(C_9H_7NO.HCl)PtCl_4 + 2H_2O$. Fällt man salzsaures Kynurin mit Platinchlorid, so entsteht ein dichter, schwefelgelber Niederschlag mikroscopischer Nadeln, der in Wasser schwer, in Alkohol etwas leichter löslich ist. Verdünnte Lösungen des Doppelsalzes in Wasser über Schwefelsäure abdunsten gelassen, krystallisiren in stark glänzenden, orangegelben Nadeln. Das Salz führt Krystallwasser und gibt dasselbe, bei 110° getrocknet, vollständig ab. Lässt man das getrocknete Salz geschützt vor Staub an der Luft liegen,

so zeigt sich, dass es nach einiger Zeit das verlorene Krystallwasser aus der Luft wieder aufgenommen hat.

Die Analyse des Doppelsalzes ergab:

0·2329 Grm. des lufttrockenen Doppelsalzes, bei 110° getrocknet, verloren 0·0109 Grm. Wasser; in Procenten 4·68.

0·2409 Grm. des lufttrockenen Doppelsalzes, bei 110° getrocknet, verloren 0·012 Grm. Wasser; in Procenten 4·98.

0·2494 Grm. des lufttrockenen Doppelsalzes, bei 110° getrocknet, verloren 0·0115 Grm. Wasser; in Procenten 4·61.

	$2(C_9H_7NO.HCl).PtCl_4+2H_2O$ Verlangt	Gefunden		
H_2O......	4·87	4·68,	4·98,	4·61

0·222 Grm. getrockneten Salzes gaben verbrannt Kohlensäure 0·2504 Grm., Wasser 0·0479 Grm.; in Procenten C 30·76, H 2·39.

0·2289 Grm. getrockneten Salzes gaben 8·0 CC. N bei 14·3° C. und 737·38 Mm. reducirter Barometerhöhe, d. i. 0·0092685 Grm. N; in Procenten N = 4·05.

0·2379 Grm. getrockneten Salzes, zur Chlorbestimmung verwendet, gaben 0·2907 Grm. Chlorsilber = 0·071889 Grm. Cl und 0·0669 Grm. Pt; in Procenten Cl = 30·21, Pt = 28·12.

	$2(C_9H_7NO.HCl)PtCl_4$ Berechnet	Gefunden
C...	30·76	30·76
H...	2·27	2·39
N...	3·98	4·05
Pt ..	28·11	28·12
Cl ..	30·30	30·21
O...	4·55	

Salzsaures Kynurin. Die beiden mehrerwähnten Autoren beschrieben das salzsaure Kynurin als farblose Nadeln von der Zusammensetzung $C_{18}H_{14}N_2O_2.2HCl+2H_2O$; eine solche Verbindung habe ich nicht erhalten können, vielmehr geht meine Erfahrung dahin, dass die Base mit Salzsäure (ebenso mit Oxal-

säure) nur eine lockere Verbindung eingehe, deren Formel ich nur mit Vorbehalt gebe.

Versetzt man eine Kynurinlösung mit überschüssiger Salzsäure und lässt krystallisiren, so erhält man stark glänzende, nadelförmige Krystalle, ähnlich denen, in welchen das krystallwasserführende Kynurin vorkommt. Sie verwittern schnell. Ist das Materiale sehr rein, so erhält man wohlausgebildete, grosse, prismatische Krystalle, welche nach einiger Zeit an der Luft ebenfalls schwach verwittern. Sie reagiren sauer.

Prof. v. Lang hatte die Güte, diese Krystalle zu messen:

Krystallsystem: monosymmetrisch.

Elemente: $a:b:c = 4{\cdot}2455:1:7{\cdot}5607$

$ac = 105°12'$

Beobachtete Formen: 100, 001, 101, 10$\bar{1}$, 110.

Die Krystalle sind nadelförmig durch das Vorherrschen der Dimension *b*.

Die Analyse dieser Krystalle weist auf die Zusammensetzung $HCl.2(C_9H_7NO)+2H_2O$.

0·693 Grm. lufttrockener Substanz über Schwefelsäure getrocknet verloren Wasser 0·0362 Grm.; in Procenten 5·22.

	$HCl.2(C_9H_7NO)+2H_2O$ Berechnet	Gefunden
H_2O...	5·22	5·22

0·2770 Grm. der über Schwefelsäure getrockneten Substanz gaben Chlorsilber 0·1264 Grm., entsprechend Cl 0·031147; in Procenten 11·24.

0·3750 Grm. derselben über Schwefelsäure getrockneten Substanz gaben N 29 CC. bei 13° C. und 731·5 Bar.; in Procenten N 8·8.

	$HCl.2(C_9H_7NO$ Berechnet	Gefunden
Cl....	10·86	11·24
N....	8·57	8·8

Eine andere, rasch verwitternde, nadelförmige Krystallisation von salzsaurem Kynurin verlor beim Trocknen auf 90—95° C. 9·82 Procent. (Das salzsaure Salz der beiden Autoren verlangt

9·02 Procent.) Nachdem das bis zu 120° C. fortgesetzte Trocknen keine erhebliche Gewichtsabnahme mehr ergab, wurden die Krystalle zur Verbrennungsanalyse verwendet.

0·2537 Grm. bei 120° C. getrockneter Substanz gaben Kohlensäure 0·6062 Grm., Wasser 0·1078 Grm.; in Procenten C 65·16, H 4·72.

0·2336 Grm. bei 120° C. getrockneter Substanz gaben Kohlensäure 0·5583 Grm., Wasser 0·0995 Grm.; in Procenten C 65·18, H 4·73.

	$C_{18}H_{14}N_2O_2 + 2HCl$ Nach O. Schmiedeberg und O. Schultzen: Berechnet	$2(C_9H_7NO) + HCl$ Berechnet	Gefunden		
C....	59·53	66·16	65·16,	65·18	
H ...	4·41	4·59	4·72,	4·73	
Cl...	19·54	10·86	—	—	11·24
N ...	7·71	8·57	—	—	8·80

Ähnlich der salzsauren Verbindung scheint auch die Verbindung der Base mit Oxalsäure eine unbeständige zu sein. Der Oxalsäuregehalt der übrigens schön krystallisirten Substanz war ein viel zu niedriger.

Das Kynurin ist ein Phenol, denn es verliert, mit Zinkstaub erhitzt, seinen Sauerstoff und gibt glattauf Chinolin. Bevor ich diese Hauptreaction ausführlich bespreche, will ich die Versuche angeben, welche unternommen wurden, um den Charakter dieses Phenols zu definiren.

Verhalten dieses Chinolinphenols.

a) Gegen Basen. Erhitzt man geschmolzenes Kynurin mit der berechneten Menge matallischen Kaliums im Wasserstoffstrom, so erfolgt bei höherer Temperatur (das Ölbad zeigte 180°) eine heftige, explosionsartige Reaction, und man bemerkt an Stelle des Kaliums und des Kynurins eine röthlichbraune Krystallmasse, welche in kaltem, absolutem Alkohol leicht löslich ist. Ich vermuthe bei dieser Reaction ein Chinolinphenolkalium erhalten zu haben,

da Proben der Krystalle auf dem Platinblech verglüht, noch den charakteristischen Geruch des Kynurins entwickelten. Die wahrscheinlich aussichtslose Reinigung und Analyse des Reactionsproductes habe ich noch nicht bewerkstelligt.

Trockenes Ammoniakgas über Kynurin geleitet bewirkt keine Veränderung.

b) Gegen Acetylchlorid, Chlorphosphor. Acetylchlorid, mit bei 120° getrocknetem Kynurin zusammengebracht vereinigt sich mit diesem unter Zischen und Erwärmung. Erhitzt man eine Zeit lang gelinde und zersetzt dann das überschüssige Acetylchlorid durch Wasser, so erhält man nebst Spuren eines blauen, in Wasser unlöslichen Rückstandes ein gut krystallisirendes Reactionsproduct, welches aber längere Zeit in Berührung mit Wasser sich zersetzt und in Kynurin zurückverwandelt. (Das Reactionsproduct ist übrigens nur als Platindoppelsalz analysirbar.)

Obwohl nicht ganz hiehergehörend, reihe ich die Versuche mit Essigsäureanhydrid und Kynurensäure an. Erhitzt man getrocknete Kynurensäure mit etwas überschüssigem Essigsäureanhydrid auf dem Wasserbade, so zeigt sich längere Zeit hindurch keine Veränderung, allmälig aber färbt sich die Flüssigkeit schwach carminroth und die Färbung nimmt rasch zu, wenn man die Temperatur durch kurze Zeit auf 140° C. steigert. Es wurde daher das Erhitzen sofort abgebrochen und das überschüssige Anhydrid durch Wasser zersetzt. Die gebildete Essigsäure löst anfangs das Reactionsproduct auf, bei Zusatz von mehr Wasser fällt dasselbe wieder als schwach gefärbter Niederschlag aus der grünlichen Lösung heraus.

Der Niederschlag mit Alkohol ausgezogen und daraus krystallisirt gab wieder weisse, seidenglänzende Krystalle und bei der Analyse die Zahlen für Kynurensäure.

Erhitzt man Kynurensäure mit Essigsäureanhydrid durch längere Zeit bei 140°, so färbt sich die weisse Krystallmasse blutroth, ballt sich in Klumpen, deren Farbe allmälig in violett übergeht, indessen an den Rändern der Flüssigkeit ultramarinblaue Streifen sichtbar werden und die Flüssigkeit selber bis zur Undurchsichtigkeit tief purpurroth wird. Die Producte dieser tiefer gehenden Einwirkung lassen sich nicht ohne Zersetzung

des einen oder anderen isoliren; als Hauptmasse lässt sich auch nach mehrstündigem Erhitzen bei 140° Kynurensäure abscheiden, daneben in geringer Menge Kryställchen eines indigoblauen Farbstoffes.[1]

Die Leichtigkeit, mit welcher Königs das Hydroxyl seiner synthetischen (isomeren) Oxychinolincarbonsäure mittelst Phosphorpentachlorid durch Chlor ersetzen konnte[2] und weiter der Erfolg, den er durch ein Gemisch von Phosphorpenta- und Phosphoroxychlorid am Cinchonin errang,[3] bewogen mich, die Versuche mit Chlorphosphor in grösserer Zahl, sowohl an der Kynurensäure als am Kynurin anzustellen. Sie entsprachen den Erwartungen nur in geringen Masse, ergaben aber doch, dass aus Kynurin ein Monochlorchinolin gewonnen werden kann.

Auf Kynurensäure wirkt fünffach Chlorphosphor entweder nicht oder leicht zu heftig ein, dergestalt, dass unter Abspaltung von Kohlensäure ein höher gechlortes Product entsteht. Wendet man aber Königs Gemisch von Phosphorpenta- und Oxychlorid an und unter denselben Kautelen, so bekommt man sofort eine Säure, welche durch ihre grössere Löslichkeit in Wasser, Alkohol namentlich in Essigsäure, sich als neue Verbindung ankündigt. Die so erhaltene Säure ist aber überaus zersetzlich; sie verträgt die nöthige Procedur des Reinigens nicht und färbt sich schon, bei 75° einige Zeit getrocknet, deutlich carminroth. Die Chlorbestimmung lieferte auch keine brauchbaren Zahlen.

Weit günstiger gelang der Versuch am Kynurin. Behandelt man trockenes, reines Kynurin mit dem Chlorphosphorgemisch, und zwar auf 1 Theil Kynurin, 2 Theile Phosphorpentachlorid und 6 Theile Phosphoroxychlorid, so findet unter lebhaftem Aufschäumen eine reichliche Entwicklung von Salzsäuredämpfen statt, wobei das Kynurin unter Erwärmen sich löst. Nachdem das stärkere Schäumen vorüber war, wurde eine Zeit lang bei 80°, hierauf kurz auf 100° erhitzt. Die Reactionsmasse wurde nach dem Erkalten in Eiswasser gegossen und filtrirt. Das Filtrat zeigte auf

[1] Einen Farbstoff von ähnlichem Aussehen besitze ich bereits in grösserer Menge durch Prof. Schneider, welcher denselbenbeim Bromiren der Kynurensäure erhalten hat.

[2] Berichte der d. chem. Ges. XII. S. 100.

[3] Berichte der d. chem. Ges. XIII. S. 285.

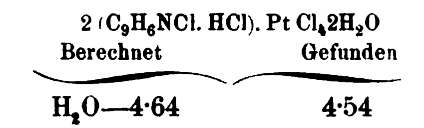
Zusatz von etwas Wasser eine weisse flockige Trübung, welche sich allmälig als eine gallertige (später gummiartig eintrocknende) Masse am Boden des Gefässes absetzte. Um die durch die Zersetzung der Chlorphosphorverbindungen gebildete Salzsäure und Phosphorsäure zu entfernen, wurde mit geschlemmtem, reinen, kohlensauren Blei gesättigt, vom Niederschlag abfiltrirt und bloss mit wenig absoluten Alkahol gewaschen. Schon der Löslichkeit des Chlorbleies wegen ist es geboten, mit möglichst wenig Wasser zu arbeiten, denn das Filtrat lässt sich durch Erwärmen nicht concentriren, ohne sich theilweise zu zersetzen. Um dieser Zersetzung zuvor zu kommen, wurde in einem der ersten Versuche das mit absoluten Alkohol versetzte Filtrat, nachdem es nochmals mit etwas kohlensaurem Blei in der Kälte behandelt worden war sofort mit Salzsäure angesäuert und mit Platinchlorid ausgefällt. Das Platindoppelsalz des Monochlorchinolins hat nahezu das Aussehen vom Chinolinplatindoppelsalz, es ist lichter gelb als das des Kynurins, und enthält zwei Moleküle Krystallwasser welche es erst bei 100° vollständig abgibt. Es ist schwer löslich in kaltem, leicht in heissem Wasser, aber nur unter Zersetzung.

Die Lösung des Monochlorchinolins gab, wenn in geeigneter Concentration gearbeitet wurde, gut entwickelte Krystalle; dieselben sind als solche aber nicht oder kaum analysirbar, weil sie bereits während des Trocknens im Vacuum, das mehrere Tage erfordert, sich zersetzen.

Monochlorchinolin scheint mit Alkoholdämpfen ziemlich flüchtig zu sein. Erwärmt man eine wässerige Lösung desselben auf dem Wasserbade, so entwickelt sie einen starken Geruch, der theils an hydrirtes Chinolin, theils an verdünnte Blausäurelösung erinnert. Geschieht das Erwärmen unter Rückflusskühlung, so nimmt man auf der Oberfläche der Flüssigkeit und im Kühlrohre Öltröpfchen wahr.

Die Analyse des Platindoppelsalzes ergab:

0·2376 Grm. lufttrockener Substanz bei 100° C. getrocknet verloren 0·0108 Grm. Wasser, in Proc. 4·54.



$2\,(C_9H_6NCl.\,HCl).\,Pt\,Cl_4 2H_2O$

Berechnet	Gefunden
H_2O—4·64	4·54

0·2268 Grm. der bei 100° C. getrockneten Substanz gaben verbrannt 0·2440 Grm. Kohlensäure, 0·0494 Grm. Wasser; in Proc. C = 29·30, H = 2·41.

$2\,(C_9H_6NCl\,.\,HCl)\,.\,PtCl_4$

	Berechnet	Gefunden
C	29·22	29·30
H	1·89	2·41

$2\,(C_9H_7NO\,.\,HCl)\,Pt\,Cl_4$ fordert

C.....30·76 Proc.
H..... 2·27 „

Leider zersetzte ich einen grösseren Vorrath dieses reinen Salzes durch den Versuch, es aus heissem Wasser umzukrystallisiren.[1]

Den schlagendsten Beweis für die Auffassung des Kynurins als eines Chinolinphenols lieferte sein bereits erwähntes Verhalten gegen erhitzten Zinkstaub. Um mir die nöthige Menge Destillates zu verschaffen, stellte ich mir das Kynurin nicht eigens dar, sondern destillirte die Säure sofort mit Zinkstaub im Wasserstoffstrome. Ich habe über diese Reaction bereits im Jahre 1879 (September-Heft der Berichte d. d. chem. Ges.) berichtet und bin nun in der Lage, sie in vollem Umfange zu bestätigen.

Die getrocknete zerriebene Kynurensäure wurde etwa mit der 50fachen Menge vorher reducirten Zinkstaubes innig gemischt und in Portionen von höchstens 5 Grm. vorsichtig erhitzt. Man hält die Temperatur niedrig, bis die Kohlensäure abgetrieben ist; ist dies geschehen, so geht man allmälig zur eben sichtbaren Rothgluth über, wo dann alsbald ein nahezu farbloses Öl überdestillirt. Bei gut geleiteter Reaction erscheinen erst zu Ende der-

---

[1] Ich erhielt hiedurch hellorangegelbe, krystallwasserfreie Nadeln, deren Verbrennung ergab:

C.....40·41 Proc.
H .... 2·33 „

auf welche Zahlen eine Formel zu rechnen ich einstweilen unterlassen muss.

selben rothgelbe Tropfen. Das Destillat ist dichroistisch. Es wurde mit concentrirter Salzsäure (bis zur Zerstörung stets mitgebildeter Spuren von Pyrrol) gekocht, die salzsaure Lösung dann mit Kalilauge zerlegt und das abgeschiedene Öl mit Äther ausgezogen. Nach dem Abdunsten des Äthers wurde das Öl mit geschmolzenem Ätzkali getrocknet und destillirt. Die Ausbeute betrug 62 Proc. der theoretisch berechneten Menge.

Der erste Tropfen ging bei 233° C. über;[1] das Thermometer stieg aber nach wenigen Augenblicken auf 234° und weiter auf 235°. Bei diesen Temperaturen ging die Hauptmenge des Öles über. Erst als der Kölbcheninhalt bis zur Höhe des Asbestdiaphragmas, mit welchem die seitliche Strahlung der Flamme abgehalten wurde, abdestillirt worden war, also gegen Ende der Destillation, notirte ich 236° C., bei 237° C. wurde die Destillation überhaupt abgebrochen; bar. = 750·1 Mm. Das Chinolin aus Kynurensäure destillirt also innerhalb eines Grades, und zwar zwischen 234° — 235°, corrigirt nach Kopp zwischen 240·37—241·33° bei *b* = 750·1.

Das durch Destillation gereinigte Öl ist wasserhell, stark lichtbrechend wie Schwefelkohlenstoff, leicht beweglich; es ist bei gewöhnlicher Temperatur flüchtig, erzeugt auf dem Papiere einen Fettfleck, der verschwindet, und es erstarrt in einer Kältemischung von fester Kohlensäure und Äther. Das Öl wird durch Chlorkalk nicht verfärbt; es hat den eigenthümlichen Geruch und den heftig brennendbitteren Geschmack des Chinolin, es ist eine starke Base, von der Zusammensetzung und Moleculargrösse

$$C_9 H_7 N$$

0·2357 Grm. des Öles gaben verbrannt 0·7200 Grm. Kohlensäure und 0·1246 Grm. Wasser; in Proc.: C 83·31, H 5·87.

0·1895 Grm. des Öles gaben N 18·9 CC. bei 21° und 727·35 reducirten bar., d. i. N 0·021106 Grm.; in Proc. N 11·13.

---

[1] Da die Angaben über den Siedepunkt des Chinolins innerhalb eines Intervalles von mehr als 20° schwanken, so gebe ich auch die Constanten des benützten Thermometers: Im schmelzenden Schnee 0°, im Wasserdampf 100·5°, im Naphtalindampf 218° bei *b* = 749·7 Mm.

C_9H_7N

	Berechnet	Gefunden
C	83·72	83·31
H	5·42	5·87
N	10·85	11·13

Die Dampfdichtebestimmung, nach Goldschmiedt-Ciamician ausgeführt, ergab:
Substanz 0·0535 Grm.
Angewendetes Quecksilber 1215·1 Grm.; $t = 19°$ C.
Temperatur des Ölbades 20° C.
Ausgeflossenes Quecksilber 301·1 Grm.
Temperatur des erhitzten Bades 258° C. Aussentemperatur des Quecksilberfadens 74°. Corrigirte Temperatur des Bades 264·60° C.
Wirksame Höhe der Quecksilbersäule 8·5 Ctm. bar. 745·47.

	Berechnet	Gefunden
D	4·468	4·336

Von den Salzen dieses Chinolins wurde bloss das salzsaure Chinolinplatinchlorid untersucht. Dasselbe hat zwei Moleküle Krystallwasser, die es bei 100° verliert und ist getrocknet sehr hygroskopisch.

0·3074 Grm. des Salzes verloren, bei 100° getrocknet, 0·015 Grm. Wasser; in Proc. 4·87.

$2(C_9H_7NO.HCl).PtCl_4+2H_2O$

	Berechnet	Gefunden
H_2O	5·09	4·87

Die Analyse des Doppelsalzes ergab:

0·2811 Grm. des Doppelsalzes gaben verbrannt 0·3327 Grm. Kohlensäure, 0·0672 Wasser; in Proc. C 32·28, H. 2·65.

0·3452 Grm. des Doppelsalzes gaben 14 CC. N, bei 24·3° C. und 750·94 bar., d. i. N = 0·0151422 Grm.; in Proc. 4·46.

0·3048 Grm. des Doppelsalzes gaben 0·3877 Grm. Chlorsilber; entsprechend Cl in Proc. 31·45.

9·3236 Grm. des Doppelsalzes gaben Pt 0·0945 Grm.; in Proc. 29·20.

$2\,(C_9H_7NO.\,HCl)\,Pt\,Cl_4$

	Berechnet	Gefunden
C	32·23	32·28
H	2·38	2·65
N	4·17	4·46
Cl	31·74	31·45
Pt	29·45	29·20

Das Chinolin der Kynurensäure verbindet sich nach mehrstündigem Erhitzen bei 100° im geschlossenen Rohre mit einem Molekül Jodamyl zu Jodamylchinolin, das in Form gelbgrüner metallisch glänzender Krystalle erhalten wird.

0·2645 Grm. der im Vacuum getrockneten Jodverbindung gaben Jodsilber 0·1875 Grm.; entsprechend J in Proc. 38·30.

$C_9H_7N.\,C_5H_{11}J$

	Berechnet	Gefunden
J	38·83	38·30

Dieses Jodamylchinolin, mit der berechneten Menge Kalilauge durch etwa $^3/_4$ Stunden gekocht, gab einen reichlichen, blauen Beschlag im Kochkolben und der Niederschlag löste sich in Alkohol zu einem feurigen Blau. Kocht man statt mit Kalilauge mit Ammoniak, so erhält man einen ähnlichen, in Wasser unlöslichen Niederschlag, aber sein Blau nähert sich dem des Indigo.

Das Chinolin der Kynurensäure gibt also die Cyaninreaction des Cinchoninchinolins, und es ist dieses ein weiterer Beweis für die Identität beider.

Ohne dem Ergebniss der Oxydation meiner Oxychinolincarbonsäure vorgreifen zu wollen, scheint doch bereits aus dem Verhalten ihres Hydroxyls gegenüber negativen Atomgruppen oder Elementen mit einiger Wahrscheinlichkeit zu folgen, dass ihr Wasserrest im Pyridinkern substituirt sei.

Kynurin mit nascirendem Wasserstoff (aus Natriumamalgam) behandelt, gibt einen gelben, in Alkohol leicht löslichen Körper, nebst geringen Mengen eines rothen Farbstoffes.

Der gelbe Körper scheidet sich zunächst als eine grüne, compakte, in der Lauge unlösliche Masse aus, welche durch Waschen mit verdünnter Essigsäure und Abdunsten ihrer Lösung in Alkohol als gelbes Pulver erhalten wird. Der rothe Farbstoff fällt beim Neutralisiren der Lauge. Der gelbe Körper zeigt nur äusserst schwach basische Eigenschaften. Er ist krystallwasserfrei und schon beim Erhitzen auf 100° etwas flüchtig. Zur Analyse wurde er bei 70° getrocknet.

0·2212 Grm. Substanz gaben 0·5939 Grm. Kohlensäure und 0·130 Grm. Wasser.

0·1998 Grm. Substanz gaben 16·3 CC. N bei 17·7° C. und 766·7 Mm. bar. Daraus berechnet sich die empyrische Formel $C_9H_{10}NO$, welche aber im Hinblicke auf den H-Gehalt wohl verdoppelt werden muss, also:

	$C_{18}H_{20}N_2O_2$ Berechnet	Gefunden
C	72·97	73·22
H	6·75	6·54
N	9·45	9·49
O		

Bei Reductionsversuchen in saurer Lösung mittelst Zinn und Salzsäure, welche an der Kynurensäure, am Kynurin und am Chinolin angestellt wurden, lieferte das letztere eine flüssige Base deren salzsaures Salz der Analyse zufolge die Formel $C_9H_{11}N.HCl$ eines salzsauren Tetrahydrochinolins hat. Die Reaction verläuft ohne die Bildung eines harzigen Nebenproductes.

Ich habe diese Base bereits im November 1879 erhalten, wollte aber weder Königs[1] noch Wischnegradsky[2] vorgreifen, der sie durch Reduction mittelst Zink und Salzsäure vor mir gefunden hatte.

---

[1] Berichte d. d. chem. G. XII. 1481. XIII. 2312.

[2] Berichte d. d. chem. G. XII. l. c.

Das Salz krystallisirt in farblosen, ziemlich luftbeständigen langen Nadeln, ist krystallwasserfrei und gab bei der Analyse:

0·2389 Grm. Substanz gaben 0·5568 Grm. Kohlensäure und 0·1585 Grm. Wasser.

0·2751 Grm. Substanz gaben 0·232 Grm. Chlorsilber.

0·2904 Grm. Substanz gaben 22 CC. N bei 19·4° C. und 750·2 Mm. bar.

	Gefunden in Proc.	Berechnet für $C_9H_{11}N.HCl$
C	63·52	63·71
H	7·37	7·07
N	8·37	8·37
Cl	20·85	20·92

Die in meiner vorläufigen Mittheilung angegebene Einwirkung concentrirter Salzsäure auf Kynurensäure habe ich angesichts der Chlorphosphorversuche nicht weiter verfolgt. Ich halte nunmehr das Reactionsproduct, sowie es nach wiederholtem Umkrystallisiren vorlag, vornehmlich für das schon früher erwähnte, unbeständige salzsaure Kynurin.

Auf das Verhalten der Kynurensäure gegen schmelzendes Ätzkali werde ich aber gelegentlich zurückkommen, weil mir seitdem Zweifel aufstiegen, ob der in kleiner Menge beim Ansäuern der Schmelze ausgefallene braune Körper, den ich nach seinem Schmelzpunkt für unreine Kynurensäure hielt, nicht vielmehr eine neue Säure vorstelle.

Ich glaube diese Abhandlung nicht schliessen zu sollen, ohne eine Frage zu berühren, deren Erledigung für die physiologisch chemische Forschung von grosser Tragweite sein muss. **Woher stammt der Chinolinkern der Kynurensäure?**

Überblickt man die synthetischen Processe des Thierleibes, welche E. Baumann 1878 [1] zusammengestellt, so muss man es

[1] Baumann: „Über die synthetischen Processe im Thierkörper." Öffentlicher Vortrag zur Habilit. Berlin 1878.

unwahrscheinlich finden, dass ein so hoch zusammengesetzter Körper vom Thierleibe aufgebaut werde. Viel ungezwungener scheint die Annahme, dass der letztere zur Kynurensäure im Wege des Abbaues, d. i. einer Oxydation gelange und dass die Werkstätte jener Base dort zu suchen sei, wo Reductionen im grossen Style vor sich gehen, in der Pflanze.

Es scheint daher die Annahme eine gewisse Berechtigung zu haben, dass die Oxychinolincarbonsäure, welche im Hundeharn vornehmlich bei einseitiger reichlicher Fleischfütterung sich findet, aus dem Eiweiss stamme, dass also das so hoch zusammengesetzte Molekül des letzteren unter anderen auch einen Kern der Chinolinreihe enthalte.

Ich werde mich bemühen, diese Frage einer Lösung näher zu bringen.



SITZUNGSBERICHTE

DER

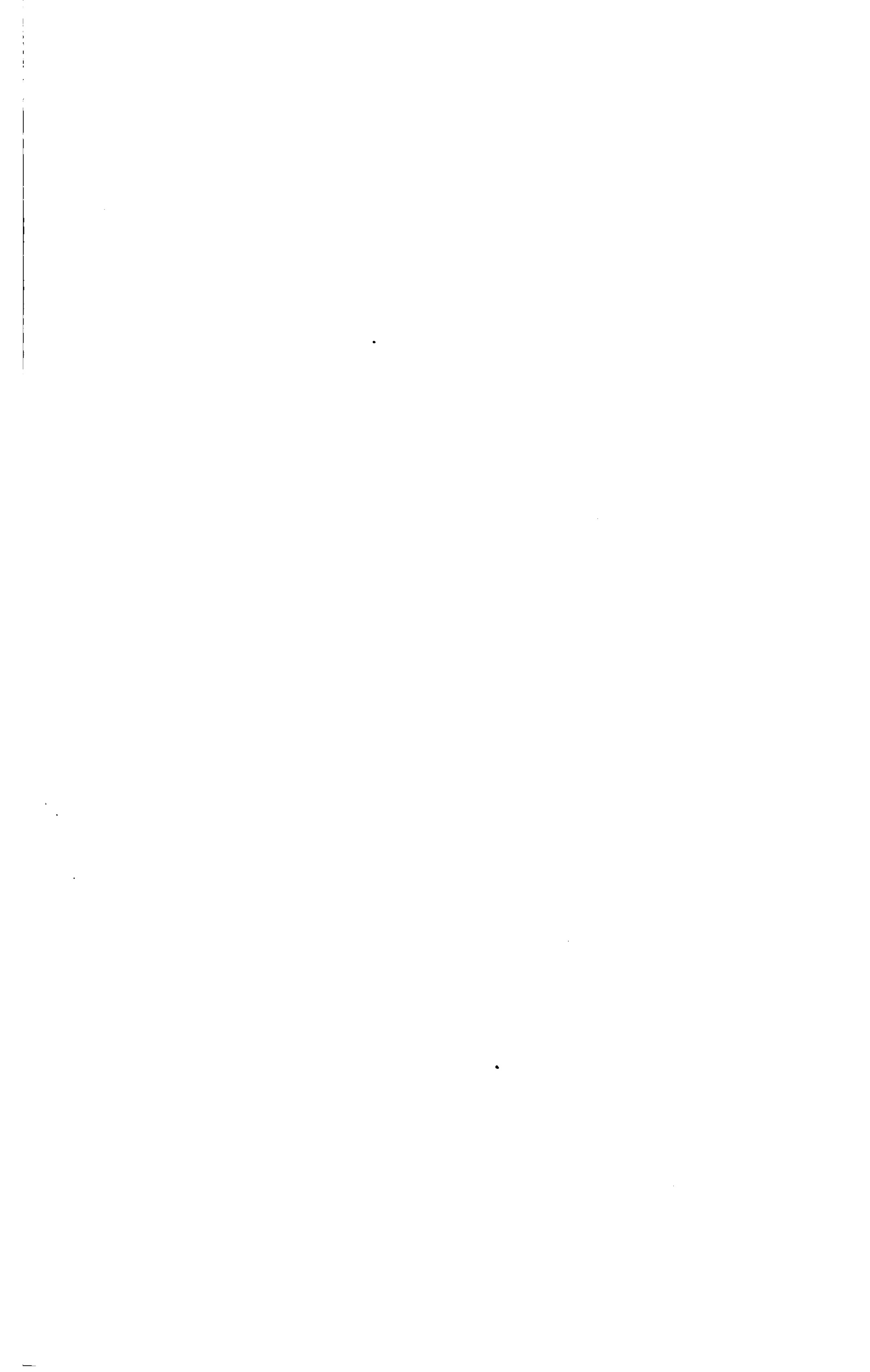
KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LXXXIII. Band. II. Heft.

ZWEITE ABTHEILUNG.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Mechanik, Meteorologie und Astronomie.



IV. SITZUNG VOM 3. FEBRUAR 1881.

Das Präsidium der Handels- und Gewerbekammer für das Erzherzogthum Österreich unter der Enns in Wien übermittelt ein Rundschreiben, betreffend die internationale Ausstellung elektrischer Maschinen und Apparate zu Paris 1881.

Die Adria-Commission legt den eben im Druck erschienenen „V. Bericht an die kaiserl. Akademie der Wissenschaften" vor. Dieser Bericht, welcher zugleich den letzten der von der Adria-Commission herausgegebenen Berichte bildet, ist redigirt von den Herren Ministerialrath Dr. J. R. Ritter v. Lorenz und Vice-Director der meteorolog. Centralanstalt Prof. F. Osnaghi.

Das c. M. Herr Professor Dr. E. Ludwig übersendet eine Abhandlung von den Herren Dr. J. Mauthner und Dr. W. Suida welche sich auf eine im Laboratorium für medicinische Chemie in Wien ausgeführte Arbeit: „Über gebromte Propionsäuren und Acrylsäuren" bezieht.

Herr Prof. A. Wassmuth an der Universität in Czernowitz übersendet eine Abhandlung: „Über die Magnetisirbarkeit des Eisens bei hohen Temperaturen."

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. „Zur wissenschaftlichen Behandlung der orthogonalen Axiometrie" (Zweite Mittheilung), von Herrn Prof. C. Pelz an der technischen Hochschule zu Graz.
2. „Über Momente höherer Ordnung", von Herrn Ferd. Wittenbauer, diplom. Ingenieur und Privatdocent an der technischen Hochschule zu Graz.

Das wirkliche Mitglied Herr Director Dr. J. Hann überreicht eine Abhandlung: „Über den täglichen Gang einiger meteorologischer Elemente in Wien."

Das w. M. Herr Hofrath Ritter von Hauer überreicht eine Mittheilung aus dem geologischen Institute der Universität zu Prag: „Zur Kenntniss der Juraablagerung von Sternberg bei Zeidler in Böhmen“ von Herrn G. Bruder.

Das c. M. Herr Professor Dr. Sigm. Exner in Wien überreicht eine Abhandlung unter dem Titel: „Zur Kenntniss vom feineren Bau der Grosshirnrinde“.

Herr Dr. L. Grossmann in Wien überreicht eine Abhandlung: „Integration der linearen Differentialgleichung von der Form $y'' + Ay' + By = 0$“.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique: Bulletin. 49e année, 2e série, tome 50. Nr. 12. Bruxelles, 1880; 8°.

— — — Annuaire 1881. 47e année. Bruxelles, 1881; 8°.

Academy, the New-York of Sciences. Annals. Vol. I. Nrs. 9, 10, 11—13. New-York, 1879—80; 8°. — Vol. XI, Nr. 13. Index and Contents. New-York; 8°.

Akademie der Wissenschaften k. bayr. zu München: Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Classe. XIII. Band, III. Abtheilung. München, 1880; 4°.

— — Das bayrische Präcisions-Nivellement. V. Mittheilung von Carl Max v. Bauernfeind. München, 1879; 4°. — Ergebnisse aus Beobachtungen der terrestrischen Refraction, von Carl Max v. Bauernfeind. I. Mittheilung. München, 1880; 4°. — Beiträge zur Anatomie des Gorilla, von Dr. Th. L. W. v. Bischoff. München, 1879; 4°. — Über die äusseren weiblichen Geschlechtstheile des Menschen und der Affen. Nachtrag von Dr. Th. L. W. v. Bischoff. München, 1880; 4°. — Über die Berechnung der wahren Anomalie in nahezu parabolischen Bahnen; von Theodor Ritter v. Oppolzer. München, 1879; 4°. — Über den geologischen Bau der lybischen Wüste, von Dr. Karl A. Zittel. München, 1880; 4°.

Apotheker-Verein, allgem. österr.: Zeitschrift (nebst Anzeigen-Blatt). XIX. Jahrgang, Nr. 3 u. 4. Wien, 1881; 8°.

Central-Commission, k. k. statistische: Ausweise über den auswärtigen Handel der österr.-ungarischen Monarchie im Jahre 1879. XL. Jahrgang, II. Abtheilung. Wien, 1880; 4°.

Chemiker-Zeitung: Central-Organ. V. Jahrgang, Nr. 3 u. 4. Cöthen, 1881; 4°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome XCII. Nrs. 2 & 3. Paris, 1881; 4°.

Elektrotechnischer Verein: Elektrotechnische Zeitschrift II. Jahrgang. 1881. Heft I., Januar. Berlin, 1881; 8°.

Gesellschaft, Deutsche geologische: Zeitschrift. XXXII. Band, 3. Heft Berlin, 1880; 8°.

— k. k. geographische, in Wien: Mittheilungen. Band XXIII, (N. F. XIII.), Nr. 12. Wien, 1880; 8°.

— österr., für Meteorologie: Zeitschrift. XV. Band März- und December-Heft 1880. Wien, 1880; 8°.

Gewerbe-Verein, nied.-österr.: Wochenschrift. XLII. Jahrgang, Nr. 1—4. Wien, 1881; 4°.

Helsingfors, Universität: Akademische Schriften pro 1879 bis 1880; 4° u. 8°

Ingenieur- und Architekten - Verein, österr.: Wochenschrift VI. Jahrgang, Nr. 1—4. Wien, 1881; 4°.

— — Zeitschrift. XXXII. Jahrgang. XII. Heft. Wien, 1880; gr. 4°.

Institute, the Essex: Bulletin. Vol. XI. Nrs. 1—12. Salem, 1879; 8°.

Militär-Comité, k. k. technisches und administratives: Mittheilungen über Gegenstände des Artillerie- und Genie-Wesens. Jahrgang 1880. XII. Heft. Wien, 8°.

Mittheilungen aus Justus Perthes' geographischer Anstalt von Dr. A. Petermann. XXVII. Band, 1881. I. Gotha; 4°.

Moniteur scientifique du Docteur Quesneville: Journal mensuel. 25ᵉ année. 3ᵉ série. Tome XI. 470ᵉ Livraison-Février 1881. Paris; 8°.

Nature, Vol. XXIII. Nrs. 586 & 587. London, 1881; 8°.

Ossolinski'sches National-Institut: Sprawozdanie z czynności za rok 1880. We Lwowie, 1880; 8°.

Observatory, the Cincinnati: Publications. Micrometrical Measurements of Double Stars. 1878—79. Cincinnati, 1879; 8°.

Reichsanstalt, k. k. geologische: Verhandlungen. Nr. 17. 1880. Wien; 8°

Reichsforstverein, österr.: Österr. Monatsschrift für Forstwesen. XXX. Band. Jahrgang 1880. December-Heft. Wien; 8°. XXXI. Band, Jahrgang 1881. Jänner-Heft. Wien; 8°.

Société Belge de Microscopie: Procès-verbal. Nrs. 1—3, 5—12. Bruxelles, 1880; 8°.

Society the royal astronomical: Monthly notices. Vol. XLI. Nr. 2. December 1880. London; 8°.

— the American philosophical: Proceedings. Vol. XVIII. Nr. 106. Philadelphia, 1880; 8°. — List of the Members March 15, 1880. 8°.

Verein, militär-wissenschaftlicher: Organ. XXII. Band, 1. Heft. 1881. Wien; 8°.

Wiener Medizinische Wochenschrift. XXXI. Jahrgang. Nr. 4 & 5. Wien, 1881; 4°.

Wissenschaftlicher Club in Wien: Monatsblätter. II. Jahrgang. Nr. 4 — Ausserordentliche Beilage Nr. III. Wien, 1881; 8°.

Über den täglichen Gang einiger meteorologischen Elemente in Wien (Stadt).

Von dem w. M. Dr. J. Hann.

Von September 1852 bis April 1872 incl. wurden an der meteorologischen Centralanstalt in Wien (im Hause Nr. 30 der Favoritenstrasse auf der Wieden) stündliche Werthe des Luftdruckes, der Temperatur, der absoluten und relativen Feuchtigkeit theils durch Autographen, theils durch directe stündliche Beobachtungen gewonnen. Die Resultate dieser Beobachtungen und Reductionen, welche von September bis April 20 Jahre, von Mai bis August 19 Jahre umfassen, sind bisher nur zum Theil veröffentlicht worden, und die vorliegende Mittheilung hat desshalb zum Zwecke, die früheren Publicationen zu ergänzen und so die Gesammtresultate der erwähnten Beobachtungen in aller Kürze zur allgemeinen Kenntniss zu bringen.

In Bezug auf die verwendeten Autographen, deren Aufstellung und die Methode der Reduction der Aufzeichnungen derselben kann hier auf die ersten Jahrgänge der Jahrbücher der k. k. Centralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus verwiesen werden, sowie auf einige später namhaft gemachten Abhandlungen in den Schriften der kais. Akademie.

Den täglichen Gang des Luftdruckes, wie er sich nach den nahezu 20jährigen Aufzeichnungen eines Kreil'schen Barographen herausgestellt hat, habe ich schon in diesen Sitzungsberichten (Bd. LXXVI, II. Abth., Dec.-Heft 1877) veröffentlicht. [1] Den täglichen Gang der Temperatur nach den bis Ende 1863 vorliegenden eilf Jahrgängen hat C. Jelinek bearbeitet und in

[1] Hann: Über den Luftdruck zu Wien; mit einem Nachtrag über die Temperatur zu Wien.

den Denkschriften der mathem.-naturw. Classe der kais. Akademie, XXVII. Bd. (1867) zur Publication gebracht. Da aber seither noch die Beobachtungen von nahezu neun Jahrgängen hinzugekommen sind, erschien es mir doch wünschenswerth, dass auch die Resultate der gesammten Beobachtungsreihe eine Veröffentlichung finden, was durch die folgenden Tabellen I und II geschehen soll.

Über die Art, wie die stündlichen Werthe der Temperatur gewonnen worden sind, hat sich bereits Jelinek in den Schriften der kais. Akademie (a. a. Orte, p. 94) ausgesprochen, sowie auch Wild in seinem grossen Werke über die Temperaturverhältnisse Russlands, I, p. 79 darauf hinweist. Dies erspart mir eine wiederholte Anführung dieser Verhältnisse.

Da ich die Aufstellung des Autographen, sowie die localen Verhältnisse seiner Umgebung noch aus eigener Anschauung kenne, so kann ich das Urtheil des Herrn Wild über die auf diesem Wege gewonnenen Werthe des täglichen Wärmeganges nur bekräftigen, und eine genauere Prüfung der in Tabelle I und II enthaltenen Zahlen und ihr Vergleich mit entsprechenden Werthen anderer Orte führt gleichfalls zu dem Schlusse, dass wir einigermassen local beeinflusste Temperaturen vor uns haben.

Wenn ich nun dennoch dieselben veröffentliche, so geschieht dies aus folgenden Gründen. Man muss unterscheiden zwischen der praktischen Bedeutung der Kenntniss des täglichen Wärmeganges eines Ortes, und dessen Werth für theoretische oder auch nur allgemeiner giltige Schlussfolgerungen. Wenn es sich darum handelt, die Eintrittszeiten der täglichen Extreme und der Mittelwerthe der Lufttemperatur genauer kennen zu lernen für die geographische Lage von Wien, so wird man, wie Herr Wild es gethan hat, davon absehen, die hier wieder vorgeführten Resultate hiefür zu benützen. Noch weniger eignen sie sich zu theoretischen Versuchen über die Gesetze und Ursachen des täglichen Wärmeganges in der Luft. In dieser Beziehung möchte ich mir aber die Bemerkung erlauben, dass allgemeine Mittelwerthe sich hiezu überhaupt nicht eignen. Der mittlere tägliche Wärmegang an einem Orte ist ein so complexes Resultat, hängt ausser der Insolation und Wärmeausstrahlung von so

vielen anderen meteorologischen Factoren, wie: Grad der Bewölkung, Intensität, Dauer und tägliche Periodicität der Niederschläge, tägliche Periode der Windrichtung und Stärke etc. ab, dass es ein ganz aussichtsloses Beginnen genannt werden müsste, diesen mittleren täglichen Wärmegang auf einfache Gesetze zurückführen, ihn als Function der täglichen Periode der Wärme-Ein- und Ausstrahlung darstellen zu wollen. Man kann zu Untersuchungen ähnlicher Art nur den Temperaturgang an heiteren, wolkenlosen Tagen verwenden, wobei vorausgesetzt wird, dass die Thermometer stets die Lufttemperatur angeben. Abgesehen davon, dass dies selbst bei den besten der bis jetzt vorgeschlagenen Aufstellungsmethoden der Thermometer nicht erreicht wird, indem die unentbehrliche Beschirmung durch ihre Eigentemperatur nothwendigerweise auch die Luft- und Thermometertemperatur innerhalb etwas beeinflusst, bleiben auch dann noch manche meteorologische Factoren übrig, die auf den täglichen Wärmegang Einfluss nehmen, und sich dennoch einer Berücksichtigung bei der Aufstellung der Gleichungen des Temperaturganges entziehen.

Die Kenntniss des genäherten täglichen Wärmeganges hat aber einen andern näher liegenden Werth, der darin besteht, dass er uns in die Lage versetzt, aus zwei bis drei täglichen Beobachtungen die wahren Temperaturmittel mit meist genügender Sicherheit ableiten zu können. Die meisten der bisher angestellten stündlichen Temperaturbeobachtungen sind nur zu diesem Zwecke installirt worden. Nun weiss man, dass locale Beeinflussungen des täglichen Wärmeganges, wie sie höchst wahrscheinlich in Wien stattgefunden haben, zwar die Eintrittszeiten der Extreme sehr wesentlich beeinflussen, weil die Temperaturänderungen zu diesen Zeiten sehr geringfügig sind, dass sie ferner auch den Betrag der Extreme merklich erniedrigen und die tägliche Amplitude dadurch verringern, die Mittelwerthe der Temperatur aber nur in extremen Fällen merklich verändern.

Wenn nun die erwähnten drei täglichen Beobachtungen an anderen Orten unter ähnlichen localen Verhältnissen angestellt worden sind, wie die stündlichen, so ist auch anzunehmen, dass der tägliche Wärmegang dort analog verläuft, wie an der Normalstation, und dass die an derselben gewonnenen Correctio-

nen jener drei Terminbeobachtungen auf ein wahres Mittel ihrem Zweck völlig entsprechen. Ja, man würde selbst bei Kenntniss des richtigen täglichen Wärmeganges denselben nicht zur Ermittelung der Correctionen verwenden dürfen, wenn man die wirklichen Mitteltemperaturen mittelst derselben herstellen will.

Wenn also in einem meteorologischen Beobachtungsnetze (wie in Österreich-Ungarn) die Temperaturbeobachtungen fast durchgängig an Thermometern angestellt werden, die in Blechschirmen an der Nordseite der Wand eines Gebäudes angebracht sind, so wird der tägliche Temperaturgang, wie er nach neuerem Vorgange in Jalousiehäuschen, im Freien der Sonne ausgesetzt, gewonnen wird, weniger zutreffende Correctionen der Terminbeobachtungen liefern, als ein Thermograph, der so aufgestellt ist, wie es an der meteorologischen Centralanstalt in der Stadt früher der Fall war. Namentlich für alle Stationen in Städten und innerhalb grösserer Häusergruppen werden die Correctionen, die aus unseren Tabellen I oder II abgeleitet sind, mit grösserer Wahrscheinlichkeit richtige Werthe liefern, als dem wahren Gange der Lufttemperatur im Freien näher kommende Werthe. Die jetzt auf der Hohen Warte aufgestellten Thermographen werden jedenfalls richtigere Werthe für den täglichen Wärmegang liefern, als die älteren in der Stadt benützten, aber die aus diesen neueren Resultaten abgeleiteten Correctionen der Terminbeobachtungen werden nur für ähnliche Aufstellungen im Freien direct anwendbar sein; für die gewöhnliche, in unserem Beobachtungsnetze übliche Aufstellung der Thermometer werden die aus den älteren Beobachtungen abgeleiteten Correctionen richtiger sein, und für Beobachtungen an isolirten Häusern, die frei exponirt und stärkerem Luftwechsel ausgesetzt sind, dürfte ein Mittelwerth aus den älteren und neueren Correctionen wohl der Wahrheit am nächsten kommen.

Von diesem Gesichtspunkte aus fand ich es wünschenswerth, dass die nahe 20jährigen Mittelwerthe des täglichen Wärmeganges in der Stadt Wien zur Veröffentlichung gelangen und trete ich für den praktischen Werth derselben ein.

In keiner der nachfolgenden Tabellen des täglichen Ganges ist eine Correction für die jährliche Aenderung angebracht worden.

Tab. I. Täglicher Gang der Temperatur (Celsius-Grade).

	Dec.	Jänn.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.
Mittern.	—1·10	—1·84	—0·36	2·96	7·85	12·50	16·04	17·74	17·25	14·01	9·06	3·12
1h a.	—1·20	—1·94	—0·58	2·71	7·42	12·02	15·64	17·31	16·87	13·59	8·78	3·01
2	—1·30	—2·05	—0·64	2·46	7·05	11·63	15·26	16·98	16·55	13·22	8·53	2·89
3	—1·39	—2·14	—0·76	2·19	6·76	11·32	15·05	16·75	16·27	12·98	8·29	2·77
4	—1·43	—2·22	—0·89	1·95	6·49	11·12	14·85	16·54	16·02	12·71	8·04	2·66
5	—1·45	—2·28	—1·03	1·75	6·28	11·04	14·82	16·42	15·85	12·46	7·85	2·55
6	—1·54	—2·34	—1·15	1·55	6·20	11·41	15·45	16·85	15·98	12·25	7·69	2·46
7	—1·56	—2·31	—1·15	1·80	7·11	12·70	16·64	18·02	16·97	12·97	7·88	2·49
8	—1·55	—2·24	—0·99	2·45	8·28	13·89	17·66	19·31	18·18	14·19	8·60	2·68
9	—1·31	—1·95	—0·49	3·39	9·64	15·20	18·79	20·39	19·58	15·56	9·68	3·11
10	—0·88	—1·38	0·39	4·50	10·91	16·45	19·84	21·56	20·69	17·00	11·02	3·89
11	—0·46	—0·86	1·05	5·36	11·91	17·46	20·69	22·49	21·92	18·16	12·06	4·33
Mittag	0·06	—0·28	1·73	6·21	12·82	18·30	21·52	23·34	22·67	19·24	13·08	4·86
1h p.	0·41	0·12	2·22	6·90	13·60	18·96	22·19	24·00	23·30	19·98	13·83	5·29
2	0·59	0·33	2·63	7·36	14·02	19·31	22·44	24·26	23·71	20·43	14·28	5·51
3	0·49	0·24	2·64	7·42	14·04	19·26	22·35	24·32	23·75	20·34	14·11	5·38
4	0·15	—0·04	2·45	7·34	13·95	19·15	22·30	24·16	23·62	20·08	13·76	5·01
5	—0·18	—0·49	1·96	6·88	13·52	18·78	21·92	23·85	23·16	19·54	12·88	4·51
6	—0·41	—0·78	1·28	5·94	12·76	18·05	21·27	23·27	22·42	18·41	11·81	4·08
7	—0·56	—0·99	0·99	5·17	11·59	16·95	20·31	22·24	21·19	17·28	11·14	3·85
8	—0·69	—1·16	0·61	4·60	10·62	15·71	19·01	20·91	20·00	16·37	10·54	3·66
9	—0·84	—1·35	0·37	4·11	9·88	14·70	17·89	19·81	19·02	15·60	9·99	3·46
10	—0·99	—1·56	0·07	3·59	9·00	13·75	17·05	18·85	18·16	14·83	9·48	3·25
11	—1·14	—1·68	—0·09	3·30	8·49	13·11	16·51	18·26	17·63	14·39	9·13	3·09
Mittel	—0·76	—1·30	0·43	4·24	10·01	15·11	18·56	20·32	19·61	16·06	10·48	3·67

Tab. II. Abweichungen der Stundenmittel vom Tagesmittel.

	Dec	Jänn.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Jahr
Mittern.	— ·34	— ·54	— ·79	—1·28	—2·16	—2·61	—2·52	—2·58	—2·36	—2·05	—1·42	— ·55	—1·60
1h a.	— ·44	— ·64	—1·01	—1·53	—2·59	—3·09	—2·92	—3·01	—2·74	—2·47	—1·70	— ·66	—1·90
2	— ·54	— ·75	—1·07	—1·78	—2·96	—3·48	—3·30	—3·34	—3·06	—2·84	—1·95	— ·78	—2·15
3	— ·63	— ·84	—1·19	—2·05	—3·25	—3·79	—3·51	—3·57	—3·31	—3·08	—2·19	— ·90	—2·36
4	— ·67	— ·92	—1·32	—2·29	—3·52	—3·99	—3·71	—3·78	—3·59	—3·35	—2·44	—1·01	—2·55
5	— ·69	— ·98	—1·46	—2·49	—3·73	—4·07	—3·74	—3·90	—3·76	—3·60	—2·63	—1·12	—2·68
6	— ·78	—1·04	—1·58	—2·69	—3·81	—3·70	—3·11	—3·47	—3·63	—3·81	—2·79	—1·21	—2·63
7	— ·80	—1·01	—1·58	—2·44	—2·90	—2·41	—1·92	—2·30	—2·64	—3·09	—2·60	—1·18	—2·07
8	— ·79	— .94	—1·42	—1·79	—1·73	—1·22	— ·90	—1·01	—1·43	—1·87	—1·88	— ·99	—1·33
9	— ·55	— ·65	— ·92	— ·85	— ·37	·09	·23	·07	— ·03	— ·50	— ·80	— ·56	— ·40
10	— ·12	— ·08	— ·04	·26	·90	1·34	1·28	1·24	1·08	·94	·54	·22	63
11	·30	·44	·62	1·12	1·90	2·35	2·13	2·17	2·31	2·10	1·58	66	1·47
Mittag	·82	1·02	1·30	1·97	2·81	3·19	2·96	3·02	3·06	3·18	2·60	1·19	2·26
1h p.	1·17	1·42	1·79	2·66	3·59	3·85	3·63	3·68	3·69	3·92	3·35	1·62	2·86
2	1·35	1·63	2·20	3·12	4·01	4·20	3·88	3·94	4·10	4·37	3·80	1·84	3·20
3	1·25	1·54	2·21	3·18	4·03	4·15	3·79	4·00	4·14	4·28	3·63	1·71	3·16
4	·91	1·26	2·02	3·10	3·94	4·04	3·74	3·84	4·01	4·02	3·28	1·34	2·96
5	·58	·81	1·53	2·64	3·51	3·67	3·36	3·53	3·55	3·48	2·40	·84	2·49
6	·35	·52	·85	1·70	2·75	2·94	2·71	2·95	2·81	2·35	1·33	·41	1·80
7	·20	·31	·56	·93	1·58	1·84	1·75	1·92	1·58	1·22	·66	·18	1·06
8	·07	·14	·18	·36	·61	.60	·45	·59	·39	·31	·06	— ·01	·31
9	— ·08	— ·05	— ·06	— ·13	— ·13	— ·41	— ·67	— ·51	— ·59	— ·46	— ·49	— ·21	— ·32
10	— ·23	— ·26	— ·36	— ·65	—1·01	—1·36	—1·51	—1·47	—1·45	—1·23	—1·00	— 42	— ·91
11	— ·38	— ·38	— ·52	— ·94	—1·52	—2·00	—2·05	—2·06	—1·98	—1·67	—1·35	— ·58	—1·29
Mittel [1]	0·58	0·76	1·10	1·75	2·47	2·68	2·49	2·58	2·56	2·51	1·93	0·84	1·85

[1] Ohne Rücksicht auf das Vorzeichen, entsprechend der mittleren Ordinate der Curve des täglichen Wärmeganges und dem wahren Mass der täglichen Variation.

Dieselben Gründe lassen sich für die Benützbarkeit der unter ähnlichen Verhältnissen gewonnenen Werthe des täglichen Temperaturganges zu Prag und Krakau, welche Herr Wild in seinem grossen Werke nicht berücksichtigt hat, geltend machen. Man geht viel zu weit, wenn man ersteren, wie es ein neuerer Autor gethan hat, allen Werth abspricht.

Nach dem früher Gesagten wird man es aber natürlich finden, dass ich nicht darauf eingehe, die Wendestunden des täglichen Wärmeganges aus den Tabellen I und II abzuleiten.

Man sieht auf den ersten Blick, dass derselbe local beeinflusst ist, z. B. entfernt sich das Maximum im März weiter vom Mittage als im Sommer, was davon herrührt, dass im Sommerhalbjahre von April bis September (incl.) directe stündliche Beobachtungen von Mittag bis 7^h Abends auf der Schattenseite des Hauses angestellt wurden. Daher kommt es, dass z. B. im Mittel von Mai bis Juli das Maximum fast genau auf 2^h 30^m fällt, und sich im ganzen Sommerhalbjahre zwischen 2^h und 3^h hält, während Jelinek aus der früheren, kürzeren Beobachtungsreihe, auf welche die ersten Jahrgänge, wo der erwähnte Vorgang noch nicht eingeführt war, noch grösseren Einfluss hatten, die Eintrittszeit des Maximums im Sommer zwischen 3^h und 4^h erhielt, allerdings durch Anwendung der Bessel'schen Formel.

Die Amplituden des täglichen Temperaturganges sind:

Dec.	Jänn.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept,	Oct.	Nov.	Jahr
2·15	2·67	3·79	5·87	7·84	8·22	7·62	7·90	7·90	8·18	6·59	3·05	5·88

Differenz der täglichen Extreme (aperiodische Wärmeschwankung):

Dec.	Jänn.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Jahr
4·7	4·9	6·1	7·8	9·6	10·2	9·9	10·1	9·7	9·6	8·3	4·9	8·0

Die periodische tägliche Wärmeschwankung hat zwei Maxima im Mai und September, die aperiodische hat (aus der gleichen Beobachtungsperiode abgeleitet) gleichfalls zwei Maxima, die auf Mai und Juli fallen, die letztere (Differenz der mittleren Extreme nach dem Maximum-und Minimumthermometer) ist natürlich viel grösser, als die periodische Wärmeschwankung, namentlich im Winter.

Die mittlere Ordinate der täglichen Wärmecurve ist im Mai am grössten 2·68 und im December am kleinsten mit 0·58, die tägliche Wärmevariation ist also im Mai 4·6mal grösser als im December.

Bildet man den Unterschied zwischen der grössten und kleinsten Abweichung jeder Stunde vom Tagesmittel im Laufe des Jahres, so erhält man folgende Zahlen, welche ein Mass für die Veränderlichkeit der Correction einer einzelnen bestimmten Stunde geben:

Mittern.	1^h	2^h	3^h	4^h	5^h	6^h	7^h	8^h	9^h	10^h	11^h
2·24	2·65	2·94	3·16	**3·32**	**3·38**	3·03	2·29	1·09*	1·15	1·46	2·05

Mittag	1^h	2^h	3^h	4^h	5^h	6^h	7^h	8^h	9^h	10^h	11^h
2·37	2·75	3 02	3·03	**3·13**	3·09	2 60	1·74	0·61*	0·62*	1·28	1·68

Die Stunden 4^h und 5^h Vormittag und Nachmittag ändern ihre Correctionen im Laufe des Jahres am meisten; die Stunden 8^h und 9^h am wenigsten, namentlich zeichnen sich die Stunden 8^h und 9^h Abends durch die grösste Constanz der Abweichungen ihrer Temperatur vom Tagesmittel aus. Dadurch empfehlen sie sich zur Wahl einer der Terminbeobachtungen. Der Termin $8^1/_2{}^h$ stellt im Jahresmittel nach dem Wärmegange in der Stadt Wien sogar das wahre 24stündige Mittel ganz genau dar. Auch in den einzelnen Monaten ist die Abweichung vom wahren Tagesmittel nur geringfügig, wie folgende Zahlen darthun:

Correction des Temperaturmittels $8^1/_2{}^h$ auf ein wahres Mittel:

Dec.	Jänn.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Jahr
·00	—·04	—·06	—·11	—·24	—·09	·11	—·04	·10	·07	·21	·11	·00

Für Leipzig sind diese Correctionen: [1]

Dec.	Jänn.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Jahr
·16	·14	—·06	—·26	—·27	—·40	—·40	—.23	·13	·28	·25	·14	—·04

Die Unterschiede sind nur in den Monaten Jänner, Mai bis Juli erheblich, und es mag dies zum Theil daher rühren, dass der

[1] Siehe Wild: Die Temperaturverhältnisse des russischen Reiches, I, p. XLV.

tägliche Gang für Leipzig nur aus 2- bis 3jährigen Beobachtungen abgeleitet worden ist.

Ich führe nun noch die Correctionen der in Österreich zumeist gewählten Termincombinationen 6^h, 2^h, 10^h und 7^h, 2^h, 9^h sowie 7^h, 2^h, 10^h nach den stündlichen Beobachtungen zu Wien (Stadt) an:

Dec.	Jänn.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Jahr
Correction des Mittels $\frac{1}{3}$ (6^h, 2^h, 10^h):												
—·11	—·11	—·09	·07	·27	·29	·25	·33	·33	·22	·00	—·07	·11
Correction des Mittels $\frac{1}{3}$ (7^h, 2^h, 9^h):												
—·16	—·19	—·19	—·18	—·33	—·46	—·43	—·38	—·29	—·27	—·24	—·15	—·27
Correction des Mittels $\frac{1}{4}$ (7, 2^h; 9^h, 9^h):												
—·10	—·13	—·12	—·10	—·21	—·24	—·16	—·15	—·07	—·09	—·06	—·06	—·12
Correction des Mittels $\frac{1}{3}$ (7^h, 2^h, 10^h):												
—·10	—·12	—·09	—·01	—·03	—·14	—·15	—·06	—·00	—·02	—·07	—·08	—·07

Da meine Vergleichungen 5jähriger corr. Mitteltemperaturen für 6^h, 2^h und 10^h in der Stadt (Sternwarte) und auf der Hohen Warte gezeigt haben, dass die Differenzen für die Morgen- und Abendtemperaturen viel grösser sind, als für die Temperatur um 2^h pm., so ist vorauszusehen, dass der tägliche Gang der Temperatur auf der Hohen Warte merklich verschiedene Correctionen für die angeführten Terminbeobachtungen ergeben wird. Man darf desshalb den an einem Observatorium auf dem Lande erhaltenen täglichen Wärmegang nicht benützen zur Correction von Temperaturbeobachtungen, die inmitten einer Stadt angestellt werden.

Tabelle III enthält den täglichen Gang des Dunstdruckes zu Wien, der hier überhaupt zum ersten Male veröffentlicht wird. Die Daten sind erhalten aus directen Ablesungen eines Psychrometers bei Tag, in Verbindung mit den Reductionen der Registrirungen eines Hygrometers, namentlich für die Nachtstunden; in den ersteren Jahren wurde jedoch auch um 2^h Morgens das Psychrometer direct abgelesen.

Tab. III. Täglicher Gang der Feuchtigkeit (in Millimetern.)

	Dec.	Jänn.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.
Mittern.	3·70	3·54	3·77	4·44	5·82	8·12	10·08	11·03	11·10	9·29	7·29	4·85
1h a.	3·70	3·52	3·74	4·42	5·66	7·99	9·95	10·87	11·01	9·18	7·22	4·83
2	3·68	3·52	3·70	4·38	5·59	7·90	9·84	10·78	10·94	9·09	7·15	4·80
3	3·65	3·50	3·68	4·31	5·55	7·83	9·75	10·67	10·85	9·00	7·13	4·76
4	3·63	3·47	3·65	4·26	5·50	7·74	9·65	10·65	10·74	8·93	7·04	4·74
5	3·63	3·45	3·63	4·21	5·46*	7·67*	9·63*	10·56*	10·65	8·87	6·97	4·71
6	3·61	3·45	3·61	4·20*	5·50	7·78	9·81	10·72	10·62*	8·80*	6·95*	4·67
7	3·59*	3·43*	3·61*	4·20	5·55	7·99	9·99	10·83	10·76	8·87	6·95	4·67*
8	3·59*	3·43	3·61	4·26	5·64	8·12	10·11	10·99	10·99	9·02	7·04	4·67
9	3·61	3·45	3·63	4·33	5·71	8·23	10·17	**11·03**	11·10	9·25	7·15	4·69
10	3·65	3·52	3·72	4·40	**5·73**	**8·28**	**10·20**	11·01	**11·21**	9·43	7·35	4·80
11	3·68	3·56	3·77	4·40	5·68	8·23	10·13	10·87	11·10	**9·47**	7·40	4·83
Mittag	3·70	3·59	3·81	4·40*	5·64	8·17	9·99	10·78	10·99	9·38	7·42	4·85
1h p.	3·72	3·63	3·86	4·40	5·62	8·14	9·95	10·72	10·87	9·32	7·44	4·87
2	3·77	3·65	3·88	4·42	5·62*	8·12*	9·88	10·69	10·72	9·29	7·44*	4·92
3	3·79	3·68	3·93	4·49	5·59	8·17	9·86*	10·67*	10·69*	9·23*	7·44	4·96
4	**3·79**	**3·68**	**3·99**	4·53	5·64	8·21	9·90	10·69	10·74	9·25	7·51	4·99
5	3·77	3·65	3·97	4·58	5·68	8·28	10·06	10·78	10·90	9·36	7·60	**4·99**
6	3·77	3·65	3·93	**4·62**	5·82	8·50	10·17	10·96	11·10	9·56	**7·62**	4·96
7	3·77	3·65	3·93	4·58	5·87	8·59	10·35	11·17	11·28	9·59	7·62	4·96
8	3·77	3·63	3·90	4·60	5·91	**8·64**	10·42	11·32	**11·41**	**9·61**	7·53	4·94
9	3·74	3·63	3·88	4·58	**5·93**	8·62	**10·44**	**11·37**	**11·39**	9·54	7·42	4·92
10	3·72	3·59	3·83	4·51	5·87	8·48	10·35	11·28	11·28	9·41	7·31	4·85
11	3·70	3·56	3·79	4·49	5·82	8·35	10·22	11·21	11·21	9·32	7·22	4·83
Mittel	3·70	3·55	3·78	4·42	5·68	8·17	10·04	10·90	10·99	9·25	7·30	4·84

Aus Tabelle III ergeben sich folgende Amplituden der täglichen Variation des Dunstdruckes:

Dec. . . .	0·20mm	März . .	0·42mm	Juni . . .	0·81mm
Jänn. . .	0·25	April . .	0·47	Juli . . .	0·81
Febr. . .	0·38	Mai . . .	0·97	Aug.. . .	0·79
		Sept.. . .	0·81mm		
		Oct. . . .	0·67		
		Nov.. . .	0·32		

Die mittlere tägliche Variation der absoluten Feuchtigkeit ist das ganze Jahr hindurch sehr unbedeutend, die Amplitude derselben beträgt im Winter wie im Sommer kaum 8% des absoluten Werthes, sie ist also weit kleiner als die Fehler einzelner Messungen. Dadurch unterscheidet sich der tägliche Gang des Dunstdruckes wesentlich von jenem der Temperatur und der relativen Feuchtigkeit wenigstens im Sommerhalbjahre.

Eine schärfere Bestimmung der Wendestunden halte ich aus diesem Grunde für überflüssig und von wenig Bedeutung. Ich stelle die genäherten Zeiten derselben hier zusammen, sowie sie sich direct aus der Tabelle III ergeben.

Im Winterhalbjahre zeigt der tägliche Gang der absoluten Feuchtigkeit nur Ein entschiedenes Maximum und Minimum.

Dieselben fallen auf:

	Oct.	Nov.	Dec.	Jänn.	Febr.	März
Max.. . .	$6^{1}/_{2}{}^{h}$ pm.	$4^{1}/_{2}{}^{h}$ pm.	$3^{1}/_{2}{}^{h}$ pm.	$3^{1}/_{2}{}^{h}$ pm.	4^{h} pm.	6^{h} pm.
Min. . . .	$6^{1}/_{2}{}^{h}$ am.	7^{h} am.	$7^{1}/_{2}{}^{h}$ am.	$7^{1}/_{2}{}^{h}$ am.	7^{h} am.	6^{h} am.

Der Einfluss der abnehmenden Tageslänge im Winter tritt in diesen Zahlen sehr deutlich und regelmässig an dem früheren Eintreten der Nachmittagsmaxima und der Verspätung der Vormittagsminima hervor.

Im Sommerhalbjahre finden wir zwei Maxima und zwei Minima. Die Hauptmaxima sind dieselben wie im Winter, nur verspätet; dasselbe gilt für die Hauptminima, die aber verfrüht sind. Durch Abnahme der absoluten Feuchtigkeit in den ersten Nachmittagsstunden entwickeln sich nun daneben die secundären Extreme, ein vormittägiges Maximum und ein kleines Minimum

am Nachmittag. Folgende sind die genäherten Eintrittszeiten dieser vier täglichen Extreme im Sommerhalbjahre.

	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.
1. (Haupt-)Min. .	5^h am.	5^h am.	$4^1/_2{}^h$ am.	4^h am.	$5^1/_2{}^h$ am.	6^h am.
1. (sec.) Max. . .	$9^1/_2{}^h$ am.	10^h am.	10^h am.	$8^1/_2{}^h$ am.	10^h am.	$10^1/_2{}^h$ am.
2. (sec.) Min. . .	3^h pm.	2^h pm.	$2^1/_2{}^h$ pm.	2^h pm.	3^h pm.	3^h pm.
2. (Haupt-) Max. .	$8^1/_2{}^h$ pm.	$8^1/_2{}^h$ pm.	$8^1/_2{}^h$ pm.	8^h pm.	$8^1/_2{}^h$ pm.	8^h pm.

Das Hauptminimum des Morgens verfrüht sich von $7^1/_2{}^h$ am. im December und Jänner bis auf 4^h am. im Juli. Das Hauptmaximum hält sich ziemlich constant bei $8^1/_2{}^h$ Abends. Das secundäre Nachmittagsminimum fällt durchschnittlich auf $2^1/_2{}^h$ pm., also nahe auf die Stunde des täglichen Wärmemaximums, das secundäre Vormittagsmaximum darf man im Mittel auf 10^h am. ansetzen, -- die Ausnahme im Juli dürfte auf irgend eine Störung oder auf einen Fehler zurückzuführen sein, was, da einige Hundertel Millimeter hiebei den Ausschlag geben, selbst im 20jährigen Mittel noch recht wohl möglich ist. Der Übergang von der einfachen Tagescurve des Winterhalbjahres zur doppelt gekrümmten des Sommerhalbjahres erfolgt im October und März, indem um Mittag herum die Tagescurve dieser Monate eine Weile hindurch horizontal verläuft. Der tägliche Gang der absoluten Feuchtigkeit zeigt also trotz der sehr geringfügigen Amplituden einen sehr wohl ausgeprägten Charakter.

Verglichen mit dem täglichen Gang der absoluten Feuchtigkeit an andern Orten (man sehe z. B. die Tafeln in: Wild: Über den täglichen und jährlichen Gang der Feuchtigkeit in Russland, Repertorium für Meteorologie T. IV, Nr. 7, Petersburg 1875) schliesst sich Wien den continentalen Stationen an, für welche die Erniedrigung der Feuchtigkeit in den ersten Nachmittagsstunden charakteristisch ist. Im Innern der Continente (an den russischen Inlandstationen) hält die Verminderung der Feuchtigkeit auch noch in den Abendstunden an und das Vormittagsmaximum, das bei uns nur eine untergeordnete Bedeutung hat, wird dort zum Hauptmaximum.

Die folgende Tabelle IV enthält den täglichen Gang der relativen Feuchtigkeit aus der gleichen Periode (September 1852 bis incl. April 1872).

Tab. IV. **Täglicher Gang der relativen Feuchtigkeit** (in Procenten).

	Dec.	Jänn.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.
Mittern.	85·8	86·5	83·4	77·7	71·0	74·1	73·7	72·9	75·7	77·4	82·5	83·6
1h a.	85·9	86·7	83·5	78·4	72·3	75·3	74·7	73·8	76·7	78·6	83·3	83·9
2	86·0	86·8	83·5	79·0	73·5	76·4	75·4	74·6	77·6	79·5	83·8	84·1
3	**85·9**	**86·9**	83·7	79·5	74·3	76·8	75·8	75·0	78·3	80·2	84·3	84·2
4	85·9	86·8	84·0	80·0	75·1	**77·4**	**76·2**	**75·4**	78·7	80·9	84·8	**84·4**
5	85·9	86·7	84·2	80·5	75·9	77·3	76·0	75·5	**79·0**	81·6	85·1	84·3
6	85·8	86·6	**84·3**	**80·8**	**76·3**	76·5	74·6	74·6	78·6	**82·1**	**85·3**	84·2
7	85·8	86·3	84·2	79·8	72·7	72·2	70·1	70·1	74·5	78·7	84·3	83·9
8	85·5	86·3	83·4	77·2	67·7	67·7	66·6	66·4	70·4	74·3	81·6	82·8
9	84·3	85·2	81·3	73·7	63·3	62·9	62·8	61·7	67·1	69·7	77·7	80·8
10	82·9	83·6	78·4	69·4	58·6	58·5	58·9	58·0	61·9	65·1	73·3	78·7
11	81·1	81·4	75·9	65·4	54·6	54·7	55·7	53·8	57·9	61·0	69·1	76·4
Mittag	79·3	79·0	73·5	61·8	51·2	51·6	52·6	51·1	54·3	57·0	65·4	74·5
1h p.	77·7	77·8	71·6	59·3	48·7	49·7	50·5	49·0	51·9	54·3	63·7	72·4
2	77·5*	77·0*	70·1*	57·8*	47·7*	48·7*	49·7*	48·4*	49·8*	52·8*	61·2*	71·9*
3	78·5	78·1	71·2	58·6	47·7*	49·0	50·2	48·3*	50·2	52·9*	61·9*	73·3
4	80·1	79·8	73·3	59·7	48·4	50·0	50·6	49·2	50·8	54·1	63·7	75·4
5	81·7	81·6	75·0	62·2	50·1	51·5	52·3	50·4	52·9	56·5	67·9	77·9
6	83·1	83·3	77·8	66·0	53·7	54·9	55·7	53·1	56·3	61·7	72·8	80·0
7	83·9	84·3	79·5	69·2	57·9	59·2	59·0	56·8	61·1	66·0	75·6	80·9
8	84·6	85·1	80·9	71·9	61·7	64·0	63·9	62·0	65·9	69·7	77·9	81·8
9	85·2	85·6	81·7	74·1	64·9	67·9	68·0	66·4	69·6	72·5	79·7	82·5
10	85·6	86·0	82·6	75·8	67·6	71·1	71·3	70·0	72·7	74·8	81·3	83·0
11	85·7	86·3	82·9	76·7	69·4	72·9	72·6	71·6	74·4	76·2	82·1	83·3
Mittel	83·49	83·90	79·58	71·44	62·68	64·18	64.04	62·84	66·10	69·07	76·18	80·34

Die 17jährigen Mittel 1853—1869 hat seinerzeit Herr Wittek schon eingehend bearbeitet und die Resultate in den Sitzungsberichten der kais. Akademie (LXII. Bd., II. Abth. 1870, p. 592—604) veröffentlicht. Die seither hinzugekommenen 32 Monate haben natürlich die Mittelwerthe nicht in dem Masse verändert, dass eine neuerliche eingehendere Discussion derselben nöthig geworden wäre, und ich kann daher auf seine Abhandlung verweisen in Betreff: der Eintrittszeiten der Extreme und der Media, der Eigenthümlichkeiten des täglichen Ganges und der Correctionen der Mittel der gewöhnlicheren Combinationen von Terminbeobachtungen auf 24stündige Mittel. Die neuerliche Publication der einfachen, nun fast 20jährigen Mittelwerthe rechtfertigt sich durch den Abschluss der ganzen Beobachtungsreihe und durch die Rücksicht auf die Ergänzung der für die anderen Elemente aus derselben Periode mitgetheilten stündlichen Werthe.

Es mögen aus Tabelle IV die Werthe der täglichen Extreme, sowie die daraus resultirende Grösse der täglichen Variation in den einzelnen Monaten hier angeführt werden.

Monat	Max.	Min.	Ampl.
December	85·9	77·5	8·4%
Jänner	86·9	77·0	9·9
Februar	84·3	70·1	14·2
März	80·8	57·8	23·0
April	76·3	47·7	28·6
Mai	77·4	48·7	28·7
Juni	76·2	49·7	26·5
Juli	75·4	48·3	27·1
August	79·0	49·8	29·2
September	82·1	52·8	29·3
October	85·3	61·2	24·1
November	84·4	71·9	12·5

Die grössten täglichen Amplituden haben April und Mai, dann August und September. Die Amplituden der Monate April bis September sind mehr als dreimal grösser wie jene des December.

Zum Schlusse will ich sämmtliche 24stündige Monatmittel der ganzen Beobachtungsreihe im alten Institutsgebäude (Wien,

Wieden, Favoritenstrasse 30), d. i. aus der Periode September 1857 bis April 1872 hier zusammenstellen.

24stündige Mittelwerthe für die Stadt Wien.

Periode 1852/1872. Seehöhe 194·2 Meter.

	Luftdruck Mm.	Temperatur Cels.	Dampf-spannung Mm.	Relative Feuchtigkeit %
December . .	745·9	—0·8	3·7	83·5
Jänner . .	45·8	—1·3	3·6	83·9
Februar . . .	45·6	0·4	3·8	79·6
März	42·3	4·2	4·4	71·4
April	43·4	10·0	5·7	62·7
Mai	43·0	15·1	8·2	64·2
Juni	43·8	18·6	10·0	64·0
Juli	44·2	20·3	10·9	62·8
August . . .	44·3	19·6	11·0	66·1
September . .	45·8	16·1	9·2	69·1
October . .	45 3	10·5	7 3	76·2
November . .	44·8	3·7	4·8	80·3
Jahr . . .	744·5	9·7	6·9	72·0

Neben den stündlichen Aufzeichnungen für die eben behandelten Elemente existirten auch noch für Windrichtung und Windstärke, dann für den Niederschlag stündliche Messungen während der Periode 1852 bis 1872. Die Jahrbücher der k. k. Centralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus, ältere Reihe, Bd. V—VIII, 1853—1856, enthalten die Resultate der stündlichen Aufzeichnungen dieser Elemente für die genannten vier Jahre. Der Jahrgang 1857 ist nicht mehr zum Druck gekommen, das druckfertige Manuscript dieses Bandes ist leider bei Gelegenheit der Übersiedlung auf die Hohe Warte verloren gegangen oder unter andere Papiere gerathen, so dass ich es bis jetzt nicht aufzufinden im Stande war. Nach der Sistirung des Druckes der Jahrbücher wurde aufgehört, die Aufzeichnungen der Autographen für Wind und Regen zu reduciren, so dass zu einer Berechnung der stündlichen Werthe dieser Elemente nur das Material der genannten vier Jahrgänge vorlag.

Den täglichen Gang der Windstärke habe ich in der Abhandlung: „Die tägliche Periode der Geschwindigkeit und Richtung des Windes“ in diesen Sitzungsberichten [1] bereits behandelt, die Aufzeichnungen der Windrichtung gleichfalls zu bearbeiten, schien mir überflüssig, nachdem das neuere, bessere und mehr als fünf Jahre umfassende Materiale der Registrirungen der Windrichtung auf der Hohen Warte nun schon bearbeitet vorliegt.

Es erübrigt also nur noch die stündlichen Mittel der Regenaufzeichnungen abzuleiten. Die Registrirung des Regenfalles geschah mittelst eines Apparates, den Kreil angegeben, [2] und dessen Aufstellung in den Jahrbüchern, Bd. V, 1853, p. 86 dargelegt ist. Da die Registrirung des Schneefalles kaum mit einiger Präcision zu ermöglichen war, habe ich zur Bearbeitung nur die schneefreien Monate herbeigezogen, zur Vermehrung des spärlichen Materiales jedoch auch einige Monate mit vorherrschenden Regen- und seltenen Schneefällen ebenfalls benützt, im Ganzen 30 Monate (April—October [incl.] 1853—1855, November 1855, Mai—November 1856 und statt des regenlosen April den März dieses Jahres). Eine Trennung dieses Materiales nach Jahreszeiten hätte wohl nicht zu verlässlichen Resultaten führen können — ich habe desshalb alle 30 Monate in ein Gesammtmittel vereinigt, welches den täglichen Gang des Regenfalles und der Regenhäufigkeit während der wärmeren Jahreshälfte zur Darstellung bringt.

Tabelle V enthält die Resultate meiner Berechnungen in Bezug auf die tägliche Periode der Niederschläge.

Die mit *b* überschriebenen Columnen in Tab. V sind aus den mit *a* überschriebenen in der Art erhalten worden, dass jeder Werth der Columne *a* mit der Hälfte seiner beiden Nachbarwerthe zu einem Mittel vereinigt wurde.

---

[1] Band LXXIX, Jänner-Heft 1879, II. Abth.

[2] Die Beschreibung desselben findet sich auch in Schmid's Lehrbuch der Meteorologie, p. 692.

V. Tägliche Periode des Regenfalles zu Wien im Sommerhalbjahre.

	Regensumme in Mm.		Regenstunden Summen		Mittlerer Regenfall pro Stunde		Regenwahrscheinlichkeit	
	a	*b*	*a*	*b*	*a*	*b*	*a*	*b*
Mittern—1.	78·5	**63·0**	92	92	·85	**·68**	·100	·100
1— 2	49·4	56·9	98	97	·50	·58	·107	·107
2— 3	50·4	49·7	103	103	·49	·49	·112	·112
3— 4	48·7	46·0	108	109	·45	·42	·118	·118
4— 5	36·3	42·2*	116	**116**	·31	·36*	·127	·127
5— 6	47·2	44·7	**122**	**117**	·39	·38*	·133	**·129**
6— 7	47·8	49·7	109	111	·44	·45	·119	·122
7— 8	55·9	54·3	107	103	·52	·53	·117	·112
8— 9	57·6	**55·9**	87	94	·66	**·60**	·095	·102
9—10	52·5	52·0	95	91	·55	·57	·104	·100
10—11	45·2	46·7	87	88	·52	·53	·095	·096
11—12	43·9	43·1*	84	84*	·52	·51*	·092	·091*
Mittag—1	39·5	54·9	80*	84*	·49	·64	·087	·092*
1— 2	96·8	87·6	91	86	1·06	1·00	·099	·094
2— 3	117·5	**108·6**	83	90	1·42	**1·24**	·091	·097
3— 4	102·5	97·9	99	95	1·04	1·05	·108	·105
4— 5	68·9	77·5	103	104	·67	·75	·112	·113
5— 6	69·6	67·3	**110**	**107**	·63	·63	·120	**·116**
6— 7	61·4	61·2	102	102	·60	·60	·111	·111
7— 8	52·8	56·8	93	94	·57	·60	·101	·102
8— 9	60·5	54·1	90	93	·67	·58	·098	·102
9—10	42·9	47·7	102	96	·42	·50	·111	·104
10—11	44·5	44·4*	89	92	·50	·44*	·097	·100
11—Mittern.	45·7	53·7	86*	88*	·53	·61	·094	·096*
Mittel	59·0	59·0	97·4	97.4	·62	·62	·106	·106

Die Columnen *a* enthalten die rohen Mittelwerthe, die Columnen *b* die auf die bezeichnete Weise ausgeglichenen Werthe, welche den täglichen Gang schon mit grosser, unerwarteter Regelmässigkeit zum Ausdrucke bringen. Zu den Columnen Regensumme und mittlerer Regenfall per Stunde muss ich noch bemerken, dass den absoluten Werthen derselben keine Bedeutung beizulegen ist, weil der Regen-Autograph schon in Folge seiner Aufstellung auf einer hohen Terrasse und dann auch seiner Construction nach nicht die volle, wahre Niederschlagsmenge anzugeben im Stande war. Die absoluten Werthe des stündlichen Regenfalles sind zu klein.

Ich gehe nun zu einer kurzen Discussion der Tabelle V über.

1. Tägliche Periode der Quantität des Regenfalles. Das Hauptmaximum fällt auf 2—3^h Nachm., das Hauptminimum auf 4—5^h Morg. Das Verhältniss der Hauptextreme ist 108·6 : 42·2 = 2·57 in den ausgeglichenen und 3·24 in den direct erhaltenen Grössen. Die tägliche Periode der Quantität des Regenfalles hat also eine sehr erhebliche Amplitude. Neben den genannten Hauptextremen treten aber im Laufe eines Tages noch zwei secundäre Maxima und Minima auf, so dass der tägliche Gang der Quantität der Niederschläge ein complicirterer ist, als jener der meisten anderen meteorologischen Elemente. Die sämmtlichen Extreme, welche den täglichen Gang charakterisiren, sind:

1. Max.	1. Min.	2. Max.	2. Min.	3. Max.	3. Min.
2—3^h pm.	4—5^h am.	Mittern.—1^h	11^h—Mittag	8—9^h am.	10—11^h pm.
108·6	42·2	63·0	43·1	55·9	44·4

Wenngleich das regelmässige Fortschreiten der Zahlen in Columne *a* schon an sich dafür spricht, dass diese dreifache Periode ein reelles Phänomen ist und nicht ein zufälliges in Folge der kurzen Periode, aus der die Resultate abgeleitet sind, so scheint es mir doch nicht unnöthig, zur Bekräftigung dieses Ergebnisses auf die von Kreil für Prag gewonnenen Resultate zu verweisen (Klimatologie von Böhmen, p. 197). Ich stelle die von Kreil für den Sommer (Mittel aus 10 Jahren, 1850/59) erhaltenen Werthe jenen von Wien gegenüber.

Täglicher Gang der Regenmenge zu Wien und Prag.

Zeit	Wien	Prag		Zeit	Wien	Prag	
		a	*b*			*a*	*b*
Mittern.—1h	**2·10**	2·22	2·24	Mittag—1h	1·83	2·13	2·02
1— 2	1·90	2·10	**2·28**	1— 2	2·92	2·49	2·47
2— 3	1·66	2·04	2·15	2— 3	**3·62**	3·00	3·02
3— 4	1·53	2·03	1·94	3— 4	3·26	3·19	3·54
4— 5	1·41*	1·87	1·71	4— 5	2·58	**3·70**	**3·82**
5— 6	1·49	1·60	1·58	5— 6	2·24	**3·88**	3·78
6— 7	1·66	1·40*	1·56*	6— 7	2·04	3·43	3·43
7— 8	1·81	1·55	1·60	7— 8	1·89	2·82	2·90
8— 9	**1·86**	**1·83**	1·66	8— 9	1·80	2·37	2·41
9—10	1·73	1·75	1·68	9—10	1·59	2·14*	2·10
10—11	1·56	1·60*	1·68	10—11	1·48*	2·16	2·03*
11—Mittag	1·44*	1·74	1·73	11—Mittern.	1·79	**2·23**	2·12

Die mit *a* überschriebene Columne unter Prag ist durch eine Ausgleichungsrechnung erhalten worden, die mit der für Wien angewendeten übereinstimmt, die mit *b* überschriebene Columne enthält die von Kreil mittelst der Formel von Bessel berechneten Werthe.

Die Übereinstimmung zwischen dem täglichen Gang des Regenfalles zu Wien und Prag ist demnach eine fast vollständige. Auch in Prag treten sehr deutlich täglich drei Maxima und drei Minima der Quantität des Regenfalles auf, nur in den Resultaten, welche die Bessel'sche Formel (bei Anwendung von zu wenig Gliedern) liefert, ist das Vormittags-Maximum und Minimum nahezu verschwunden, aber doch noch etwas angedeutet. In den rohen Mitteln dagegen treten die Vormittags-Extreme sehr deutlich hervor.[1]

Die drei Maxima und Minima des Regenfalles im Laufe des Tages in unserem Klima scheinen hiemit constatirt zu sein.

Die stündlichen monatlichen Mengen für Prag sind grösser als jene für Wien, weil das Mittel für Prag nur aus den drei Sommermonaten, jenes für Wien aus den Monaten April—October (und November) abgeleitet worden ist. Auch das frühere

---

[1] Rohe Mittel:

5h	6h	7h	8h	9h	10h	11h	Mittag	
·72	·58	·61	**·95**	·72	·71	·70*	·97	Par.Lin.

Eintreten des nachmittägigen Hauptmaximums in Wien und die kleine Verschiebung der Extreme überhaupt mag zum Theil darauf zurückzuführen sein.

Nehmen wir aus der Columne *a* Tafel V je zwei Stunden zusammen und drücken wir diese zweistündlichen Regensummen als Procente der Gesammtsumme des Tages aus, so gelangen wir noch zu folgender übersichtlichen Darstellung der Vertheilung des Regenfalles auf die Tageszeiten:

Mitternacht bis Mittag		Mittag bis Mitternacht	
Mittern.—2h	**9·0%**	Mittag—2h	9·6%
2— 4	7·0	2— 4	**15·5**
4— 6	5·9*	4— 6	9·8
6— 8	7·3	6— 8	8·1
8—10	**7 8**	8—10	7·3
10—Mittag	6·3*	10—Mittern.	6·4*
Summe . .	43·3	Summe . .	56·7

Auch in dieser Zahlenreihe treten die drei täglichen Maxima und Minima noch sehr deutlich hervor. Von Mitternacht bis Mittag fallen 43% der täglichen Regensumme, von Mittag bis Mitternacht 57%. Nimmt man 6stündige Intervalle, so erhält man:

Mittern.—6h am.	6h am.—Mittag	Mittag—6h pm.	6h pm.—Mittern.
21·9%	21·4%	34·9%	21·8%

Es fällt also in dieser Gruppirung auf alle 6stündigen Intervalle nahe die gleiche Regenmenge bis auf die Zeit von Mittag bis 6h Nachm., welche einen um mehr als die Hälfte grösseren Regenfall hat als die übrigen drei Perioden.

2. Sehr verschieden von der Vertheilung der Quantität des Regenfalles ist die tägliche Periode der Regenhäufigkeit. Dieselbe hat nur zwei Maxima und zwei Minima, von denen nur das Abend-Minimum mit dem dritten Minimum der Regenmenge nahe zusammenfällt.

Tägliche Extreme der Regenhäufigkeit.

1. Max.	1. Min.	2. Max.	2. Min.
5^h am.	Mittag	$5^1/_2{}^h$ pm.	$11^1/_2{}^h$ pm.

Das Hauptmaximum der Regenfrequenz am Morgen fällt fast genau zusammen mit dem ersten Minimum der stündlichen Regenmenge, das Hauptminimum der Regenfrequenz fällt zusammen mit dem zweiten Minimum der Regenmenge um Mittag, in der ersten Tageshälfte von Mitternacht bis Mittag ist demnach der Gang der Regenfrequenz jenem der Regenmenge so wenig entsprechend als nur möglich.

Es ist deshalb sehr zu wünschen, dass überall neben der täglichen Periode der Quantität des Regenfalles auch die tägliche Periode der Regenhäufigkeit abgeleitet werde. In der zweiten Tageshälfte nähert sich der Gang der beiden Elemente einander; das Maximum der Regenhäufigkeit tritt allerdings viel später ein, als jenes der Regenmenge und zwar um 3 Stunden, die Abendminima kurz vor Mitternacht fallen aber ziemlich zusammen.

In dem täglichen Gang der Regenfrequenz erkennen wir sehr deutlich den Einfluss des täglichen Wärmeganges in der Nähe der Erdoberfläche auf die Condensation des atmosphärischen Wasserdampfes selbst in grösseren Höhen. Die Zeit des Temperaturminimums begünstigt die Bildung der Niederschläge; mit steigender Temperatur nehmen dieselben zuerst ab und erreichen um Mittag ihr Minimum, die weitere Wärmezunahme befördert dieselbe wieder, indem durch die aufsteigende Luftbewegung der Wasserdampf in grössere Höhen geführt und daselbst condensirt wird. Dieser Vorgang erreicht zwischen 5 und 6^h Nachmittag das Maximum seiner Entwicklung; die nun rasch sinkende Temperatur und Tendenz der Luft zu einer absteigenden Bewegung ist der Bildung der Niederschläge ungünstig, dieselben nehmen nun rasch ab und erreichen gegen Mitternacht das zweite Minimum ihrer Häufigkeit. Die Amplitude der täglichen Periode der Regenhäufigkeit ist gleichfalls nicht unbeträchtlich. Die Regenwahrscheinlichkeit ist zwischen 5 und 6^h Morgens 0·13, hingegen um Mittag nur 0·09, Nachmittags ist die Amplitude etwas kleiner. Maximum 0·12, Minimum gleichfalls 0·09.

Im Ganzen fielen in 30 Monaten (= 917 Tagen) 1416 Mm. Regen innerhalb 2336 Stunden. Die mittlere Regenwahrscheinlichkeit einer Stunde ist 0·106, die mittlere Regenmenge pro Stunde 0·62 Mm.

Der tägliche Gang der Intensität des Regenfalles (Regenmenge pro Regenstunde) ist vollständig übereinstimmend mit dem täglichen Gang der Regenmenge überhaupt. Am wenigsten ergiebig sind die Morgenregen um die Zeit des Temperaturminimums, am intensivsten die Nachmittagsregen zur Zeit des Wärmemaximums. Um Mitternacht und Vormittags zwischen 8^h und 9^h tritt noch ein zweites und ein drittes Maximum der Intensität des Regenfalles ein, beide circa halb so gross wie das nachmittägige Maximum, das zweite und dritte Minimum fallen auf 11^h Mittag und 10—11^h Abends.

Von September 1852 bis August 1858 incl., also durch volle sechs Jahre, wurden täglich 6 directe Beobachtungen in äquidistanten Intervallen angestellt: um 2^h Morg., 6^h und 10^h am., 2^h, 6^h und 10^h pm. Dies gestattete mir auch noch die tägliche Periode eines andern Elementes, welches mit den wässerigen Niederschlägen aus der Atmosphäre in engster Beziehung steht, wenigstens genähert abzuleiten, es ist dies die Bewölkung. Über den täglichen Gang der Bewölkung liegen bisher so wenig Daten vor, dass auch schon täglich blos 6malige Beobachtungen, welche aber auch die Nacht umfassen, von grossem Werthe sind, umsomehr, da es auch jetzt noch kein Ersatzmittel der directen Beobachtungen für dieses Element gibt, und nächtliche Beobachtungen seit Einführung der registrirenden Instrumente für andere meteorologische Factoren ganz aufgehört haben. Daher verlohnte es sich wohl, die für Wien vorliegenden täglich 6maligen Beobachtungen der Bewölkung zu bearbeiten.

Die Beobachtungen von September 1852 bis December 1856 sind in den Jahrbüchern veröffentlicht worden. Für den Rest der Periode lagen mir die handschriftlichen Aufzeichnungen vor. Um den täglichen Gang während der Tageszeit, wo die grössten Störungen zu erwarten sind, noch etwas sicherer zu bestimmen, nahm ich noch 4jährige Beobachtungen zu den Stunden 6^h, 10^h am., 2^h, 6^h, 10^h pm. hinzu und interpolirte die fehlende Beobachtung um 2^h am. in folgender Weise. Es wurden zunächst die

Monatmittel der 6 Jahre für alle 6 Terminbeobachtungen gebildet, dann daraus die Abweichung des Mittels für 2^h Nachts vom Mittel der übrigen 5 Termine aufgesucht. Hierauf wurden die 10jährigen Mittel für 6^h, 10^h am. 2^h, 6^h, 10^h pm. gebildet, sowie die Tagesmittel aus diesen 5 Beobachtungen. An dieses Mittel wurde nun die für 2^h Nachts aus 6jährigen Beobachtungen gefundene Abweichung wieder angebracht und so das 10jährige Mittel für diese Stunde erhalten. Das Mittel für 2^h am. ist also aus 6 Jahren abgeleitet, jene der übrigen Termine aus 10 Jahren aber derart, dass auf die Änderung des Gesammtmittels durch die Beiziehung weiterer 4 Jahrgänge Rücksicht genommen worden ist.

Die folgende Tabelle VI enthält den auf diese Weise ermittelten täglichen Gang der Bewölkung zu Wien.

Man ersieht aus dieser Tabelle sogleich, dass der tägliche Gang der Bewölkung eine ausgesprochene jährliche Periode hat. Von October bis December tritt übereinstimmend das Maximum der Bewölkung um 6^h Morgens ein, das Minimum um 10^h Abends. Jänner und Februar haben fast denselben Gang, nur scheint sich das Maximum etwas zu verspäten und die Trübung um 2^h Nachmittag hat relativ zugenommen. Die Monate März und April sowie Juli bis September haben zwei tägliche Maxima der Bewölkung: ein Morgenmaximum um 6^h und ein Nachmittagsmaximum um 2^h und zwar ist dieses Nachmittags-Maximum (März noch ausgenommen) das Hauptmaximum; die grösste Aufhellung des Himmels tritt um 10^h pm. ein, nur im August und September ist die Stunde 2^h am. noch weniger bewölkt als 10^h Abends. Im Mai und Juni ist der tägliche Gang der Bewölkung wieder ein einfacher geworden wie im Winter und Spätherbst. Von dem Minimum um 10^h Abends nimmt die Bewölkung continuirlich zu und erreicht um 2^h Nachmittag ihr Maximum, um dann wieder rasch zu sinken.

VI. Täglicher Gang der Bewölkung.

Monat	2h am.	6h am.	10h am.	2h pm.	6h pm.	10h pm.	Mittel
10jährige Mittel.							
October	4·69	**6·08**	5·74	5·18	5·23	4·54*	5·24
November	7·42	**7·92**	7·64	7·28	7·24	6·93*	7·40
December	6·83	**7·59**	7·44	7·21	7·17	6·81*	7·17
Jänner	6·87*	7·30	**7·47**	7·23	7·02	7·16	7·18
Februar	6·04	**6·94**	6·90	6·62	6·54	5·91*	6·49
März	5·93	**6·46**	6·40	**6·44**	6·12	5·24*	6·10
April	4·93	**5·37**	5·31	**5·47**	5·17	4·67*	5·15
Mai	4·88	5·23	5·52	**5·77**	5·59	4·57*	5·26
Juni	4·27	4·21	4·70	**5·20**	4·90	3·98*	4·54
Juli	4·62	**4·65**	4·57	**5·07**	4·70	4·10*	4·62
August	3·74*	**4·60**	4·19	**4·53**	4·42	4·00	4·25
September	3·93*	**4·84**	4·78	**5·04**	4·86	3·96	4·57
Abweichungen vom Mittel.							
October—December	—·30	·60	·34	—·05	—·06	—·52	6·61
Jänner und Februar	—·38	·29	·35	·09	—·05	—·30	6·83
März und April	—·20	·29	·23	·33	·02	—·67	5·63
Mai und Juni	—·33	—·18	·21	·58	·35	—·63	4·90
Juli—September	—·38	·22	·03	·40	·18	—·46	4·48

Die drei Typen des täglichen Ganges der Bewölkung mögen durch folgende Zahlen übersichtlich zur Darstellung gebracht werden:

Abweichungen vom Mittel.

	2h am.	6h am.	10h am.	2h pm.	6h pm.	10h pm.
October—Februar	—·33	**·48**	·34	·00	—·06	—·43*
März, April, Juli—Sept.	—·31	**·25**	·11	**·37**	·12	—·54*
Mai und Juni	—·33	—·18	·21	**·58**	·35	—·63*

Die Stunde 2^h am. hat das ganze Jahr hindurch die constanteste Bewölkung und zwar eine sehr geringe, 0·3 unter dem Mittel. Ebenso hat die Stunde 10^h Ab. das ganze Jahr hindurch die kleinste Bewölkung, die Abweichung vom Mittel schwankt aber mehr und erreicht im Mai und Juni ihren grössten Werth mit —0·6. Die Stunde 6^h Morg. ist im Spätherbst und Winter am trübsten, im Mai und Juni am heitersten, die Bewölkung ist dann sogar unter dem Mittel, während sie in der erstgenannten Periode das Maximum der Bewölkung hat. Umgekehrt verhält es sich mit der Stunde 2^h pm. (und auch noch 6^h pm.). Die Bewölkung dieser Stunde nimmt vom Winter zum Sommer zu und erreicht im Frühsommer ihr Maximum. Auch die Stunde 6^h pm. gehört im Winter schon zu den heiteren Stunden, während sie im Frühsommer (Mai, Juni) noch zu den trübsten gehört. Die Stunde 10^h am. hat das ganze Jahr hindurch eine Bewölkung, welche das Tagesmittel übertrifft.

Im täglichen Gange der Bewölkung erkennen wir eben so deutlich oder noch deutlicher als bei dem täglichen Gange der Regenfrequenz den Einfluss der täglichen Periode der Temperatur. Im Winterhalbjahre hat die Stunde des Temperatur-Minimums die grösste Bewölkung, es ist dies ja auch die Zeit der grössten Häufigkeit der Nebelbildung. Im Sommerhalbjahre, bei zunehmender Wärme und einem zunehmenden Luftwechsel zwischen den höheren und tieferen atmosphärischen Schichten, nimmt die Bewölkung um die Zeit des Wärmemaximums rasch zu und das Hauptmaximum fällt dann auf diese Tageszeit. Die Vormittagsstunden mit rasch steigender Temperatur werden heiterer, die Wärmestrahlung des Bodens, sowie die directe Sonnenstrahlung

lösen die Wolken auf, während noch von unten her eine reichlichere Zufuhr von Wasserdampf nicht stattfindet, die erst um die Zeit des Wärmemaximums und noch eine Weile später sich am lebhaftesten geltend macht. Die Periode rasch sinkender Temperatur ist namentlich im Sommerhalbjahre die heiterste; die Mischung von unteren und oberen Luftschichten hört auf, die Temperaturabnahme mit der Höhe wird kleiner, die Luftschichten haben eine Tendenz zum Herabsinken, die Luftbewegung erreicht ihr Minimum. Es ist dies die Periode, welche der Wolkenbildung am ungünstigsten ist.

Wie man aus den Abweichungen ersieht, dürfte das Mittel der Bewölkung aus Beobachtungen um 7^h, 2^h, 9^h von einem wahren Mittel in keinem Monat erheblich abweichen; im Mai und Juni wird es etwas zu klein sein, vom Juli bis September hingegen zu gross gegenüber dem letzteren.

Die Amplituden des täglichen Ganges der Bewölkung sind:

December	0·78	März	1·22	Juni	1·22
Jänner	0·60	April	0·80	Juli	0·97
Februar	1·03	Mai	1·20	August	0·86
Winter	0·80	Frühling	1·07	Sommer	1·02
		September	1·11		
		October	1·54		
		November	0·99		
		Herbst	1·21		

Die grösste tägliche Schwankung haben somit Frühling und Herbst, letzterer wohl in Folge der starken Bewölkung der Morgenstunden bei der um diese Zeit am häufigsten eintretenden Nebelbildung.

Zum Vergleiche mögen schliesslich die Resultate 2stündiger Beobachtungen zwischen 4^h Morgens und 10^h Abends zu Kremsmünster hier noch Platz finden. Es sind Mittelwerthe aus 18 Jahren (1842/59). [1] Ich habe sie auf die 10theilige Scala reducirt.

[1] Siehe Reslhuber: Vorläufige Mittheilung über die Bewölkungsverhältnisse des Himmels. Sitzungsb. d. Wiener Akad. Bd. XLII, 1860, p. 573 u. s. w.

4h am.	6h am.	8h am.	10h am.	Mittag	2h pm.	4h pm.	6h pm.	8h pm.	10h pm.
				September — März					
7·35	7·67	**7·80**	7·45	7·15	6·95	6·92	6·70	6·70	6·70
				April — August					
6·02	**6·08**	5·97	5·90*	5·90	6·10	**6·10**	6·02	5·97	5·72*

Das doppelte Maximum des Sommerhalbjahres tritt auch hier deutlich hervor. Die Amplituden sind jedoch viel kleiner als in Wien, und der tägliche Gang weniger scharf ausgeprägt, was wohl zum grössten Theil darin begründet sein mag, dass die Notirung der Bewölkung nach der 4theiligen Scala vorgenommen worden ist, die den Beobachter gegen eine sorgfältigere Schätzung des Bewölkungsgrades abstumpft. Dafür spricht auch das häufige Vorkommen gleicher Zahlenwerthe mehrere Stunden hintereinander.

Über die Beziehungen der homogenen Deformationen fester Körper zur Reactionsfläche.

(Ein Beitrag zur graphischen Statik elastischer Körper.)

Von Prof. Dr. **Jos. Finger** in Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 13. Jänner 1881.)

Um die in einem beliebigen Punkte M eines homogenen, elastisch-isotropen Körpers, der unter der Einwirkung gegebener äusserer Kräfte sich im Gleichgewichte befindet, auf ein beliebiges, durch M hindurchgelegtes Flächenelement df, das als Theil der ein beliebiges Körperelement dm begrenzenden Oberfläche zu denken ist und dessen nach der äusseren Seite des Körperelementes dm gerichteten Normalen N die Richtungscosinus abc bezüglich eines fixen orthogonalen Axensystems zukommen, seitens des das Element dm umgebenden Körpertheiles einwirkenden resultirenden elastischen Reaction p (pro Flächeneinheit genommen) der Grösse und Richtung nach darzustellen, bedient man sich bekanntlich gewöhnlich zweier concentrischer und coaxialer Flächen zweiter Ordnung F_1 und F_2,[1] deren Mittelpunkt der Punkt M ist, nämlich des Elasticitätsellipsoides F_1, dessen Radius R die Richtung und Grösse der elastischen Reaction p angibt, während die zugehörige Ebene des Flächenelements df gegeben ist durch jene durch M gelegte Ebene, zu welcher in der zweiten Fläche F_2 derjenige Durchmesser conjugirt ist, der die Richtung des früheren Radius R hat.

Sind die auf die zu den beliebig gewählten orthogonalen Coordinatenebenen parallelen Grenzebenen eines rechtwinkeligen Elementarparallelepipeds, dessen ein Eckpunkt der Punkt M ist,

---

[1] S. Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides par M. G. Lamé, Theorie der Elasticität fester Körper von Dr. A. Clebsch u. a. m.

parallel zur x-Axe einwirkenden Reactionscomponenten, je nachdem sie auf die zur x, y, z-Axe senkrechte Seitenfläche wirken, mit $t_{11}\, t_{12}\, t_{13}$, die zur y-Axe parallel wirkenden entsprechend mit $t_{21}\, t_{22}\, t_{23}$ und die zur z-Axe parallelen mit $t_{31}\, t_{32}\, t_{33}$ bezeichnet, wo wegen des vorausgesetzten Gleichgewichtszustandes $t_{12} = t_{21}$, $t_{13} = t_{31}$ und $t_{23} = t_{32}$ ist, so ist die Gleichung des Elasticitätsellipsoides F_1 die erste und jene der Fläche F_2 die zweite der folgenden Gleichungen:

$$(\Delta_{11}x+\Delta_{12}y+\Delta_{13}z)^2+(\Delta_{21}x+\Delta_{22}y+\Delta_{23}z)^2+ \\ +(\Delta_{31}x+\Delta_{32}y+\Delta_{33}z)^2 = \Delta^2$$

$$\Delta_{11}x^2+\Delta_{22}y^2+\Delta_{33}z^2+2\Delta_{23}yz+2\Delta_{31}zx+2\Delta_{12}xy = k\Delta,$$

wo k eine beliebige Constante, Δ die Determinante und $\Delta_{11}\, \Delta_{12}\ldots$ die in bekannter Weise zu bildenden Subdeterminanten der obigen Reactionscomponenten bezeichnen.

Um nun auch die durch die Reactionen bedingten specifischen Längenänderungen der Körperdimensionen in den verschiedenen Richtungen graphisch darzustellen, nimmt man sodann eine dritte Fläche F_3, das sogenannte Deformationsellipsoid zur Hilfe, in welcher Fläche die im ungezwängten Zustande des Körpers in einer Kugelfläche vom Radius 1 um das Centrum M herum gelegenen Punkte des Körpers sich nach der Deformation befinden.

Die bekannte Gleichung des Deformationsellipsoids lautet unter der Voraussetzung sehr kleiner Verschiebungen bekanntlich:

$$(1-2\alpha)x^2+(1-2\beta).y^2+(1-2\gamma).z^2-2.\varphi.yz- \\ -2.\chi.zx-2.\psi.xy = 1 \qquad 1)$$

wo $\alpha\, \beta\, \gamma$ die Dilatationen in der Richtung der x, y, z-Axe und φ, χ, ψ die Grösse der Schiebung in der zur (yz)-, (zx)- und (xy)-Ebene parallelen Ebene ausdrücken. Die Axenrichtungen des Deformationsellipsoids stimmen mit den Axenrichtungen der früheren Flächen F_1 und F_2 überein, es sind dies nämlich die Richtungen jener Hauptdruckaxen oder der Reactionshauptaxen (Elasticitätshauptaxen), die dem Punkte M des Körpers entsprechen.

Ist die Deformation des ganzen Körpers eine homogene, so sind die Flächen $F_1\, F_2\, F_3$ für alle Punkte des Körpers dieselben und die Reactionshauptaxen aller Punkte zu einander parallel.

Nun ist es keinesfalls zu leugnen, dass die graphische Darstellung der Elasticitätsverhältnisse durch drei Flächen, von denen die beiden ersten F_1 und F_2 zur Darstellung der Richtung und Grösse der elastischen Reactionen, die letztere F_3 zur Darstellung der Deformation dient, gewiss nicht als einfach zu bezeichnen ist; aber auch abgesehen von diesem complicirten Verfahren macht diese Darstellung die Art der Deformation keineswegs vollständig ersichtlich, indem das Deformationsellipsoid F_3 lediglich über die Elongationen in den verschiedenen Richtungen Auskunft gibt, dagegen die nicht minder wichtigen Änderungsverhältnisse der gegenseitigen Neigungswinkel der Geraden des Körpers, der Ebenen desselben und der Geraden gegen die Ebenen in keiner Weise erkennen lässt.

W. Thomson und P. G. Tait machen in ihrer „Natural Philosophy" bei der Behandlung der Elasticität Erwähnung von einer besonderen Fläche zweiten Grades, zu welcher ich, geleitet von dem Streben, alle Elasticitätsverhältnisse durch eine einzige Fläche graphisch darstellbar zu machen, auf einem ganz anderen Wege ebenfalls geführt worden bin. Diese Fläche wird daselbst „Reactionsfläche" genannt, welchen terminus technicus ich auch in dieser Abhandlung beibehalten will.

Thomson sagt nämlich diesbezüglich:[1] „Die Ausdrücke" für die Componenten P, Q, R, S, T, U „der elastischen Reaction in einem festen Körper stehen zu dem Ellipsoid" (soll heissen: Fläche zweiten Grades)

$$Px^2+Qy^2+Rz^2+2(Syz+Tzx+Uxy)=1$$

in einer bestimmten Relation, derzufolge „diese Fläche zweiten Grades den Zwang auf folgende Weise graphisch darstellt": „Um die Richtung und die für die Flächeneinheit genommene Grösse der Kraft zu finden, welche durch irgend eine Ebene in dem festen Körper wirkt, ziehe man senkrecht zu dieser Ebene eine Linie vom Mittelpunkte der Fläche bis an ihre Oberfläche. Die gesuchte Kraft ist dann, was ihre Grösse betrifft, gleich dem

[1] W. Thomson und P. G. Tait, „Handbuch der theoretischen Physik." Autorisirte deutsche Übersetzung von Dr. H. Helmholtz und G. Wertheim. Braunschweig 1871, I. Band, 2. Theil, S. 196.

reciproken Werthe des Productes aus der Länge dieser Linie in die Senkrechte vom Mittelpunkt auf die durch den Schnittpunkt gelegte Tangentialebene und, was ihre Richtung betrifft, senkrecht zur letzteren Ebene."

Von dieser Fläche beweist Thomson ausser der erwähnten Eigenschaft nur noch, dass erstens ihre Axen in ihrer Richtung mit den Reactionshauptaxen übereinstimmen und dass zweitens die drei halben Hauptaxen dieser Fläche den reciproken Werth der Quadratwurzel aus den Hauptzugkräften angeben. Andere Eigenschaften der Fläche werden nicht untersucht.

Auch G. Kirchhoff erwähnt in Kürze in seiner Mechanik [1] diese Fläche, wendet dieselbe jedoch auch nur zu dem Zwecke an, um gleich Thomson die beiden letzterwähnten Eigenschaften nachzuweisen.

Auch von Kirchhoff wird in eine weitere Untersuchung dieser interessanten Fläche nicht eingegangen und doch gestattet, wie ich dies in der vorliegenden Abhandlung zu zeigen mir zur Aufgabe stellte, diese Eine Fläche, wofern ihre Gleichung nur wenig geändert wird, nicht nur alle wie immer gerichteten Reactionen und deren Componenten der Richtung und Grösse nach, sondern auch ausserdem die durch diese Reactionen bedingten Deformationen, mögen sie sich auf longitudinale Elongationen oder auf Änderungen der Neigungswinkel der Geraden, der Ebenen des Körpers u. s. w. beziehen, graphisch in verhältnissmässig sehr einfacher Weise darzustellen, vorausgesetzt, dass die Verschiebungen des als elastisch-isotrop angenommenen Körpers, wie es ja fast allgemein geschieht, so klein angenommen werden, dass die höheren Potenzen derselben gegen die erste vernachlässigt werden können, von welcher Freiheit auch in dieser Abhandlung stets Gebrauch gemacht werden wird.

Es seien die zu den Coordinatenaxen parallelen, auf die Flächeneinheit bezogenen, longitudinalen Reactionscomponenten $t_{11} t_{22} t_{33}$, die kurzweg als Zugspannungen bezeichnet sein sollen, positiv genommen, wenn sie die den betreffenden Coordinatenaxen parallelen Dimensionen des Körperelements dm zu vergrössern

[1] Dr. Gustav Kirchhoff, „Vorlesungen über mathematische Physik". Mechanik. Leipzig 1874, S. 114 u. 115.

suchen, dagegen negativ, wenn dieselben **Druckspannungen** sind, welche die entsprechenden Dimensionen zu verkleinern streben, ferner seien die auf die Flächeneinheit bezogenen **tangentiellen** Schubreactionen $t_{12} = t_{21}$, $t_{13} = t_{31}$, $t_{23} = t_{32}$, die ich kurzweg **Schubspannungen** nennen will, positiv gerechnet, wenn dieselben eine derartige Schiebung zu bewirken suchen, durch welche der rechte Winkel, dén die positiven zu der entsprechenden Schiebungsebene[1] parallelen Coordinatenaxenrichtungen einschliessen, verringert würde.

Die auf das Flächenelement df einwirkende resultirende Reaction p wirkt in einer Geraden, die im Allgemeinen gegen die Normale abc des Flächenelements geneigt ist. Die Richtungcosinus jener Richtung dieser Geraden, die nach dem äusseren, das Körperelement dm umgebenden, Raum gerichtet ist, seien $(u\,v\,w)$ und p positiv in Rechnung gebracht, wenn p diese Richtung $(u\,v\,w)$ hat, negativ dagegen, wenn diese Kraft nach dem Inneren des Körperelements gerichtet ist. Dann bestehen folgende bekannte Relationen:

$$\begin{aligned} p.u &= a.t_{11}+b.t_{12}+c.t_{13} \\ p.v &= a.t_{21}+b.t_{22}+c.t_{23} \\ p.w &= a.t_{31}+b.t_{32}+c.t_{33}. \end{aligned} \qquad 2)$$

Zerlegt man nun die Kraft p in eine auf das Flächenelement df normale Componente, die Zugspannung n und eine in der Ebene des Elements df wirkende, nämlich die Schubspannung t, so ist die Grösse der ersteren Componente n, wenn auch diese im Falle eines Zuges als positiv, im Falle eines Druckes als negativ angenommen wird, gegeben durch die Gleichung:

$$\begin{aligned} n = p.(au+bv+cw) = a^2.t_{11}+b^2.t_{22}+c^2.t_{33}+ \\ +2[bc.t_{23}+ca.t_{31}+ab.t_{12}]. \end{aligned} \qquad 3)$$

Eine einfache Vergleichung der Gleichungen 2) und 3) lehrt sofort, dass

---

[1] Die in dieser Abhandlung gebrauchten termini technici sind zumeist theils der Helmholtz'schen Übersetzung von Thomson's theoretischer Physik, theils der Kirchhoff'schen Mechanik entlehnt und es kann demnach deren strenge Bedeutung als allgemein bekannt vorausgesetzt werden.

$$p.u = \frac{1}{2}\frac{dn}{da}, \quad p.v = \frac{1}{2}\frac{dn}{db}, \quad p.w = \frac{1}{2}\frac{dn}{dc}$$

$$\left(\frac{dn}{da}\right)^2 + \left(\frac{dn}{db}\right)^2 + \left(\frac{dn}{dc}\right)^2 = 4p^2 \qquad 4)$$

$$n = \frac{1}{2}\left[a\frac{dn}{da} + b\frac{dn}{db} + c\frac{dn}{dc}\right]$$

Denkt man sich nun nach allen Richtungen, welche die Normale N annehmen kann, also nach allen Richtungen des Raumes vom Punkte M als ihrem Mittelpunkte aus Strahlen gezogen und auf jedem derselben eine Strecke r, die der Quadratwurzel aus der der Richtung derselben entsprechenden, durch die Gleichung 3) ausgedrückten Zug-, respective Druckspannung n invers proportionirt ist, abgeschnitten, so liegen die so gefundenen Endpunkte m der Radien r in einer Fläche, deren Gleichung den durch diese Constructionsweise bestimmten Werthen

$$r = \sqrt{\frac{k}{n}}, \quad x = ar, \quad y = br, \quad z = cr \qquad 5)$$

wo k eine vorläufig unbestimmt gelassene Constante bedeutet, und der Relation 3) entsprechend lautet:

$$t_{11}.x^2 + t_{22}.y^2 + t_{33}.z^2 + 2[t_{23}.yz + t_{31}.zx + t_{12}.xy] = k. \qquad 6)$$

Diese Fläche, die als Reactionsfläche zu bezeichnen ist, ist, wie ihre Gleichung lehrt, eine Mittelpunktsfläche zweiter Ordnung, deren Axen, wie früher schon hervorgehoben wurde, der Richtung nach übereinstimmen mit den dem Punkte M entsprechenden Reactionshauptaxen, sonach auch mit den Axen der früheren Flächen $F_1 F_2 F_3$.

Zur Definition der Reactionsfläche 6) dient uns sonach die einfache, für unsere Zwecke wichtige Eigenschaft, dass die reciproken Quadrate der Radien dieser Fläche den in der Richtung dieser Radien wirkenden Zug- oder Druckspannungen invers proportionirt sind.

Was nun die Constante k anbelangt, so ist leicht einzusehen, dass, ein bestimmtes k für alle abc vorausgesetzt, die Gleichung 6) für gewisse Richtungen dieser Strahlen imaginäre Werthe der Coordinaten ergeben kann, obgleich sicher auch in diesen Richtungen bestimmte Zug- oder Druckspannungen thätig sein

werden. Demnach scheint es angezeigt, um dem bezeichneten Übelstande vorzubeugen, der Constanten k je nach Bedarf bald einen positiven, bald einen negativen Werth zuzuerkennen.

Zunächst ist sofort einzusehen, dass der Relation $r = \sqrt{\frac{k}{n}}$ zufolge, wenn der Radius r der Fläche stets reel sein soll, auch k und n gleichbezeichnet sein müssen, demnach k positiv angenommen werden müsse bei solchen Reactionsflächen, längs deren Radien Zugspannungen wirken und welche Flächen wir Zugflächen nennen wollen; hingegen muss k negativ angenommen werden für solche Reactionsflächen, längs deren Radien Druckspannungen wirksam sind und solche Flächen seien als Druckflächen bezeichnet.

Sind nun $t_{11} t_{22} t_{33}$ durchwegs positiv, respective durchwegs negativ, wirken demnach in den Richtungen der beliebig gewählten Coordinatenaxen auf das Körperelement dm durchwegs Zug-, respective durchwegs Druckspannungen (der Fall, in welchem einer oder zwei der Werthe $t_{11} t_{22} t_{33}$ gleich Null sind, ist hier mit einbegriffen), so ist der Gleichung 3) entsprechend, n durchwegs positiv, respective durchwegs negativ, demnach dem constanten k im ersten Falle ein positiver, im zweiten ein negativer Werth zu geben und es ist die entsprechende Zugfläche respective Druckfläche 6) ein Ellipsoid oder eine Kugelfläche oder ein elliptischer oder circulärer Cylinder oder aus zwei parallelen Ebenen bestehend. Sind dagegen $t_{11} t_{22} t_{33}$ ungleich bezeichnet, so ist aus den angeführten Gründen für alle innerhalb einer Kegelfläche K, deren Centralpunkt M ist, gelegenen Richtungen abc die Constante k positiv zu nehmen und es ergibt sich für dieses positive k eine Zugfläche, die innerhalb der Kegelfläche K gelegen ist; die im übrigen Raume gelegenen Richtungen ergeben aber ein negatives k, demnach eine Druckfläche. Es besteht daher in diesem Falle die Reactionsfläche 6) aus getrennten Zug- und Druckflächen und zwar ist offenbar entweder die eine derselben ein einfächiges Hyperboloid, die andere ein 2flächiges Hyperboloid, demnach die Reactionsfläche aus drei getrennten Flächen bestehend und der Kegel K ist der gemeinsame Asymptotenkegel der Zug- und Druckflächen oder aber es sind sowohl Zug- als Druckfläche hyperbolische Cylinder, deren Asymptotenebene gemeinsam ist

und es besteht die Reactionsfläche dann aus vier getrennten Flächen. (Die bekannten Grenzgestalten dieser Flächen bedürfen nicht erst einer besonderen Erwähnung).

Den passenden absoluten Zahlwerth der Constanten k wird eine spätere Untersuchung ergeben.

Legt man im Endpunkte m des Radius r der Reactionsfläche an diese eine Berührungsebene e und bezeichnet mit $u_1\, v_1\, w_1$ die Richtungscosinus der Normalen dieser Ebene e, demnach der Normalen der Reactionsfläche für den Punkt m und mit d die senkrechte Entfernung des Mittelpunktes M der Reactionsfläche von dieser Ebene e, so ist den Gleichungen 6) und 5) zufolge

$$\pm \frac{\sqrt{kn}}{d} . u_1 = a . t_{11} + b . t_{12} + c . t_{13}$$

$$\pm \frac{\sqrt{kn}}{d} . v_1 = a . t_{21} + b . t_{22} + c . t_{23}$$

$$\pm \frac{\sqrt{kn}}{d} . w_1 = a . t_{31} + b . t_{32} + c . t_{33} .$$

Vergleicht man diese Werthe mit den Gleichungen 2), so ergibt sich, dass die Normale $u_1\, v_1\, w_1$ der Reactionsfläche für den beliebigen Punkt m derselben die Richtung $u\,v\,w$ der resultirenden Reaction p habe, also jener Reaction, die auf ein Flächenelement df wirkt, dessen Normale N die Richtung des vom Mittelpunkte M der Reactionsfläche nach dem Berührungspunkte m geführten Radiusvectors r hat.

Es lässt demnach die Reactionsfläche nicht nur die Richtung und Grösse der Zug-, respective Druckspannung n, sondern auch die Richtung der resultirenden Spannung p, demnach auch die Grösse der letzteren und die Grösse und Richtung der Schubspannung t in einfacher Weise kennen lernen.

Aus den letzten Gleichungen und den Relationen 2) lässt sich ausserdem folgern, dass

$$p^2 = \frac{kn}{d^2} .$$

Nun ist offenbar der Cosinus des stets spitzen Neigungswinkels der Richtung $u\,v\,w$, die immer mit der von M nach der Berührungsebene e geführten Richtung der Senkrechten d übereinstimmt, gegen den Radius r, nämlich

$$\cos(dr) = \frac{d}{r} = \frac{n}{p}$$

somit, wenn man n aus den beiden letzten Gleichungen eliminirt

$$p = \frac{k}{d.r} \tag{7}$$

Es ist sonach analog der Grundgleichung $r = \sqrt{\frac{k}{n}}$ die der reciproken Quadratwurzel aus der totalen Spannung p proportionale Strecke $\sqrt{\frac{k}{p}}$ die leicht zu construirende mittlere Proportionale aus den Strecken d und r.

Der Werth von $\frac{1}{p}$ ergibt sich der letzten Gleichung 7) gemäss einfach auf constructivem Wege, wenn man etwa auf der Normalen d vom Mittelpunkte M aus die durch die Constante k bestimmte Länge bis zum Punkte g aufträgt und zur Geraden mg von dem in der tangirenden Ebene e gelegenen Fusspunkte h der Senkrechten d eine Parallele bis zum Durchschnitte i mit dem Strahle $Mm = r$ führt, in welchem Falle dann Mi den reciproken Werth der Spannung p darstellt. Es lässt sich, nebenbei bemerkt, leicht zeigen, dass alle die derart bestimmten Punkte i in ihrer Gesammtheit ein Ellipsoid ergeben, welches demnach gestatten würde, sofort zu jeder Richtung der Normalen r des Flächenelementes df die Grösse der Totalspannung p graphisch zu bestimmen.

Dass auch die Grösse der Schubspannung t sich den beiden letzten Gleichungen gemäss ausdrücken lässt durch

$$t = p.\sin(dr) = \frac{k}{dr}\sqrt{1 - \left(\frac{d}{r}\right)^2}$$

ist sofort klar.

Es sind sonach mittelst der drei Gleichungen

$$n = \frac{k}{r^2}, \quad p = \frac{k}{d.r}, \quad t = \frac{k}{d.r}\cdot\sqrt{1 - \left(\frac{d}{r}\right)^2}$$

die drei Spannungen p, n und t darstellbar durch die reciproken

Werthe dreier Flächen, die sich aus den Strecken *r* und *d* leicht construiren lassen.

Die Reactionsfläche gestattet aber nicht nur die Grösse und Richtung dieser drei Spannungen für jede Lage des Flächenelementes *df*, sondern, was noch viel wichtiger ist, die Art und Grösse der durch diese Spannungen bedingten Deformation in dem benachbarten Körperelement *dm* oder wenn die Deformation, was ja in vielen bekannten Fällen stattfindet, im ganzen Körper eine homogene ist, die Deformation des ganzen Körpers, mag sich diese auf die Änderung der Streckendimensionen oder auf die Änderung der Winkel beziehen, in einfacher Weise graphisch zu bestimmen, wie dies in Folgendem gezeigt werden soll.

Bezeichnet man die specifische Längenänderung oder kurz Dilatation, die im deformirten Körper respective Körperelement in der Richtung *abc* stattfindet, mit λ, wo λ im Falle einer Ausdehnung positiv, im Falle einer Contraction negativ zu nehmen ist, so lässt sich leicht zeigen, was sich übrigens auch sofort aus der Gleichung 1) des Deformationsellipsoids ergibt, wenn man in derselben aus begreiflichen Gründen $x=(1+\lambda).a$, $y=(1+\lambda).b$, $z=(1+\lambda).c$ setzt, dass

$$\lambda = a^2.\alpha+b^2.\beta+c^2.\gamma+bc.\varphi+ca.\chi+ab.\psi \qquad 8)$$

ist, wobei auch α, β, γ, je nachdem in der Richtung der betreffenden Coordinatenaxe eine Verlängerung oder aber eine Verkürzung stattgefunden hat, positiv oder negativ und die Schiebung φ, χ, ψ im Falle einer stattgefundenen Verringerung des von den in der betreffenden Schiebungsebene gedachten positiven Coordinatenaxenrichtungen eingeschlossenen rechten Winkels positiv, im Falle einer in Folge der Deformation hervorgerufenen Vergrösserung dieses Winkels negativ anzunehmen ist.

Bekannten Gleichungen zufolge ist nun, wenn man die Änderung der Volumeinheit, d. i. $\alpha+\beta+\gamma$ mit ν, das Mass der Starrheit (Gestaltelasticität, Modul der Schubelasticität) des der Deformation unterworfenen Körpers mit K und mit θ eine im Allgemeinen von der Körperbeschaffenheit abhängige Constante bezeichnet

$$\begin{aligned} t_{11} &= 2K[\alpha+\theta\nu], \quad t_{22} = 2K[\beta+\theta\nu], \quad t_{33} = 2K[\gamma+\theta\nu] \\ t_{23} &= t_{32} = K.\varphi, \quad t_{31} = t_{13} = K.\chi, \quad t_{12} = t_{21} = K.\psi, \end{aligned} \qquad 9)$$

wo die Constante θ und die Starrheit K mit den anderen ausserdem öfter zur Anwendung kommenden Elasticitätsconstanten, nämlich dem Elasticitätscoëficienten oder Elasticitätsmodulus E, der Verhältnisszahl μ der Quercontraction zur Längenausdehnung im Falle eines einfachen longitudinalen Zuges und dem Widerstande W gegen die Compression, d. i. dem reciproken Werthe der Zusammendrückbarkeit in folgenden bekannten Beziehungen steht:

$$\mu = \frac{\theta}{1+2\theta}, \quad E = 2K\frac{1+3\theta}{1+2\theta}, \quad W = \frac{2}{3}K(1+3\theta).$$

Führt man die Werthe aus 9) in die Gleichung 3) ein, so gelangt man mit Beachtung des Werthes von λ aus 8) zu der Relation

$$n = 2K[\lambda+\theta\nu]. \qquad 10)$$

Da nun $n = \frac{k}{r^2}$, so ist auch

$$\lambda+\theta\nu = \frac{k}{2K}\cdot\frac{1}{r^2}.$$

Nun ist $\theta.\nu = \theta(\alpha+\beta+\gamma)$ offenbar für die einzelnen von M ausgehenden Richtungen, demgemäss auch für die ganze Reactionsfläche, als constant zu betrachten und es drückt demnach die letzte Gleichung die äusserst einfache bemerkenswerthe Beziehung aus, dass die um den constanten Werth $\theta\nu$ vergrösserte Dilatation λ in allen Richtungen, die man vom Punkte M aus führen kann, dem Quadrate des gleichgerichteten Radius der Reactionsfläche invers proportionirt ist.

Die letzte Gleichung lässt auch den passendsten Werth erkennen, den man der vorläufig unbestimmt gelassenen und zwar für Zugflächen positiven, für Druckflächen negativen Constanten k zu geben hat, damit die Reactionsfläche die Deformation auf die einfachste Art darstelle. Wenn man nämlich den absoluten Zahlwerth von k gleichsetzt dem doppelten Werthe der Starrheit, so wird

$$k = \pm 2K, \quad \lambda = \pm\frac{1}{r^2} - \theta\nu, \qquad 11)$$

wo das obere Zeichen im Falle einer Zugspannung, also bei

Zugflächen, das untere im Falle einer Druckspannung, also bei Druckflächen zur Verwendung zu kommen hat.

Um nun weiter ausser der Dilatation λ auch die angularen Verschiebungen durch die Reactionsfläche zur graphischen Darstellung zu bringen, fassen wir zunächst alle jene materiellen Punkte des Körpers ins Auge, die vor der Deformation in irgend einer Geraden liegen. Dieselben werden wegen der vorausgesetzten Homogeneität der Deformation auch im deformirten Körper in einer Geraden, die nur ihre Richtung und Länge geändert haben wird, gelegen sein. Diese Gerade sei demnach als Linie des Körpers bezeichnet.

Hat nun eine der Richtungen dieser Geraden, die wir uns durch den Punkt M hindurchgelegt denken können, im deformirten Zustande des Körpers die Richtung des beliebigen Radius r, demnach die Richtungscosinus abc, so waren die letzteren im ungezwängten Körper etwa $a-\Delta a$, $b-\Delta b$, $c-\Delta c$ und es haben sich die letzteren während der Deformation um Δa, Δb, Δc geändert.

Um nun diese Änderungen zu bestimmen, hat man blos zu beachten, dass, wenn x, y, z die Coordinaten eines materiellen Punktes P des Körpers im ungezwängten Zustande desselben und $x+\xi$, $y+\eta$, $z+\zeta$ die auf dasselbe fixe Axensystem bezogenen Coordinaten desselben materiellen Punktes nach vollzogener Deformation bedeuten, wenn ferner X, Y, Z die Coordinaten eines benachbarten materiellen Punktes bezüglich eines durch P gelegten beweglichen, mit dem früheren parallelen Axensystems bezeichnen, welche Coordinaten nach der Deformation in $X' Y' Z'$ übergehen, nach dem Taylor'schen Satze, da die höheren Potenzen vernachlässigt werden können,

$$\begin{aligned} X' &= \left(1+\frac{\partial \xi}{\partial x}\right).X + \frac{\partial \xi}{\partial y}.Y + \frac{\partial \xi}{\partial z}.Z \\ Y' &= \frac{\partial \eta}{\partial x}.X + \left(1+\frac{\partial \eta}{\partial y}\right).Y + \frac{\partial \eta}{\partial z}.Z \\ Z' &= \frac{\partial \zeta}{\partial x}.X + \frac{\partial \zeta}{\partial y}.Y + \left(1+\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right).Z \end{aligned} \qquad 12)$$

ist, wo $\frac{\partial \xi}{\partial x}, \frac{\partial \xi}{\partial y} \ldots\ldots$ unseren ursprünglichen Voraussetzungen

zufolge als unabhängig von X, Y, Z angesehen werden können. Aus 12) ist der bekannte Satz sofort zu ersehen, dass innerhalb unendlich kleiner Entfernungen auch bei heterogenen Deformationen diese als homogen betrachtet werden können.

Eine einfache Folgerung auf Grund der Relationen 12) führt zu dem Schlusse, dass demgemäss

$$
\begin{aligned}
\Delta a &= a\frac{\partial\xi}{\partial x}+b\frac{\partial\xi}{\partial y}+c\frac{\partial\xi}{\partial z}-a.\lambda\\
\Delta b &= a\frac{\partial\eta}{\partial x}+b\frac{\partial\eta}{\partial y}+c\frac{\partial\eta}{\partial z}-b.\lambda\\
\Delta c &= a\frac{\partial\zeta}{\partial x}+b\frac{\partial\zeta}{\partial y}+c\frac{\partial\zeta}{\partial z}-c.\lambda
\end{aligned}
\qquad 13)
$$

sei, wo λ durch 8) gegeben ist.

Nicht unbemerkt will ich lassen, dass durch diese Gleichungen die Änderung von abc nur unter der Voraussetzung bestimmt ist, dass stets auf ein fixes oder ein bewegliches, jedoch zu sich parallel bleibendes Axensystem Bezug genommen wird. Beziehen sich aber die Änderungen der Richtungscosinus Δa, Δb, Δc auf solche durch P hindurchgelegte Gerade des Körpers als Axen, die zwar vor der Deformation in ihren Richtungen mit den xyz-Axen übereinstimmen, welche aber nach erfolgter Deformation auch, wie früher bemerkt wurde, andere Richtungen annehmen, so sind zunächst den letzten Gleichungen zufolge die Richtungscosinus dieser Axen des Körpers bezüglich des fixen Axensystems nach der Deformation des Körpers gegeben durch

$$
\left(1,\frac{\partial\eta}{\partial x},\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right),\ \left(\frac{\partial\xi}{\partial y},1,\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)\ \left(\frac{\partial\xi}{\partial z},\frac{\partial\eta}{\partial z},1\right),
$$

so dass die geänderte x- und y-Axe, indem sich der früher rechte Winkel um den früher mit ψ (Grösse der Schiebung) bezeichneten Werth verkleinert hat, jetzt den Winkel $\frac{\pi}{2}-\psi$ einschliessen, wo den eben erwähnten Werthen zufolge $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\psi\right)=\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\eta}{\partial x}$, daher $\psi=\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\eta}{\partial x}$ ist;

ebenso ist

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}=\alpha,\quad \frac{\partial\eta}{\partial y}=\beta,\quad \frac{\partial\zeta}{\partial z}=\gamma$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\partial\zeta}{\partial y}=\varphi,\quad \frac{\partial\zeta}{\partial x}+\frac{\partial\xi}{\partial z}=\chi,\quad \frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\eta}{\partial x}=\psi. \qquad 14)$$

Die Richtungscosinus der Geraden r des Körpers bezüglich dieser **Axen des Körpers** haben sich demnach nicht um die Werthe 13) geändert, sondern diese Änderungen betragen:

$$\Delta a = a.\alpha + b.\psi + c.\chi - a.\lambda$$
$$\Delta b = a.\psi + b.\beta + b.\varphi - b.\lambda$$
$$\Delta c = a.\chi + c.\varphi + c.\gamma - c.\lambda.$$

Eine beliebige zweite Gerade des Körpers, respective Körperelements sei r'. Jene Richtung derselben, vom Mittelpunkte der Reactionsfläche aus gerechnet, welche die in dem der früheren Geraden r angehörigen Punkte m an die Reactionsfläche gelegte tangirende Ebene schneidet, und die wir uns jedenfalls auch als nach der äusseren Seite des Körperelements dm gerichtet denken können und müssen, habe nach der Deformation bezüglich des fixen Axensystems die Richtungscosinus $a'b'c'$, vor derselben aber $a'-\Delta a'$, $b'-\Delta b'$, $c'-\Delta c'$ und λ' sei die in der Richtung r' herrschende Dilatation; dann ist den Gleichungen 13) und 8) zufolge

$$\Delta a' = a'.\frac{\partial\xi}{\partial x} + b'.\frac{\partial\xi}{\partial y} + c'.\frac{\partial\xi}{\partial z} - a'.\lambda'$$

$$\Delta b' = a'.\frac{\partial\eta}{\partial x} + b'.\frac{\partial\eta}{\partial y} + c'.\frac{\partial\eta}{\partial z} - b'.\lambda' \qquad 15)$$

$$\Delta c' = a'.\frac{\partial\zeta}{\partial x} + b'.\frac{\partial\zeta}{\partial y} + c'.\frac{\partial\zeta}{\partial z} - c'.\lambda'$$

$$\lambda' = a'^2.\alpha + b'^2.\beta + c'^2.\gamma + b'c'.\varphi + c'a'.\chi + a'b'.\psi.$$

Bezeichnet man nun die Änderung des hohlen Neigungswinkels A der betrachteten Geraden (abc) und $(a'b'c')$ des Körpers in Folge der Deformation mit ΔA und vernachlässigt die höheren Potenzen der Verschiebungen Δa, $\Delta a'$, ΔA u. s. w., so ist offenbar

$$\cos A - \cos(A - \Delta A) = -\sin A.\Delta A = a'.\Delta a + b'.\Delta b +$$
$$+ c'.\Delta c + a.\Delta a' + b.\Delta b' + c.\Delta c'.$$

Führt man in diese Gleichung die Werthe aus 13), 14) und 15) ein, so ergibt sich

$$-\sin A . \Delta A = 2aa' . \alpha + 2bb' . \beta + 2cc' . \gamma + (bc' + b'c) . \varphi + \\ + (ca' + c'a) . \chi + (ab' + a'b) . \psi - (\lambda + \lambda') . \cos A \, .$$

Substituirt man ferner in diese Gleichung, die aus 9) sic ergebenden Werthe von $\alpha, \beta, \gamma, \varphi, \chi, \psi$ und bezeichnet man di in der Richtung $a'b'c'$ wirkende Zug- oder Druckspannung mi n' (wo n' im ersten Falle als positiv, im zweiten aber als negati zu betrachten ist), so dass der Gleichung 10) zufolge

$$n = 2K(\lambda + \theta\nu), \quad n' = 2K(\lambda' + \theta\nu)$$

ist, so wird

$$-\sin A . \Delta A = \frac{1}{K}\Big[aa' . t_{11} + bb' . t_{22} + cc' . t_{33} + (bc' + b'c) . t_{23} + \\ + (ca' + c'a) . t_{31} + (ab' + a'b) . t_{12} - \frac{n + n'}{2}\Big] \qquad 16)$$

Wenn man nun jene Totalspannung, die auf ein Flächen element df' der Oberfläche des Körperelements dm wirkt, dessen nach der äusseren Seite gerichteten Normalen nach der Deformation die Richtungscosinus $a'b'c'$ zukommen, mit p' bezeichnet (wo p' mit n' gleichbezeichnet ist) und wenn $u'v'w'$ für diese Kraft die analoge Bedeutung haben, wie u, v, w in 2) für die Kraft p, so dass für $u'v'w'$ der Gleichung 2) analoge Gleichungen stattfinden, so ist

$$p \cos \widehat{pr'} = p(a'u + b'v + c'w) = \\ = aa' . t_{11} + bb' . t_{22} + cc' . t_{33} + (bc' + b'c) . t_{23} + (ca' + c'a) . t_{31} + \\ + (ab' + a'b) . t_{12} = p'(au' + bv' + cw') = p' . \cos \widehat{p'r} \, .$$

Mit $\widehat{pr'}$ ist hier und auch späterhin der spitze Neigungswinkel der Richtung uvw gegen die Richtung $a'b'c'$ und mit $\widehat{p'r}$ der concave Winkel, den die Richtung abc mit der nach der äusseren Seite des Körperelements geführten Richtung $u'v'w'$ einschliesst, bezeichnet.

Durch Einführung dieser Werthe in die Gleichung 16) findet man die interessante Beziehung

$$-\sin A . \Delta A = \frac{1}{2K}[(p . \cos \widehat{pr'} - n \cos A) + (p' . \cos \widehat{p'r} - n' \cos A)] \\ = \frac{1}{2K}[2p . \cos \widehat{pr'} - (n + n') \cos A]. \qquad 17)$$

Nun ist offenbar, wenn man mit t und t' die Zahlenwerthe der in den Flächenelementen df und df' wirksamen, auf r und r' senkrecht gerichteten Schubspannungen und mit $\widehat{tr'}$ und $\widehat{t'r}$ die Winkel bezeichnet, welche ihre Richtungen mit $a'b'c'$, beziehungsweise abc einschliessen, da n und t die Componenten von p, n' und t' jene von p' sind:

$$\left.\begin{aligned} p.\cos\widehat{pr'} - n\cos A &= p.\cos\widehat{pr'} - n.\cos\widehat{nr'} = t.\cos\widehat{tr'} \\ p'.\cos\widehat{p'r} - n'\cos A &= p'.\cos\widehat{p'r} - n'.\cos\widehat{n'r} = t'.\cos\widehat{t'r} \end{aligned}\right\} \quad 18)$$

Es ergibt sich sonach aus der Gleichung 17) folgende bemerkenswerthe, leicht durch Worte ausdrückbare Relation, die den Werth von ΔA liefert:

$$\Delta A = -\frac{1}{2K}\cdot\frac{t.\cos\widehat{tr'} + t'.\cos\widehat{t'r}}{\sin A}. \quad 19)$$

Für den besonderen Fall, in welchem $A = \frac{\pi}{2}$ ist, führen die letzten Gleichungen zu folgenden Beziehungen:

$$p.\cos\widehat{pr'} = t.\cos\widehat{tr'} = t'\cos\widehat{t'r} = p'.\cos\widehat{p'r},$$

$$\Delta A = -\frac{1}{K}.\,t\cos\widehat{tr'} = -\frac{1}{K}.p.\cos\widehat{pr'}.$$

Es findet demnach, da zufolge der obigen Annahme der positiven Richtung von r' der Werth des $\cos\widehat{pr'}$ nothwendigerweise positiv ist, im Falle eines positiven p, also im Falle eines Zugs eine Annäherung der auf einander senkrechten Geraden r und r' des Körpers, eine Winkelverkleinerung, dagegen im Falle eines in der Richtung r herrschenden Drucks eine Winkelvergrösserung statt und zwar im Betrage

$$\frac{1}{K}.\,p\cos\widehat{pr'} = \frac{1}{K}.\,t\cos\widehat{tr'}.$$

Auf die Analogie dieses Resultates mit den drei letzten Gleichungen in 9) braucht nicht erst aufmerksam gemacht zu werden.

In Kürze sei bei dieser Gelegenheit erwähnt, dass einer beliebigen Richtung r im Körper in jedem Falle wenigstens Eine zweite Richtung r' entspricht, die trotz der Deformation keine Verschiebung bezüglich der ersteren erlitten hat. Setzt man nämlich in (17)

$$A = \frac{\pi}{2} \text{ und zugleich } \widehat{pr'} = \frac{\pi}{2},$$

d. h. mit anderen Worten: Ist die zweite Gerade r' parallel zur Tangentialebene für den Punkt m, in welchem die erste Gerade r die Reactionsfläche schneidet und zugleich

$$r' \perp r, \text{ so wird } \Delta A = 0.$$

Um auch die geometrische Bedeutung der gefundenen Ausdrücke zu ermitteln, beachte man, dass zunächst

$$p = n \cdot \frac{r}{d} \text{ ist.}$$

Ferner ist, wenn man den Radius $Mm' = r'$ der Reactionsfläche, der die Richtung $a'b'c'$ hat, sich verlängert denkt bis zum Durchschnitte S' mit der dem Endpunkte m des Radius r entsprechenden Berührungsebene an die Reactionsfläche und $MS' = R'$ setzt, offenbar

$$\cos \widehat{pr'} = \frac{d}{R'}.$$

Führt man die Werthe aus den beiden letzten Gleichungen in die erste der Gleichungen 18) ein, so wird

$$t \cdot \cos \widehat{tr'} = \frac{nr}{R'} - n \cos A = n \left[\frac{r}{R'} - \cos A\right],$$

oder, wenn man früheren Gleichungen zufolge

$$n = \frac{k}{r^2} \text{ und } k = \pm 2K$$

setzt, wo das obere Zeichen sich auf den Fall bezieht, in welchem der Punkt m einer Zugfläche, das untere Zeichen, wenn derselbe einer Druckfläche angehört, so ergibt sich:

$$\frac{1}{2K} \cdot t \cos \widehat{tr'} = \pm \frac{1}{r^2} \left[\frac{r}{R'} - \cos A\right].$$

Dieser Ausdruck hat nun eine leicht zu findende geometrische Bedeutung. Denkt man sich nämlich durch die Radien Mm und Mm' eine Ebene gelegt, welche die Reactionsfläche im Allgemeinen in einer Curve zweiter Ordnung schneidet und bezeichnet man den hohlen Winkel MmS', den in dem Dreiecke MmS' der Radius vector des Punktes m mit der Tangente mS' dieser Curve ein-

schliesst, mit ε, so ist in dem genannten Dreiecke

$$\frac{r}{R'} = \frac{\sin(A+\varepsilon)}{\sin\varepsilon} = \sin A . \cot\varepsilon + \cos A .$$

Demnach ist auch

$$\frac{1}{2K} \cdot t \cos \widehat{tr'} = \pm \frac{1}{r^2} \sin A . \cot\varepsilon . \qquad 20)$$

Wenn man ebenso den Radius vector $Mm = r$ verlängert bis zum Durchschnitt S mit der Tangentialebene der Reactionsfläche für jenen Punkt m', in welchem der in der Richtung $a'b'c'$ von M aus gezogene Strahl r' die Reactionsfläche trifft, und MS mit R und den hohlen Winkel $Mm'S$ des mit dem früheren Dreiecke MmS' in derselben Ebene gelegenen Dreieckes $Mm'S$ mit ε' bezeichnet, so findet man auf dieselbe Art — vorausgesetzt den ersten zunächst möglichen Fall, dass beide Radien r und r' einer Zug- oder beide einer Druckfläche angehören, demnach K in beiden Fällen genau denselben Werth hat —:

$$\frac{1}{2K} \cdot t' \cos t'r = \pm \frac{1}{r'^2} \sin A \cdot \cot\varepsilon' .$$

Demnach nimmt die Gleichung 19) folgende einfache Form an:

$$\Delta A = \mp \left[\frac{\cot\varepsilon}{r^2} + \frac{\cot\varepsilon'}{r'^2}\right] . \qquad 21)$$

Denkt man sich nun in der Ebene der Radien r und r' im Mittelpunkte M der Reactionsfläche eine Senkrechte auf Mm errichtet bis zum Durchschnitte mit der früheren Tangente mS', der im Punkte U stattfindet und ebenso $MU' \perp Mm'$ gezogen bis zum Durchschnitte U' mit der früheren Tangente $m'S$ und bezeichnet mit f und f' die Flächeninhalte der dadurch entstandenen rechtwinkligen Dreiecke MmU und $Mm'U'$, so ist, wofern f bez. f' positiv in Rechnung gezogen wird, falls der oberwähnte Dreieckswinkel $\sphericalangle\, MmS' = \varepsilon$, bez. $\sphericalangle\, Mm'S = \varepsilon'$ ein spitzer — negativ dagegen, falls derselbe ein stumpfer Winkel ist, offenbar

$$2\frac{\cot\varepsilon}{r^2} = \frac{1}{f} \text{ und } 2\frac{\cot\varepsilon'}{r'^2} = \frac{1}{f'} ,$$

sonach

$$2\Delta A = \mp \left[\frac{1}{f} + \frac{1}{f'}\right] . \qquad 22)$$

Übrigens lässt sich auch $2\Delta A$ graphisch leicht durch die reciproke Fläche eines einzigen Dreieckes ausdrücken.

Denkt man sich nämlich, falls f und f' gleich bezeichnet, also beide Winkel ε und ε' spitze oder beide stumpfe Winkel sind, die früheren rechtwinkeligen Dreiecke f und f' derart auf eine Basis $AB = r$ gestellt, dass die Scheitel der beiden rechten Winkel A und B sind und die Katheten $AB = r = Mm$ und $BC = r' = Mm'$ entgegengesetzte Richtungen annehmen und dass diese beiden Dreiecke $ABD = MmU$ und $BCE = Mm'U'$ auf derselben Seite von AB zu liegen kommen, verwandelt dann etwa das Dreieck BCE in ein flächengleiches rechtwinkeliges Dreieck ABG mit der Basis AB, indem man $AE \| CG$ construirt und bezeichnet den Durchschnittspunkt der Hypothenusen DB und AG mit H, so lässt sich leicht zeigen, dass die mit demselben Qualitätszeichen wie f und f' genommene Fläche F des den beiden Dreiecken ABD und ABG gemeinsamen Dreieckes ABH bestimmt ist durch

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f} + \frac{1}{f'} .$$

Ist dagegen einer der Dreieckswinkel ε und ε' spitz, der andere aber stumpf, demnach f und f' ungleich bezeichnet, so reducire man die beiden rechtwinkeligen Dreiecke MmU und $Mm'U'$ auf dieselbe Basis B, als welche man etwa eine Kathete des einen dieser Dreiecke wählen möge, bringt die rechten Winkel und die Kathete B zur Deckung und führe von der dieser Basis B gegenüberliegenden Spitze des kleineren Dreiecks eine zur Basis parallele bis zum Durchschnitte mit der Hypothenuse des grösseren Dreiecks, verbinde diesen Durchschnittspunkt mit dem Scheitel des rechten Winkels und verlängere diese Verbindungslinie bis zum Durchschnitte mit der im zweiten Endpunkte der Basis B auf dieselbe errichtete Senkrechte; das dadurch neu erhaltene rechtwinkelige Dreieck mit der Basis B hat einen Flächeninhalt F, der falls diesem F das Vorzeichen der algebraischen Summe $\frac{1}{f} + \frac{1}{f'}$, gegeben wird, offenbar wie früher durch die Gleichung bestimmt ist

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f} + \frac{1}{f'} .$$

Es ist sonach zufolge der Gleichung (22) in allen Fällen

$$2\Delta A = \mp \frac{1}{F}. \tag{23)}$$

Das obere Zeichen entspricht, wie schon oben bemerkt wurde, einer Zugfläche, das untere einer Druckfläche.

Die Giltigkeit der Gleichungen 21), 22), 23), wurde hier aber nur für den Fall bewiesen, wenn m und m' Punkte derselben Fläche sind, wie es z. B. stets der Fall ist, wenn die Reactionsfläche ein Ellipsoid oder ein elliptischer Cylinder ist, oder aus zwei parallelen Ebenen besteht.

Gehören nun m und m' zwei verschiedenen Flächenarten an, z. B. m einer Zug- und m' einer Druckfläche oder umgekehrt, so sind p und p' und ebenso n und n' entgegengesetzt bezeichnet; es ist demnach — der früheren Gleichung

$$p . \cos(pr') = p' . \cos(p'r),$$

wo (pr') einen spitzen Winkel bezeichnet, zufolge — der $\cos(p'r)$ negativ, also $\cos(p'r) = -\frac{d'}{R}$ zu setzen, wo d' den Zahlwerth der in die Richtung $u'v'w'$ fallenden normalen Entfernung der die zweite Fläche im Punkte m' tangirenden Ebene vom Flächenmittelpunkte M bedeutet.

Es ist ferner $p' = n'.\frac{r'}{d'}$, demnach der Gleichung 18) zufolge

$$t'.\cos(t'r) = p'\cos p'r - n'\cos A = -n'\left[\frac{r'}{R} + \cos A\right].$$

Nun ist k für diese zweite Reactionsfläche, in der der Punkt m' liegt, dem früheren der Lage des Punktes m entsprechenden Werthe entgegengesetzt gleich, daher

$$k = \mp 2K \text{ und } n' = \frac{k}{r'^2}$$

zu setzen. Demnach ist

$$\frac{1}{2K} \cdot t'\cos t'r = \pm \frac{1}{r'^2}\left[\frac{r'}{R} + \cos A\right].$$

Hat nun ε' dieselbe Bedeutung wie früher, so lässt sich leicht einsehen, dass jetzt im Dreiecke $Mm'S$

$$\frac{r'}{R} = \frac{\sin(A-\varepsilon')}{\sin\varepsilon'} = \sin A \cot\varepsilon' - \cos A;$$

Es ist jedoch wohl zu beachten, dass aus denselben Gründen, die früher erörtert wurden, die Richtungscosinus bezüglich jener Axen des Körpers, die etwa vor der Deformation zu den fixen Axen parallel waren, die jedoch in der neuen Lage offenbar nur dann auf einander senkrecht stehen, wenn sie die Reactionshauptaxen für den Punkt M sind, sich nicht um die Werthe 24), sondern um folgende leicht zu findende Werthe geändert haben

$$\Delta a = a.\left(\lambda - \frac{\partial \xi}{\partial x}\right), \quad \Delta b = b\left(\lambda - \frac{\partial \eta}{\partial y}\right), \quad \Delta c = c\left(\lambda - \frac{\partial \zeta}{\partial z}\right)$$

Nur wenn die Deformation eine reine, d. h. von keiner Rotation begleitete ist, und zu Coordinatenaxen die Elasticitätshauptaxen genommen wurden, stimmen mit diesen Werthen die Werthe 24) überein.

Auf genau dieselbe Weise nun, wie früher auf Grund der Gleichungen 13), findet man, wenn man von den Gleichungen 24) ausgeht, dass der Winkel A, den zwei Ebenen des Körpers, deren Normalen im gezwängten Körper die Richtungscosinus (abc) und $(a'b'c')$ haben, einschliessen, während der Deformation eine Änderung im Betrage von ΔA erlitten habe, wo

$$\begin{aligned} \sin A.\Delta A = {} & 2aa'.\alpha + 2bb'.\beta + 2cc'.\gamma \\ & + (bc'+b'c).\varphi + (ca'+c'a)\chi \\ & + (ab'+a'b).\psi - (\lambda+\lambda').\cos A = \qquad 25) \\ = \frac{1}{K} & \Big[aa'.t_{11} + bb'.t_{22} + cc'.t_{33} + (bc'+b'c).t_{23} + \\ & + (ca'+c'a)t_{31} + (ab'+a'b).t_{12} - \frac{n+n'}{2}\Big] \end{aligned}$$

Vergleicht man diese Gleichung mit der Gleichung 16), so ergibt sich das bemerkenswerthe Gesetz, dass die Winkeländerung zweier Ebenen des Körpers in Folge einer homogenen Deformation stets entgegengesetzt gleich sei der gleichzeitigen Winkeländerung jener Geraden r und r' des Körpers, die nach oder vor der Deformation mit den Normalen dieser Ebenen zusammenfielen. Bezeichnet man mit t und t' die Schubspannungen, die in den betrachteten Ebenen wirksam sind, ferner mit n und n' die auf diesen Ebenen normalen Zug-, respective Druckspannungen und mit p und p' die aus denselben resultirenden Reac-

tionen, so lässt sich demnach die Winkeländerung ΔA dieser Ebenen, wie früher, den Gleichungen 17) und 19) analog ausdrücken durch die Relation

$$\begin{aligned}\Delta A &= \frac{1}{2K} \cdot \frac{2p \cos pr' - (n+n') . \cos A}{\sin A} \\ &= \frac{1}{2K} \cdot \frac{t \cos \widehat{tr'} + t' . \cos \widehat{t'r}}{\sin A}\end{aligned} \qquad 26)$$

und für den Fall, dass die Ebenen auf einander senkrecht stehen, durch

$$\Delta A = \frac{}{K} \cdot p \cos \widehat{pr'} = \frac{1}{K} \cdot t \cos \widehat{tr'}.$$

Jeder Ebene E, von welcher Lage immer, entspricht auch hier stets eine zweite auf derselben senkrechte Ebene E', deren Neigungswinkel gegen die erste Ebene sich trotz der Deformation nicht abändert und die man der Gleichung 26) entsprechend findet, wenn man die Normale r der Ebene E verlängert bis zum Durchschnitte mit der Reactionsfläche, in diesem Punkte eine Tangentialebene an die letztere führt und durch r eine auf dieser tangirenden Ebene senkrechte Ebene E' legt.

Die graphische Construction, durch welche sich die Winkeländerung beliebiger Ebenen ausdrücken lässt, ist in Folge der Übereinstimmung der eben gefundenen Gleichungen mit den früheren auf die früher besprochene Art durchzuführen, wofern man nur die Normale r und r' der Ebenen verlängert bis zum Durchschnitte mit der Reactionsfläche und im Übrigen so verfährt, wie früher.

Nur für das Zeichen des ΔA ist hier das entgegengesetzte von dem früheren zu nehmen.

Man gelangt demnach hier zu dem Resultate, dass, je nachdem die Normale r mit einer Zug- oder einer Druckfläche zum Durchschnitte gelangt,

$$2\Delta A = \frac{1}{f} + \frac{1}{f'} = \frac{1}{F} \quad \text{oder} \quad 2\Delta A = -\left(\frac{1}{f} + \frac{1}{f'}\right) = -\frac{1}{F}.$$

Kurz, in jedem Falle lässt sich, wie früher der Zahlwerth der Winkeländerung durch die reciproke Fläche eines in bekannter Weise zu construirenden Rechteckes graphisch darstellen.

Schliesslich ist noch die Frage der Änderung des Neigungswinkels einer Geraden r des Körpers bezüglich einer Körperebene E zu erörtern.

Es seien abc wieder die Richtungscosinus einer der Richtungen der Geraden r und $a'b'c'$ die Richtungscosinus der Normalen r' dieser Ebene im gezwängten Körper, so dass der Neigungswinkel Φ der Geraden gegen die Ebene bestimmt ist durch

$$\sin\Phi = aa' + bb' + cc'.$$

Vor der Deformation habe Φ den Werth $\Phi - \Delta\Phi$, so dass

$$\sin(\Phi - \Delta\Phi) = (a - \Delta a)(a' - \Delta a') + (b - \Delta b)(b' - \Delta b') + (c - \Delta c)(c' - \Delta c'),$$

ist, wo Δa, Δb, Δc gegeben sind durch die Gleichungen 13) und $\Delta a'$, $\Delta b'$, $\Delta c'$ durch die Gleichungen 24), wenn man nur in den letzteren überall — statt abc — einführt $a'b'c'$.

Durch die Subtraction der so erhaltenen Werthe von $\sin\Phi$ und $\sin(\Phi - \Delta\Phi)$ ergibt sich demnach nach der angedeuteten Substitution

$$2\cos\left(\Phi - \frac{\Delta\Phi}{2}\right)\sin\frac{\Delta\Phi}{2} = \Delta a\,\Delta a' + \Delta b\,\Delta b' + \Delta c\,\Delta c'.$$

Es ist folglich $\Delta\Phi$ eine Grösse, die, wenn $\cos\left(\Phi - \frac{\Delta\Phi}{2}\right)$ einen endlichen Werth hat, sonach die Gerade r auf der Ebene E **nicht** nahezu senkrecht steht, durch einen Ausdruck zweiter Ordnung bezüglich der als sehr klein angenommenen Verschiebungen bestimmt ist, daher zu vernachlässigen ist.

Ist jedoch $\Phi = \frac{\pi}{2}$, demnach $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$, so ist $\Delta\Phi$, wie die letzte Gleichung lehrt, ausdrückbar durch die ersten Potenzen der Verschiebungen. Um nun diesen Ausdruck zu erhalten, denke man sich durch die Lagen, welche r und r' vor der Deformation einnehmen, eine Ebene gelegt. Sind A, B, C die Richtungscosinus der Normalen dieser Ebene, so ist offenbar

$$A.\sin\Delta\Phi = b.\Delta c' + c'.\Delta b - c.\Delta b' - b'.\Delta c$$
$$B.\sin\Delta\Phi = c.\Delta a' + a'.\Delta c - a.\Delta c' - c'.\Delta a$$
$$C.\sin\Delta\Phi = a.\Delta b' + b'.\Delta a - b.\Delta a' - a'.\Delta b.$$

In Folge der Substitution der Werthe von Δa, Δb, Δc aus 13) und für $\Delta a'$, $\Delta b'$, $\Delta c'$ aus 24) ergeben sich, wenn man $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$ setzt und die Werthe 14) berücksichtigt, folgende Relationen

$$A . \sin \Delta\Phi = 2bc(\beta - \gamma) + (c^2 - b^2) . \varphi - ab . \chi + ac . \psi$$
$$B . \sin \Delta\Phi = 2ca(\gamma - \alpha) + (a^2 - c^2) . \chi - bc . \psi + ba . \varphi$$
$$C . \sin \Delta\Phi = 2ab(\alpha - \beta) + (b^2 - a^2) . \psi - ca . \varphi + cb . \chi .$$

Zunächst ist aus diesen Gleichungen sofort zu entnehmen, dass $aA + bB + cC = 0$ ist, ein Zeichen, dass in der Ebene, die durch die Lagen der Geraden r und r' im ungezwängten Körper gelegt wurde, auch die Lage derselben im deformirten Körper, die für beide dieselbe ist, enthalten ist.

Führt man in die letzten Gleichungen die aus 9) bestimmbaren Werthe von α, β, γ, φ, χ, ψ ein, so findet man

$$KA . \sin \Delta\Phi = bc(t_{22} - t_{33}) + (c^2 - b^2) t_{23} - ab . t_{13} + act_{12}$$
$$KB \sin \Delta\Phi = ca(t_{33} - t_{11}) + (a^2 - c^2) t_{31} - bc . t_{21} + bat_{23}$$
$$KC . \sin \Delta\Phi = ab(t_{11} - t_{22}) + (b^2 - a^2) t_{12} - ca . t_{32} + cbt_{31} ,$$

welche Gleichungen man dem Werthe von n aus 3) entsprechend auch in folgender Form schreiben kann:

$$A . \sin \Delta\Phi = \frac{1}{2K} \cdot \left[c \cdot \frac{\partial n}{\partial b} - b \cdot \frac{\partial n}{\partial c} \right]$$
$$B . \sin \Delta\Phi = \frac{1}{2K} \cdot \left[a \cdot \frac{\partial n}{\partial c} - c \cdot \frac{\partial n}{\partial a} \right] \qquad 27)$$
$$C . \sin \Delta\Phi = \frac{1}{2K} \cdot \left[b \cdot \frac{\partial n}{\partial a} - a \cdot \frac{\partial n}{\partial b} \right] ,$$

woraus sich sofort ergibt, dass

$$A \cdot \frac{\partial n}{\partial a} + B \cdot \frac{\partial n}{\partial b} + C \cdot \frac{\partial n}{\partial c} = 0$$

ist, oder, wenn man die Werthe aus 4) beachtet, dass auch

$$Au + B . v + C . w = Au' + Bv' + Cw' = 0$$

ist, dass demnach die Ebene der Geraden r und r' auch auf der im Durchschnittspunkte der Normalen r' der Körperebene E mit der Reactionsfläche an die letztere gelegten Berührungsebene

senkrecht steht, somit jene Ebene sei, in welcher die Richtungen der Reactionen p, t und n gelegen sind.

Quadrirt man die Gleichungen 27) und addirt dieselben, so ergibt sich, da $a^2+b^2+c^2=1$ ist, für den Zahlwerth von $\Delta\Phi$ folgender Werth:

$$\sin\Delta\Phi = \frac{1}{2K}\cdot\sqrt{\left(\frac{\partial n}{\partial a}\right)^2+\left(\frac{\partial n}{\partial b}\right)^2+\left(\frac{\partial n}{\partial c}\right)^2-\left[a\frac{\partial n}{\partial a}+b\frac{\partial n}{\partial b}+c\frac{\partial n}{\partial c}\right]^2},$$

sonach mit Zuhilfenahme der Formeln 4) auch

$$\sin\Delta\Phi = \frac{1}{K}\cdot\sqrt{p^2-n^2} = \frac{1}{K}\cdot t. \tag{28}$$

Es ist daher die Änderung des rechten Neigungswinkels der Geraden r des Körpers gegen die Körperebene E in Folge der Deformation mit Ausserachtlassung höherer Potenzen der Verschiebungen dem Zahlwerthe nach gegeben durch

$$\Delta\Phi = \frac{1}{K}\cdot t.$$

Um nun den letzteren Ausdruck graphisch darzustellen braucht man nur auszugehen von der früheren Gleichung

$$t = \frac{k}{d.r}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{d}{r}\right)^2}$$

und nach 11) zu setzen $k = \mp 2K$. Folglich ist abgesehen vom Zeichen

$$\Delta\Phi = \frac{2}{d.r}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{d}{r}\right)^2}.$$

Man hat demnach durch den Radius r der Reactionsfläche eine Normalebene zur letzteren zu führen, welche diese in einer Curve und die tangirende Ebene in einer Tangente der Curve schneidet.

Bedeutet nun ε den spitzen Winkel, den mit r die letzterwähnte Tangente im Punkte m einschliesst, so ist offenbar $\frac{d}{r} = \sin\varepsilon$, somit abgesehen vom Zeichen

$$\Delta\Phi = \frac{2}{r^2}\cot\varepsilon.$$

Führt man daher in der besagten Normalebene im Mittelpunkte M der Reactionsfläche eine Senkrechte zum Radius r bis zum Durchschnitt mit der oberwähnten Tangente der Curve, der im Punkte Q stattfindet, so ist die Fläche des dadurch entstandenen rechtwinkeligen Dreiecks MmQ gegeben durch

$$f = \frac{r^2}{2} \operatorname{tang} \varepsilon,$$

somit ist

$$\Delta\Phi = \pm \frac{1}{f},$$

also $\Delta\Phi$ wieder durch die reciproke Fläche eines leicht zu construirenden Dreiecks graphisch dargestellt.

Interessante Beziehungen ergeben sich durch Anwendung der gewonnenen Resultate auf specielle Fälle, nämlich auf die verschiedenen Formen der Reactionsfläche; jedoch, so verlockend dies auch sein mag, so will ich nicht hier darauf eingehen, da ich mir die Aufgabe stellte, die Frage nur vom allgemeinsten Stand punkte zu behandeln.

Ich glaube nun in dieser Abhandlung gezeigt zu haben, dass die Reactionsfläche in der That vorzüglich geeignet ist, alle Elasticitätsverhältnisse in einem beliebigen Punkte eines elastisch isotropen Körpers darzustellen und zwar in analoger Weise, wie dies in der graphischen Statik bei der Darstellung der statischen Momente der Kräfte gewöhnlich geschieht, durch Dreiecke respective Rechtecke, die auch hier auf eine gemeinsame Basis zu reduciren sind.

Überdies spricht auch die Analogie der Entstehungsweise der Reactionsfläche mit der des Trägheitsellipsoids, in welch' letzterem ebenfalls die Radien die reciproken Quadratwurzeln einer Grösse der Mechanik und zwar hier des Trägheitsmoments darstellen, für die Benützung der ähnlich gebildeten Reactionsfläche in der graphischen Statik elastischer Körper.

Studien über Caffeïn und Theobromin.

I. Abhandlung.

Von Rich. Maly und Fr. Hinteregger.

(Mit 1 Holzschnitt.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 20. Jänner 1881.)

Die nahe verwandtschaftliche Stellung, welche man den beiden Pflanzenbasen Caffeïn und Theobromin zur Harnsäure gewöhnlich anweist, ist abgesehen von einer gewissen Familienähnlichkeit der empirischen Formeln nur durch wenige Beobachtungen begründet; vor Allem fehlt es an einigermassen glatt verlaufenden Zersetzungsprozessen. Vom Thebromin ist in dieser Hinsicht fast gar nichts bekannt, und nur insoferne sich durch die von Strecker[1] bewerkstelligte Behandlung von Theobrominsilber mit Jodmethyl das Caffeïn als methylirtes Theobromin zu erkennen gab, sind die bei der Zerlegung von Caffeïn erhaltenen Spaltungsstücke zum Theil auch als die des Theobromins anzusehen.

Stenhouse hat im Jahre 1843[2] bei der energischen Einwirkung von Salpetersäure auf Caffeïn sein Nitrotheïn (Rochleder's Cholestrophan, die Dimethylparabansäure) entdeckt; die Ausbeute davon hat Stenhouse später[3] zu 5—6% angegeben, war also so klein, dass sich keine sicheren Schlüsse auf die Caffeïnconstitution daraus machen liessen. Die Einwirkung des Chlors, welche Rochleder[4] untersuchte, gab in einem complicirt verlaufenden Prozesse ebenfalls etwas Dimethylparabansäure, dann neben der hoch zusammengesetzten Amelinsäure, Methylamin, Chlorcaffeïn und einen nach Chlorcyan riechenden Körper.

Die einzige Einwirkung auf Caffeïn, welche in einer zusammenstimmenden Zersetzungsgleichung ausgedrückt werden konnte, ist die von

---

[1] Liebig's Annalen 118, 151.

[2] Daselbst 45, 371.

[3] Liebig's Annalen 46, 229.

[4] Daselbst 69, 120.

kochendem Barytwasser; sie wurde zuerst von O. Schultzen[1], dann von Rosengarten und Strecker[2] studirt. Ersterer hielt den dabei sich bildenden Körper $C_3H_7NO_2$ für Alanin, die Letzteren zeigten aber durch die Darstellung der Platinverbindung und die Möglichkeit der Umwandlung in Kreatin, dass derselbe Sarkosin ist. Die Zusetzung selbst drückten Schultzen sowohl wie Strecker und Rosengarten durch das Schema:

$$C_8H_{10}N_4O_2+6H_2O = 2CO_2+2NCH_5+H_3N+CH_2O_2+C_3H_7NO_2$$

aus, wonach also ausser dem Sarkosin noch Ameisensäure, Methylamin und Kohlensäure entstehen.

Aus Theobromin haben Rochleder und Hlasiwetz mittelst Chlor ebenfalls Amalinsäure und Methylamin erhalten, und Glasson[3] konnte durch Einwirkung von Bleisuperoxyd und Schwefelsäure keine bestimmten Producte isoliren.

Wir haben nun versucht, durch das Studium neuer Reactionen des Caffeïns und Theobromins, deren Zersetzungsproducte besser kennen zu lernen.

Die Einwirkung von Säuren bei höherer Temperatur, die zuerst versucht worden war, ergab nichts, was überraschend genug ist, als das Caffeïn nur eine sehr schwache Basis darstellt; es veränderte sich gar nicht beim Erhitzen mit concentrischer Salzsäure im zugeschmolzenen Rohre, und auch von verdünnter oder concentrirter Schwefelsäure wird es bei 200° nicht merklich angegriffen, und nicht im geringsten verkohlt.

Oxydation des Caffeïns mit Chromsäure.

Chromsäure für sich oder als gewöhnliche Chromsäuremischung angewandt wirkt im Laufe von ein paar Stunden bei Siedehitze auf Caffeïn ein.

Gewöhnlich wurden Portionen von 30 Grm. Caffeïn mit 42·7 Grm. chromsaurem Kalium, 56·2 Grm. concentrirter Schwefelsäure und etwa $^1/_2$ Liter Wasser in einem Kolben am Sandbade durch 4—6 Stunden gekocht. Kochen in einer Retorte ist nicht nothwendig, da das übergehende Wasser kaum sauer reagirt, und ausser ziemlich viel Kohlensäure nur kleine Spuren von Ameisensäure entweichen. Nach der angegebenen Zeit ist

[1] Chem. Centr. 1868, 497.
[2] Liebig's Ann. 157, 1.
[3] Liebig's Annalen 60, 335.

alle Chromsäure verbraucht und die Flüssigkeit dunkelgrün. Die Menge des Chromates ist bei den zahlreichen Versuchen vielfach variirt worden; die oben angegebene Menge entspricht 3 Atomen Sauerstoff auf 1 Molekül Caffeïn; Schwefelsäure ist nur so viel angewandt worden, als zur Bildung von Chromalaun nöthig ist, um die Einwirkung der freien Säure auf die Spaltungsproducte zu verhüten. Nimmt man die angegebene Menge Chromsäure, so ist nach 4—6stündigem Kochen kein unzersetztes Caffeïn mehr vorhanden; nimmt man nur 2 Atome Sauerstoff, so scheidet sich auch nach längerem Kochen, nach dem Abkühlen eine Portion Caffeïn als seidenglänzende Krystallwolle ab. Nimmt man dann das so erhaltene und abgesaugte Caffeïn und kocht es nochmals mit der Chromsäuremischung, die dem dritten Sauerstoffatom entspricht, so wird das Caffeïn weiter oxydirt, die Chromsäuremischung aber nicht völlig verbraucht. Auch reine Chromsäure ist statt der Chromsäuremischung einige Male angewandt worden, aber es hat sich daraus keinerlei Vortheil für die Abscheidung der Zersetzungsproducte ergeben.

Nach dem Erkalten findet man auf der Flüssigkeit, die durch das Kochen im offenen Kolben merklich eingeengt ist, eine eisschollenartige Decke von grossen dünnen glänzenden Krystallblättern, die nach dem Abfiltriren und Waschen mit kaltem Wasser sofort farblos und seidenglänzend werden. Diese Substanz ist Cholestrophan.

Ein beträchtlicherer Theil bleibt in dem Filtrat gelöst, und kann daraus durch Ausschütteln mit Aether erhalten werden, jedoch muss man das Ausschütteln mit frischem Aether oft vornehmen, um das Cholestrophan vollständig zu gewinnen. Bei einigen Darstellungen ist 12—16—20mal ausgeschüttelt worden, wobei die letzten Aetherportionen zwar nur mehr wenig, aber doch noch etwas Substanz enthielten, so dass ein völlig quantitatives Abtrennen sich dadurch wohl kaum erreichen lässt. Die Destillationsrückstände sind farblos, erstarren bis auf den letzten Tropfen zu einem schneeweissen, aus glänzenden Blättchen bestehenden Aggregat, welches nach einigem Stehen mitunter eine Rosafarbe annimmt, die aber beim Umkrystallisiren vollständig verschwindet. In ein paar Fällen, in denen die Ausschüttelungen möglichst forcirt worden sind, wurden die erhalte-

sen Rückstände mit dem von sich selbst abgeschiedenen Cholestrophan vereinigt, getrocknet und gewogen.

So gaben z. B.

1. 20 Grm. Caffeïn [1] 6·6 Grm. Cholestrophan oder **36·1%**.
2. 20 Grm. Caffeïn, 13 Stunden lang gekocht, gaben 6.5 Grm. Cholestrophan oder **35·4%**.
3. 30 Grm. Caffeïn, mit 60 Grm. chromsaurem Kalium und 87 Grm. Schwefelsäure 6 Stunden gekocht, gaben 1·5 Grm. obenauf schwimmendes und 10·0 Grm. ausgeschütteltes, zusammen 11·5 Grm. Cholestrophan oder auf krystallwasserfreies Caffeïn bezogen **41·8%**.

Diese Quantitäten Cholestrophan sind zwar von der theoretischen Ausbeute noch entfernt, aber sie zeigen doch im Vergleich mit den von Stenhouse erhaltenen 5—6%, dass dasselbe bei der Chromsäureoxydation nicht als nebensächliches, sondern als Hauptproduct erhalten wird.

Cholestrophan.

Da wir zum ersten Male so grosse Mengen von Cholestrophan erhalten haben, können wir die Angaben darüber vervollständigen und zwar zunächst in der Richtung seine Natur sicher festzustellen.

Das Cholestrophan löst sich mässig in kaltem, sehr leicht in heissem Wasser.

9·3518 Grm. bei 20° C. gesättigter Lösung hinterliessen im Vacuum über Schwefelsäure 0·1718 Grm. Cholestrophan. Also lösen 100 Theile Wasser von 20° C. 1·87 Grm. Cholestrophan, oder 1 Theil Cholestrophan löst sich in 53·4 Theilen Wasser.

Die ältere Angabe von Stenhouse, dass sich 1 Theil Cholestrophan in 3 Theilen kaltem Wasser löse, ist demnach zu corrigiren.

Auch in Alkohol und Aether ist das Cholestrophan löslich.

Der Schmelzpunkt im Capillarrohre bestimmt, lag bei 145° C., der Erstarrungspunkt bei 141° C. Beim Erkalten der heissen Lösungen erhält man prachtvolle Krystallisationen, oft dünne Tafeln von reiner Rhombenform oder 2—3 Quadrat-

[1] Das Caffeïn als krystallwasserhältiges gewogen.

Centimeter grosse klare Blätter, die unter verschiedenen Winkeln gegeneinandergestellt und verwachsen ein grossmaschiges Fachwerk bilden. Schon durch einmalige Umkrystallisation gelingt es den Körper rein zu erhalten.

Kühlt man eine concentrirte Lösung rasch und unter Umrühren ab, so bildet sich ein Brei von sehr dünnen zarten fett- bis seidenglänzenden Blättchen, die viel Ähnlichkeit mit festen Fettsäuren, oder noch mehr mit Cholesterin haben, wie das schon Rochleder hervorgehoben und darauf hin den Namen Cholestrophan gebildet hat.

Analysen.

1. 0·3081 Gr. mit Kupferoxyd im Schiffchen verbrannt gaben 0·1238 Wasser.
2. 0·2017 Gr. gaben 0·3113 Gr. Kohlensäure und 0·0783 Gr. Wasser.
3. 0·2812 Gr. mit Natronkalk verbrannt neutralisirten 7·6 CC. Säure von 1 CC. = 0·05478 Grm. Stickstoff.
4. 0·4362 Grm. mit Natronkalk verbrannt neutralisirten 11·7 CC. derselben Säure.

	Cholestrophan-Bimethylparabansäure $C_5H_6N_2O_3$	Gefunden 1.	2.	3.	4.
C	42·25	—	—	—	42·09
H	4·23	4·74	—	—	4·31
N	19.72	—	19·48	19·34	—
O	33·80	—	—	—	—

Einwirkung von Alkalien auf Cholestrophan.

Wird die gewöhnliche einfache Parabansäure mit wässerigen Alkalien zusammengebracht, so entstehen bekanntlich die Salze der um 1 Mol. Wasser reicheren Oxalursäure.

Wir haben nun untersucht, wie sich in dieser Beziehung das gewöhnlich als Dimethylparabansäure betrachtete Cholestrophan verhält, und gefunden, dass dieses damit keineswegs correspondirend eine Dimethyloxalursäure gibt, sondern dass es vielmehr sehr leicht und glatt in Oxalsäure und Dimethylharnstoff gespalten wird.

Versetzt man die wässrige, nicht zu verdünnte Cholestrophanlösung mit Kali oder Natronlauge und mit Alkohol, so erhält

man schon in der Kälte einen weissen krystallinischen, in Alkohol nicht, wohl aber in Wasser löslichen Niederschlag, der die Reactionen eines Oxalates gibt und überdies noch analysirt wurde.

Analyse.

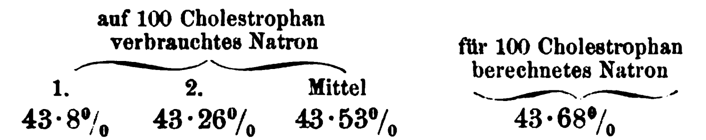
0·6143 Grm. verloren bei 150° C. 0·0610 Grm. Wasser und gaben 0·5787 Grm. schwefelsaures Kalium = 9·93% Wasser und 42·3% Kalium.

Neutrales oxalsaures Kalium verlangt 9·78% Wasser und 42·4% Kalium.

Auch Barytwasser gibt schon in der Kälte nach wenigen Minuten eine quantitative Ausfällung von oxalsaurem Baryum. Um zu sehen, ob die Zersetzung des Cholestrophans durch Alkalien völlig glatt verläuft, wurden noch Titrirversuche gemacht, indem man gewogene Mengen Substanz mit verdünnter titrirter Lauge einige Minuten erhitzte, und dann mit Säure zurücktitrirte. Was an Säure weniger verbraucht wurde, musste der Menge der verbrauchten Oxalsäure entsprechen.

1. 0·2550 Grm. Cholestrophon brauchten 7·0 CC. Lauge, enthaltend 0·1117 Grm. Na_2O.
2. 0·2434 Grm. Cholestrophan brauchten 6·6 CC. Lauge, enthaltend 0·1053 Grm. Na_2O

oder:



auf 100 Cholestrophan verbrauchtes Natron			für 100 Cholestrophan berechnetes Natron
1.	2.	Mittel	
43·8%	43·26%	43·53%	43·68%

Aus Obigem geht hervor, dass das Cholestrophan verschieden von der einfachen Parabansäure sich verhält, es gibt keine Oxalursäure, vielmehr wird es schon bei geringer Einwirkung von Alkalien in Oxalsäure und Dimethylharnstoff nach der Gleichung:

$$C_5H_6N_2O_3 + 2HOK = \underset{\text{Dimethyl-harnstoff}}{C_3H_8N_2O} + \underset{\text{Kalium-oxalat}}{K_2C_2O_4}$$

oder:

$$CO\begin{cases} NCH_3 - CO\ \ OK\,H \\ \qquad\quad\ \ | \quad + \\ NCH_3 - CO\ \ OK\,H \end{cases} = CO\begin{cases} NCH_3H \\ \\ NCH_3H \end{cases} + \begin{matrix} COOK \\ | \\ COOK \end{matrix}$$

gespalten.

Es lag nun noch nahe, den methylirten Harnstoff kennen zu lernen, der sich neben dem Oxalat bildet.

Zu oben erwähntem Zwecke wurden mehrere Gramm Cholestrophan wieder mit Kalilauge und Alkohol versetzt, gelinde erwärmt, das Filtrat eingedampft, mit warmem absoluten Alkohol zur völligen Abscheidung der letzten Reste des Oxalates ausgezogen und eingedampft. Nach sehr starkem Einengen erhielten wir lange farblose spiessförmige Kystalle, die dem gewöhnlichen Harnstoff nicht unähnlich waren; sie wurden abgepresst und über Schwefelsäure getrocknet.

Stickstoffbestimmung.

0·2425 Grm. gaben mit Natronkalk verbrannt Ammoniak, das 10·4 CC. Säure neutralisirte wovon, 10 CC. = 0·07208 Grm. Stickstoff.

oder:

gefunden	für Dimethylharnstoff berechnet
30·93% Stickstoff	31·8% Stickstoff

Der Schmelzpunkt lag zwischen 97° und 100° C., der Erstarrungspunkt bei 96° C. Wurtz[1] gibt für den von ihm aus Cyansäure-Methyläther bei Einwirkung von Wasser synthetisch erhaltenen (symmetrischen) Dimethylharnstoff den Schmelzpunkt 99·5° C. an.

Schliesslich haben wir noch verlässlicher die Natur des vorliegenden Harnstoffes als symmetrischen nachgewiesen, als es durch blosses Zusammenfallen der Schmelzpunkte möglich ist. Es wurde neuerdings eine Portion Cholestrophan gespalten, und der erhaltene Harnstoff mit Barytwasser im zugeschmolzenen Rohre auf 100° C. erhitzt, dann die Flüssigkeit im Kölbchen gekocht, die entweichenden alkalischen Dämpfe in Salzsäure aufgefangen, und ein Platinsalz dargestellt. Bei gleicher Vertheilung der zwei Methyle auf beide Stickstoffatome konnte nur Methylamin und weder Ammoniak noch Dimethylamin entstehen. Das Platinsalz bildete glänzende gelbe Schuppen, die unter dem Mikroskope ganz gleichförmig erschienen.

Platinbestimmung.

0·3704 Grm. gaben 0·1536 Grm. Platin.

[1] Gmelin-Kraut, Suppl. I. 47.

Methylaminplatinsalz berechnet	Gefunden
41·6% Platin	41·47% Platin

Darnach ist der erhaltene Harnstoff symmetrischer Dimethylharnstoff und das Cholestrophan ist die Oxalylverbindung davon.

Damit ist eines der Spaltungsproducte des Caffeïns, das in reichlicher Menge entsteht, festgestellt. Es bleibt noch zu untersuchen, was in der grünen Chrommischung nach dem Ausschütteln mit Aether noch vorhanden ist; wir werden dieses in einer späteren Arbeit beschreiben, und gehen nun zu dem, dem Cholestrophan correspondirenden aus Theobromin zu erhaltenden Körper über.

Oxydation des Theobromins durch Chromsäure.

Das angewandte Theobromin war käuflich und aus Schuchardt's Fabrik bezogen. Um seine Reinheit zu constatiren, wurde eine Quantität in viel heissem Wasser gelöst und der beim Erkalten als weisses Krystallpulver sich abscheidende Theil A getrennt von dem durch Eindampfen der wässerigen Mutterlauge auskrystallisirenden Antheil B analysirt.

Die Analysen wollen wir hier mittheilen, da die bisherigen Analysen des Theobromins (siehe Gmelin's Handbuch, Band VI, pag. 373) einiges zu wünschen übrig lassen.

Analysen.

1. Von A gaben 0·2577 Grm. bei 100° getrockneter Substanz 0·4395 Grm. Kohlensäure und 0·1072 Grm. Wasser.
2. 0·2425 Grm. derselben Substanz lieferten mit Natronkalk verbrannt Ammoniak, welches 10·6 CC. Säure (1 CC. = 0·0721 N) neutralisirte.
3. Von B gaben 0·2559 Grm. bei 100° C. getrocknet 0·4389 Grm. Kohlensäure und 0·1059 Grm. Wasser.
4. Von derselben Substanz neutralisirten 0·1914 Grm. verbrannt 14·9 CC. Säure (1 CC. = 0·00388 Grm. N).

	Theobromin $C_7H_8N_4O_3$ berechnet	Gefunden 1.	2.	3.	4.
C	46·67	46·54	—	46·78	—
H	4·44	4·61	—	4·61	—
N	31·11	—	31·51	—	30·19
O	17·78	—	—	—	—

Dieses käufliche Theobromin war daher vorzüglich rein. Es wurde in kleinen Portionen in derselben Weise wie das Caffeïn mit der Chromsäuremischung oxydirt. Die Oxydation erfolgt bedeutend langsamer, daher das Kochen längere Zeit als bei Caffeïn fortgesetzt werden muss. Kocht man dabei am Rückflusskühler, so beobachtet man im Kühlrohr zarte krystallinische Krusten einer flüchtigen Substanz, welche aber nicht identisch mit der im Folgenden zu beschreibenden Methylparabansäure ist. Folgendes Verhältniss gab ein befriedigendes Resultat:

6·5 Grm. Theobromin wurden mit 12 Grm. Kaliumbichromat 14 Grm. concentrirter Schwefelsäure und $^1/_4$ Liter Wasser 16—20 Stunden gekocht. Nach dieser Zeit scheidet sich beim Erkalten eine kleine Menge eines weissen Pulvers ab, das unangegriffenes Theobromin zu sein scheint. Eine Krystallhaut schwimmt oben nicht wie bei Caffeïn, schüttelt man aber die grüne Flüssigkeit mit erneuertem Aether und destillirt den Aether ab, so bleibt eine schneeweisse Krystallmasse, die sich in Wasser löst, und daraus in wasserklaren Prismen bis auf den letzten Tropfen auskrystallisirt.

Diese Substanz ist die dem Cholestrophan homologe Monomethylparabansäure.

Monomethylparabansäure.

Bevor wir hierüber unsere Angaben machen, sei kurz des bisher bekannten Auftretens der Monomethylparabansäure gedacht.

Dessaignes[1] erhielt aus Kreatinin einen Körper $C_4H_4N_2O_3$ den er nicht weiter untersuchte und der namenlos blieb, bis Strecker[2] dessen Beziehungen zu der einfachen Parabansäure hervorhob. Neuestens hat H. B. Hill[3] durch Oxydation seiner Methylharnsäure mit Salpetersäure von 1·30 Sp. G. Methylparabansäure erhalten, und einige Eigenschaften derselben angegeben.

Analysen.

1. 0.2072 Grm. gaben 0·2858 Grm. Kohlensäure und 0·0695 Grm. Wasser.

---

[1] Liebig's Ann. 97, 343.

[2] Dasselbe 118, 164.

[3] Ber. chem. Ges. 9, 1093.

2. 0·3302 Grm. gaben mit Natronkalk verbrannt 0·06674 Grm. Stickstoff als Ammoniak.

	Monomethylparabansäure $C_4H_4N_2O_3$	Gefunden 1.	Gefunden 2.
C	37·50	37·59	—
H	3·12	3·23	—
N	21·87	—	20·21
O	—	—	—

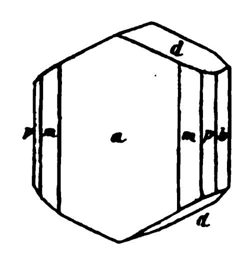
Die Säure ist in heissem Wasser leicht löslich, krystallisirt daraus beim Abkühlen, und verflüchtigt sich mit Wasserdämpfen nicht. Den Schmelzpunkt fanden wir bei 148°, den Erstarrungspunkt bei 101° C. Hill gibt als Schmelzpunkt 149·5° C. an.

Die Substanz sublimirt bei geringer Erwärmung ohne jede Verkohlung.

Einige der grossen Krystalle haben wir Herrn Prof. Rumpf gegeben, da sie sich aber für krystallographische Messungen wegen der matten Flächen wenig geeignet erwiesen, wurden diese nochmals umkrystallisirt, dabei jedoch wegen der geringen Menge an Material nur glasglänzende Nadeln erhalten.

Über die zuerst erhaltenen dickeren Säulen hatte Prof. Rumpf die Güte folgende Mittheilung zu machen, die sich aber nur auf die Beobachtungen an einem Individuum bezieht.

Fig. 1.



„Die Krystalle zeigen die beistehende Form. Sie gehören wahrscheinlich dem rhombischen Systeme an, entwickeln in der Säulenzone zwei Prismen *m* und *p*, und die beiden Pinakoide *a* und *b*; als Abgrenzung erscheint ein Brachydoma *d*. Es ist weiters eine Spaltbarkeit nach dem Brachypinakoid *b* constatirt, ferner, dass die I. optische Mittellinie mit der Zonenachse zusammenfällt, und dass die Ebene der optischen Achsen entweder in dem makrodiagonalen oder brachydiagonalen Hauptschnitte liegt."

Die Monomethylparabansäure zeigt gegenüber Alkalien und Barytwasser dasselbe Verhalten wie Cholestrophan, d. h. Abscheidung von Oxalat und Bildung eines Harnstoffes. Die Zer-

setzung findet gleichfalls schon bei gelindem oder ohne Erwärmen statt und verläuft quantitativ, wie der folgende Titrirversuch beweist, der die für die Gleichung

$$CO\begin{matrix}\diagup NH-CO \\ \\ \diagdown NCH_3\cdot CO\end{matrix} + \begin{matrix}NaOH \\ \\ NaOH\end{matrix} = CO\begin{matrix}\diagup NH_2 \\ \\ \diagdown NCH_3\cdot H\end{matrix} + \begin{matrix}COONa \\ | \\ COONa\end{matrix}$$

Methylparabansäure — Methylharnstoff — Natriumoxalat

erforderliche Zahl liefert.

0·2535 Grm. reiner Prismen wurden in 20 CC. titrirter Natronlauge (wovon 10 CC. = 0·0859 Grm. Na_2O) gelöst, fünf Minuten gelinde erwärmt und zurücktitrirt, wobei 14·4 CC. Lauge (= 0·12377 Grm. Na_2O) sich durch die abgespaltene Säure verbraucht zeigten oder in Prozenten:

Nach obiger Gleichung berechnet	Verbraucht
Na_2O.... 48·44%	Na_2O.... 48·82%

Die Ausbeute aus dem Theobromin ist beträchtlich, und mindestens ebenso gross, als die an Dimethylparabansäure aus Caffeïn.

Aus 2 Grm. Theobromin wurden 0·778 Grm. rohe Monomethylparabansäure = 38·9% erhalten.

Wir sind also bisher dahin gekommen, zu zeigen, dass aus Caffein die dimethylirte, aus Theobromin die einfach methylirte Parabansäure bei der Oxydation sich bilden. Da sich die Homologie der beiden Pflanzenstoffe in den bisher beschriebenen Oxydationsproducten wieder findet:

Theobromin...	$C_7H_8N_4O_2$	Methylparabansäure...	$C_4H_4N_2O_3$
Caffeïn.......	$C_8H_{10}N_4O_2$	Dimethylparabansäure.	$C_5H_6N_2O_3$

respective das Methyl, um welches das Caffeïn mehr enthält bereits untergebracht ist, so ist zu erwarten, dass der Rest der Basen von C_3 und N_2 auch bei beiden in derselben Form auftritt. Darüber werden wir nächstens Bericht erstatten.

Graz, im Jänner 1881.

Über gebromte Propionsäuren und Acrylsäuren.

Von Dr. Julius Mauthner und Dr. Wilhelm Suida.

(Mit 3 Holzschnitten.)

(Aus dem Laboratorium des Professors E. Ludwig.)

Zum Studium der bromirten Propionsäuren und Acrylsäuren führte uns das Bestreben, in den Besitz einer vierfach gebromten Propionsäure zu gelangen, die den Ausgangspunkt für synthetische Versuche bilden sollte. Die Eigenschaften und Zersetzungen der bei dieser Gelegenheit von uns studirten Verbindungen boten so viel Neues dar, dass wir es für geeignet halten, die gewonnenen Erfahrungen mitzutheilen.

Es war von vorneherein wahrscheinlich, dass man zu einer Tetrabrompropionsäure gelangen würde, wenn man von einer Monobromacrylsäure ausgehend, durch Anlagerung von Brom und Abspaltung von Bromwasserstoff eine Bibromacrylsäure darstellen und an diese neuerlich Brom anlagern würde. War die Tetrabrompropionsäure einmal gewonnen, so lag der Versuch nahe, auch sie durch Bromwasserstoff-Entziehung in eine Acrylsäure überzuführen.

Tribrompropionsäure.

Als Ausgangsmaterial für unsere Versuche diente uns, wie Münder und Tollens[1] bei der Darstellung ihrer β-Bibrompropionsäure der durch die Einwirkung von Brom auf Allylalkohol entstehende Bibrompropylalkohol. Wir stellten uns diesen dar, indem wir den Allylalkohol mit ungefähr dem doppelten Volumen Eisessig verdünnten und zu der Flüssigkeit Brom zutropfen liessen, so lange dieses aufgenommen wurde; durch

[1] Ann. 167. 222.

Eingiessen in Wasser wurde der gebromte Propylalkohol abgeschieden, mit etwas verdünnter Kalilauge oder schwefeliger Säure von überschüssigem Brom befreit, und von der wässerigen Flüssigkeit durch den Scheidetrichter getrennt. Wir erzielten auf diesem Wege eine wesentlich reichere Ausbeute, als sie Münder und Tollens bei ihrem Verfahren erhalten haben; unsere Ausbeute war fast quantitativ.

Der Bibrompropylalkohol wurde genau nach der Vorschrift von Wagner und Tollens[1] durch Salpetersäure in die entsprechende Bibrompropionsäure übergeführt. Aus dieser wurde nach der Angabe von Philippi und Tollens[2] Monobromacrylsäure dargestellt, die nun das Material für unsere weiteren Versuche zu bilden hatte.

Zur Überführung dieser Monobromacrylsäure in Tribrompropionsäure fanden wir das folgende Verfahren als das vortheilhafteste: Je 20 Grm. Monobromacrylsäure wurden in einen Kochkolben gebracht, und die berechnete Menge Brom auf einmal hinzugefügt. Unter merklicher Abkühlung lösen sich die Krystalle anfangs, ohne dass man eine kräftigere Einwirkung gewahr würde. Nach 5—10 Minuten tritt plötzlich eine heftige Reaction ein, die Flüssigkeit geräth ins Sieden und die dunkle Farbe des Broms weicht einem helleren Rothgelb. Die Geschwindigkeit des Eintrittes der Reaction ist verschieden; bei Verwendung roher Monobromacrylsäure, wie sie einfach durch Abscheidung aus ihrem Kaliumsalze erhalten wurde, trat die Reaction früher ein, als wenn eine reinere Säure zur Verwendung kam. Bringt man die heisse Flüssigkeit nach Beendigung der Reaction zur Entfernung überschüssig zugesetzten Broms in eine Abdampfschale, so erstarrt häufig ein Theil schon während des Ausgiessens, im Kolben beibt an den Wänden ein prächtig wawellitartig krystallisirter Überzug zurück. Die in der Abdampfschale nach dem Verjagen des Broms zurückbleibende Flüssigkeit erstarrt nach dem Abkühlen zu einem schwach gelb gefärbten harten Krystallkuchen, der in Spuren ein flüchtiges, die Schleimhäute der Augen und Nase auf das heftigste angreifendes Product einschliesst.

---

[1] Ann. 171. 341 Anm.

[2] Ber. d. d. chem. Ges. 1873, 512.

Beim Absaugen auf porösen Platten verliert sich der stechende Geruch sowie die gelbe Farbe und zurück bleibt ein fast farbloses Krystallmehl. Dieses wurde aus Petroleumäther einmal umkrystallisirt, und daraus in der Form langer farbloser Prismen die reine Tribrompropionsäure erhalten.

Diese Säure schmilzt unter Wasser zu einem farblosen Öl, das sich in erheblicher Menge löst. Äther, Alkohol, Benzol und Schwefelkohlenstoff lösen die Säure mit grosser Leichtigkeit auf, warme concentrirte Schwefelsäure löst sie ebenfalls ohne Veränderung, und lässt sie beim Erkalten in Nadeln ausfallen. Aus Schwefelkohlenstoff wurden Krystalle erhalten, die messbar waren. Herr Dr. Friedrich Becke war so freundlich, die Messungen vorzunehmen, und wir verdanken ihm die folgende Mittheilung:

Tribrompropionsäure.

Krystallsystem: monoklin.

Elemente: $a:b:c = 1\cdot8360:1:0\cdot3151$.

$\beta = 66°\ 0'$

Beobachtete Formen: *a*(100) *b*(010) *c*(001) *d*($\bar{1}$01) *m*(110) Vergl. Fig. 1.

Die Krystalle aus Schwefelkohlenstoff sind tafelförmig nach *a*.

Die Krystalle aus Petroleumäther sind nach der Queraxe gestreckt.

	Gemessen		Gerechnet	
am	61°	32′	61°	25·5′
bm	28	5	28	34·5
ad	78	52	78	52
ac	65	58	66	0
	114	22	114	0
cd.....	34	50	35	8
mc	78	13	78	47
	101	10	101	13
dm....	85	27	84	42

Fig. 1.

Die Krystalle zeigen durch *a* und *c* gesehen gerade Auslöschung. Die Auslöschungsschiefe auf *b* beträgt 28° mit der Vertikalaxe im stumpfen Winkel β.

Die Axenebene steht senkrecht zur Symmetrieebene.

Durch die Fläche c sind die optischen Axen gut sichtbar. Der Winkel derselben ist klein. Im Schneider'schen Polarisationsapparat wurde derselbe gemessen mit 29° für Glas vom Brechungsindex 1·509 als Medium.

Die Dispersion der optischen Axen ist stark $\rho > \upsilon$. Die ungefähr normal zu c austretende erste Mittellinie ist positiv.

Vergleicht man die vorliegenden Krystalle mit den bekannten Krystallen der Bibrompropionsäure, so ergeben sich einige Winkelähnlichkeiten. Der von Wagner und Tollens angegebene Winkel von 65—66° erinnert an den Winkel $a\,c$ in unseren Krystallen.

Die von Zepharovich gemessenen Krystalle lassen weniger Ähnlichkeit erkennen. Die Axenschiefe weicht allerdings nur um 5° circa ab. Dagegen ist die optische Orientirung ganz anders.

Die Säure schmilzt genau bei 95° C. und gab bei der Analyse folgende Zahlen:

0·4749 Grm. der über Schwefelsäure im Vacuum getrockneten Säure gaben 0·0538 Grm. Wasser und 0·2079 Grm. Kohlensäure.

0·3114 Grm. der trockenen Säure gaben 0·5496 Grm. Bromsilber und 0·0091 Grm. Silber.

	Berechnet für $C_3H_3Br_3O_2$	Gefunden
C	11·58%	11·93%
H	0·96	1·25
Br	77·17	77·26

Die Verbrennung wurde im Bajonettrohre mit chromsaurem Blei und vorgelegter Silberspirale vorgenommen.

Baryumsalz. Nach mehrfachen Versuchen, ein Salz unserer Tribrompropionsäure darzustellen, ergab sich folgender Weg als der geeignetste. Eine warme alkoholische Lösung der Säure wurde mit kohlensaurem Baryt neutralisirt, nach dem Filtriren erkalten gelassen, wobei sich die Baryumverbindung in büschelförmig gruppirten Nadeln aus der Lösung abschied.

Das Salz enthält Krystallwasser, doch waren wir nicht im Stande eine genaue Bestimmung desselben durchzuführen, da die Krystalle sofort nach dem Abpressen beim Liegen an der Luft zu verwittern beginnen. Wir erhielten bei zwei Versuchen mit

frisch bereiteter Substanz durch Trocknen im Vacuum über Schwefelsäure 9·79% und 9·73% Wasser, während ein anderes Mal, als die Substanz etwas länger gelegen hatte, 7·92% und 7·68% Wasser erhalten wurden. Die Formel:

$$(C_3Br_3H_2O_2)_2Ba + 5H_2O$$

verlangt 10·61%, die Formel:

$$(C_3Br_3H_2O_2)_2Ba + 4H_2O$$

fordert 8·69% Wasser.

Das im Vacuum über Schwefelsäure getrocknete Salz gab bei der Analyse die folgenden Zahlen:

I. 0·4839 Grm. des trockenen Salzes gaben 0·1478 Grm. schwefelsaures Baryum.

II. 0·5769 gaben 0·1761 Grm. schwefelsaures Baryum.

III. 0·5081 Grm. gaben 0·7538 Grm. Bromsilber.

	Berechnet für $(C_3Br_3H_2O_2)_2Ba$	Gefunden I	II	III
Ba	18·10%	17·96	17·95	—
Br	63·41	—	—	63·13

In der Literatur finden sich zwei Angaben über Tribrompropionsäure. Linnemann und Penl[1] geben an, bei der Oxydation des Acroleïnbromids durch Salpetersäure, wenn von letzterer ein Überschuss vorhanden war, neben viel Oxalsäure eine aus kochendem Benzol umkrystallisirbare, bei 93° C. schmelzende „Tribrompropionsäure“ erhalten zu haben. Bei dem geringen Unterschiede der Schmelzpunkte dieser letzteren und unserer Tribrompropionsäure wäre es möglich, dass beide identisch sind. Etwas Genaueres darüber auszusagen sind wir desshalb nicht im Stande, weil Linnemann und Penl ihre Säure nicht weiter beschreiben. Ebensowenig können wir sagen, ob unsere Säure mit einer bei 92° C. schmelzenden Tribrompropionsäure identisch ist oder nicht, welche von Michael und Norton[2] aus α-Monobromacrylsäure durch Einwirkung von Brom in Schwefelkohlenstofflösung erhalten wurde.

---

[1] Ber. d. d. chem. Ges. 1875, 1097.

[2] American. chem. Journal 2. 18. Wir citiren hier nach dem soeben erschienenen 2. Heft von Beilstein's Handbuch der organischen Chemie pag. 275, da uns die Originalabhandlung nicht zugänglich war.

Zersetzung der Tribrompropionsäure. Das Studium der Salze dieser und der später zu beschreibenden Säuren führte uns zur Beobachtung einer interessanten Zersetzungsweise dieser Säuren, die geeignet ist, auf ihre Constitution einiges Licht zu werfen. Kocht man eine wässerige Lösung von tribrompropionsaurem Baryum, so bemerkt man nach einiger Zeit das Auftreten von weissen Dämpfen über der Flüssigkeit und eines an Phosphoroxychlorid erinnernden Geruches, die Flüssigkeit enthält dann reichliche Mengen von Brombaryum.

Als wir nun eine wässerige Lösung des tribrompropionsauren Baryums im zugeschmolzenen Glasrohre während einiger Stunden auf 130° C. erhitzten, fanden wir beim Öffnen des Rohres, dem reichlich Kohlensäure entströmte, unter der wässerigen Flüssigkeit ein Öl angesammelt, das getrennt, getrocknet und der Destillation unterworfen wurde. Fast die ganze Flüssigkeit ging zwischen 88 und 89·5° C. über.

Das Destillat zeigte einen an Phosphoroxychlorid erinnernden Geruch und fing nach ganz kurzer Zeit an, sich zu trüben, und in erheblicher Menge einen weissen festen Körper abzuscheiden. Die Analyse des möglichst rasch aufgesammelten Öles gab folgende Zahlen:

0·2602 Grm. gaben 0·5277 Grm. Bromsilber.

	Berechnet für $C_2H_2Br_2$	Gefunden
Br	86·02%	86·30%

Die Analyse sowie die Eigenschaften dieses Oeles lassen es als unzweifelhaft erscheinen, dass wir es hier mit dem unsymmetrischen Bibromaethylen zu thun haben, dessen Constitution durch die Arbeiten von Anschütz[1] und Demole[2] aufgeklärt ist. In einfachster Form lässt sich die beobachtete Zersetzung des tribrompropionsauren Baryums durch folgende Gleichung ausdrücken:

$$(C_3Br_3H_2O_2)_2Ba = 2CO_2 + Ba\,Br_2 + 2C_2H_2Br_2.$$

---

[1] Ber. d. d. chem. Ges. 1879, 2073.

[2] Ber. d. d. chem. Ges. 1879, 2245.

Bibromacrylsäure.

Ganz in derselben Weise wie bei der Darstellung der Monobromacrylsäure aus Bibrompropionsäure verfuhren wir bei der Darstellung der Bibromacrylsäure aus Tribrompropionsäure. Es wurden Portionen von je 30 Grm. der letzteren mit der berechneten Menge Kalihydrat in alkoholischer Lösung auf dem Wasserbade einmal aufgekocht, rasch abgekühlt und das herausfallende Salzgemenge abgesaugt. Durch Lösen der Krystallmasse in Wasser, Ansäuern mit Schwefelsäure und Ausschütteln mit Äther wurde die Bibromacrylsäure abgeschieden. Das alkoholische Filtrat lieferte bei der gleichen Behandlung ebenfalls eine kleine Menge minder reiner Säure.

Die rohe Säure wurde nach dem Absaugen auf porösen Platten aus Petroleumäther umkrystallisirt. Dieses Lösungsmittel nimmt reichlichere Mengen dieser Säure auf, als von der Tribrompropionsäure, und liefert sie in farblosen warzigen Krystalldrusen. Es gelang uns bei mehrfachen Versuchen nicht, die Säure in messbaren Krystallen zu erhalten.

Die Säure löst sich leicht in den gebräuchlichen Lösungsmitteln, unter Wasser, das von ihr nicht allzuviel aufnimmt, schmilzt sie zu einem farblosen Öl; in warmer concentrirter Schwefelsäure löst sie sich unverändert, um sich beim Erkalten wieder in Nadeln abzuscheiden.

Der Schmelzpunkt der Säure liegt bei 85° C.

Bei der Analyse wurden folgende Werthe gefunden:

0·3645 Grm. der über Schwefelsäure im Vacuum getrockneten Säure gaben 0·04 Grm. Wasser und 0·2125 Grm. Kohlensäure.

0·3848 Grm. der trockenen Säure gaben 0·6056 Grm. Bromsilber und 0·0138 Grm. Silber.

	Berechnet für $C_3H_2Br_2O_2$	Gefunden
C	15·65%	15·89%
H	0·87	1·21
Br	6 ·57	69·62

Diese Säure ist zweifellos indentisch mit einer von Jackson und Hill[1] nach ihrer Angabe bei 83—84° C. schmelzenden Bibromacrylsäure, die sie beim Eintragen von Mucobromsäure in Ätzbaryt erhalten haben, indem die Eigenschaften des Blei- und Silbersalzes sowie die bei der Zersetzung durch Ätzbaryt auftretenden Producte vollkommen übereinstimmen.

Bleisalz. Eine wässerige Lösung der Säure mit Bleicarbonat gekocht lieferte nach dem Abfiltriren und Erkalten farblose Krystallblättchen die kein Krystallwasser enthielten, und bei der Analyse folgende Zahlen gaben:

0·2382 Grm. des im Vacuum über Schwefelsäure getrockneten Salzes gaben 0·1076 Grm. schwefelsaures Blei.

	Berechnet	Gefunden
Pb	31·13%	30·86%

Silbersalz. Dasselbe bildet seidenglänzende lange Nadeln, und gab bei der Analyse folgende Werthe:

0·1635 Grm. des getrockneten Salzes gaben 0·0519 Grm. Silber.

	Berechnet	Gefunden
Ag	32·05%	31·74%

Jackson und Hill fanden, dass ihre Bibromacrylsäure durch Kochen mit Ätzbaryt neben Monobromacetylen und kohlensaurem Baryt reichliche Mengen von Malonsäure liefere, wir mussten also zur Feststellung der Identität ihrer Säure mit der unserigen gleichfalls die Einwirkung von Ätzbaryt studiren.

In der That lieferte unsere Bibromacrylsäure bei der gleichen Behandlung reichliche Mengen von Malonsäure. Nach dem Kochen mit Barytwasser wurde mit Salzsäure angesäuert, zur Trockene verdampft und aus dem Rückstand durch Extraction mit Äther die Malonsäure gewonnen. Einmaliges Umkrystallisiren unter Zusatz von etwas Thierkohle genügte, um die Säure im Vacuum in grossen Krystallen anschiessen zu sehen. Diese letzteren schmolzen bei 130—131° C. und gaben bei der Analyse folgende Zahlen:

[1] Ber. d. d. chem. Ges. 1878, 1671.

0·2952 Grm. der bei 100° C. getrockneten Säure gaben 0·1024 Grm. Wasser und 0·3716 Grm. Kohlensäure.

	Berechnet für $C_3H_4O_4$	Gefunden
C	34·61%	34·33%
H	3·85	3·86

Zum Überflusse wurde durch Neutralisiren der Säure mit Ammoniak und Fällen mit Silbernitrat das Silbersalz dargestellt, das unter dem Miskroskope die „zerfressenen Prismen" (Baeyer) des malonsauren Silbers zeigte.

0·3414 Grm. des im Vacuum über Schwefelsäure getrockneten Salzes gaben 0·2923 Grm. Chlorsilber und 0·0105 Grm. Silber.

	Berechnet	Gefunden
Ag	67·92%	67·51%

Wir wollen gleich hier erwähnen, dass Wallach und Hunäus[1] aus Chloralid eine Dichloracrylsäure erhalten haben, die ebenfalls leicht in Malonsäure überzuführen war.

Zersetzung der Bibromacrylsäure.

Jackson und Hill[2] haben gefunden, dass die Bibromacrylsäure beim Kochen mit Ätzbarytlösung Monobromacetylen entwickelt. Es wäre von grösstem Interesse gewesen, wie aus der Tribrompropionsäure auch aus der Bibromacrylsäure das unsymmetrische Bibromaethylen, also eine Vorstufe des Monobromacetylens zu erhalten. Dies schien aber um so schwieriger, als Jackson und Hill angeben, aus Mucobromsäure ausser Bibromacrylsäure noch eine Säure erhalten zu haben, die höchstwahrscheinlich als Brompropiolsäure aufzufassen ist, dass also die Bromwasserstoffabspaltung aus der Bibromacrylsäure der Kohlensäureabspaltung und Bildung von Bromacetylen vorhergeht.

Unsere Versuche lehrten uns, dass das Bibromaethylen aus Bibromacrylsäure erhalten werden könne, wenn auch viel

---

[1] Ber. d. d. chem. Ges. 1877, 569.

[2] L. c.

schwieriger als aus der Tribrompropionsäure und mit allerdings sehr geringer Ausbeute.

Versuche, durch Erhitzen der wässerigen Lösung des bibromacrylsauren Baryums bis auf 200° C. das Bibromaethylen zu erhalten, schlugen fehl. Die Röhren öffneten sich unter starkem Druck, und das entströmende Gas bestand aus Kohlensäure und Monobromacetylen. Das Gas in Barytlösung geleitet erzeugte kohlensauren Baryt, und gab in ammoniakalischer Silberlösung einen äusserst explosiven Niederschlag.

Die Zersetzung war also ganz analog der von Wallach[1] beobachteten Spaltung der Dichloracrylsäure aus Chloralid verlaufen.

Kein besseres Resultat lieferte die trockene Destillation des Baryumsalzes.

Als wir dann die Bibromacrylsäure bloss mit Wasser auf 180° während mehrerer Stunden erhitzten, erhielten wir eine geringe Menge eines zwischen 85° und 90° C. übergehenden Öles, das den Geruch das Bibromaethylens sowie die Eigenschaft zeigte, sich rasch zu polymerisiren.

Eine Brombestimmung, deren Resultat einiges zu wünschen übrig lässt, wollen wir nicht unterlassen hier anzuführen, da sie immerhin geeignet ist, zur Feststellung der Identität beizutragen.

0·1394 Grm. des Öles gaben 0·2776 Grm. Bromsilber.

	Berechnet für $C_2H_2Br_2$	Gefunden
Br	86·02%	84·74%

Wie wir später zeigen werden, verhält sich die Tribromacrylsäure in Bezug auf ihre Zersetzlichkeit zur Tetrabrompropionsäure ganz ähnlich, wie die Bibromacrylsäure zur Tribrompropionsäure.

Tetrabrompropionsäure.

Die Bibromacrylsäure besitzt nicht mehr die Fähigkeit, schon in der Kälte Brom aufzunehmen. Will man, von ihr ausgehend, zu einer Tetrabrompropionsäure gelangen, so muss man das Brom in der Wärme einwirken lassen, in ähnlicher Weise wie dies bei

[1] Ann. 203. 94.

der Darstellung der höher bromirten Buttersäuren aus den entsprechenden Crotonsäuren der Fall ist.[1] Erwähnen wollen wir, dass es Wallach und Hunäus[2] nicht gelang, an ihre aus Chloralid erhaltene Bichloracrylsäure, selbst in der Wärme, Brom zu addiren.

Die Anlagerung von Brom an die Bibromacrylsäure gelingt am besten, wenn man diese letztere mit der berechneten Menge Brom allein in einem zugeschmolzenen Rohre einige Stunden der Temperatur von 100° aussetzt. Nach dem Erkalten findet man das Brom verschwunden, und die Tetrabrompropionsäure in Form einer schwach gefärbten, harten Krystallmasse ausgeschieden. Nachdem man etwas überschüssiges Brom auf dem Wasserbade verjagt und die Säure aus Petroleumäther umkrystallisirt hat, erhält man sie in Form farbloser Täfelchen, die bei 125·5—126° C. schmelzen, nachdem sie schon bei 110° angefangen hatten zu erweichen.

Lösungsmitteln gegenüber verhält sie sich ganz ähnlich, wie die beiden vorher beschriebenen Säuren, unter Wasser schmilzt auch sie zu einem Öl, und ist gegen concentrirte Schwefelsäure ebenso widerstandsfähig. Beim Erhitzen zersetzt sie sich unter Bromentwickelung.

0·4830 Grm. der im Vacuum über Schwefelsäure getrockneten Substanz gaben 0·1670 Grm. Kohlensäure und 0·0359 Grm. Wasser; 0·3100 Grm. gaben 0·5784 Grm. Bromsilber und 0·0139 Grm. Silber.

	Berechnet für $C_3H_2Br_4O_2$	Gefunden
C	9·23	9·43
H	0·51	0·82
Br	82·05	82·67

Es ist uns bis jetzt nicht gelungen, Salze dieser Säure darzustellen, da sich diese sehr leicht, insbesondere bei Gegenwart von Wasser und Basen in ähnlicher Weise zersetzt, wie die Tribrompropionsäure bei höherer Temperatur. Als wir eine wässerige Lösung der Säure in der Kälte mit kohlensaurem Baryt neutrali-

[1] Kekulé, Lehrb. II. 283.

[2] Ber. d. d. chem. Ges. 1877, 568.

sirten und das Filtrat einzudampfen versuchten, trat bei ungefähr 70° C. plötzlich eine Trübung ein, und am Boden des Gefässes sammelte sich ein Öl an. Als wir darauf eine kalt bereitete wässerige Lösung des Barytsalzes im Vacuum bei gewöhnlicher Temperatur einzudampfen versuchten, zeigte sich auch hier nach ganz kurzer Zeit der Boden des Gefässes mit Öltröpfchen bedeckt. Ebenso misslang der Versuch, aus der alkoholischen Lösung der Säure durch Neutralisiren mit kohlensaurem Baryt ein krystallisirtes Baryumsalz darzustellen.

Zersetzung der Tetrabrompropionsäure. Die bei den Versuchen, ein krystallisirtes Salz darzustellen, gewonnenen Erfahrungen erleichterten das Studium der Zersetzung der Tetrabrompropionsäure, indem wir einfach die wässerige Lösung der Säure mit kohlensaurem Baryt zu neutralisiren und das Filtrat auf 70—80° zu erwärmen brauchten, um eine vollkommen glatte Zersetzung herbeizuführen. Das auf diese Weise sofort vollkommen farblos gewonnene Öl ging bei der Destillation zwischen 163° und 164° über und erwies sich durch diesen Siedepunkt[1] im Zusammenhalte mit den folgenden Analysen als Tribromaethylen.

I. 0·6163 Grm. gaben 0·2177 Grm. Kohlensäure und 0·0405 Grm. Wasser.

II. 0·3433 Grm. gaben 0·7306 Grm. Bromsilber.

III. 0·1588 Grm. gaben 0·3384 Grm. Bromsilber.

	Berechnet für C_2HBr_3	Gefunden I	II	III
C	9·06	9·63	—	—
H	0·38	0·73	—	—
Br	90·56	—	90·56	90·68

Die Zersetzung verläuft also nach folgender Gleichung:

$$(C_3Br_4HO_2)_2Ba = BaBr_2 + 2CO_2 + 2\,C_2Br_3H.$$

Tribromacrylsäure.

Bei der leichten Zersetzlichkeit der Tetrabrompropionsäure ist es begreiflich, dass die Bromwasserstoffabspaltung und die Bildung einer Tribromacrylsäure nicht ohne bedeutende Verluste

[1] S. Demole Ber. d. d. chem. Ges. 1878, 318.

bewerkstelligt werden konnte. Wiewohl wir immer die genau berechnete Menge alkoholischen Kalis zur Abspaltung des Bromwasserstoffes verwendeten und die Temperatur von 60° C. nicht überschritten, so reagirte die Flüssigkeit doch stets sauer und liess auf Zusatz von Wasser immer etwas Öl fallen. Durch möglichst genaues Neutralisiren mit Kali und Schütteln der wässerigalkoholischen Flüssigkeit mit Äther wurde das Öl entfernt und dann nach dem Ansäuern mit verdünnter Schwefelsäure durch neuerliches Ausschütteln mit Äther die Perbromacrylsäure gewonnen. Diese stellt nach den Verjagen des Äthers und einigem Verweilen auf dem Wasserbade eine wawellitartig aussehende dichte Krystallmasse dar. Sie konnte durch Umkrystallisiren aus Petroleumäther gereinigt, und in der Form messbarer Krystalle gewonnen werden. Der Freundlichkeit des Herrn Dr. Friedrich Becke verdanken wir folgende Mittheilung über die Krystalle.

Die Krystalle sind stark verzogen; die auftretende Combination ist eine andere als bei den später zu beschreibenden Krystallen.[1] Es treten nämlich in der Prismenzone zwei neue Flächen auf: *m* (210) und *n* (2$\bar{1}$0). Die Pyramidenflächen treten mehr zurück, und die kurze Säule wird durch eine rauhe, nur schlecht messbare schiefe Endfläche *c* (001) geschlossen. Vergl. Fig. 2.

Die gemessenen Winkel stimmen erträglich mit der Rechnung auf Grund der pag. 14 mitgetheilten Elemente:

	Gemessen		Gerechnet	
b.l	44°	22′	44°	11′
l.n	18	1	17	59
m.n	54	24	54	27
m r	18	43	18	42
m.c ...	65	38	65	57
n.c	65	11	65	16
r.c	70	15?	71	56

Fig. 2.

Die Flächen *b*, *l* und *r* sind äusserst schmal und schlecht messbar.

Die Säure schmilzt bei 117° C., löst sich wie die früher erwähnten Säuren in den üblichen Lösungsmitteln auf, und verhält

[1] S. pag. 14.

sich ebenso wie diese gegen Wasser und concentrirte Schwefelsäure.

Die Verbrennung dieser Säure bot bei der Anwendung von chromsaurem Blei und einer vorgelegten Silberspirale insoferne Schwierigkeiten, als die Resultate, wie dies bei ähnlichen Substanzen vielfach beobachtet ist, zu hoch ausfielen.

I. 0·4229 Grm. der bei 100° getrockneten Säure gaben 0·1896 Grm. Kohlensäure und 0·0323 Grm. Wasser.

II. 0·4998 Grm. der im Vacuum über Schwefelsäure getrockneten Substanz gaben 0·2306 Grm. Kohlensäure und 0·0371 Grm. Wasser.

III. 0·2924 Grm. der trockenen Säure gaben 0·5383 Grm. Bromsilber.

IV. 0·2370 Grm. Substanz gaben 0·4351 Grm. Bromsilber.

	Berechnet für $C_3HBr_3O_2$	Gefunden			
		I	II	III	IV
C	11·65%	12·23	12·58	—	—
H	0·32	0·85	0·82	—	—
Br	77·67	—	—	78·34	78·12

Genau dieselbe Säure erhielten wir bei den ersten Versuchen, aus der Tribrompropionsäure durch Bromwasserstoffabspaltung und Bromanlagerung zur Tetrabrompropionsäure zu gelangen. Sowohl die Zusammensetzung als das Krystallsystem und der Schmelzpunkt des damals erhaltenen Productes waren genau gleich den für die Tribromacrylsäure ermittelten. Der Schmelzpunkt lag ebenfalls bei 117° C. Herr Dr. F. Becke theilte uns damals über die Krystalle das Folgende mit:

Tribromacrylsäure

zuerst erhaltene Krystalle.

Krystallsystem: triklin.

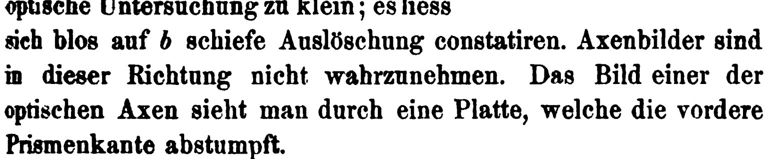
Elemente: $\alpha = 89°\ 13'$; $\beta = 62°\ 26 \cdot 4'$; $\gamma = 91°\ 14'$
$A = 89°\ 16'$; $B = 62°\ 27 \cdot 6'$; $C = 90°\ 30 \cdot 6'$
$a : b : c = 1 \cdot 1279 : 1 : 1 \cdot 1496$.

Beobachtete Flächen:

b (010); r (110); l ($1\bar{1}0$); o ($\bar{1}11$); u ($\bar{1}\bar{1}1$). Vergl. Fig. 3.

	Gemessene Winkel	Berechnete Winkel
br	44° 42′	44° 41′
bl	44 13	44 11
rl	91 11	91 8
bu	47 19	47 19
bo	48 10	48 10
ru	45 19	45 45
lo	46 29	45 58
ou	84 55	84 31

Fig. 3.



Die Krystalle haben monoklinen Habitus, indem die Pyramiden *o* und *u* ferner die Prismenflächen *r* und *l* in der Regel gleich stark ausgebildet sind

Leider sind die Krystalle für optische Untersuchung zu klein; es liess sich blos auf *b* schiefe Auslöschung constatiren. Axenbilder sind in dieser Richtung nicht wahrzunehmen. Das Bild einer der optischen Axen sieht man durch eine Platte, welche die vordere Prismenkante abstumpft.

Eine Brombestimmung gab folgende Werthe:

0·3019 Grm. der trockenen Substanz gaben 0·5329 Grm. Bromsilber und 0·0124 Grm. Silber.

	Berechnet für $C_3Br_3HO_2$	Gefunden
Br	77·67%	78·16%

Diese auffallende Erscheinung findet darin ihre Erklärung, dass irrthümlicher Weise eine zu grosse Kalimenge bei der Abspaltung von Bromwasserstoff aus der Tribrompropionsäure verwendet wurde, so dass sich offenbar eine Brompropiolsäure gebildet hat, welche dann durch Bromanlagerung in Tribromacrylsäure überging.

Baryumsalz. Durch Neutralisiren der alkokolischen Lösung der Tribromacrylsäure mit kohlensaurem Baryt in der Kochhitze, Filtriren und Erkaltenlassen wurde das Baryumsalz in Form von verfilzten seidenglänzenden Nadeln erhalten.

Dasselbe enthält 5 Moleküle Krystallwasser, welches bei 80—85° C. weggeht.

I. 0·3497 Grm. des im Exsiccator getrockneten Salzes gaben beim Trocknen bei 85° C. 0·0365 Grm. Gewichtsverlust.

II. 0·3805 Grm. des im Exsiccator getrockneten Salzes gaben 0·1035 Grm. schwefelsauren Baryt.

III. 0·3721 Grm. desselben Salzes gaben 0·1015 Grm. schwefelsauren Baryt.

	Berechnet für $(C_3Br_3O_2)_2Ba+5H_2O$	Gefunden I	II	III
H_2O	10·67%	10·43	—	—
Ba	16·25	—	15·99	16·04

Calciumsalz. Dieses Salz wurde in der gleichen Weise wie das vorhergehende erhalten, und bildet lebhaft seidenglänzende verfilzte Nadeln.

Das Salz enthält 3 Moleküle Krystallwasser, das es bei 80° C. verliert.

0·2058 Grm. des lufttrockenen Salzes gaben beim Trocknen bei 80° C. 0·0168 Grm. Gewichtsverlust.

0·1470 Grm. desselben Salzes gaben 0·0273 Grm. schwefelsauren Kalk.

	Berechnet für $(C_3Br_3O_2)_2Ca+3H_2O$	Gefunden
H_2O	7·61	8·16
Ca	5·63	5.46

0·1881 Grm. des bei 80° C. getrockneten Salzes gaben 0·0383 Grm. schwefelsauren Kalk.

	Berechnet	Gefunden
Ca	6·09	5·99

Zersetzung der Tribromacrylsäure. Wie schon früher bei der Bibromacrylsäure erwähnt, tritt die Kohlensäureabspaltung bei der Tribromacrylsäure bedeutend schwerer ein, als bei der Tetrabrompropionsäure, aus der sie hervorgegangen ist. Bei alledem geht die Zersetzung des tribromacrylsauren Baryums viel glatter in der vorausgesetzten Weise vor sich, als dies bei der Bibromacrylsäure der Fall ist. Die wässerige Lösung des Baryumsalzes im zugeschlossenen Rohre auf 115—120° C. erhitzt, lieferte nebst

reichlicher Menge von Kohlensäure ein Öl, welches zwischen 163 und 165° C. überdestillirte, und das sich der folgenden Brombestimmung zufolge wieder als Tribromaethylen erwies.

0·2379 Grm. gaben 0·5106 Grm. Bromsilber.

	Berechnet	Gefunden
Br	90·56%	91·33%

Die Zersetzung lässt sich durch folgende Gleichung ausdrücken:

$$(C_3Br_3O_2)_2Ba + H_2O = CO_3Ba + CO_2 + 2C_2HBr_3.$$

Versuche, die angestellt wurden, um durch Bromaddition von der Tribromacrylsäure zu einer Perbrompropionsäure zu gelangen, blieben ohne Erfolg. Tribromacrylsäure wurde mit der entsprechenden Menge Brom successive bis 200° C. im geschlossenen Rohre erhitzt, ohne dass eine Aufnahme von Brom erfolgt wäre. Das Product zeigte den Schmelzpunkt und den Bromgehalt der Tribromacrylsäure. Diese Unfähigkeit, Brom aufzunehmen, erinnert an das Verhalten des Hexabromäthans und Hexachloräthans, welche bei höherer Temperatur 1 Molekül Brom, respective Chlor abspalten. Wie wir gesehen haben, nimmt schon die Bibromacrylsäure erst bei 100° 1 Molekül Brom auf und es müsste die Temperatur, bei der sich eine Perbrompropionsäure bilden würde, offenbar höher liegen. Nun spaltet schon die Tetrabrompropionsäure beim Erwärmen sehr leicht Brom ab, um so leichter müsste dies bei einer noch höher bromirten Propionsäure der Fall sein. Aus den angeführten Gründen scheint eine Pentabrompropionsäure nicht existenzfähig zu sein.

Als Nachtrag zu unseren bisherigen Mittheilungen wollen wir hier noch Folgendes anschliessen.

Die stufenweise mit höherem Bromgehalte zunehmende Labilität der gebromten Propion- und Acrylsäuren liess es wünschenswerth erscheinen, auch jene Bibrompropionsäure auf ihre Zersetzlichkeit zu prüfen, die uns als Ausgangsmaterial für

unsere sämmtlichen Versuche gedient hatte, um so mehr, als während unserer Arbeit eine Mittheilung von Wallach[1] erschien, an deren Schluss[2] ein Versuch erwähnt ist, der zeigt, dass β-Monochloracrylsäure keine der Spaltung der Dichloracrylsäure analoge Zersetzung erleidet, wenn dieselbe mit überschüssigem Baryt gekocht wird. Wir erhitzten die von Tollens und seinen Schülern mit β bezeichnete Bibrompropionsäure mit einem Überschusse von Kali in alkoholischer Lösung durch mehrere Stunden. Dabei konnte sich analog der Bildung von Monobromacetylen aus Bibromacrylsäure nach Jackson und Hill und von Monochloracetylen aus Bichloracrylsäure nach Wallach Acetylen bilden. Um letzteres nachweisen zu können, wurde in folgender Weise verfahren:

Das sich aus dem Kochkolben entwickelnde Gas wurde in derselben Weise in ammoniakalischer Silberlösung aufgefangen, wie dies von einem von uns[3] bei der Darstellung des Acetylens aus Jodoform und Quecksilberäthyl geschehen war.

Der in der Silberlösung erhaltene Niederschlag war hellgrau gefärbt, entwickelte beim Übergiessen mit Salzsäure ein brennbares Gas und explodirte heftig beim Erhitzen.

Zur Gewinnung des Gases zersetzten wir den Silberniederschlag ebenso, wie dies in der oben citirten Abhandlung beschrieben ist. Das Gas gab bei der Analyse im Endiometer folgende Resultate:

	Vol.	Druck	Temp.	Red. Vol.[4]
Angewandtes Gas....	88·2	0·1236	12·5	9·51
Nach Zusatz von Sauerstoff.............	344·08	0·3819	12·7	121·97
Nach der Explosion...	324·8	0·3605	13·3	108·13
Nach der Absorption der Kohlensäure ...	290·2	0·3259	14·0	89.967

Auf 1 Vol. berechnet ist:

Contraction...... 1·46

Kohlensäure..... 1·91

---

[1] Zur Kenntniss der Dichloracrylsäure, Ann. 203.

[2] pag. 94.

[3] Suida, Sitzber. d. kais. Akad. II. Abth. Juliheft 1880.

[4] Auf 1 M. Druck und 0° C.

für Acetylen berechnet:

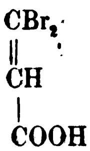
Contraction ...... 1·5
Kohlensäure...... 2·0

Demzufolge gibt die β-Bibrompropionsäure Acetylen, und erleidet somit eine Zersetzung ähnlich der Tribrompropionsäure und Tetrabrompropionsäure, nur mit dem Unterschiede, dass hier bei der Anwendung eines Überschusses von alkoholischem Kali gleich das Endproduct der durch dieses letztere bewirkten Zersetzung auftritt.

Als eine eben so weitgehende Spaltung der Tribrompropionsäure kann jene Reaction betrachtet werden, die aus Bibromacrylsäure (die ja aus Tribrompropionsäure entsteht) das von Jackson und Hill beobachtete Monobromacetylen liefert.

Die gleichweit gehende Zersetzung der Tetrabrompropionsäure müsste ein Bibromacetylen liefern. Da wir jedoch eine Vorstufe dieses noch hypothetischen Körpers in dem Tribromaethylen erhalten haben, und dieses letztere auf anderem Wege leichter zu beschaffen ist, haben wir vorläufig Versuche in dieser Richtung nicht angestellt.

Fragen wir uns nach der Constitution der im Vorigen besprochenen Säuren, so zeigt es sich, dass als günstigster Ausgangspunkt zur Ermittlung derselben die Bibromacrylsäure zu wählen ist. Fassen wir die leichte Umsetzung dieser letzteren in Malonsäure, wie schon Jackson und Hill dies gethan haben, als ein Argument auf, dieser Säure die Constitution



zuzuschreiben, so wird diese Anschauung bestätigt durch die Zersetzung der Bibromacrylsäure in Kohlensäure und das Bibromaethylen, dem zweifellos die Formel:

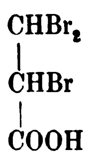
$$\begin{array}{c} CBr_2 \\ \| \\ CH_2 \end{array}$$

zukommt.

Wollte man der Bibromacrylsäure die zweite mögliche Constitutionsformel zuschreiben, so würde die Entstehung der Malonsäure sich nur sehr gezwungen erklären lassen, und man müsste ferner die Bildung des unsymmetrischen Bibromaethylens durch eine Atomwanderung erklären, die in diesem Falle äusserst unwahrscheinlich wird, wenn man die grosse Labilität dieses Körpers ins Auge fasst. Die von Jackson und Hill aus Mucobromsäure, von uns aus Tribrompropionsäure erhaltene Säure ist demnach als β-Bibromacrylsäure zu bezeichnen.

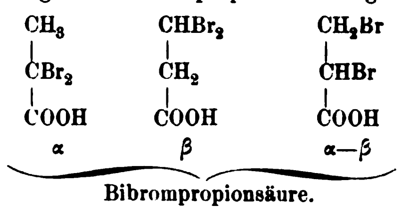
Indem wir die Constitution dieser Säure als feststehend betrachten, sind wir in der Lage, die Constitution jener Säuren zu erschliessen, aus denen sie einerseits hervorgegangen ist, in die sie anderseits übergeführt wurde.

Der von uns dargestellten Tribrompropionsäure kommt, da sie durch Anlagerung von Brom entstanden ist, eine Formel zu, bei der zwei Bromatome an zwei verschiedene Kohlenstoffatome gebunden erscheinen, während das dritte Bromatom jedenfalls die β-Stellung einnimmt. Wir müssen unserer Tribrompropionsäure daher die Formel:



geben und sie als α-β-β-Tribrompropionsäure bezeichnen. [1]

[1] Es ist entschieden nothwendig, die Nomenklatur dieser und analoger Säuren auf das Stricteste durchzuführen, soll sie nicht, statt Aufklärung über die Constitution der Körper zu geben, vielmehr eine Verwirrung der Begriffe herbeiführen. Bezeichnet man mit α die Substitutionsorte an dem mit der Carboxylgruppe direct verbundenen Kohlenstoffatom, und die Substitutionsorte an dem indirect mit der Corboxylgruppe verbundenen Kohlenstoffatom mit β, so ergeben sich z. B. für die drei möglichen Fälle der Zusammensetzung einer Bibrompropionsäure folgende Bezeichnungen:



Der Monobromacrylsäure, die durch Bromanlagerung in unsere Tribrompropionsäure übergeht, kommt daher die Formel zu:



Wagner und Tollens[1] schreiben dieser bei 69—70° schmelzenden Säure dieselbe Formel zu, und bezeichnen sie auch als β-Monobromacrylsäure. Wir gerathen allerdings durch unsere Schlussfolgerung in einen für uns bis jetzt unlösbaren Widerspruch mit einer Angabe von Wallach und Reincke[2], die eine bei 115° schmelzende Monobromacrylsäure durch Reduction von Brommilchsäure-Chloralid erhalten haben, der in Folge ihrer Entstehungsweise ebenfalls die β-Formel zugeschrieben werden muss.

Wallach und Reincke nehmen auf Grund ihrer Versuche an, dass die beiden Monobromacrylsäuren von Tollens identisch seien, eine Anschauung, der wir, wie sich aus dem Vorhergehenden ergibt, nicht beipflichten können, wenn wir auch sagen müssen, dass uns eine Aufklärung dieses Widerspruches heute unmöglich ist.

Die von uns erhaltene Tetrabrompropionsäure entsteht durch Bromanlagerung aus der β-Bibromacrylsäure, ihre Formel ist daher:



Der von Münder und Tollens durch Oxydation des Bibrompropylalkohols erhaltenen Bibrompropionsäure käme daher die Bezeichnung α—β Bibrompropionsäure zu.

[1] Ann. 171. 340.

[2] Ber. d. d. chem. Ges. 1877, 2128.

Für die Tribromacrylsäure ist nur die eine Formel:

$$\begin{array}{l} CBr_2 \\ \| \\ CBr \\ | \\ COOH \end{array}$$

möglich.

Unsere Versuche haben gelehrt, dass die Abspaltung von Kohlensäure und die Bildung von substituirten Aethylenen mit der Zunahme der Bromatome im Molekule erleichtert wird, und dass dieselbe viel leichter eintritt, wenn sich zu gleicher Zeit Bromwasserstoff abspaltet, d. h. also, dass die Propionsäuren viel leichter zerfallen als die aus ihnen hervorgegangenen Acrylsäuren. So gibt das tetrabrompropionsaure Baryum schon beim Erwärmen seiner wässerigen Lösung auf 70° C. (in geringem Masse auch schon bei gewöhnlicher Temperatur) das Tribromaethylen, während das tribromacrylsaure Baryum erst beim Erhitzen auf eine 100° übersteigende Temperatur dasselbe substituirte Aethylen liefert. — Ebenso gibt das tribrompropionsaure Baryum in wässeriger Lösung bei 130° C. ein Bibromaethylen, welches aus dem bibromacrylsauren Baryum gar nicht, aus der freien Säure erst beim Erhitzen auf 180° in geringer Menge erhalten werden konnte.

Die Monobromacrylsäure aus der β-Bibrompropionsäure von Tollens liefert erst bei längerem Kochen mit alkoholischem Kali Acetylen.

Im Folgenden geben wir eine Zusammenstellung der Formeln der hier in Betracht kommenden gebromten Propion- und Acrylsäuren, sowie der aus ihnen durch Kohlensäure- und Bromwasserstoffabspaltung entstehenden Producte nach den von Tollens und seinen Mitarbeitern, Jackson und Hill und uns erhaltenen Resultaten:

$$\text{I.}\quad \begin{array}{l} CH_2Br \\ | \\ CHBr \\ | \\ COOH \end{array} \qquad \begin{array}{l} CHBr \\ \| \\ CH \\ | \\ COOH \end{array} \qquad — \qquad \begin{array}{l} CH \\ ||| \\ CH \end{array}$$

Bibrompropionsäure	Monobromacrylsäure		Acetylen

II.	$CHBr_2$ — CHBr — COOH Tribrompropionsäure	CBr_2 = CH — COOH Bibromacrylsäure	CBr[1] ≡ C — COOH Brompropiolsäure	CBr ≡ CH Monobromacetylen
			CBr_2 = CH_2 Bibromaethylen	CBr ≡ CH Monobromacetylen
III.	CBr_3 — CHBr — COOH Tetrabrompropionsäure	CBr_2 = CBr — COOH Tribromacrylsäure	CBr_2 = CHBr Tribromaethylen	—

Zum Schlusse geben wir eine Zusammenstellung der Schmelzpunkte der besprochenen Säuren.

I.

	Schmp.	Diff.
Bibrompropionsäure[2] (stabilere Form)	64—65°	
		30—31°
Tribrompropionsäure	95°	
		30·5—31°
Tetrabrompropionsäure....	125·5—126°	

II.

	Schmp.	Diff.
Monobromacrylsäure........	69—70°	
		15—16°
Bibromacrylsäure	85°	
		32°
Tribromacrylsäure	117°	

---

[1] S. Jackson und Hill l. c.

[2] Münder u. Tollens, Ann. 167, 228.

Aus dieser Zusammenstellung ergibt sich eine bemerkenswerthe Regelmässigkeit in der Differenz der Schmelztemperaturen. Bei einem Blick auf die voranstehende Tabelle der Constitutionsformeln drängt sich die Vorstellung auf, dass die Gleichmässigkeit in der Zunahme der Schmelztemperatur bei den Propionsäuren durch die schrittweise Zunahme der Anzahl der Bromatome an dem Eckkohlenstoffe begründet sei. Eine andere Regelmässigkeit finden wir bei den Acrylsäuren wieder, wo durch den Eintritt eines zweiten Bromatomes (in die β-Stellung) die Schmelztemperatur um 15—16° steigt, während durch den Eintritt eines dritten Bromatomes (in die α-Stellung) eine doppelt so grosse Differenz der Schmelztemperaturen eintritt.

V. SITZUNG VOM 10. FEBRUAR 1881.

Das c. M. Herr Prof. C. Heller in Innsbruck übersendet eine Abhandlung, in welcher er auf Grundlage mehrjähriger Beobachtungen eine Übersicht: „Über die Verbreitung der Thierwelt im Tiroler Hochgebirge" gibt.

Das c. M. Herr Prof. E. Weyr übersendet eine Abhandlung: „Über biquadratische Evolutionen erster Stufe."

Herr Prof. Dr. Richard Maly in Graz übersendet den zweiten Theil seiner gemeinsam mit Herrn F. Hinteregger ausgeführten „Studien über Caffeïn und Theobromin".

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. „Studien über die Bewegung im widerstehenden Mittel", I. und II. Abtheilung, von Herrn Adalbert Jäger, Lehrer am zweiten Staats-Realgymnasium in Prag.
2. „Über ein Nullsystem zweiten Grades", von Herrn Adolf Ameseder, Assistenten an der technischen Hochschule in Wien.

Das wirkliche Mitglied, Herr Hofrath v. Hochstetter legt eine für die Denkschriften bestimmte Abhandlung unter dem Titel: „Die Kreuzberghöhle bei Laas in Krain und der Höhlenbär" vor.

Herr Dr. J. Puluj, Privatdocent und Assistent am physikalischen Cabinete in Wien, überreicht eine zweite Abhandlung über: „Strahlende Elektrodenmaterie".

Ferner überreicht derselbe eine Mittheilung, betitelt: „Bemerkungen zum Prioritätsschreiben des Herrn Dr. E. Goldstein."

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Akademie der Wissenschaften, königl. Preussische zu Berlin: Monatsbericht. September und October 1880. Berlin, 1881; 8°.

Budapest, Universität: Akademische Schriften aus den Jahren 1879—80; 4° & 8°.

Chemiker-Zeitung: Central-Organ. Jahrgang V, Nr. 5, Cöthen, 1881; 4°.

Comptes rendus des Séances de l'Académie des Sciences. Tome XCII. Nr. 4. Paris, 1881; 4°.

Gesellschaft, Deutsche chemische: Berichte. XIV. Jahrgang, Nr. 1. Berlin, 1881; 8°.

— gelehrte Estnische zu Dorpat: Verhandlungen. X. Band, Heft 3. Dorpat, 1880; 8°.

— österr. für Meteorologie: Zeitschrift. XVI. Band. Februar-Heft. 1881, Wien; 8°.

Göttingen, Universität: Akademische Schriften pro 1879—80. 67 Stücke 8° & 4°.

Landwirthschafts-Gesellschaft, k. k., in Wien: Verhandlungen und Mittheilungen. Jahrgang 1880, 5. u. 6. (Schluss) Heft. Wien, 1880; 8°.

Nature. Vol. XXIII. Nr. 588. London, 1881; 8°.

Observatory, the; A monthly review of Astronomy. Nr. 46. 1881, February 1. London; 8°.

Smithsonian Institution: Annual Report of the Board of Regents for the year 1878. Washington, 1879; 8°.

— Smithsonian Contributions to Knowledge. Vol. XXII. City of Washington, 1880; gr. 4°.

— Miscellaneous Collections. Vol. XVI. & XVII. Washington, 1880; 8°.

Society, the Philosophical of Washington: Bulletin. Vol. I. March 1871 — June 1872. Washington, 1874; 8°.

— the royal geographical: Proceedings and monthly Record of Geography. Vol. III. Nr. 2. February, 1880. London; 8°.

United States, Engineer-Department, U. S. Army: Report upon United States geographical Surveys west of the one hundredth Meridian. Vol. II. — Astronomy and barometric Hypsometry. Washington, 1877; gr. 4°.

United Report upon geographical and geological Explorations and Surveys west of the one hundredth Meridian. Vol. III. Geology. Washington, 1877; gr. 4⁰.

— — Report upon U. St. geographical Surveys west of the one hundredth Meridian. Vol. IV. — Paleontology. Washington, 1877; gr. 4⁰.

— — — Report upon geographical and geological explorations and surveys west of the one hundtredth Meridian. Vol. V. — Zoology. Washington, 1875; gr. 4⁰.

Verein für Erdkunde zu Halle a. S.: Mittheilungen. 1878, 1879 & 1880. Halle; 8⁰.

Wiener Medizin. Wochenschrift. XXX. Jahrgang, Nr. 6. Wien, 1881; 4⁰.

Über biquadratische Involutionen erster Stufe.

Von **Emil Weyr**.

I. Allgemeine Involutionen vierten Grades.

Die Involution ist bestimmt durch zwei beliebig gewählte Gruppen und besitzt, wenn sie von der vierten Ordnung ist, sechs Doppelelemente, von denen jedes mit zwei Verzweigungselementen eine (Verzweigungs-) Gruppe constituirt.

Denkt man sich die Involution als eine Tangenteninvolution eines Kegelschnittes K_2 und verfolgt man die Schnittpunkte der in einer und derselben Gruppe auftretenden (einander entsprechenden) Tangenten, so erfüllen sie bekanntlich eine allgemeine Curve dritter Ordnung und sechster Classe, die Involutionscurve J_3. Jedes eine Gruppe bildende Tangentenquadrupel liefert sechs Punkte von J_3, nämlich die sechs Ecken des von den vier Tangenten gebildeten vollständigen Vierseits. Die einzelnen Tangentengruppen der Involution bilden somit vollständige Vierseite, welche dem Kegelschnitte K_2 umschrieben und der Curve J_3 eingeschrieben sind.

Jede Curve dritter Ordnung kann man als Involutionscurve unendlich vieler biquadratischer Tangenteninvolutionen an Kegelschnitten betrachten; es genügt, einem der unendlich vielen der Curve eingeschriebenen vollständigen Vierseite einen Kegelschnitt K_2 beliebig einzuschreiben und ihn als den Träger der Tangenteninvolution zu betrachten. Ebenso ist jede einem dem K_2 umschriebenen vollständigen Vierseite umschriebene Curve dritter Ordnung die Involutionscurve für eine bestimmte biquadratische Involution von Tangenten des Kegelschnittes. Hieraus folgt, dass die sechs Ecken eines dem K_2 umschriebenen Vierseits mit den drei Ecken eines demselben Kegelschnitte um-

schriebenen Dreiseits immer neun Schnittpunkte zweier Curven dritter Ordnung darstellen. Ebenso folgt, dass eine biquadratische Involution vollständig bestimmt ist, wenn man ein Elementenquadrupel und drei beliebige Elementenpaare kennt.

Es ist klar, dass die in den sechs Schnittpunkten von K_2 mit J_3 an den Kegelschitt K_2 gelegten Tangenten die sechs Doppelelemente der Involution sind; die den Curven K_2 und J_3 gemeinschaftlichen zwölf Tangenten ergänzen paarweise die sechs Doppelelemente zu Gruppen. Ist D eine der sechs Doppeltangenten und VV', die mit ihr eine Gruppe bildenden Verzweigungstangenten, so ist J_3 dem Dreiseit DVV' umschrieben, berührt VV' in deren Schnittpunkten mit D und schneidet K_2 in dessen Berührungspunkte mit D.

Biquadratische Tangenteninvolutionen enstehen auf K_2, wenn man die Tangentenquadrupel aufsucht, welche K_2 mit den Kegelschnitten einer Kegelschnittsreihe gemeinschaftlich hat. Sind umgekehrt AB zwei beliebige Tangentenquadrupel einer auf K_2 befindlichen biquadratischen Tangenteninvolution und schreibt man den beiden vollständigen Vierseiten A, B je einen Kegelschnitt A_2, B_2, ein und sind G die vier diesen beiden Kegelschnitten gemeinschaftlichen Tangenten, so wird das Tangentenquadrupel, welches K_2 und irgend einem dem Vierseit G eingeschriebenen Kegelschnitte gemeinschaftlich ist, eine Gruppe der durch A und B bestimmten biquadratischen Tangenteninvolution auf K_2. Man kann selbstverständlich auch die in der Reihe vorkommenden degenerirten Kegelschnitte benützen, woraus sofort folgt, dass die sechs Ecken des vollständigen Vierseits G auch Punkte der Involutionscurve J_3 sind. Aber auch die Kegelschnitte A_2 und B_2 kann man offenbar ersetzen durch je ein Gegeneckenpaar der vollständigen Vierseite A, B, wodurch die Geraden G zu den vier wechselweisen Verbindungslinien der beiden Gegeneckenpaare werden. Um die mit irgend einer Tangente X von K_2 eine Gruppe bildenden (ihr entsprechenden) Tangenten zu finden, hat man nur jenen Kegelschnitt zu bestimmen, welcher X berührt und irgend einem der G-Vierseite eingeschrieben ist; seine drei weiteren mit K_2 gemeinsamen Tangenten sind die gesuchten.

Bekanntlich sind die drei Gegeneckenpaare eines einer Curve dritter Ordnung eingeschriebenen vollständigen Vierseites drei

correspondirende Punktepaare desselben Systems, und je zwei auch zwei correspondirende Punktepaare [1]. Man erkennt nun sofort, dass die Gegeneckenpaare aller die biquadratische Involution bildenden Vierseite correspondirende Punkte desselben Systems sind. Denn, sind aa' Gegenecken in einem und $\alpha\alpha'$ Gegenecken in einem anderen Vierseite, so wird durch die beiden Punktepaare, wenn man sie als degenerirte Kegelschnitte auffasst, eine Kegelschnittreihe bestimmt, welche mit K_2 die gegebene biquadratische Tangenteninvolution bestimmt. Es bilden somit die aus den zwei Schnittpunkten von $a\alpha$ und $a\alpha'$ mit $a'\alpha'$ und $a'\alpha$ an K_2 gehenden Tangentenpaare auch ein Quadrupel der Involution, und daher sind diese zwei Schnittpunkte Gegenecken in einem der Vierseite der Involution und somit sind in der That aa' und $\alpha\alpha'$ correspondirende Punkte (und zugleich Punktepaare) desselben Systems.

„Ist eine Curve J_3 Involutionscurve einer auf einem Kegelschnitte K_2 befindlichen biquadratischen Tangenteninvolution, so sind die Gegeneckenpaare aller die Involution bildenden Tangentenvierseite Paare correspondirender Punkte desselben Systems auf J_3.

Die Curve J_3 wird auch durch projectivische quadratische Strahleninvolution erzeugt. Betrachtet man nämlich irgend ein Quadrupel der biquadratischen Tangenteninvolution und sind ss' zwei Gegenecken in dem von den Tangenten desselben gebildeten Vierseite, so bilden die von diesen zwei Punkten aus an die einem anderen beliebigen Tangentenquadrupel der Involution eingeschriebenen Kegelschnitte gelegten Tangentenpaare zwei offenbar projectivische quadratische Strahleninvolutionen, deren Erzeugniss eine Curve dritter Ordnung ist. Diese muss jedoch mit J_3 identisch sein, weil sie durch die vier übrigen Ecken des ersten Vierseits und durch die sechs Ecken des zweiten Vierseits hindurchgeht.

Der Berührungspunkt von $\overline{ss'}$ mit dem diese Gerade berührenden und dem zweiten (beliebigen) Tangentenquadrupel der biquadratischen Involution eingeschriebenen Kegelschnitte ist der dritte Schnittpunkt von $\overline{ss'}$ mit J_3; die von s und s' an diesen

[1] Siehe: Durège, Curven dritter Ordnung, pag. 261.

Kegelschnitt gehenden weiteren Tangenten sind Tangenten von J_3 in diesen Punkten, und ihr Schnittpunkt ist der gemeinschaftliche Tangentialpunkt von s und s'.

Da man das zweite Tangentenquadrupel unter jenen der biquadratischen Involution beliebig wählen kann, so hat man offenbar den Satz:

„Ist auf einem Kegelschnitte eine biquadratische Tangenteninvolution, und sind ss' zwei Gegenecken in irgend einem von vier Tangenten einer Gruppe gebildeten vollständigen Vierseite, so projiciren sich die Gegeneckenpaare aller übrigen solchen Vierseite aus s und s' in zwei projectivischen quadratischen Involutionen."

Die quadratischen Involutionen sind offenbar jene, in denen sich aus den Punkten ss' die demselben Systeme wie ss' angehörigen correspondirenden Punkte von J_3 projiciren.

II. Die drei Systeme von Kegelschnittsreihen, welche biquadratische, die Curve J_3 erzeugende Tangenteninvolutionen tragen.

Den drei Systemen correspondirender Punkte einer beliebigen ebenen Curve dritter Ordnung J_3 entsprechen drei Systeme der Curve eingeschriebener vollständiger Vierseite. Jede Gerade der Ebene ist Seite dreier Vierseite, von denen jedes einem Systeme angehört. In der That sind a, b, c die Schnittpunkte der Geraden mit J_3 und a', b', c' die ihnen in einem Systeme correspondirenden Punkte, so bilden bekanntlich die sechs Punkte die Ecken eines der Curve eingeschriebenen Vierseits.

Wenn man einem solchen Vierseit einen beliebigen Kegelschnitt K_2 einschreibt, so kann man ihn betrachten als Träger einer biquadratischen Tangenteninvolution, deren Erzeugniss J_3 ist. Es ist zu dem Behufe nur nothwendig, die Seiten des Vierseits als ein Quadrupel zu betrachten, ferner die Curve J_3 mit einer beliebigen Tangente von K_2 zu schneiden, und diese Tangente mit den aus den drei Schnittpunkten an K_2 gehenden Tangenten als ein zweites Quadrupel anzusehen. Die durch diese beiden Quadrupel bestimmte Tangenteninvolution auf K_2 wird offenbar die Curve J_3 zur Involutionscurve haben müssen. Jedes vollständige, der Curve J_3 eingeschriebene Vierseit liefert somit eine

ganze Reihe solcher Trägerkegelschnitte für biquadratische Involutionen, und man hat somit, den drei Systemen correspondirender Punkte und eingeschriebener Vierseite entsprechend, drei Systeme eine biquadratische Tangenteninvolution tragender Kegelschnittsreihen mit J_3 als gemeinschaftlicher Involutionscurve.

Je zwei correspondirende Punkte als Gegenecken in eingeschriebenen Vierseiten stellen einen degenerirten Kegelschnitt obiger Systeme dar.

Es ist also jedes System correspondirender Punkte zu betrachten als System degenerirter Kegelschnitte, welche biquadratische J_3 erzeugende Tangenteninvolutionen tragen. Es ist sofort klar, dass für zwei correspondirende Punkte die biquadratische Involution zerfällt in jene zwei projectivischen Involutionen, in denen sich die correspondirenden Punkte desselben Systemes aus jenen zwei Punkten projiciren.

Alle Kegelschnitte eines Systemes, welche eine Gerade berühren, sind einem Vierseit eingeschrieben, nämlich jenem, welches diese Gerade enthält und dem betreffenden Systeme angehört.

Zwei beliebige Gerade werden somit von einem einzigen Kegelschnitte eines der drei Systeme berührt, und es bilden somit die sämmtlichen Kegelschnitte eines Systemes ein einem Kegelschnittsnetz reciprokes System.

Die Curve J_3, als Ort der degenerirten Kegelschnitte des Systemes, tritt somit als Reciproke der Cayley'schen Curve auf.

Ferner folgt aus Früherem sofort:

„Je zwei eingeschriebene Vierseite desselben Systemes sind einem und demselben Kegelschnitte umschrieben;" dieser Kegelschnitt tritt als Träger einer biquadratischen Involution auf u. s. w.

Betrachtet man in zwei solchen Vierseiten nur je drei Seiten, so bilden sie zwei Dreiecke, welche jenem Kegelschnitte umschrieben, und daher einem zweiten Kegelschnitte eingeschrieben sind, d. h.:

„Sind $a\ b\ c$ drei Punkte einer Curve dritter Ordnung, deren Correspondirende (in einem System) auf einer Geraden liegen, sind ebenso $\alpha\ \beta\ \gamma$ drei weitere Punkte, deren Correspondirende (in demselben Systeme) auf einer Geraden liegen, so liegen die sechs Punkte $a\ b\ c\ \alpha\ \beta\ \gamma$ allemal auf einem Kegelschnitte. (Er ist die gemischte Poloconik der beiden Geraden.)"

Lässt man die beiden Vierseite zusammenrücken, so erhält man das ebenfalls bekannte Resultat, dass die Curve in einem Punktetripel $a\ b\ c$ (dessen correspondirendes ein gerades Tripel ist) von einem Kegelschnitte gleichzeitig berührt wird. (Nämlich von der Poloconik der das gerade Tripel enthaltenden Geraden.)

Aus dem eben Gesagten dürfte hervorgehen, dass man viele Eigenschaften der Curven dritter Ordnung aus Betrachtungen über biquadratische Involutionen herleiten könnte, und umgekehrt liefert jeder Satz, welcher Curven dritter Ordnung betrifft, einen entsprechenden über biquadratische Involutionen, speciell über solche Tangenteninvolutionen an Kegelschnitten. Man erkennt sofort, dass die Involutionscurve J_3 einer auf K_2 befindlichen biquadratischen Tangenteninvolution als eine Hesse'sche Curve auftritt. Die Gegenecken der von den Gruppen der Involution gebildeten Vierseite sind conjugirte Pole der Hesse'schen Curve J_3; da die Verbindungslinie der conjugirten Pole die Cayley'sche Curve umhüllen, so haben wir für Involutionen den Satz:

„Befindet sich auf einem Kegelschnitte K_2 eine biquadratische Tangenteninvolution, so umhüllen die den Tangentenquadrupeln zugehörigen Diagonaldreiecke eine Curve dritter Classe, welche als Cayley'sche Curve mit der als Hesse'sche Curve auftretenden Involutionscurve J_3 einer gewissen Fundamentalcurve dritter Ordnung entspricht."

III. Ergänzende Elemente, Paare und Tripel; begleitende Paare.

Wenn wir die Elemente einer Gruppe einer Involution in zwei Partien scheiden, so soll jede von ihnen als die die andere (zu einer Gruppe) ergänzende bezeichnet werden. Es wird somit jedes Element einer biquadratischen Involution von einem Tripel ergänzt, jedes Paar von einem Paare und jedes Tripel von einem Elemente. Jedes Doppelelement wird von einem Paar von Verzweigungselementen ergänzt. Der Punkt, welcher einem Tangentenpaar einer auf K_2 befindlichen biquadratischen Involution gemeinschaftlich ist, ist auf der Involutionscurve conjugirter Pol des Schnittpunktes der Tangenten des ergänzenden Paares. Aus den Sätzen über conjugirte Pole einer (als Hesse'sche Curve betrachteten) Curve dritter Ordnung folgen bezüglich der Involution vierten Grades sofort die folgenden Sätze:

„Sind $A_1A_2A_3A_4$, $B_1B_2B_3B_4$ zwei beliebige Gruppen einer biquadratischen Involution, und theilt man jede in zwei Paare (also die erste etwa in A_1A_2 und A_3A_4 und die zweite in B_1B_2 und B_3B_4), so bestimmt ein Paar der einen Gruppe mit einem Paare der anderen Gruppe eine quadratische Involution, und die beiden ergänzenden Paare bestimmen eine zweite quadratische Involution, welche mit der ersten ein Elementenpaar gemeinschaftlich hat, das auch der biquadratischen Involution angehört; und zwar wird es von jenem Paare ergänzt, welches man in derselben Art erhält, wenn man bei der Bestimmung der beiden quadratischen Involutionen die beiden Paare einer Gruppe vertauscht. (Es werden also die durch A_1A_2, B_1B_2 und durch A_3A_4, B_3B_4 bestimmten zwei quadratischen Involutionen ein Elementenpaar C_1C_2 gemeinschaftlich haben; und ebenso haben die durch A_1A_2, B_3B_4 und durch A_3A_4, B_1B_2 bestimmten quadratischen Involutionen ein Elementenpaar C_3C_4 gemeinschaftlich. Dann bilden $C_1C_2C_3C_4$ wiederum eine Gruppe der biquadratischen Involution.")

Um die Richtigkeit des Satzes einzusehen, denken wir uns die Involution als Tangenteninvolution auf K_2.

Ist nun a der Schnitt von A_1 mit A_2 und a' jener von A_3 mit A_4, ferner $b\,b'$, ebenso die Schnitte von B_1 und B_2, respective von B_3 und B_4, und ist ferner c der Schnitt von ab mit $a'b'$, und c' jener von ab' mit $a'b$, so sind C_1C_2 offenbar die beiden Tangenten von c aus und C_3C_4 jene von c' aus an K_2. Nun sind aa', bb' zwei Paar conjugirte Pole der Involutionscurve J_3, daher auch c und c' conjugirte Pole sein müssen und folglich bilden $C_1C_2C_3C_4$ ein neues Quadrupel der Involution.

„Eine biquadratische Involution hat mit einer auf demselben Träger befindlichen quadratischen Involution drei Elementenpaare gemeinschaftlich."

Denkt man sich beide Involutionen als Tangenteninvolutionen auf dem Kegelschnitte K_2 und erstere durch zwei Quadrupel $A_1A_2A_3A_4$, $B_1B_2B_3B_4$ und letztere durch zwei Paare AA', BB' gegeben, so ist das Erzeugniss der ersteren die Involutionscurve J_3 dritter Ordnung, welche durch die zwölf Ecken der beiden Vierseite (A), (B) hindurchgeht, und das Erzeugniss der letzteren ist die Gerade Σ, welche den Schnittpunkt von A und A' mit jenem von B und B' verbindet. Nun hat Σ mit J_3 drei Punkte $p_1p_2p_3$

gemeinschaftlich und durch jeden von ihnen geht an K_2 ein Tangentenpaar, welches beiden Involutionen gemeinschaftlich ist.

Sind $p'_1 p'_2 p'_3$ die zu $p_1 p_2 p_3$ conjugirten Pole der Involutionscurve, so bilden alle sechs Punkte ein derselben eingeschriebenes vollständiges Vierseit, welches sowohl mit dem Vierseit (A) als auch mit (B) je einem Kegelschnitte umschrieben ist. Dies gibt eine einfache Bestimmung von $p_1 p_2 p_3$; construirt man nämlich die beiden Kegelschnitte, welche den Vierseiten $(A), (B)$ respective eingeschrieben sind und die Gerade Σ berühren, so werden ihre ausser Σ auftretenden weiteren drei gemeinschaftlichen Tangenten die Gerade Σ in $p_1 p_2 p_3$ und sich gegenseitig in $p'_1 p'_2 p'_3$ schneiden. Ist die Gerade Σ eine Tangente der Involutionscurve J_3, so fallen zwei der Punkte $p_1 p_2 p_3$ zusammen und ebenso fallen zwei der drei Tangentenpaare, welche beiden Involutionen gemeinschaftlich sind, zusammen; wird Σ eine Inflexionstangente, so fallen alle drei p-Punkte und ebenso die drei gemeinschaftlichen Tangentenpaare zusammen. Aus den bekannten Sätzen über die neun Inflexionspunkte und deren Anordnung folgen nun sofort die folgenden Sätze bezüglich einer biquadratischen Involution:

„Es gibt neun quadratische Involutionen, welche mit einer gegebenen biquadratischen Involution je drei zusammenfallende gemeinschaftliche Elementenpaare besitzen. Die neun Elementenpaare, von denen jedes drei zusammenfallende der biquadratischen und einer quadratischen Involution gemeinschaftliche Paare vertritt, gruppiren sich wiederum zu quadratischen Involutionen, indem jede durch zwei solche Paare bestimmte quadratische Involution noch ein drittes dieser Paare enthält; solcher Involutionen gibt es zwölf, welche sich in vier Tripel gruppiren, von denen jedes alle neun Elementenpaare enthält. Jedes der neun Elementenpaare kommt in vier von den zwölf Involutionen vor. Von den zwölf quadratischen Involutionen sind vier reell und acht imaginär; von den vier ersteren bilden drei eines jener Tripel, das einzige ganz reelle. Von den neun Elementarpaaren sind drei reell und sechs imaginär; die ersten drei gehören der in dem Tripel nicht vorkommenden reellen quadratischen Involution an u. s. w."

Je zwei Elementenpaare der biquadratischen Involution bestimmen eine quadratische, welche mit der ersteren noch ein

Elementenpaar gemeinschaftlich hat. Dasselbe kann nach Früheren leicht gefunden werden. Denken wir uns die biquadratische Involution wieder als eine Tangenteninvolution auf einem K_2 die beiden Paare $A_1 A_2$, $B_1 B_2$ bestimmen eine quadratische Involution, deren Axe (Schnittpunkteort entsprechender Tangenten die Gerade ab ist. Die beiden ergänzenden Paare $A_3 A_4$, $B_3 B_4$ liefern die Punkte $a'b'$, und es ist der Schnittpunkt c von ab mit $a'b'$ der dritte Schnittpunkt der Geraden ab mit der Involutionscurve J_3 und das von c an K_2 gelegte Tangentenpaar $C_1 C_2$ ist das den beiden Involutionen gemeinschaftliche dritte Elementenpaar. Denkt man sich $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ als zwei unendlich nahe Elementenpaare der biquadratischen Involution so wird ab die Tangente von J_3, in a und c wird der Tangentialpunkt von a. Man kann somit aus einem Elementenpaare $A_1 A_2$ einer biquadratischen Involution ein anderes Elementenpaar $C_1 C_2$ in derselben Art ableiten, wie man den Tangentialpunkt eines Punktes einer Curve dritter Ordnung aus diesem Punkte ableitet. Wir wollen das zweite Paar als das das erste begleitende bezeichnen. Um also zu einem Paare $A_1 A_2$ das begleitende zu erhalten, denke man sich durch $A_1 A_2$ und das unendlich nahe Paar eine quadratische Involution bestimmt, so wird diese mit der biquadratischen noch ein Elementenpaar — das begleitende — gemeinschaftlich haben.

„Während jedes Elementenpaar der biquadratischen Involution von einem einzigen Paare begleitet wird, begleitet jedes Paar vier andere Paare. Neun Elementenpaare gibt es, von denen jedes sich selbst begleitet; es sind dies die schon behandelten neun Paare, welche den Inflexionspunkten der Involutionscurve entsprechen.“

Da zwei conjugirte Pole der Hesse'schen Curve einen gemeinschaftlichen Tangentialpunkt besitzen, so gilt auch der Satz:

„Zwei Elementenpaare einer biquadratischen Involution, welche sich zu einem Quadrupel ergänzen, werden von einem und demselben Elementenpaare begleitet.“

Die vier aus einem Punkte der Hesse'schen Curve an dieselbe gelegten Tangenten haben vier Berührungspunkte, welche zwei Paar conjugirte Pole (im betreffenden Systeme) darstellen, das heisst:

„Die vier Elementenpaare einer biquadratischen Involution, welche von einem gegebenen Elementenpaare der Involution begleitet werden, gehören zwei Quadrupeln der Involution an.“

Da die drei Tangentialpunkte der drei Gegeneckenpaare eines der Hesse'schen Curve eingeschriebenen vollständigen Vierseits in einer Geraden liegen, so gilt auch der Satz:

„Die vier Elemente einer Gruppe einer biquadratischen Involution kann man dreimal in zwei Paare von Paaren trennen; die drei Elementenpaare, welche diese drei Paare von Paaren begleiten, gehören einer und derselben quadratischen Involution an.“

Die drei Tangentialpunkte dreier in gerader Linie liegender Punkte einer Curve dritter Ordnung liegen wieder auf einer Geraden; mit anderen Worten:

„Wenn drei Elementenpaare einer biquadratischen Involution einer quadratischen Involution angehören, so gehören die sie begleitenden Paare ebenfalls einer quadratischen Involution an.“

Es sei eine biquadratische Involution und auf demselben Träger eine quadratische Involution gegeben, welche mit der ersteren ein gegebenes Elementenpaar gemeinsam hat und noch durch ein zweites Paar beliebiger Elemente bestimmt ist. Um die beiden weiteren Paare zu finden, welche beiden Involutionen gemeinsam sind, denken wir uns die Involutionen als Tangenteninvolutionen des Kegelschnittes K_2, und seien $A_1A_2A_3A_4$, $B_1B_2A_3B_4$ zwei Quadrupel der biquadratischen und A_1A_2, M_1M_2 zwei Tangentenpaare der quadratischen Involution. Es handelt sich offenbar um die weiteren zwei Schnittpunkte der Involutionscurve J_3 mit der Geraden, welche den Schnittpunkt a von A_1 und A_2 mit dem Schnittpunkte m von M_1 und M_2 verbindet. Wenn wir wieder auf das der J_3 eingeschriebene vollständige Vierseit, dessen eine Seite am ist, zurückgreifen, so erhalten wir die gesuchten zwei Schnittpunkte von am mit J_3 in folgender Art. Wir construiren den Kegelschnitt, welcher am berührt und dem Vierseit $B_1B_2B_3B_4$ eingeschrieben ist, und ziehen an ihn von dem Punkte a', in dem sich A_3 und A_4 schneiden, die beiden Tangenten, so treffen diese die Gerade am in den zwei Punkten p, q, welche ihr und J_3 gemeinschaftlich sind; die von p und q an K_2 gelegten Tangentenpaare sind die beiden gesuchten.

Man kann auch die drei Gegeneckenpaare der Vierseite (B) aus a und a' projiciren, so erhält man die beiden quadratischen projectivischen Involutionen, welche die Involutionscurve J_3 erzeugen. Construirt man nun in der Involution, deren Scheitel a' ist, jenes Paar von Strahlen, welches dem Strahlenpaare, das $\overline{am}$ enthält, projectivisch entspricht, so wird es $\overline{am}$ in den beiden Punkten p, q treffen.

Die aus dem Punkte a an die Involutionscurve J_3 gehenden vier Tangenten erhält man somit entweder als die zwei Strahlenpaare der Involution a, welche den beiden Doppelstrahlen der Involution a' projectivisch entsprechen, oder als die beiden Tangentenpaare, welche man von a aus an jene zwei Kegelschnitte legen kann, welche durch den Punkt a' hindurchgehen und dem Vierseit (B) eingeschrieben sind. Ihre Berührungspunkte liegen selbstverständlich auf den beiden Doppelstrahlen der Involution a', welche zugleich die Tangenten der beiden letzterwähnten Kegelschnitte in a' sind. Die Construction der von a aus an J_3 gehenden vier Tangenten ist offenbar zugleich die Construction der vier Elementenpaare einer biquadratischen Involution, welche von einem gegebenen Elementenpaare derselben begleitet werden. Man hat nämlich nur aus den Berührungspunkten der vier von a aus an J_3 gelegten Tangenten an K_2 die Tangentenpaare zu legen, so werden dieselben von dem Paare $A_1 A_2$ gleichzeitig begleitet.

Nachdem die vier Punkte einer J_3, welche denselben Tangentialpunkt besitzen, immer zwei Paare conjugirter Pole eines Systemes bilden, und jedes conjugirte Polepaar als ein Paar von Gegenecken in einem Tangentenvierseit der biquadratischen Involution auftritt, so haben wir den Satz:

„Die vier Elementenpaare, welche von einem gegebenen Elementenpaare einer biquadratischen Involution begleitet werden, bilden zwei Quadrupel der Involution.“

Hält man in einer biquadratischen Involution ein der Involution nicht angehöriges Elementenpaar fest, so kann man alle quadratischen Involution betrachten, welche dieses Elementenpaar gemeinschaftlich haben; jede von ihnen wird mit der biquadratischen Involution drei Elementenpaare gemeinsam haben, und man kann wieder nach jenen unter den quadratischen Involutionen

fragen, für welche von jenen drei Paaren zwei zusammenfallen. Auf unseren Kegelschnitt K_2 übertragen, handelt er sich offenbar um die von dem Schnittpunkte m des allen quadratischen Involutionen gemeinschaftlichen Tangentenpaares $M_1 M_2$ an J_3 gehenden Tangenten. Ihre Zahl ist sechs; ihre Berührungspunkte liegen auf einem Kegelschnitte, der conischen Polare von m, und die Tangentialpunkte der Berührungspunkte liegen auf einem zweiten Kegelschnitte, dem begleitenden. Beide Kegelschnitte haben eine doppelte Berührung (in den auf der geraden Polare von m liegenden Punkten).

„Unter den quadratischen Involutionen, welche ein gegebenes nicht der biquadratischen Involution angehöriges Elementenpaar enthalten, gibt es sechs, welche mit der biquadratischen Involution zwei zusammenfallende Elementenpaare gemeinschaftlich haben."

IV. Symmetrische Elementensysteme zweiten Grades in Verbindung mit der biquadratischen Involution.

Die aus den Punkten eines Kegelschnittes D_2 an einen anderen Kegelschnitt K_2 gelegten Tangentenpaare bilden ein symmetrisches Tangentensystem zweiten Grades. [1] Befindet sich auf K_2 auch eine biquadratische Tangenteninvolution, so wird die Involutionscurve J_3 von D_2 in sechs Punkten geschnitten, deren conjugirte Pole und Tangentialpunkte bekanntlich wieder auf je einem Kegelschnitte liegen. Hieraus ergibt sich der Satz:

„Eine biquadratische Involution hat mit einem symmetrischen Elementensysteme zweiten Grades sechs Elementenpaare gemeinschaftlich; die sechs ergänzenden Paare gehören ebenfalls einem symmetrischen Elementensysteme zweiten Grades an, und dasselbe gilt auch von den sechs begleitenden Elementenpaaren."

Es sind dies Relationen, da ein symmetrisches Elementensystem zweiten Grades schon durch fünf beliebige Elementenpaare bestimmt ist. [2]

Aus der Theorie des Gegenpunktes von vier beliebigen Punkten einer ebenen Curve dritter Ordnung folgt sofort für die biquadratischen Involutionen:

---

[1] Siehe: Beiträge zur Curvenlehre Ar. 21.

[2] Siehe l. c. Art. 17.

„Vier Elementenpaare einer biquadratischen Involution sind in unendlich vielen symmetrischen Elementensystemen zweiten Grades enthalten; ein solches System ist erst durch ein fünftes beliebiges Paar vollkommen bestimmt. Jedes dieser unendlich vielen Systeme hat mit der Involution noch zwei Elementenpaare gemeinschaftlich, durch welche eine quadratische Involution bestimmt erscheint. Alle so erhaltenen quadratischen Involutionen (in unendlicher Anzahl) haben ein Elementenpaar gemeinschaftlich, welches auch der biquadratischen Involution angehört."

Man könnte dieses Paar als das Gegenpaar der vier Elementenpaare, von denen wir ausgegangen sind, bezeichnen.

„Das Gegenpaar zu vier beliebigen Elementenpaaren einer biquadratischen Involution hat zum begleitenden Paare das Gegenpaar der die vier Elementenpaare begleitenden Paare."

„Wenn sechs Elementenpaare einer biquadratischen Involution einem symmetrischen Systeme zweiten Grades angehören, so gehören irgend zwei von ihnen mit dem die vier übrigen ergänzenden Elementenpaaren einem zweiten symmetrischen Elementensysteme zweiten Grades an."

„Vier beliebige Elementenpaare einer biquadratischen Involution und die vier sie ergänzenden Paare haben ein gemeinschaftliches Gegenpaar."

„Wenn sechs Elementenpaare einer biquadratischen Involution einem symmetrischen Elementensysteme zweiten Grades angehören, so gehören die sechs sie ergänzenden Paare einem zweiten solchen Systeme an."

Insbesondere:

„Die sechs Paare von Verzweigungselementen einer biquadratischen Involution (welche die sechs Doppelelemente ergänzen) gehören einem und demselben symmetrischen Elementensysteme zweiten Grades an."

Man erkennt sofort, dass die sechs Elementenpaare, welche der biquadratischen Involution und den im letzten Satze des vorigen Abschnittes erwähnten quadratischen Involutionen doppelt gemeinschaftlich sind, ebenfalls einem symmetrischen Elementensysteme zweiten Grades angehören. Die sie begleitenden sechs Paare gehören einem zweiten solchen Systeme an, welches mit

dem ersteren zweimal zwei zusammenfallende Paare gemeinschaftlich hat. [1]

Man sieht auch unmittelbar ein, dass die Sätze über einfach doppelt und dreifach die Curve J_3 berührende Kegelschnitte zu Sätzen über symmetrische Elementensysteme zweiten Grades, welche mit einer biquadratischen Involution einmal, zweimal oder dreimal zwei zusammenfallende Elementenpaare gemeinschaftlich haben, führen müssen.

Die biquadratischen Involutionen sind nur specielle Fälle der symmetrischen Elementensysteme dritten Grades und gelten daher (wie übrigens aus der Natur der Involutionscurve sofort hervorgeht) die folgenden Sätze:

„Alle biquadratischen Involutionen, welche acht Elementenpaare gemeinschaftlich haben, besitzen auch ein neuntes gemeinschaftliches Elementenpaar."

„Jede biquadratische Involution besitzt mit einem conlocalen symmetrischen Elementensysteme dritten Grades neun gemeinschaftliche Elementenpaare, welche ihr überdies mit unendlich vielen anderen symmetrischen Elementensystemen dritten Grades gemeinschaftlich sind."

„Wenn von diesen neun Elementenpaaren sechs einem symmetrischen Elementensysteme zweiten Grades angehören, so bilden die übrigen drei Paare einer und derselben quadratischen Involution und umgekehrt."

V. Bestimmung biquadratischer Involutionen.

Eine biquadratische Involution (erster Stufe) ist, so wie jede Involution erster Stufe, durch zwei beliebige Elementengruppen, hier also durch zwei beliebige Quadrupel von Elementen, bestimmt.

Durch ein vollständiges Quadrupel und ein Elemententripel ist die Involution nicht bestimmt, da man zu dem Tripel noch ein beliebiges Element als das Tripel zu einem Quadrupel ergänzend hinzufügen muss. Daher hat man den Satz:

[1] Im Allgemeinen haben zwei symmetrische Elementensysteme zweiten Grades auf demselben Träger vier verschiedene gemeinschaftliche Elementenpaare.

„Durch die sechs Ecken eines einem Kegelschnitte K_2 umschriebenen vollständigen Vierseits und durch die drei Ecken eines demselben Kegelschnitte umschriebenen Dreiseits lassen sich unendlich viele Curven dritter Ordnung hindurchlegen.“ Jede von ihnen tritt als die Involutionscurve einer biquadratischen Tangenteninvolution auf, für welche das Vierseit ein Quadrupel und das Dreiseit ein Tripel darstellt. Hierin ist auch eine Lösung der folgenden Aufgabe enthalten:

„Wenn von den neun Schnittpunkten zweier Curven dritter Ordnung sechs als die Scheitel eines vollständigen Vierseits gegeben sind, den neunten Schnittpunkt zu finden.“

Man hat nur jenen Kegelschnitt zu bestimmen, welcher dem Vierseit eingeschrieben ist und die Verbindungsgerade des siebenten und achten Schnittpunktes berührt; die von diesen beiden Punkten an den Kegelschnitt gehenden Tangenten schneiden sich in dem gesuchten Punkte.

Wenn zu dem Quadrupel und dem Tripel noch ein Elementenpaar hinzutritt, so liefert dieses einen zehnten Punkt für die Involutionscurve, wodurch dieselbe und somit auch die Involution vollständig bestimmt erscheint, d. h.:

„Eine biquadratische Involution ist eindeutig bestimmt, wenn man ein Quadrupel, ein Tripel und ein Elementenpaar derselben kennt.“

Ist ein dem Kegelschnitte K_2 umschriebenes Vierseit gegeben, so ist jede durch seine sechs Ecken hindurchgehende Curve dritter Ordnung eine Involutionscurve,[1] und sie wird vollkommen bestimmt sein, wenn man für sie noch drei ganz beliebig gewählte Punkte annimmt; jeder solche Punkt vertritt ein Elementenpaar der Involution vierten Grades (das durch ihn an K_2 gehende Tangentenpaar) und wir haben den Satz:

„Eine biquadratische Involution ist eindeutig bestimmt, wenn man ein Quadrupel und drei (nicht einem Tripel angehörende) Elementenpaare kennt.“

Wir schreiten nun zum Beweise des folgenden Satzes:

„Eine biquadratische Involution ist eindeutig bestimmt durch drei beliebig gewählte Tripel.“

[1] Siehe: „Über Involutionen höherer Grade“, Crelle-Borchhardt, Bd. 72.

Denken wir uns von einer biquadratischen Tangenteninvolution auf einem Kegelschnitte K_2 zwei beliebige Tripel $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$ und ein Paar C_1C_2, beliebig gewählt. Die Involution bleibt unbestimmt, wird aber sofort eindeutig bestimmt, wenn wir eines der beiden Tripel, z. B. das erste durch eine beliebige Tangente A_4 zu einem Quadrupel ergänzen. Durch A_4 wird dann die das zweite Tripel ergänzende Tangente B_4 und ebenso das das Paar C_1C_2 ergänzende Paar C_3C_4 eindeutig bestimmt sein. (Die Beziehung zwischen A_4 und B_4 ist offenbar projectivischer Natur.) Wenn wir A_4 alle Tangenten von K_2 durchlaufen lassen, so werden selbstverständlich nicht nur B_4, sondern insbesondere auch das Tangentenpaar C_3C_4 nach und nach alle Lagen der Tangenten von K_2 durchlaufen. Wir werden daher auch umgekehrt eine beliebige Tangente von K_2 als C_3 etwa betrachten können. Hiermit ist zunächst nachgewiesen, dass man drei Tripel $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, $C_1C_2C_3$ einer biquadratischen Involution beliebig annehmen kann. Dass dann die drei Tripel eine einzige biquadratische Involution bestimmen, erhellt daraus, dass sich den drei Dreiseiten $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, $C_1C_2C_3$ nur eine einzige Curve dritter Ordnung umschreiben lässt, da die sechs Ecken zweier von ihnen auf einem Kegelschnitte und die drei Ecken des dritten nicht auf einer Geraden liegen. Hiemit ist zugleich auch der Satz erwiesen:

„Wenn drei beliebige Dreiseite einem Kegelschnitte umschrieben sind, so ist die durch ihre neun Ecken hindurchgehende Curve dritter Ordnung eine Involutionscurve bezüglich des Kegelschnittes, d. h. es gibt unendlich viele vollständige Vierseite, welche der Curve eingeschrieben und dem Kegelschnitte umschrieben sind.“

Wir wollen noch einen zweiten Beweis des Satzes liefern, dass eine biquadratische Involution durch drei Elemententripel eindeutig bestimmt ist.

Jede biquadratische Involution von Punkten auf einer ebenen rationalen Curve dritter Ordnung kann erzeugt werden durch ein Büschel von Kegelschnitten, von dessen vier Scheiteln einer in den Curvendoppelpunkt zu liegen kommt;[1] die Seiten des von den drei

[1] Siehe: „Über Projectivitäten und Involutionen auf ebenen rationellen Curven dritter Ordnung.“ Sitzung vom 22. Jänner 1880.

übrigen Scheiteln gebildeten Dreiseits treffen die Curve in drei Punktetripeln, welche der biquadratischen Involution angehören und mit jenen drei Punkten Quadrupel bilden, in denen die Curve von den aus dem Doppelpunkte nach den Scheiteln des erwähnten Dreiseits gehenden Strahlen getroffen wird. Es ist klar, dass man diese drei geraden Tripel der biquadratischen Involution beliebig wählen kann, wodurch jedoch die Involution vollkommen bestimmt erscheint, weil die drei Geraden, welche diese Tripel enthalten, sich in den drei Punkten schneiden, die mit dem Doppelpunkte der Curve die vier Scheitel des Kegelschnittbüschels liefern, welches auf der Curve die betreffende biquadratische Involution bestimmt.

Wenn nun umgekehrt von einer biquadratischen Involution drei beliebige Tripel gewählt werden, so kann man sie als Bilder dreier geraden Tripel einer ebenen Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte betrachten,[1] und da man drei beliebige Tripel als Bilder gerader Tripel einer solchen Curve betrachten kann, so ist auch in dieser Art nachgewiesen, dass eine biquadratische Involution durch drei beliebige Tripel vollkommen und unzweideutig bestimmt ist.

Aus dem Vorhergehenden folgt auch ein einfaches Verfahren zur Bestimmung jener drei Elemente, welche drei beliebige Tripel einer biquadratischen Involution zu Quadrupeln ergänzen. Je zwei der drei Tripel bestimmen eine cubische Involution, so dass man im Ganzen drei cubische Involutionen erhält. Diese drei Involutionen besitzen ein gemeinschaftliches Elementenpaar, welches dann in jeder der drei Involutionen von einem Elemente zu einem Tripel ergänzt wird.

Eben dieses Element ergänzt das der betreffenden cubischen Involution n i c h t angehörige Tripel zu einem Quadrupel der biquadratischen Involutionen. Denkt man sich die drei Tripel als Tangenten $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, $C_1C_2C_3$ eines Kegelschnittes K_2, so bilden sie drei ihm umschriebene Dreiseite. Die Ecken je zweier liegen auf einem Kegelschnitte, die Ecken der beiden ersten Dreiseite auf einem Kegelschnitte γ, die der beiden letzten auf

[1] Siehe: „Über die Abbildung einer rationalen ebenen Curve dritter Ordnung auf einen Kegelschnitt.“ Sitzung vom 20. März 1879, Art. 11.

einem Kegelschnitte α und die Ecken des ersten mit den Ecken des dritten auf einem Kegelschnitte β. Diese drei Kegelschnitte schneiden sich in einem und demselben Punkte p, von dem aus an K_2 zwei Tangenten gelegt werden können, welche α, β, γ in je einem Punktepaare schneiden. Die Geraden A_4, B_4, C_4, welche Verbindungslinien dieser drei Punktepaare sind, müssen K_2 berühren, und sind die vierten Elemente in den drei Tripeln der biquadratischen Involution.

Nachdem wir erkannt haben, dass eine biquadratische Involution durch drei beliebig gewählte Tripel eindeutig bestimmt ist[1], wollen wir zeigen, dass die Involution auch dann noch (nicht eindeutig) bestimmt bleibt, wenn sich ein Tripel in zwei beliebige, nicht demselben Quadrupel angehörige Paare auflöst.

Denken wir uns zu dem Behufe zwei beliebige, einem Kegelschnitte K_2 umschriebene Dreiseite $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$ und zwei beliebige Tangentenpaare C_1C_2, D_1D_2 desselben Kegelschnittes. Betrachten wir nun alle Curven dritter Ordnung, welche durch die sechs Ecken der beiden Dreiseite und durch die beiden Punkte (C_1C_2), (D_1D_2) hindurchgehen; sie bilden ein Büschel von Curven dritter Ordnung (dessen neunter Scheitel offenbar auf der Verbindungsgeraden der beiden letzten Punkte liegen wird). Dieses Curvenbüschel schneidet nun z. B. A_1 und A_2 offenbar in zwei projectivischen Punktreihen, welche eine bestimmte Curve zweiter Classe erzeugen werden, die auch A_1 und A_2 zu Tangenten hat, und somit mit K_2 noch zwei weitere gemeinschaftliche Tangenten A_4, A'_4 liefern wird. Jede dieser Tangenten wird einer bestimmten Curve des Büschels entsprechen; betrachten wir nun die Curve J_3, welche die Tangente A_4 liefert, so geht dieselbe durch die acht gegebenen Scheitel des Büschels und durch die Schnittpunkte von A_4 mit A_1 und A_2; das sind im Ganzen zehn Punkte. Wenn wir nun die Involutionscurve jener biquadratischen Involution bestimmen, welche durch das Quadrupel $A_1A_2A_3A_4$, das Tripel $B_1B_2B_3$ und etwa das Paar C_1C_2 gegeben ist, so hat sie mit J_3 neun von jenen Punkten gemeinschaftlich (alle bis auf den Punkt (D_1D_2)). Da jedoch die neun Punkte offenbar nicht

[1] Die drei Tripel dürfen nicht einer und derselben cubischen Involution angehören.

die Scheitel eines Curvenbüschels bilden, so muss die Involutionscurve mit J_3 identisch sein (und selbstverständlich auch durch $(D_1 D_2)$ hindurchgehen). Wir erhalten den Tangenten $A_4 A'_4$ entsprechend zwei von einander verschiedene Involutionen vierten Grades:

„Durch zwei Tripel und zwei Elementenpaare sind zwei biquadratische Involutionen bestimmt."

Auch diesen Satz kann man in der Art nachweisen, dass man die Involution als eine Punktinvolution auf einer Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte auffasst. Löst man nun auch noch ein zweites Tripel in zwei Paare auf, so erhält man den Satz:

„Eine Involution vierten Grades ist durch ein Tripel und vier beliebige Elementenpaare (nicht eindeutig) bestimmt."

Ist $A_1 A_2 A_3$ ein Tangententripel und $B_1 B_2$, $C_1 C_2$, $D_1 D_2$, $E_1 E_2$ vier beliebige Tangentenpaare eines Kegelschnittes K_2, so kann man das Tripel durch eine variable Tangente A_4 von K_2 zu einem Quadrupel ergänzen, und es wird eine biquadratische Involution existiren, welche durch das Quadrupel und die drei Paare $B_1 B_2$, $C_1 C_2$, $D_1 D_2$ bestimmt ist; so entspricht jeder Tangente A_4 eine solche Involution und somit auch eine Involutionscurve. Man gelangt zu einem Systeme von Involutionscurven, von denen eine bestimmte Anzahl durch den Punkt $(E_1 E_2)$ hindurchgehen wird; diese Zahl ist zugleich die Zahl der durch ein Tripel und vier Paare bestimmten biquadratischen Involutionen.

Löst man schliesslich auch das letzte Tripel in zwei Paare auf, so hat man den von uns auch schon für allgemeine Involutionen ausgesprochenen Satz:[1]

„Eine biquadratische Involution ist (nicht eindeutig) durch sechs Elementenpaare bestimmt."

VI. Dreifache Elemente.

Eine biquadratische Involution kann auch dreifache Elemente aufweisen; jedes wird von einem einzigen Elemente ergänzt. Wenn A_{123} ein dreifaches Element einer auf K_2 befindlichen Tan-

[1] Siehe: „Über vollständige eingeschriebene Vielseite." Sitzung vom 8. Jänner 1880.

genteninvolution ist und mit A_4 eine Gruppe bildet, so ist A_4 eine Inflexionstangente der Involutionscurve J_3, und zwar ist der Punkt $(A_4 A_{123})$ der Inflexionspunkt. Die Tangente A_{123} ist auch eine Tangente der Involutionscurve, und berührt sie in demselben Punkte wie den Kegelschnitt K_2. Hieraus folgt, dass ein dreifaches Element zwei von den sechs Doppelelementen der biquadratischen Involution absorbirt. Die beiden Curven K_2 und J_3, welche sich in einem Punkte von A_{123} berühren, haben an dieser Stelle Krümmungen, welche sich wie 4:1 verhalten[1] (K_2 hat eine viermal so grosse Krümmung als J_3).

Man erkennt auch sofort, dass jede Curve dritter Ordnung als Involutionscurve biquadratischer, mit einem dreifachen Elemente versehener Tangenteninvolutionen an Kegelschnitten K_2 auftreten kann. Man hat nur aus einem Inflexionspunkte an die Curve eine der drei Tangenten zu legen und einen Kegelschnitt K_2 zu construiren, welcher im Berührungspunkte der Tangente die Curve berührt und viermal so stark gekrümmt ist als die Curve, und welcher auch die Tangente des Inflexionspunktes zur Tangente hat.

Da man für eine Involution zwei Gruppen beliebig wählen kann, so wird man auch zwei Gruppen einer biquadratischen Involution, von denen jede ein dreifaches Element enthält, beliebig annehmen können. Man gelangt so zu den Involutionen mit zwei dreifachen Elementen.

Ist eine solche Involution mit den Gruppen $A_{123}A_4$, $B_{123}B_4$ eine Tangenteninvolution auf K_2, so ist die Involutionscurve J_3 eine Curve dritter Ordnung, welche A_4 und B_4 zu Wendetangenten hat, deren Berührungspunkte mit J_3 liegen auf A_{123}, B_{123}, respective die Curve berührt K_2 in den Berührungspunkten von A_{123} und B_{123} und hat daselbst eine viermal kleinere Krümmung als der Kegelschnitt K_2.

Umgekehrt:

„Legt man aus zwei Wendepunkten einer Curve dritter Ordnung an dieselbe je eine Tangente A_{123}, B_{123}, welche die Curve in zwei Punkten berühren, die mit jenen Wendepunkten conjugirte

[1] Siehe: „Über die involutorische Lage sich berührender Kegelschnitte.“ Sitzung vom 13. Jänner 1881.

Pole desselben Systemes bilden, so gibt es immer einen Kegelschnitt K_2, welcher die beiden Wendetangenten und die Curve in den Berührungspunkten der Tangenten A_{123}, B_{123} berührt. Dieser Kegelschnitt hat in den beiden letztgenannten Punkten eine viermal so grosse Krümmung als die Curve dritter Ordnung."

Es ist selbstverständlich, dass in jenen Fällen, in welchen die Involution durch Tripel mitbestimmt erscheint, jedes bestimmende Tripel durch ein dreifaches Element ersetzt werden kann. So hat man insbesondere den Satz:

„Eine biquadratische Involution ist vollkommen und eindeutig bestimmt, wenn man drei dreifache Elemente derselben beliebig annimmt."

Aus der Construction der die drei eine Involution bestimmende Tripel ergänzenden Elemente folgt für diesen Fall: Die drei dreifachen Elemente bestimmen eine cyclische Projectivität, deren Doppelelemente zugleich dreifache Elemente der durch das Tripel bestimmten cubischen Involution sind. Das zu einem der dreifachen Elemente der biquadratischen Involution bezüglich der Doppelelemente der cyclischen Projectivität harmonisch conjugirte Element ergänzt jenes dreifache Element zu einem Quadrupel der biquadratischen Involution.

Wodurch zeichnen sich die Involutionscurven solcher biquadratischer Tangenteninvolutionen an Kegelschnitten aus?

Eine Verallgemeinerung der Cartesianischen Zeichenregel.

Von Leopold Gegenbauer.

(Vorgelegt in der Sitzung am 7. Jänner 1881.)

Descartes hat folgenden wichtigen Satz aufgestellt:

Die Anzahl der positiven Wurzeln einer Gleichung mit reellen Coëfficienten ist nie grösser, als die Anzahl der Zeichenwechsel des ersten Gliedes und die zwischen beiden Zahlen etwa vorhandene Differenz ist stets eine gerade Zahl, die Anzahl der negativen Wurzeln kann nicht grösser sein, als die Anzahl der Zeichenwechsel im ersten Gliede der durch die Substitution von $-x$ an die Stelle von x transformirten Gleichung und die etwaige Differenz beider Zahlen ist stets gerade.

Durch diesen Satz wird eine merkwürdige Eigenschaft der Entwicklung einer ganzen Function $F(x)$ nach steigenden Potenzen von x ausgesprochen.

Es soll in den folgenden Zeilen gezeigt werden, dass eine analoge Eigenschaft einer grossen Classe von Entwicklungsformen zukommt, so dass also ein allgemeiner Satz über die Anzahl der positiven und negativen Wurzeln einer Gleichung mit reellen Coëfficienten existirt, von welchem die Cartesianische Zeichenregel nur ein ganz specieller Fall ist.

Es sei gegeben eine Reihe von ganzen Functionen der Veränderlichen x: $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, . . von den Graden 0, 1, 2, . . ., bei denen der Coëfficient der höchsten Potenz von x positiv ist und welche folgenden Relationen genügen:

$$\begin{aligned}[(x+a)(x-b)f(x)\{\psi_\varkappa(x)\psi'_\lambda(x)-\psi_\lambda(x)\psi'_\varkappa(x)\}]' = \\ = c_{\varkappa,\lambda}f(x)\psi_\varkappa(x)\psi_\lambda(x),\end{aligned} \tag{1}$$

wo die Grössen $c_{\varkappa,\lambda}$ bestimmte reelle Constanten sind, welche, wenn der zweite Index kleiner als der erste ist, negativ sein

sollen, a und b positive reelle Grössen bezeichnen und die von $\varkappa$ und λ unabhängige. Function $f(x)$ zwischen den Grenzen $-a$ und b reell und von demselben Zeichen ist.

Für die Constanten $c_{\varkappa,\lambda}$ bestehen, wie aus ihrer durch die Gleichung 1) gegebenen Definition folgt, folgende Relationen:

$$c_{\varkappa,\varkappa} = 0,$$

$$c_{\varkappa,\lambda} = -c_{\lambda,\varkappa}.$$

Setzt man $\varkappa = 0$, so erhält man:

$$[(x+a)(x-b)f(x)\psi'_\lambda(x)]' = c_{0,\lambda} f(x)\psi_\lambda(x). \tag{2}$$

Die Functionen $\psi_\lambda(x)$ sind demnach particuläre Integrale von linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Es soll nun zunächst vorausgesetzt werden, dass mindestens eine der Grössen a, b von Null verschieden ist. Multiplicirt man die Gleichung 2) mit $\psi_\varkappa(x)dx$ und integrirt von $x = -a$ bis $x = b$, so erhält man, indem man links partiell integrirt:

$$\int_{-a}^{b} (x+a)(x-b)f(x)\psi'_\varkappa(x)\psi'_\lambda(x)dx = c_{0,\lambda}\int_{-a}^{b} f(x)\psi_\varkappa(x)\psi_\lambda(x)dx.$$

Durch abermalige partielle Integration verwandelt sich diese Gleichung in:

$$\int_{-a}^{b} [(x+a)(x-b)f(x)\psi'_\varkappa(x)]'\psi_\lambda(x)dx = c_{0,\lambda}\int_{-a}^{b} f(x)\psi_\varkappa(x)\psi_\lambda(x)dx$$

oder

$$[c_{0,\varkappa} - c_{0,\lambda}]\int_{-a}^{b} f(x)\psi_\varkappa(x)\psi_\lambda(x)dx = 0. \tag{3}$$

Aus der Gleichung 2) folgt zunächst, dass $c_{0,\lambda}$ nicht Null ist, so lange λ von Null verschieden ist. Wäre nämlich $c_{0,\lambda} = 0$, so würde die Integration dieser Gleichung ergeben:

$$(x+a)(x-b)f(x)\psi'_\lambda(x) = c.$$

Setzt man in dieser Gleichung $x = b$, so erhält man $c = 0$ und hat daher:

$$\psi'_\lambda(x) = 0,$$

also

$$\psi_\lambda(x) = c,$$

was nur für $\lambda = 0$ möglich ist.

Ebenso ergibt sich, dass $c_{0,\varkappa} \lessgtr c_{0,\lambda}$ für $\varkappa \lessgtr \lambda$ ist. Hätte man nämlich $c_{0,\varkappa} = c_{0,\lambda}$ für $\varkappa \lessgtr \lambda$, so würde die Gleichung 2) folgende Relation liefern:

$$[(x+a)(x-b)f(x)\psi'_\lambda(x)]'\psi_\varkappa(x)$$
$$-[(x+a)(x-b)f(x)\psi'_\varkappa(x)]'\psi_\lambda(x) = 0.$$

Durch Integration dieser Gleichung erhält man, da die Integrationsconstante, wie man leicht zeigen kann, gleich Null ist:

$$\psi'_\lambda(x)\psi_\varkappa(x) - \psi'_\varkappa(x)\psi_\lambda(x) = 0$$

und daher:

$$\psi_\lambda(x) = C\psi_\varkappa(x),$$

was, solange $\varkappa$ von λ verschieden ist, unmöglich ist, da die Grade der beiden Functionen verschieden sind.

Aus der Gleichung 3) folgt daher:

$$\int_{-a}^{b} f(x)\psi_\varkappa(x)\psi_\lambda(x)dx = 0 \quad [\varkappa \lessgtr \lambda].$$

Nach den über die Natur der Function $f(x)$ gemachten Voraussetzungen ist ferner:

$$\int_{-a}^{b} f(x)\psi_\varkappa^2(x)dx = \alpha_\varkappa \quad [\alpha_\varkappa \lessgtr 0],$$

da alle Elemente dieses Integrales dasselbe Zeichen haben.

Setzt man:

$$[\psi_\varkappa(x)]_{x^\varkappa} = \beta_\varkappa,$$

so liefern die letzten zwei Gleichungen sofort die Formeln:

$$\int_{-a}^{b} f(x)x^\lambda\psi_\varkappa(x)dx = 0 \quad [\lambda < \varkappa]$$

$$\int_{-a}^{b} f(x)x^\varkappa\psi_\varkappa(x)dx = \frac{\alpha_\varkappa}{\beta_\varkappa}.$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

1. Die Wurzeln der Gleichung $\psi_\varkappa(x) = 0$ sind reell, ungleich und liegen in dem Intervalle $-a \ldots b$.
2. Zwischen je drei aufeinanderfolgenden Functionen $\psi_{\varkappa+1}(x)$, $\psi_\varkappa(x)$, $\psi_{\varkappa-1}(x)$ besteht eine lineare Relation.

Würde $\psi_\varkappa(x)$ einen Factor $\psi(x)$ besitzen, welcher zwischen $-a$ und b sein Zeichen nicht wechselte, so hätte man:

$$\int_{-a}^{b} f(x)\psi(x) \cdot \chi_{\varkappa-r}(x)\, x^\lambda dx = 0 \; [\lambda < \varkappa],$$

wo

$$\psi_\varkappa(x) = \psi(x)\chi_{\varkappa-r}(x)$$

gesetzt wurde, und daher:

$$\int_{-a}^{b} f(x)\psi(x)\chi^2_{\varkappa-r}(x)\, dx = 0,$$

was offenbar nur möglich ist, wenn $\chi_{\varkappa-r}(x)$ also auch $\psi_\varkappa(x)$ identisch gleich Null ist. Hiermit ist der erste der eben angeführten Sätze bewiesen.

Um den zweiten Satz zu beweisen, beachte man, dass sich jede ganze Function $F(x)$ von nicht höherem als dem Grade n in eine nach den Functionen $\psi_\lambda(x)$ fortschreitende Reihe von folgender Gestalt entwickeln lässt:

$$F(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} A_\lambda \psi_\lambda(x),$$

wo die Grössen A_λ Constanten sind, welche durch folgende Gleichung definirt werden:

$$A_\lambda = \frac{1}{\alpha_\lambda} \int_{-a}^{b} f(x) F(x) \psi_\lambda(x) dx$$

und dass jede solche Entwicklung nur auf eine einzige Weise möglich ist.

Setzt man nun:

$$F(x) = x\psi_\varkappa(x),$$

so erhält man:

$$A_{\varkappa+1} = \frac{\beta_\varkappa}{\beta_{\varkappa+1}}; \; A_{\varkappa-1} = \frac{\beta_{\varkappa-1}}{\beta_\varkappa}\alpha_\varkappa; \; A_\lambda = 0 \, [\lambda = 0, 1, 2, \ldots, \varkappa - 2].$$

Man hat daher die Relation:

$$\frac{\beta_x}{\beta_{x+1}}\psi_{x+1}(x)=(x-A_x)\psi_x(x)-\frac{\beta_{x-1}}{\beta_x}\alpha_x\psi_{x-1}(x).$$

Die Functionen $\psi_x(x)$ bilden also eine Reihe von Sturm'schen Functionen.

Wir betrachten nun die nach den Functionen $\psi_\lambda(x)$ fortschreitende Entwicklung der ganzen Function n^{ten} Grades $F(x)$ und setzen voraus, dass A_{r_1} ein nicht verschwindender Coëfficient dieser Reihe ist. Man erhält alsdann:

$$\left[\frac{F(x)}{\psi_{r_1}(x)}\right]'=\frac{1}{\psi_{r_1}^2(x)}\{F'(x)\psi_{r_1}(x)-F(x)\psi_{r_1}'(x)\}\quad(r_1\leqq n)$$

$$=\frac{1}{\psi_{r_1}^2(x)}\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n}A_\lambda\{\psi_{r_1}(x)\psi_\lambda'(x)-\psi_\lambda(x)\psi_{r_1}'(x)\}.$$

Bezeichnet man die Anzahl der reellen Wurzeln der Gleichung $\Phi(x)=0$, welche gleich b oder grösser als b sind, mit $\mathfrak{A}_b[\Phi(x)]$, so folgt aus dieser Formel nach dem Theorem von Roll:

$$\mathfrak{A}_b[F(x)]\leqq\mathfrak{A}_b\left[\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n}A_\lambda\{\psi_{r_1}(x)\psi_\lambda'(x)-\psi_\lambda(x)\psi_{r_1}'(x)\}\right]+1$$

und

$$\mathfrak{A}_b[F(x)]\equiv\mathfrak{A}_b\left[\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n}A_\lambda\{\psi_{r_1}(x)\psi_\lambda'(x)-\psi_\lambda(x)\psi_{r_1}'(x)\}\right]+1\pmod{2}.$$

Berücksichtigt man die im Anfange erwähnten Eigenschaften der Functionen $\psi_\lambda(x)$, so erhält man:

$$\mathfrak{A}_b\left[\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n}A_\lambda\{\psi_{r_1}(x)\psi_\lambda'(x)-\psi_\lambda(x)\psi_{r_1}'(x)\}\right]\leqq\mathfrak{A}_b\left[\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n}A_\lambda c_{r_1,\lambda}\psi_\lambda(x)\right]$$

und

$$\mathfrak{A}_b\left[\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n}A_\lambda\{\psi_{r_1}(x)\psi_r'(x)-\psi_\lambda(x)\psi_{r_1}'(x)\}\right]\equiv\mathfrak{A}_b\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n}A_\lambda c_{r_1,\lambda}\psi_\lambda(x)]\pmod{2}$$

also: $$\mathfrak{A}_b[F(x)]\leqq\mathfrak{A}_b\left[\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n}A_\lambda c_{r_1,\lambda}\psi_\lambda(x)\right]+1$$

$$\mathfrak{A}_b[F(x)] \equiv \mathfrak{A}_b\left[\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} A_\lambda c_{r_1,\lambda} \psi_\lambda(x)\right] + 1 \,(\text{mod. } 2).$$

Ist A_{r_2} ein zweiter, nicht verschwindender Coëfficient der Entwicklung von $F(x)$, so erhält man durch dasselbe Verfahren:

$$\mathfrak{A}_b\left[\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} A_\lambda c_{r_1,\lambda} \psi_\lambda(x)\right] \leqq \mathfrak{A}_b\left[\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} A_\lambda c_{r_1,\lambda} c_{r_2,\lambda} \psi_\lambda(x)\right] + 1$$

$$\mathfrak{A}_b\left[\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} A_\lambda c_{r_1,\lambda} \psi_\lambda(x)\right] \equiv \mathfrak{A}_b\left[\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} A_\lambda c_{r_1,\lambda} c_{r_2,\lambda} \psi_\lambda(x)\right] + 1 \,(\text{mod. } 2)$$

also:

$$\mathfrak{A}_b[F(x)] \leqq \mathfrak{A}_b\left[\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} A_\lambda c_{r_1,\lambda} c_{r_2,\lambda} \psi_\lambda(x)\right] + 2.$$

$$\mathfrak{A}_b[F(x)] \equiv \mathfrak{A}_b\left[\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} A_\lambda c_{r_1,\lambda} c_{r_2,\lambda} \psi_\lambda(x)\right] + 2 \,(\text{mod. } 2).$$

Sind die Coëfficienten $A_{r_1}, A_{r_2}, \ldots, A_{r_\sigma}$ der Entwicklung von $F(x)$ nach den Functionen $\psi_\lambda(x)$ von Null verschieden, so bestehen demnach, wie man sofort sieht, die Relationen:

$$\mathfrak{A}_b[F(x)] \leqq \mathfrak{A}_b\left[\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} A_\lambda c_{r_1,\lambda} c_{r_2,\lambda} \ldots c_{r_\sigma,\lambda} \psi_\lambda(x)\right] + \sigma.$$

$$\mathfrak{A}_b[F(x)] \equiv \mathfrak{A}_b\left[\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} A_\lambda c_{r_1,\lambda} c_{r_2,\lambda} \ldots c_{r_\sigma,\lambda} \psi_\lambda(x)\right] + \sigma \,(\text{mod. } 2).$$

Bietet die Reihe der Coëfficienten A_λ gar keinen Zeichenwechsel dar, so besitzt die Gleichung $F(x) = 0$ offenbar keine reelle Wurzel, welche gleich b oder grösser als b ist; denn, da die Wurzeln der Gleichungen $\psi_\lambda(x) = 0\,[\lambda = 1, 2, \ldots, n]$ sämmtlich innerhalb des Intervalles $-a \ldots b$ liegen, so hat in diesem Falle die Function $F(x)$ für alle x, welche gleich b oder grösser als b sind, stets dasselbe Zeichen. Man hat daher, wenn die Anzahl der Zeichenwechsel, welche in der Reihe der Entwicklungs-

coëfficienten A_λ auftreten, gleich Null ist, die Gleichung:

$$\mathfrak{A}_b[F(x)] = 0.$$

Wenn die Reihe der Entwicklungscoëfficienten A_λ Zeichenwechsel enthält, so möge einer derselben beim Übergange von dem Coëfficienten A_{r_1} zu dem unmittelbar vorhergehenden stattfinden. Da nun in der Reihe:

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} A_\lambda c_{r_1,\lambda} \psi_\lambda(x) \tag{4}$$

das Glied mit $\psi_{r_1}(x)$ fehlt, da ferner die Coëfficienten, deren Index λ kleiner als r_1 ist, das entgegengesetzte, jene hingegen, deren Index grösser als r_1 ist, dasselbe Zeichen, wie die entsprechenden Coëfficienten in der Entwicklung von $F(x)$ haben, so besitzt die eben erwähnte Reihe einen Zeichenwechsel weniger, als die Entwicklung der Function $F(x)$ nach den Functionen $\psi_\lambda(x)$.

Tritt in der Reihe der Entwicklungscoëfficienten A_λ ein zweiter Zeichenwechsel beim Übergange von dem Coëfficienten A_{r_2} zu dem unmittelbar vorhergehenden auf, so wird die Reihe:

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} A_\lambda c_{r_1,\lambda} c_{r_2,\lambda} \psi_\lambda(x)$$

einen Zeichenwechsel weniger besitzen, als die Reihe 4), also zwei Zeichenwechsel weniger als die Reihe der Entwicklungscoëfficienten A_λ.

Wenn endlich beim Übergange von den Coëfficienten A_{r_1}, $A_{r_2} \ldots$, A_{r_σ} zu den unmittelbar vorhergehenden Zeichenwechsel auftreten, so hat die Reihe:

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} A_\lambda c_{r_1,\lambda} c_{r_2,\lambda} \ldots c_{r_\sigma,\lambda} \psi_\lambda(x) \tag{5}$$

σ Zeichenwechsel weniger als die Entwicklung der Function $F(x)$ nach den Functionen $\psi_\lambda(x)$.

Hat nun die Reihe der Entwicklungscoëfficienten A_λ nur die eben angeführten σ Zeichenwechsel, so besitzt die Reihe 5) keinen

Zeichenwechsel und es ist daher:

$$\mathfrak{A}_b\Big[\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} A_\lambda c_{r_1,\lambda}\, c_{r_2,\lambda} \ldots c_{r_3,\lambda}\, \psi_\lambda(x)\Big] = 0,$$

also

$$\mathfrak{A}_b[F(x)] \leqq \sigma$$

und

$$\mathfrak{A}_b[F(x)] \equiv \sigma \ (\text{mod. } 2).$$

Setzt man in der Entwicklung von $F(x)$ nach den Functionen $\psi_\lambda(x)$ für $x: -x$ und macht den Coëfficienten der höchsten Potenz von x in den einzelnen Functionen $\psi_\lambda(-x)$ wieder positiv, so ist, wenn die Reihe der in dieser Entwicklung auftretenden Coëfficienten τ Zeichenwechsel enthält:

$$\mathfrak{A}_a[F(-x)] \leqq \tau$$

und

$$\mathfrak{A}_a[F(-x)] \equiv \tau \ (\text{mod. } 2).$$

Die in dieser letzten Entwicklung auftretenden Coëfficienten erhält man aber, indem man in der ursprünglichen Entwicklung jeden Coëfficienten A_λ mit geradem Index ungeändert lässt, jedem A_λ mit ungeradem Index aber das entgegengesetzte Vorzeichen gibt.

Man hat daher den bemerkenswerthen Satz:

Entwickelt man eine ganze Function $F(x)$ vom Grade n in eine nach den Functionen $\psi_\lambda(x)$ fortschreitende Reihe, so ist die Anzahl der reellen positiven Wurzeln der Gleichung $F(x) = 0$, welche gleich b oder grösser als b sind, nicht grösser als die Anzahl der Zeichenwechsel in der Reihe der Entwicklungscoëfficienten A_λ und die etwa auftretende Differenz zwischen diesen beiden Zahlen ist stets eine gerade Zahl; die Anzahl der reellen negativen Wurzeln dieser Gleichung, welche dem absoluten Betrage nach gleich a oder grösser als a sind, ist nicht grösser als die Anzahl der Zeichenwechsel in der Reihe der Grössen $(-1)^\lambda A_\lambda$ und die etwaige Differenz zwischen diesen beiden Zahlen ist gerade.

Als Corollare dieses Satzes erhält man die Theoreme:

Fehlt in der Entwicklung der Function $F(x)$ nach den Functionen $\psi_\lambda(x)$ stets nur eine gerade Anzahl (Null eingeschlossen)

von aufeinanderfolgenden Gliedern, so ist die Anzahl der positiven Wurzeln der Gleichung $F(x) = 0$, welche gleich b oder grösser als b sind, nicht grösser als die Anzahl der Zeichenwechsel und die Anzahl der reellen negativen Wurzeln, welche dem absoluten Betrage nach gleich a oder grösser als a sind, nicht grösser als die Anzahl der Zeichenfolgen in der Reihe der Entwicklungscoëfficienten A_λ, die etwaige Differenz zwischen den beiden erwähnten Zahlen ist stets eine gerade Zahl.

Fehlt in der Entwicklung der Function $F(x)$ nach den Functionen $\psi_\lambda(x)$ stets eine ungerade Anzahl von aufeinanderfolgenden Gliedern, so dass also an jeder Stelle mindestens ein Glied fehlt, so ist die Anzahl der positiven Wurzeln der Gleichung $F(x) = 0$, welche gleich b oder grösser als b sind, und auch die Anzahl der reellen negativen Wurzeln, deren absoluter Betrag gleich a oder grösser als a ist, nicht grösser als die Anzahl der Zeichenwechsel in der Reihe der Entwicklungscoëfficienten A_λ; die etwaige Differenz zwischen den beiden erwähnten Zahlen ist stets gerade.

Sind alle Wurzeln der Gleichung $F(x) = 0$ reell und sind die positiven Wurzeln gleich b oder grösser als b, die negativen dem absoluten Betrage nach gleich a oder grösser als a, so hat dieselbe genau so viele positive Wurzeln als Zeichenwechsel in der Reihe der Entwicklungscoëfficienten A_λ vorkommen, und genau so viele negative Wurzeln als Zeichenwechsel in der Reihe der Grössen $(-1)^\lambda A_\lambda$ auftreten.

Sind alle Wurzeln der Gleichung $F(x) = 0$ reell, positiv und gleich b oder grösser als b, so fehlt in der Entwicklung der Function $F(x)$ nach den Functionen $\psi_\lambda(x)$ kein Glied und die Reihe der Entwicklungscoëfficienten A_λ enthält nur Zeichenwechsel.

Sind alle Wurzeln der Gleichung $F(x) = 0$ reell, negativ und dem absoluten Betrage nach gleich a oder grösser als a, so fehlt in der Entwicklung der Function $F(x)$ nach den Functionen $\psi_\lambda(x)$ kein Glied und die Reihe der Entwicklungscoëfficienten A_λ enthält nur Zeichenfolgen.

Fehlen in der Entwicklung der Function $F(x)$ nach den Functionen $\psi_\lambda(x)$ r aufeinanderfolgende Glieder und haben die einschliessenden Glieder gleiches Zeichen, so hat die Gleichung $F(x) = 0$, falls r gerade ist, mindestens r, falls r ungerade ist, mindestens $r+1$ complexe Wurzeln und reelle Wurzeln, welche

in dem Intervalle $-a\ldots b$ liegen; die etwaige Differenz zwischen der Anzahl der genannten Wurzeln und den erwähnten Zahlen ist stets gerade.

Fehlen in der Entwicklung der Function $F(x)$ nach den Functionen $\psi_\lambda(x)$ r aufeinanderfolgende Glieder und haben die einschliessenden Glieder entgegengesetztes Zeichen, so hat die Gleichung $F(x)=0$, wenn r gerade ist, mindestens r, wenn hingegen r ungerade ist, mindestens $r-1$ complexe Wurzeln und reelle Wurzeln, welche in dem Intervalle $-a\ldots b$ liegen; die etwaige Differenz zwischen der Anzahl dieser Wurzeln und den erwähnten Zahlen ist stets eine gerade Zahl.

Tritt bei der Entwicklung der Function $F(x)$ nach den Functionen $\psi_\lambda(x)$ in der Reihe der Entwicklungscoëfficienten eine ungerade Anzahl von Zeichenwechseln auf, so hat die Gleichung $F(x)=0$ mindestens eine positive Wurzel, welche gleich b oder grösser als b ist; tritt in dieser Reihe eine ungerade Anzahl von Zeichenfolgen zwischen Gliedern, deren Indices verschiedenen Character nach dem Modul 2 haben, auf, so hat die erwähnte Gleichung wenigstens eine negative Wurzel, deren absoluter Betrag gleich a oder grösser als a ist.

Für alle Entwicklungen der Function $F(x)$, welche man dadurch erhält, dass man verschiedene Systeme von Functionen $\psi_\lambda(x)$ wählt, bei denen a und b denselben Werth behalten, hat die Anzahl der in den einzelnen Reihen von Entwicklungscoëfficienten auftretenden Zeichenwechsel denselben Character nach dem Modul 2; für alle genannten Entwicklungsformen hat ebenso auch die Anzahl der Zeichenfolgen zwischen Gliedern, deren Indices verschiedenen Character nach dem Modul 2 haben, gleichen Character nach dem Modul 2.

Als specielle Fälle der Functionen $\psi_\lambda(x)$ mögen die Functionen $C_\lambda^\nu(x)$, zu welchen die Kugelfunctionen $P_\lambda(x)$ und die Functionen $\cos(\lambda \arccos x)$ gehören, erwähnt werden.

Es ist nun noch der früher ausgeschlossene Fall, dass

$$a=b=0$$

ist, zu untersuchen.

Aus der Gleichung:

$$[x^2 f(x)\psi_\lambda'(x)]' = c_{0,\lambda} f(x)\psi^\lambda(x),$$

folgt:

$$\psi_\lambda(o) = 0.$$

Die Lage der übrigen Wurzeln der Gleichung $\psi_\lambda(x) = 0$ wird von der Natur der Function $f(x)$ abhängig sein. Soll nun die Eigenschaft der Functionen $\psi_\lambda(x)$, dass sämmtliche Wurzeln derselben in dem Intervalle $-a \dots b$ liegen, auch in diesem Falle bestehen bleiben, so wird man $f(x)$ so wählen müssen, dass:

$$\psi_\lambda(x) = C \cdot x^\lambda$$

wird. Man erhält:

$$f(x) = C_1 x^{\frac{c_{o,\lambda} - \lambda(\lambda+1)}{\lambda}}.$$

Setzt man nun:

$$c_{o,\lambda} = \lambda(\lambda+1), \quad C = 1,$$

so hat man:

$$f(x) = C_1, \quad \psi_\lambda(x) = x^\lambda.$$

Verfährt man nun wieder wie früher, und beachtet, dass jetzt a und b mit den Wurzeln von $\psi_\lambda(x) = 0$ zusammenfallen, so erhält man die im Anfange erwähnte Cartesianische Zeichenregel.

Über die Magnetisirbarkeit des Eisens bei hohen Temperaturen.

Von **Anton Wassmuth,**

Professor an der Universität in Czernowitz.

(Mit 1 Holzschnitt.)

1. In einer unter ähnlichem Titel erschienenen früheren Arbeit[1] habe ich den Einfluss einer Temperaturserhöhung (im Mittel von 118°) auf die Magnetisirbarkeit des Eisens untersucht und nachgewiesen, dass das Eisen bei höherer Temperatur für geringe magnetisirende Kräfte eine stärkere Magnetisirbarkeit besitzt, dass ferner das Maximum dieser Magnetisirbarkeit (der sogenannte Wendepunkt) bei dem wärmeren Stab schon früher eintritt und dass mit der Erwärmung eine Abnahme des Maximums des Magnetismus verbunden ist.

Diese Verminderung des Maximums betrug nun allerdings nur 3%, so dass zur sicheren Ermittlung dieser Grösse die Anwendung bedeutender Temperaturserhöhungen dringend geboten ist. Derartige Beobachtungen erschienen mir ferner auch desshalb wünschenswerth, da nur durch sie das Gesetz der Änderung der Magnetisirbarkeit, für welches ich auf rein theoretischem Wege eine Formel gefunden hatte, vollständig klar dargestellt werden kann.

Zu dem Ende wurde eine starkwandige Glasröhre aus schwer schmelzbarem Glase mit blankem, gut ausgeglühtem, dickem Kupferdrahte in der Art umwickelt, dass keine der 76 Windungen eine andere berühren konnte. Ich erhielt so eine Magnetisirungsspule von nahezu constanter Kraft für alle Theile der Eisenstäbe. Berechnet man nämlich aus der Grösse des äusseren

[1] Sitzb. d. k. Akad. II. Abth., Juni-Heft 1880.

Durchmessers von 24 Mm., der Drahtdicke von 2·2 Mm. und der Länge von 285 Mm. die entsprechende Kraft x_0 für die Mitte der Axe, so erhält man für dieselbe in absolutem Maasse für die Stromstärke Eins den Werth:

$$x_0 = 3 \cdot 34$$

und findet, dass dieser Werth für die Enden der längsten Stäbe ($2l = 242$ Mm.) nur um 5·9% abnimmt. Zugleich ergibt sich, dass der Einfluss der Steigung der Windungen zu vernachlässigen ist, indem dadurch die magnetisirende Kraft nur um 0·15% vermindert wird.

Diese Magnetisirungsspule diente zur Aufnahme der Eisenstäbe und war, ähnlich wie bei den früheren Versuchen, in genau westlicher Lage einem aperiodischen Spiegelgalvanometer von Siemens und Halske gegenüber gestellt, so dass ein sehr schnelles und sicheres Ablesen möglich war. Eine zweite, eben so ausgeführte Spule in östlicher Lage compensirte vollständig die Wirkung der ersten; diese Compensation wurde selbst nach den stärksten Erwärmungen nicht gestört.

Die stets gut ausgeglühten und abgeriebenen Eisenstäbe wurden in enge Glasröhren gesteckt, bei denen ein Ende geschlossen, das andere in einen langen, offenen Capillarfaden ausgezogen war. So hergerichtet kamen sie in die Magnetisirungsspule und wurden nun zuerst bei gewöhnlicher Temperatur steigenden magnetisirenden Kräften ausgesetzt; dabei dienten ein Universalwiderstandskasten und eine Tangentenboussole mit dem Reductionsfactor 30·37 zur Regulirung und Messung der Ströme. Hatte so der Stab ein möglichst hohes Moment erreicht, so wurde die Stromstärke durch Einschalten von immer grösseren Widerständen, ohne indess die Ablenkungen weiter zu notiren, und durch schliessliches Öffnen der Leitung auf Null gebracht und hierauf der permanente Magnetismus durch schwache alternirende Ströme weggeschafft.

Die Erwärmung der Stäbe geschah nun in einfacher Weise dadurch, dass sich unterhalb der Spule eine entsprechend lange und breite Wanne befand, die mit Weingeist angefüllt wurde; dieser lieferte, entzündet, eine ruhige Flamme, welche die Spule von allen Seiten umgab. Es war dann nur nöthig, 15—20 Minuten

zu warten, um so sicher zu sein, dass die Luft und mit ihr der Eisenstab in der engen Glasröhre eine constante Temperatur angenommen hatten. Das gleichmässige Aussehen der Stäbe nach dem Abkühlen, sowie einige controlirende Versuche mit Quecksilberthermometern bestätigten diese Ansicht.

Die Magnetisirung des heissen Stabes erfolgte in derselben Art wie früher und nahm nur wenige Minuten in Anspruch.

Um nun die angewandte Temperatur zu bestimmen, wurde über Vorschlag und unter Mitwirkung meines Collegen Handl folgendes Verfahren eingeschlagen: Sobald die Magnetisirung beendet war, wurde mit einer Weingeistlampe der capillare Faden an dem inneren Glasrohre zugeschmolzen, der Barometerstand B beobachtet und hierauf das Rohr sammt dem Stabe der Abkühlung überlassen. Nach Verlauf mehrerer Stunden wurde das zugeschmolzene Ende des Rohres unter Quecksilber geöffnet und hierauf folgende Grössen bestimmt: Der Barometerstand b, die Höhe h der gehobenen Quecksilbersäule, das Gewicht p des eingedrungenen Quecksilbers und endlich das Gewicht P der Quecksilbermenge, welche zur vollständigen Füllung des Rohres nöthig war. Aus diesen Daten lässt sich die gesuchte Temperatur T nach der Formel:

$$T=[273+1{\cdot}9\,N](N-1)+Nt$$

berechnen, wenn

$$N=\frac{B}{b-h}\;\frac{P}{P-p}$$

gesetzt wird und t die Zimmertemperatur bedeutet, bei welcher die Bestimmung der Grössen b, h, p und P erfolgte. So ergab sich z. B. für den ersten Stab:

$$B=b=730\,\text{Mm.},\; h=337\,\text{Mm.},\; P=89{\cdot}838\,\text{Gr.},\; p=59{\cdot}548\,\text{Gr.}$$

$$N=2{\cdot}8023,\; t=15 \text{ und } T_1=544^\circ$$

und analog für das zweite in Verwendung gekommene Eisen:

$$T_2=307^\circ.$$

Ich habe es absichtlich unterlassen, einen Stab bei mehr als zwei verschiedenen Temperaturen zu magnetisiren, da sich die Magnetisirbarkeit durch den oft wiederholten Act des Magnetisirens allein schon ändern konnte.

Bevor ich nun zur Mittheilung der einzelnen Versuche schreite, will ich auf rein theoretischem Wege ein Gesetz ableiten, das in erster Annäherung die Änderung der Magnetisirbarkeit mit der Temperatur für dieselbe magnetisirende Kraft ausspricht.

2. Wenn bei einer Temperaturerhöhung von 0° auf t Grad das magnetische Moment μ_0 eines Milligramms Eisen unter dem Einflusse der magnetisirenden Kraft x_0 auf den Werth μ_t steigt, so können wir uns den dabei stattfindenden Process in zwei wesentlich von einander verschiedene Theile zerlegt denken.

Vor allem ist einleuchtend, dass die Coërcitivkräfte bei dem Erwärmen abnehmen müssen. Mit diesem Namen wollen wir einstweilen nicht nur die eigentlichen und magnetischen Molekularkräfte, sondern auch die Einwirkungen der freien magnetischen Massen, da sich diese im Allgemeinen ähnlich verhalten, bezeichnen. In Folge der Verminderung dieser der Magnetisirung entgegenwirkenden Kräfte steigt somit das Moment μ_0 auf den Werth μ'. Gleichzeitig nimmt auch mit der Temperaturerhöhung das Moment jedes Molekularmagneten und in demselben Verhältnisse das Moment der Gewichtseinheit ab, d. h. μ' sinkt auf den Werth μ_t. Diese Folgerung wird nicht geändert, wenn man auch den einzelnen Molekularmagneten unter allen Umständen constante Momente zuschreibt; man hat sich dann nur zu denken, dass die Moleküle in lebhaftere Schwingungen gerathen und demnach ihr mittleres nach auswärts wirkendes Moment entsprechend verringert erscheint. Es ist daher:

$$\mu_t - \mu_0 = (\mu' - \mu_0) - (\mu' - \mu_t)$$

oder, wenn mit x_0 multiplicirt wird,

$$x_0(\mu_t - \mu_0) = x_0(\mu' - \mu_0) - x_0(\mu' - \mu_t). \qquad 1)$$

Hier stellt der linke Ausdruck für $\mu_t > \mu_0$ die Mehrausgabe an Arbeit vor, die eben auf Rechnung der Verminderung der Coërcitivkräfte und des Molekularmagnetismus zu setzen ist.

Ich will nun zuerst annehmen, dass überhaupt kein freier Magnetismus auftrete, wie dies bei der Magnetisirung eines Ringes in der That der Fall ist. Dann ist:

$$\frac{\mu' - \mu_0}{\mu_0} = \frac{C_1 t}{x_0} \qquad 2)$$

zu setzen, da die Zunahme einer magnetischen Einheit in Folge der Abnahme der Coërcitivkräfte für $t = 0$ und $x = \infty$ verschwindet. Je weiter nämlich die Magnetisirung vorgeschritten ist, um so geringer ist der Einfluss der Coërcitivkräfte auf dieselbe und um so kleiner wird auch die durch ihre Änderung erzielte Vermehrung der Magnetisirbarkeit ausfallen. Es wird daher die Mehrarbeit

$$p = x_0(\mu' - \mu_0) = C_1 t \mu_0. \qquad 3)$$

In diesem Ausdrucke stellt C_1 eine Constante vor, so lange man eben nicht zu sehr hohen Temperaturen übergeht; allgemeiner wäre wohl

$$C_1 = c_1 - c_2 t$$

zu setzen, da bei sehr hohen Temperaturen die Änderung von μ' verschwinden muss.

Was nun den zweiten Theil des Processes, den des Sinkens von μ' auf μ_t betrifft, so ist einleuchtend, dass:

$$\mu' - \mu_t = \mu_t B_1 t (1 + B_2 t) \qquad 4)$$

genommen werden kann. Schreibt man für $B_1(1 + B_2 t)$ kurz B_0, so wird $(\mu' - \mu_t) = B_0 t \mu_t$ und es ergibt sich, falls keine freien Magnetismen auftreten:

$$\frac{\mu_t - \mu_0}{\mu_0} = \frac{t}{1 + B_0 t} \left[\frac{C_1}{x_0} - B_0\right] \qquad 5)$$

Man sieht, dass $\mu_t \lessgtr \mu_0$ ist, je nachdem $\frac{C_1}{x_0} \lessgtr B_0$ wird und dass für

$$x_1 = \frac{C_1}{B_0} = \frac{c_1 - c_2 t}{B_1(1 + B_2 t)}$$

die beiden Momente μ_0 und μ_t einander gleich werden; zugleich erhellt, dass x_1 um so kleiner ausfällt, je höher die Temperatur t ist.

Treten nebst den vorhandenen Coërcitivkräften auch noch freie magnetische Massen auf, so fällt die Untersuchung etwas anders aus. Die primäre Wirkung beim Erwärmen besteht ohne Zweifel auch hier darin, dass die freien magnetischen Massen ab-, demnach die Momente zunehmen und so zu der oben gege-

benen Mehrarbeit $p = C_1 t\mu_0$ eine weitere analoge Mehrarbeit $q = D_1 t\mu_0$ hinzukommt. Da aber die Momente in Folge dieser Vorgänge gestiegen sind, so müssen als secundäre Wirkung auch die freien Magnetismen um etwas vermehrt und demnach rückwirkend die Momente um einen gewissen Betrag verringert worden sein. Die Arbeit q wird somit ebenfalls verkleinert erscheinen und wird diese Verminderung von q um so bedeutender ausfallen, je grösser eben q schon war. Statt q wäre also $q(1-D_2 q)$ zu nehmen, so dass man erhielte:

$$x_0(\mu_t - \mu_0) = [p + q(1 - D_2 q)] - x_0(\mu' - \mu_0) =$$
$$= A_1 t\mu_0 - A_2 t^2 \mu_0^2 - B_0 t\mu_t,$$

wenn $C_1 + D_1 = A_1$ und $D_1^2 D_2 = A_2$ gesetzt werden.

Hieraus ergibt sich schliesslich:

$$\frac{\mu_t - \mu_0}{\mu_0} = \frac{t}{1 + B_0 t}\left[\frac{A_1 - A_2 t\mu_0}{x_0} - B_0\right] \tag{6}$$

Diese Gleichung ist allgemeiner Natur wie Nr. 5, indem bei dem Fehlen der freien magnetischen Massen $A_2 = 0$ zu setzen ist.

Meine Versuche ergeben A_1 bedeutend grösser als A_2. Es zeigt sich ferner, dass für hohe Temperaturen t und grosse Momente μ_0 in der That $A_1 - A_2 t\mu_0$ negativ werden kann; da aber diese Differenz durch x_0 dividirt wird, so verschwindet der Quotient immer mehr gegen B_0.

Das Verhältniss $\frac{\mu_t - \mu_0}{\mu_0}$ liefert uns auch ein Maass für die Zunahme der Magnetisirbarkeit, indem es gleich ist:

$$\frac{\frac{\mu_t}{x_0} - \frac{\mu_0}{x_0}}{\frac{\mu_0}{x_0}} = \frac{k_t - k_0}{k_0}.$$

Wird der Stab von t_0 auf die Temperatur von t' Graden gebracht, so sind, strenge genommen, eigentlich zwei derartige Gleichungen wie Nr. 6 aufzustellen.

Die Formel 6 wird anschaulicher, wenn in dieselbe jene magnetisirende Kraft x_1 eingeführt wird, bei welcher die beiden Momente μ_t und μ_0 einander gleich sind. Werden die Kräfte x_0 als Abscissen und die Momente μ_0 und μ_t als Ordinaten dar-

gestellt, so erhält man zwei Curven, deren Durchschnittspunkt eben die Coordinaten x_1 und μ_1 haben soll; für diese besteht die Beziehung:

$$\frac{A_1 - A_2 t \mu_1}{x_1} = B_0, \tag{7)}$$

woraus sich, ähnlich wie oben, wiederum ergibt, dass x_1 mit wachsendem t abnimmt.

Setzt man den Werth $A_1 = B_0 x_1 + A_2 t \mu_1$ in die obige Gleichung 6), so erhält sie der Form:

$$\frac{\mu_t - \mu_0}{\mu_0} = \frac{x_1 - x_0}{x_0} \frac{t}{1 + B_0 t} \left[B_0 + A_2 t \frac{\mu_1 - \mu_0}{x_1 - x_0} \right]. \tag{8)}$$

Dabei bleibt der Ausdruck $\frac{\mu_1 - \mu_0}{x_1 - x_0}$ positiv und nimmt, da die Momente in schwächerem Verhältnisse als die Kräfte zunehmen, mit dem Wachsen der x immer mehr ab.

Meine Versuche zeigen nun in der That, dass das Verhältniss:

$$\frac{\mu_t - \mu_0}{\mu_0} : \frac{x_1 - x_0}{x_0}$$

innerhalb der angewandten magnetisirenden Kräfte stetig und zwar fast bis auf die Hälfte des Anfangswerthes herabsinkt. Da die Stäbe dabei in gewöhnlichen, geraden Spulen lagen und somit sicher freie magnetische Massen auftraten, so findet dieses eigenthümliche Verhalten in der angegebenen Theorie seine befriedigende Erklärung.

Bei der Magnetisirung eines Ringes müsste der erwähnte Quotient wegen $A_2 = 0$ constant erscheinen.

Aus der Gleichung 6) lässt sich unter andern auch schliessen, dass für jene kleineren Werthe von μ_0, die den zugehörigen magnetisirenden Kräften x_0 proportional sind, die Differenz $\mu_t - \mu_0$ nahezu constant sein muss. Die beiden Curven werden daher dort, wo sie als Gerade erscheinen, auch zu einander ziemlich parallel sein, was in der That meine Versuche bestätigen.

(Vergleicht man damit die bekannte von W. Weber gegebene Formel:

$$\mu_0 = {}^2/_3 \frac{m}{D} x_0,$$

so würde daraus folgen, dass das Maximum m nahe in demselben Verhältnisse wie die Directionskraft D abnahm).

Aus der Gleichung 6) ergibt sich schiesslich für die Abnahme der Maxima m_0 und m_t, d. i. für $x_0 = \infty$

$$\frac{m_0 - m_t}{m_0} = \frac{B_0 t}{1 + B_0 t}. \qquad 9)$$

Da nun Stefan[1] eine sichere Methode zur Ermittlung des jeweiligen Maximums angegeben hat, so ist es, wenn nur die Magnetisirung 70% übersteigt, immer möglich, diese Gleichung zu verificiren.

3. Nach diesen theoretischen Auseinandersetzungen gehe ich nun zur Mittheilung der an zwei Eisencylindern durchgeführten Beobachtungen.

Der erste Stab hatte eine Länge $2l = 231$ Mm., Dicke $d = 2$ Mm. und ein Gewicht $p = 6{\cdot}785$ Gr.; die angewandten Temperaturen waren:

$$t_1 = 15° \text{ und } t_2 = 544°.$$

Die Berechnung der magnetischen Momente (per Milligramm) erfolgte nach der bekannten Formel:

$$M = H \frac{(R^2 - \lambda^2)^2}{2R} \operatorname{tg} \alpha$$

in der $H = 1{\cdot}9$, $R = 807{\cdot}5$ Mm. und $\lambda = 0{\cdot}8 \times l$ zu nehmen war; die Distanz der Skala vom Spiegel betrug 2990 Mm. Ich fand so:

$t_1 = 15°$			$t_2 = 544°$		
μ_0	k_0	x_0	μ_t	k_t	x_0
35·9	4·939	7·3	83·8	11·250	7·5
71·9	5·938	12·1	167·6	14·065	11·9
137·7	7·857	17·5	275·4	15·715	17·5
377·2	12·010	31·4	520·9	16·382	31·8
730·4	13·946	52·4	796·3	14·948	53·3
964·0	13·568	71·1	952·0	13·153	72·4
1227·4	11·360	108·0	1137·6	10·095	112·5
1329·2	9·693	137·1	1221·4	8·429	144·9

[1] Stefan, Über die Tragkraft der Magnete. Sitzb. der k. Akademie, LXXXI. Bd., II. Abth. pag. 99.

Nach diesen Daten wurden für beide Temperaturen die Magnetisirungscurven (x Abscissen, μ Ordinaten) construirt und an zehn verschiedenen Stellen die zu demselben x_0 gehörigen Werthe der Momente mit möglichster Sorgfalt bestimmt. Für den Durchschnittspunkt erhielt ich so: $x_1 = 65$ und $\mu_1 = 910$, und konnte nun aus den neun verschiedenen Werthen des Quotienten

$$\frac{\mu_t - \mu_0}{\mu_0} : \frac{x_1 - x_0}{x_0} = P + Q \frac{910 - \mu_0}{65 - x_0}$$

die wahrscheinlichsten P und Q und hieraus (nach Gleichung 8) die Grössen A_1 und A_2 leicht berechnen. Dabei nahm ich:

$$t = 544 - 15 = 529^\circ$$

und die Anfangstemperatur gleich Null; es ist das Letztere desshalb erlaubt, weil sich die Magnetisirbarkeit bei einer Temperaturänderung von 0° auf 15° nur unmessbar wenig ändert.

Ich fand so:

$$A_1 = 0{\cdot}042245, \; A_2 = 0{\cdot}00000005621, \; A_2 t = 0{\cdot}00002973,$$
$$A_1 = 1421 . A_2 t \text{ und } B_0 = 0{\cdot}0002336.$$

Nach der Stefan'schen Methode, sowie aus der Zeichnung ergab sich:

$$B_0 = \frac{1878 - 1635}{1878 \times t} = 0{\cdot}0002446;$$

allerdings muss bei diesem Werthe hervorgehoben werden, dass die Magnetisirung kaum 70% des Maximums erreichte, und desshalb die Anwendung der erwähnten Methode nicht völlig gerechtfertigt war.

Die gute Übereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung zeigt die folgende Tafel:

x_0	μ_0	$\mu_t - \mu_0$	μ_t	μ_t	Differenz
		berechnet		beobachtet	
12	71	+104	175	170	− 5
17·5	138	+126	264	276	+12
31·4	377	+134	511	514	+ 3
53·3	742	+ 51	793	796	+ 3
65	910	0	910	910	0
71·1	964	− 19	945	942	− 3
108	1221	−103	1118	1116	− 2
120	1270	−117	1153	1160	+ 7
130	1300	−126	1174	1180	+ 6
140	1325	−133	1192	1190	− 2

Wie man aus dem viermaligen Zeichenwechsel der Differenzen erkennt, liegen die berechneten Werthe bald etwas über, bald unter den beobachteten; die Differenzen selbst sind so gering, dass sie sicher von den unvermeidlichen Beobachtungsfehlern überragt werden. Es ist dieses gute Zusammenfallen von Beobachtung und Rechnung umsomehr hervorzuheben, als die Änderungen der Momente, wie man z. B. bei $x_0 = 17 \cdot 5$ sieht, bis auf $100^0/_0$ des ursprünglichen Werthes steigen können.

Auf sehr kleine magnetisirende Kräfte habe ich die Formel nicht ausgedehnt, da hier die Beobachtungen wegen des Einflusses des nicht völlig zu eliminirenden permanenten Magnetismus allzu unsicher ausfallen. Immerhin ist der Schluss gestattet, dass die Gleichung 6) das Gesetz der Änderung der Magnetisirbarkeit nicht allein von $\mu_0 = 71$ bis $\mu_0 = 1325$, sondern auch noch für grössere magnetische Momente darstellt.

Hervorgehoben mag noch werden, dass für die Kräfte $x_0 = 17 \cdot 5$ und $x_0 = 31 \cdot 4$ die Grössen $\mu_t - \mu_0$ einander nahe gleich sind und somit innerhalb dieses Bereiches die Curven fast parallel erscheinen. — Ähnlich verhielt sich ein zweiter Stab, der von 20° auf 307° erhitzt wurde und für den die Grössenwerthe $2l = 242$, $d = 2$ und $p = 6 \cdot 377$ ermittelt wurden. In gleicher Weise erhielt ich für die Constanten:

$$A_1 = 0 \cdot 112889, \quad A_2 = 0 \cdot 0000003229, \quad A_2 t = 0 \cdot 00009267,$$
$$A_1 = 1218 . A_2 t \quad \text{und} \quad B_0 = 0 \cdot 0002224,$$

woraus sich ergab:

x_0	μ_0	$\mu_t - \mu_0$	μ_t	μ_t	Differenz
		berechnet		beobachtet	
11·56	44·5	+110	154·5	158	+ 3·5
16·8	115	182	297	303	+ 6
30·64	336·9	222	559	576	+17
51·03	711·8	134	846	836	−10
68·44	922	+ 44·5	966·5	955	−11·5
80·5	1025	0	1025	1025	0
102·9	1176	− 58	1118	1130	+12
136·6	1290·2	− 94	1196	1220	+24

Es stehen sonach auch hier Rechnung und Beobachtung in guter Übereinstimmung.

Für die Grösse B_0 ergibt die Zeichnung einen etwas kleineren Werth.

Da wir oben $B_0 = B_1\,(1+B_2 t)$ gesetzt und nun für zwei verschiedene Temperaturen die entsprechenden Werthe B_0 bestimmt haben, so erhalten wir zwei Gleichungen, aus denen wir B_1 und B_2 in roher Annäherung finden können. Es ergibt sich auf diese Weise:

$$B_1 = B_2 = 0\cdot00021001,$$

wobei allerdings die Voraussetzung mit unterläuft, dass diese Grössen für alle Stäbe constant seien.

Meine früheren Versuche bieten immerhin einigen Anhalt zur Prüfung dieser Annahme, da die damals magnetisirten Stäbe schon einen bedeutenden Magnetismus angenommen hatten. So gibt der in meiner ersten Arbeit mit II*a* bezeichnete Stab Curven der Magnetisirbarkeit (μ_0 Abscisse, $\frac{\mu_0}{x_0} = k_0$ Ordinate), die, wie zuerst von Stefan[1] hervorgehoben wurde, für grosse μ_0 in gerade Linien übergehen müssen. Der Durchschnittspunkt einer solchen Geraden mit der Abscissenaxe liefert eben das zugehörige Maximum. Ihre Gleichungen lauten in diesem Falle:

$$k_0 = 0\cdot0687\,(m_0 - \mu_0) \text{ und } k_t = 0\cdot00769\,(m_t - \mu_0),$$

woraus sich umgekehrt m_0 und m_t aus den letzten fünf Beobachtungen ergeben.

Ich erhalte für m_0:

1791·9, 1785·0, 1793·6, 1789·2, 1791·8

und daraus als Mittelwerth

$$m_0 = 1790\cdot3,$$

und ebenso für m_t:

1745·8, 1738·0, 1747·7, 1742·9, 1747·1,

also im Mittel

$$m_t = 1744\cdot3,$$

woraus sich für $t = 111°$ ergibt:

$$B_0 \doteq 0\cdot000232 \text{ und } B_1 = 0\cdot000226.$$

---

[1] Sitzb. LXIX. u. LXXXI. Bd.

Die gute Übereinstimmung dieses Werthes mit dem oben erhaltenen rechtfertigt die gemachte Annahme. Es kann daher die verhältnissmässige Abnahme des Maximums irgend eines Stabes in erster Annäherung zu $0{\cdot}00021 \times t$ genommen werden, wenn die Magnetisirung bei $0°$ und $t°$ stattfand.

Wegen $B_0 = B_1(1+B_1 t)$ erlangt nun die Gleichung 6) die Form:

$$\frac{\mu_t - \mu_0}{\mu_0} = t\left[\frac{(1-B_1 t)(A_1 - A_2 t \mu_0)}{x_0} - B_1\right] \tag{10}$$

die sich auch direct etwas einfacher ableiten lässt.

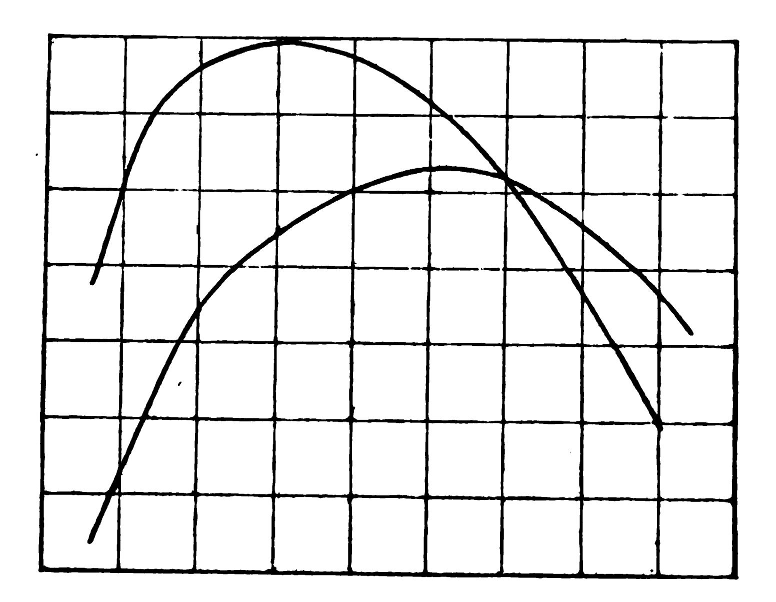
Schliesslich möge ein für die Theorie der Magnetisirung wichtiger Umstand erwähnt werden. Es hat nämlich Stefan wiederholt darauf hingewiesen, dass das Maximum der Magnetisirungsfunction k in der Darstellung $k = f(\mu)$ für alle Eisen- und Stahlarten nahe an eine und dieselbe Stelle, nämlich zwischen $\mu = {}^1/_3 m$ und $\mu = {}^2/_5 m$ zu liegen kommt, während die Grösse dieses Maximalwerthes von einer Art zur andern bedeutend variirt.

Um nun zu sehen, wie sich in dieser Beziehung ein Stab bei höherer Temperatur verhalte, habe ich für den ersten Stab aus der oben gegebenen Darstellung $\mu_0 = f_1(x_0)$ und $\mu_t = f_2(x_0)$ die Curven der Magnetisirbarkeit, die den Formen $k_0 = F_1(\mu_0)$ und $k_t = F_2(\mu_0)$ entsprechen, abgeleitet und so die beiliegende Zeichnung erhalten[1]. Aus derselben ist ersichtlich, dass der Wendepunkt bei den verschiedenen Temperaturen die Abscissen $\mu'_0 =$ 730 und $\mu'_t = 500$ besitzt. Hieraus folgt für die Verhältnisse:

$$\frac{\mu'_0}{m_0} = \frac{730}{1878} = 0{\cdot}38887 \text{ und } \frac{\mu'_t}{m_t} = \frac{500}{1635} = 0{\cdot}3058.$$

Es entspricht daher der Abnahme des Maximums eine verhältnissmässig stärkere Verminderung der Abscisse des Wendepunktes. Das gleiche Resultat hatten auch meine ersten Versuche ergeben.

[1] Die Grössen k und μ sind dabei mit ${}^2/_3$ multiplicirt und schliesslich jede Ordinate um denselben Betrag vermindert.



NACHTRAG.

Ich hatte die vorliegenden theoretischen und experimentellen Untersuchungen grösstentheils schon vollendet, als mir die Arbeit von Baur[1] über denselben Gegenstand zu Gesichte kam, der wieder von meiner ersten, am 10. Juni 1880 der k. Akademie vorgelegten Abhandlung keine Kenntniss hatte. Baur magnetisirt einen Ring bei verschiedenen Temperaturen, deren Änderung in maximo 137° betrug. Unter Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate gelangt er auf empirischem Wege zu einer Formel, die in unseren Zeichen lautet:

$$\frac{\mu_t - \mu_0}{\mu_0} = t\left(\frac{a + ct}{x} - b\right)$$

und somit einige Ähnlichkeit mit der oben für diesen Fall gegebenen Gleichung 5) zeigt. Nur in Bezug auf das Glied $a + ct$ unterscheiden sich beide Formen, da die Constante c nach Baur

[1] Wiedemann's Annalen Bd. XI, 1880.

sicher positiv zu nehmen wäre. Die Versuche sprechen nun für die entgegengesetzte Anschauung, da sich aus meinen sämmtlichen Beobachtungen für grössere t auch eine kleinere Abscise x_1 des Durchschnittspunktes beider Curven ergibt.

In Übereinstimmung damit steht auch die Bemerkung (l. c. pag. 407), dass für grosse magnetisirende Kräfte das temporäre magnetische Moment mit wachsender Temperatur allmälig abnimmt.

VI. SITZUNG VOM 17. FEBRUAR 1881.

Das w. M. Herr Prof. L. Schmarda übersendet die von Herrn Henry Brady in New-Castle ausgeführte wissenschaftliche Bearbeitung der während der österreichisch-ungarischen Nordpolexpedition gesammelten Tiefseeproben unter dem Titel: „Arctic Foraminifera from Sountings obtained on the Austro-Hungarian North-Pol-Expedition of 1872—1874."

Das w. M. Herr Director Dr. Steindachner übersendet eine Abhandlung über einige neue und seltene Fische des Wiener Museums unter dem Titel: „Ichthyologische Beiträge" (X.).

Das c. M. Herr Prof. E. Weyr in Wien übersendet eine Abhandlung: „Über Involutionen zweiter Stufe."

Ferner übersendet Herr Prof. Weyr eine Abhandlung des Herrn Prof. Dr. C. Le Paige in Lüttich: „Bemerkungen über cubische Involutionen."

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. „Studie über Energie producirende chemische Processe", Mittheilung aus dem chemischen Laboratorium der deutschen technischen Hochschule zu Prag, von Herrn F. Wald.
2. „Das Problem der vier Punkte im Sinne der neueren Geometrie", von Herrn Prof. W. Binder an der n.-ö. Landes-Oberreal- und Maschinenschule in Wiener Neustadt.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ritter v. Brücke berichtet über ein Verfahren zur Reindarstellung der von ihm am 7. Jänner d. J. beschriebenen stickstoff- und schwefelhaltigen Säure.

Das w. M. Herr Director E. Weiss überreicht eine Abhandlung: „Über die Berechnung der Differentialquotienten des Radius-Vectors und der wahren Anomalie nach der Excentricität in stark excentrischen Bahnen."

Herr J. V. Rohon in Wien überreicht einen Bericht über den von ihm mit Unterstützung der kais. Akademie der Wissenschaften untersuchten „Amphioxus lanceolatus".

Herr Dr. Zdenko Hanns Skraup in Wien überreicht eine von ihm im Universitätslaboratorium des Prof. Lieben ausgeführte Arbeit, betitelt: „Synthetische Versuche in der Chinolinreihe."

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Abetti, Antonio, Dr.: Sulla Determinazione del tempo coll'osservazione dei passaggi delle stelle pel verticale della polone. Venezia. 1880; 8°. — Osservazioni e Calcoli eseguiti sulla Cometa Swift. Venezia, 1880; 8°.

Academia, real de ciencias medicas, fisicas y naturales de la Habana. Tomo XVII. Entrega 198. Enero 15. Habana, 1881; 8°.

Académie de Médecine: Bulletin. Nrs. 4—6. Paris, 1881; 8°.

Accademia, R. dei Lincei: Atti. Anno CCLXXVIII. 1880—81. Serie terza. Transunti. Vol. V. Fascicolo 4°. Seduta del 16. Gennaio 1881. Roma; 4°.

Akademie, Kaiserliche Leopoldino - Carolinisch - Deutsche der Naturforscher: Leopoldina. Heft 17, Nr. 1—2. Halle a. d. S., Januar 1881; 4°.

Annuario marittimo per l'anno 1881. XXXI. Annata. Trieste, 1880; 8°. — Repertorio delle leggi ed ordinanze marittime e dei trattati dal 1835 al 1881. 8°.

Apotheker-Verein, allgem. österr.: Zeitschrift (nebst Anzeigen-Blatt). XIX. Jahrgang, Nr. 5. Wien, 1881; 8°.

Astronomische Mittheilungen von Dr. Rudolf Wolf. LI; 8°.

Chemiker - Zeitung: Central-Organ. Jahrgang V. Nr. 6. Cöthen, 1881; 4°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome XCII. Nr. 5. Paris, 1881; 4°.

Gesellschaft, k. k. geographische, in Wien: Mittheilungen. Band XXIV. (N. F. XIV), Nr. 1. Wien, 1881; 4°.

Journal für praktische Chemie. (N. F.) Band XXIII, 3. und 4. Heft. Leipzig, 1881; 8°.

— the American of Otology. Vol. III, Nr. 1. January 1881. New-York; 8°.

Leiter Josef: Ein neuer Wärmeregulator zur Wärmeentziehung und Wärmezufuhr für den erkrankten menschlichen Körper und ein neuer Irrigationsapparat. Wien 1881; gr. 8°.

Museum of Comparative Zoology at Harvard College: Bulletin. Vol. VIII. Nrs. 1 und 2. Cambridge, 1881; 8°.

Nuovo Cimento, il 3ª serie. Tomo VIII. Novembre e Dicembre 1880. Pisa, 1881; 8°.

Pickering, William, H.: Photometric Researches. Cambridge, 1880; 8°.

Reichsanstalt, k. k. geologische: Verhandlungen. Nr. 1—3. Wien, 1881; 8°.

— — Jahrbuch. Jahrgang 1880. XXX. Band. Nr. 4. October, November, December. Wien, 1880; 8°.

— — Die Gasteropoden der Meeres-Ablagerungen der ersten und zweiten miocänen Mediterran-Stufe in der österreichisch-ungarischen Monarchie von R. Hoernes und M. Auinger. 2. Lieferung. Wien, 1880; gr. 4°.

Società degli Spettroscopisti italiani: Memorie. Dispensa 9ª. Settembre, 1880. Roma, 1881; gr. 4°.

Société des Ingénieurs civils: Mémoires et compte rendu des travaux. 4ᵉ série, 33ᵉ année, 12ᵉ cahier. Paris, 1880; 8°.

— géologique de France: Bulletin. 3ᵉ série, tome VII. — 1879. Nr. 8. Paris, 1878—79; 8°.

— ouralienne d'Amateurs des sciences naturelles: Bulletin. Tome V, livr. 3. Jekaterinburg, 1880; 4°. — Tome VI, livr. 1. Jekaterinburg, 1880; 4°.

United States: Message from the President communicating Information in relation to the proceedings of the International Monetary Conference held at Paris in August, 1878. Washington, 1879; 8°.

Upsala, Universität: Akademische Schriften pro 1878, 1879 und 1880. — 25 Stücke 4° und 8°.

Verein der Freunde der Naturgeschichte in Mecklenburg: Archiv. 34. Jahr. (1880). Neubrandenburg, 1880; 8°.

Wiener Medizin. Wochenschrift. XXXI. Jahrg., Nr. 7. Wien, 1881; 4°.

Über Involutionen zweiter Stufe.

Von Em. Weyr.

In der Abhandlung: „Über die Abbildung einer rationalen ebenen Curve dritter Ordnung auf einen Kegelschnitt" (Sitzungsb. v. 20. März 1879) habe ich in Art. 11 eine allgemeine Methode zur Bestimmung des neutralen Paares einer durch drei Tripel bestimmten Involution dritten Grades und zweiter Stufe entwickelt.

Ist die Involution als Punktinvolution auf einem Kegelschnitte K durch drei Punkttripel $a_1 a_2 a_3$, $b_1 b_2 b_3$, $c_1 c_2 c_3$ gegeben, so sind je zwei der durch die Tripel gebildeten Dreiecke einem Kegelschnitte K_{ab}, K_{bc}, K_{ca} respective umgeschrieben; diese drei Kegelschnitte besitzen eine gemeinschaftliche (leicht in linearer Weise construirbare) Tangente Δ, welche K in den, das neutrale Paar constituirenden Punkten schneidet.

Wenn man zwei Seiten eines der drei Dreiecke mit Δ zum Schnitte bringt, so erhält man zwei Punkte, welche mit dem auf K liegenden Schnittpunkte der beiden Seiten ein Dreieck bilden; jeder diesem Dreiecke umschriebene Kegelschnitt schneidet K in einem Tripel der cubischen Involution zweiter Stufe.

Um also die Involution zu vervollständigen, d. h. um den ein gegebenes Punktepaar $x_1 x_2$ von K zu einem Tripel ergänzenden Punkt x_3 zu finden, wird man ihn als den vierten Schnittpunkt von K mit dem durch x_1 und x_2 gehenden und jenem Dreiecke umschriebenen Kegelschnitte leicht in linearer Weise finden können.

Im früheren ist offenbar auch der folgende Satz über cubische Involutionen erster Stufe mit bewiesen:

„Wenn drei beliebige Elemententripel auf einem rationalen Träger gegeben sind, so bestimmen je zwei eine cubische Invo-

lution erster Stufe; die drei sich so ergebenden cubischen Involutionen haben ein gemeinschaftliches Elementenpaar."

Man kann in ähnlicher Weise zu den $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ neutralen Elementenpaaren[1] einer Involution n^{ten} Grades und zweiter Stufe gelangen.

„Wenn von einer Involution n^{ten} Grades und zweiter Stufe drei beliebige sie bestimmende Elementengruppen $a_1 a_2 \ldots a_n$, $b_1 b_2 \ldots b_n$, $c_1 c_2 \ldots c_n$ gegeben sind, so bestimmen je zwei eine Involution n^{ten} Grades und erster Stufe. Diese drei Involutionen besitzen $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ gemeinschaftliche Elementenpaare und diese sind zugleich die neutralen Paare der Involution zweiter Stufe."

Denkt man sich die Involution wieder als Punktinvolutionen auf K, so hat man den Satz:

„Wenn einem Kegelschnitte K drei beliebige vollständige n-Ecke eingeschrieben sind, so berühren die sämmtlichen Seiten je zweier eine bestimmte Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Classe und die drei sich so ergebenden Curven haben $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ gemeinschaftliche Tangenten, welche K in eben so vielen Punktepaaren schneiden; diese Punktepaare sind die neutralen Paare jener Involution n^{ten} Grades zweiter Stufe, welche durch die Ecken der drei n-Ecke als Elementengruppen bestimmt erscheint."

„Wenn man die drei von den Ecken der n-Ecke gebildeten Gruppen als die Bilder dreier gerader Punktgruppen einer rationalen, ebenen Curve n^{ter} Ordnung betrachtet, so sind die $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Punktepaare des vorstehenden Satzes die Bilder der Doppelpunkte der Curve."

---

[1] Siehe: „Über Involutionen n^{ten} Grades und K^{ter} Stufe Art. 18, Sitzungsb. vom 17. April 1879.

Bemerkungen über cubische Involutionen.

Von Dr. C. Le Paige,
Professor an der Universität in Lüttich.

Indem ich mir erlaube auf einen an dieser Stelle schon behandelten Gegenstand zurückzukommen, glaube ich auf einige interessante Fragen aus der Theorie der cubischen Involutionen hinzuweisen, deren Erledigung mir auch bei vielen die Curven dritter Ordnung betreffenden Betrachtungen von Wichtigkeit zu sein scheint.[1] Zunächst möge eine rein geometrische Frage behandelt werden, welche uns zu einigen Resultaten in Bezug auf eine gewisse Zahl von Combinanten cubischer Formen und deren geometrische Darstellung führen wird. Das betreffende Problem ist folgendes: Es seien auf einem als Träger betrachteten Kegelschnitte drei Punktetripel $x_1x_2x_3$, $y_1y_2y_3$, $z_1z_2z_3$ einer cubischen Involution zweiter Stufe gegeben; man soll jenen Punkt u_3 finden, welcher mit zwei gegebenen Punkten u_1u_2 des Kegelschnittes ein viertes Tripel bildet.

Professor Em. Weyr hat in seiner Abhandlung[2] über Involutionen n-ten Grades und K-ter Stufe zwei Lösungen der Aufgabe für ein beliebiges n und $K=2$ angedeutet.

Die eine beruht auf der Betrachtung der ebenen Schnitte rationaler Raumcurven, und die andere auf der Lösung der analogen Aufgabe für Involutionen erster Stufe. Wir wollen nun keineswegs eine eigentliche Lösung des gestellten Problems geben, sondern einige Betrachtungen durchführen, welche vielleicht zu einer linearen Lösung führen werden.

---

[1] Mémoire sur les courbes du troisième ordre. I. partie. Mém. de l'Acad. r. d. Belg. 1880.

[2] Sitzungsb. d. k. Akad. d. W. in Wien 1879, Bd. LXXIX.

Vor allem ist ersichtlich, dass die Kegelschnitte, welche durch drei feste Punkte P, Q, R hindurchgehen, von denen der eine P, auf und die beiden anderen Q, R ausserhalb der Peripherie eines Kegelschnittes C_2 liegen, auf diesem eine cubische Involutionen zweiter Stufe bestimmen.

Es sei also B ein beliebig gewählter nicht auf dem Kegelschnitte C_2 liegender Punkt; ist A ein beliebiger Punkt von C_2, so werden sich die beiden Kegelschnitte $(ABx_1x_2x_3)$, $(ABy_1y_2y_3)$ in zwei Punkten A^1B^1 schneiden, und der Kegelschnitt $(A^1B^1z_1z_2z_3)$ wird C_2 in einem Punkte α treffen. Es ist klar, dass die Punkte A^1B^1A ein System QRP darstellen, wenn α mit A zusammenfällt. Um zu entscheiden wie oft dies geschieht, muss man die Beziehung zwischen A und α näher kennen lernen. Man erkennt sofort, dass jedem A ein einziges α entspricht. Lassen wir den Punkt A sich auf C_2 fortbewegen, so beschreiben die Kegelschnitte $(ABx_1x_2x_3)(ABy_1y_2y_3)$ offenbar zwei projectivische Büschel, deren Erzeugniss (nachdem sie den Scheitel B gemeinschaftlich haben) eine Curve vierter Ordnung sein wird, welche B zum Doppelpunkte hat; nun bildet aber C_2 einen Theil des Erzeugnisses, welcher nicht durch B hindurchgeht, folglich wird der übrige Theil ein Kegelschnitt Σ_2 sein für welchen B ein Doppelpunkt ist, d. h. Σ_2 ist ein sich in B schneidendes Geradenpaar. Hieraus folgt also, dass sich die Punkte A^1B^1 auf zwei durch B gehenden Geraden Σ_2 bewegen. Da übrigens jedem Punkte A^1 nur ein einziger Punkt B^1 entspricht, und umgekehrt, so wird die Gerade A^1B^1 einen Kegelschnitt Σ'_2 umhüllen, welcher das Geradenpaar Σ_2 berührt. Wählt man nun auf C_2 einen beliebigen Punkt α, so bestimmen die Kegelschnitte des Büschels $(\alpha z_1z_2z_3)$ auf den beiden Geraden Σ_2 zwei projectivische quadratische Punktinvolutionen, deren Erzeugniss eine die Geraden Σ_2 berührende Curve dritter Classe K_3 sein wird, da der, beiden Involutionen gemeinschaftliche Punkt B sich offenbar selbst entspricht.

Um nun die einem Punkte α entsprechenden Punkte A^1B^1 und demgemäss auch A zu erhalten, hat man nur die den Curven Σ'_2K_3 gemeinschaftlichen Tangenten aufzusuchen; ihre Gesammtzahl ist 6 und wenn man die festen Tangenten Σ_2 absondert, so bleiben vier variable zurück. Es entspricht somit jedem α ein Quadrupel A und folglich wird α fünfmal mit dem entsprechenden

A zusammenfallen. Eine einfache Betrachtung zeigt, dass von diesen fünf Coincidenzen vier von den Schnittpunkten von C_2 mit Σ_2 dargestellt werden; diese Punkte liefern jedoch keine Lösung der Aufgabe.

Man wird somit einen Punkt $\bar{\omega}$ auf C_2 erhalten, in welchem α mit A zusammenfällt und der zugleich eine Lösung des Problems liefert. Die beiden Kegelschnitte $(B\bar{\omega}x_1x_2x_3)$, $(B\bar{\omega}y_1y_2y_3)$ schneiden sich in zwei Punkten $\mu\nu$, welche mit $\bar{\omega}$ ein System PQR darstellen. Man kann die Construction vereinfachen, wenn man den Punkt B etwa in den Schnittpunkt von x_1x_2 mit y_1y_2 verlegt.

Jeder durch $\bar{\omega}\mu\nu$ hindurchgehende Kegelschnitt schneidet C_2 in einem Tripel der cubischen Involution zweiter Stufe; es bilden somit die Schnittpunkte $\sigma_1\sigma_2$ von C_2 mit der Geraden $\overline{\mu\nu}$ mit irgend einem Punkte von C_2 ein solches Tripel, d. h. $\sigma_1\sigma_2$ bilden das neutrale Elementenpaar[1] der Involution.

Diese beiden Punkte stellen die Hesse'sche Form des Tripels der dreifachen Elemente der Involution dar.[2]

Es seien

$$a_x^3 = a_x'^3 = o,\quad b_x^3 = b_x'^3 = o,\quad c_x^3 = c_x'^3 = o$$

die Gleichungen, welche die drei Tripel $x_1x_2x_3$, $y_1y_2y_3$, $z_1z_2z_3$ darstellen; die drei dreifachen Elemente sind gegeben durch:

$$\lambda_x^3 = (ab)(bc)(ca)a_xb_xc_x = o;$$

nun ist wie wir gezeigt haben:

$$3(ab)(bc)(ca)a_xb_xc_x = (ab)^3c_x^3 + (bc)^3a_x^3 + (ca)^3b_x^3$$

hieraus folgt ein einfacher Ausdruck für die Combinante:

$$h_x^2 = (\lambda\lambda')^2\lambda_x\lambda_x'$$

welcher Ausdruck gleich Null gesetzt die Punkte $\sigma_1\sigma_2$ liefert.

Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} h_x^2 \equiv [(ab)^3]^2(cc')^2c_xc_x' + [(bc)^3]^2(aa')^2a_xa_x' + [(ca)^3]^2(bb')^2b_xb_x' \\ + 2(ab)^3(bc)^3(ac)^2a_xc_x + 2(bc)^3(ca)^3(ba)^2b_xa_x \\ + 2(ca)^3(ab)^3(cb)^2c_xb_x \end{aligned}$$

---

[1] Em. Weyr: Über Involutionen n-ten Grades und K-ter Stufe, Art. 10.

[2] Mém. sur les courbes du troisième ordre. pag. 17.

Hiedurch werden wir zur Betrachtung von Covarianten von der Form

$$(aa')^2 a_x a'_x,\ (ab)^2 a_x b_x,\ (bb')^2 b_x b'_x \text{ u. s. w.}$$

geführt. Die erste ist die Hesse'sche Form von a_x^3, welche man leicht geometrisch auf C_2 darstellen kann. Construirt man nämlich in den Ecken des Dreiecks $x_1 x_2 x_3$ die Tangenten von C_2, so erhält man ein zweites Dreieck, welches mit dem ersten perspectivisch ist; die Perspectivitätsaxe schneidet C_2 in den, durch

$$(aa')^2 a_x a'_x = o$$

gegebenen Punkten, sowie dies aus Professor Em. Weyr's Bemerkungen hervorgeht. [1]

Es bleibt noch die Covariante

$$(ab)^2 a_x b_x$$

welche wir dem Gebrauche gemäss mit θ_x^2 bezeichnen wollen.

An anderer Stelle zeigten wir, dass:

$$\varphi_x^4 \equiv [\theta_x^2]^2 - \Delta_x^2 \nabla_x^2\ {}^2$$

woraus folgt, dass $[\theta_x^2]^2$ ein Quadrupel der Involution:

$$\varphi_x^4 + K \Delta_x^2 \nabla_x^2 = o$$

darstellt.

Es ist nicht schwer die durch

$$\varphi_x^4 = o$$

dargestellten Punkte zu construiren, da es genügt einen von diesen Punkten zu kennen, weil das von ihnen gebildete Viereck ein Diagonaldreieck besitzt, dessen Seiten den Kegelschnitt C_2 in durch

$$T = o$$

dargestellten Punkten schneiden [2]; ebenso leicht erhält man die Punkte

$$\Delta_x^2 \nabla_x^2 = o.$$

---

[1] Bemerkungen über Herrn Le Paige's Abhandlung u. s. w. Sitzb. d. k. Akad. d. W. in Wien. Bd. LXXXI, pag. 163.

[2] Sur la représentation géometrique des covariants d'une forme biquadratique; Bull. de l'Acad. roy. d. Belgique t. L.

Man kann somit die vier Scheitel $p_1 p_2 p_3 p_4$ eines Kegelschnittbüschels construiren, welches auf C_2 die Involution

$$\varphi_x^4 + K\Delta_x^2 \nabla_x^2 = o$$

bestimmt.

Um somit die durch $\theta_x^2 = o$ gegebenen Punkte zu finden, hat man nur jenen Kegelschnitt des Büschels $(p_1 p_2 p_3 p_4)$ zu bestimmen, welcher den Kegelschnitt C_2 doppelt berührt; die Berührungssehne liefert die Punkte $\theta_x^2 = o$.

Die Betrachtung dieser besonderen biquadratischen Involution führt zur geometrischen Interpretation einer anderen Combinante zweier cubischer Systeme.

In der That, die Involution

$$[\theta_x^2]^2 - K'\Delta_x^2 \nabla_x^2 = o$$

besitzt sechs Doppelelemente; dieselben sind gegeben durch:

$$\theta_x^2 [\Delta_x^2 (\nabla\theta) \nabla_x \theta_x + \nabla_x^2 (\Delta\theta) \Delta_x \theta_x] = o$$

und sind daher, wie ersichtlich, die Punkte $\theta_x^2 = o$ und die vier weiteren durch die Combinante

$$\mu_x^4 = \Delta_x^2 (\nabla\theta) \nabla_x \theta_x + \nabla_x^2 (\Delta\theta) \Delta_x \theta_x = o$$

dargestellten Punkte.

Die vier letzteren Punkte liegen auf einem Kegelschnitte, welcher einem Büschel angehört, dessen vier Scheitel leicht bestimmbar sind, weil die Punktepaare:

$$(\Delta\theta)\Delta_x \theta_x = o, \quad (\nabla\theta)\nabla_x \theta_x = o$$

bestimmt erscheinen durch die Polaren der Schnittpunkte der Geraden $\theta_x^2 = o$ mit den beiden Geraden Δ_x^2, ∇_x^2.

Wir haben in einer anderen Arbeit die geometrische Bedeutung der Bedingung:

$$(ab)^3 = o$$

auseinandergesetzt; man kann zu demselben Ziele auch in folgender Art gelangen.

Wenn $(ab)^3 = o$ ist, so kann man das Tripel $a_x^3 = o$ betrachten als der Involution angehörig, welche die Punkte $b_x^3 = o$ zu dreifachen Punkten besitzt.

Es seien nun $y_1 y_2 y_3$, $x_1 x_2 x_3$ die beiden Tripel, welche durch die beiden cubischen Formen dargestellt erscheinen; construiren wir das Dreieck $x_1 x_2 x_3$ und das Dreiseit der zugehörigen Tangenten. Die homologen Seiten beider Dreiecke schneiden sich in drei Punkten $\mu_1 \mu_2 \mu_3$ welche auf den Geraden

$$(bb')^2 b_x b'_x = 0$$

liegen. Hieraus folgt, dass $\mu_1 \mu_2 x_3 y_1 y_2 y_3$ sechs Punkte eines Kegelschnittes sind; dasselbe gilt von $\mu_1 \mu_3 x_2 y_1 y_2 y_3$ und ebenso von $\mu_2 \mu_3 x_1 y_1 y_2 y_3$.

Über Momente höherer Ordnung.

Von dip. Ing. **Ferdinand Wittenbauer,**

Privatdocent an der k. k. technischen Hochschule in Graz.

(Mit 11 Holzschnitten.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 3. Februar 1881.)

Die Aufgabe, welche sich vorliegende Abhandlung stellt besteht in der Untersuchung der Momente höherer Ordnung einer und mehrerer in derselben Ebene gelegenen Flächen bezüglich der in dieser Ebene gelegenen Geraden. Die hiebei zu lösenden Fragen sind folgende:

1. Welches sind die geometrischen Örter aller Geraden, bezüglich welcher das Moment n^{ter} Ordnung einer Fläche dieselbe Grösse besitzt?
2. Welches ist der geometrische Ort aller Geraden, bezüglich welcher die Momente n^{ter} Ordnung zweier in derselben Ebene gelegenen Flächen gleiche Grösse besitzen?
3. Welches sind die Geraden, bezüglich welcher die Momente n^{ter} Ordnung dreier in derselben Ebene gelegenen Flächen gleiche Grösse besitzen?

Hiebei seien die Flächen als gleichförmig mit Masse belegt vorausgesetzt.

1.

Es sei F die zu untersuchende Fläche und wir beziehen dieselbe auf das rechtwinklige Coordinatensystem XOY.

Das Moment n^{ter} Ordnung dieser Fläche bezüglich einer Axe A ist durch den Ausdruck gegeben

$$M^{(n)} = \int d\mu \, r^n,$$

wenn $d\mu$ das Element der Fläche und r dessen Abstand von der Axe bezeichnet. Nun ist nach Fig. 1

$$r = r_1 - \pi,$$

wenn r_1 den Abstand des Flächenelementes von einer durch den Coordinatenursprung gehenden zur A parallelen Axe A_1, und π den Abstand der Axe A vom Ursprunge bezeichnet.

Fig. 1.

Es ist ferner

$$r^n = (r_1 - \pi)^n = r_1^n - \binom{n}{1} r_1^{n-1}\pi + \binom{n}{2} r_1^{n-2}\pi^2 - \ldots \mp \binom{n}{n-1} r_1 \pi^{n-1} \pm \pi^n$$

und

$$M^{(n)} = \int d\mu . r_1^n - \binom{n}{1}\pi \int d\mu . r_1^{n-1} + \binom{n}{2}\pi^2 \int d\mu . r_1^{n-2} - \ldots$$
$$\mp \binom{n}{n-1}\pi^{n-1}\int d\mu . r_1 \pm \pi^n \int d\mu.$$

Die in diesem Ausdrucke vorkommenden Integrale sind die Momente n^{ter} bis 1ter Ordnung der Fläche F bezüglich der Axe A_1; wir können dieselben der Einfachheit wegen bezeichnen nach dem Schema

$$\int d\mu . r_1^k = m^{(k)},$$

wodurch obiger Ausdruck übergeht in

$$M^{(n)} = m^{(n)} - \binom{n}{1}\pi m^{(n-1)} + \binom{n}{2}\pi^2 m^{(n-2)} - \ldots \mp \binom{n}{n-1}\pi^{n-1} m^{(1)} \pm \pi^n F.$$

Diese Momente m müssen nun noch in einer bestimmten Weise ausgedrückt werden. Aus Fig. 2 ist ersichtlich, dass

$$r_1 = y \cos\varphi - x \sin\varphi,$$

mithin wird

$$m^{(k)} = \int d\mu (y \cos\varphi - x \sin\varphi)^k.$$

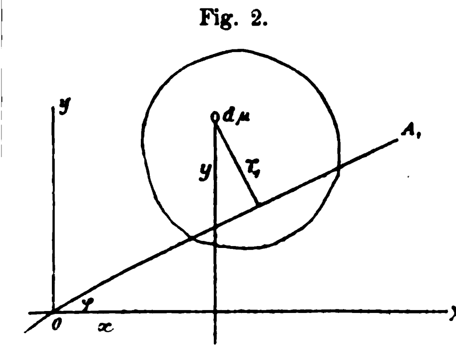
Nun ist

$$(y\cos\varphi - x\sin\varphi)^k = y^k\cos^k\varphi - \binom{k}{1} y^{k-1} x \cos^{k-1}\varphi\sin\varphi + \binom{k}{2} y^{k-2}x^2\cos^{k-2}\varphi\sin^2\varphi - \ldots \mp \binom{k}{k-1} y x^{k-1}\cos\varphi\sin^{k-1}\varphi \pm x^k\sin^k\varphi,$$

daher

$$m^{(k)} = \cos^k\varphi \int d\mu . y^k - \binom{k}{1}\cos^{k-1}\varphi . \sin\varphi \int d\mu . y^{k-1}x + \binom{k}{2} . \cos^{k-2}\varphi . \sin^2\varphi \int d\mu . y^{k-2}x^2 - \ldots \mp \binom{k}{k-1}\cos\varphi\sin^{k-1}\varphi \int d\mu . yx^{k-1} \pm \sin^k\varphi \int d\mu . x^k.$$

Fig. 2.



Die in diesem Ausdrucke auftretenden Integrale sind Momente der Fläche bezüglich der x- und y-Axe, deren Werthe also für ein bestimmtes Coordinatensystem als bekannt vorausgesetzt werden können. Wir bezeichnen diese Momente in der Weise, dass wir schreiben

$$\int d\mu . y^a x^b = \mathfrak{M}^{(a,\,b)}.$$

Mit Benützung dieser Bezeichnung und des für $m^{(k)}$ soeben abgeleiteten Ausdruckes lassen sich nun die Momente $m^{(n)}$, $m^{(n-1)}$, ... $m^{(1)}$ in folgender Art wiedergeben:

$$m^{(n)} = \cos^n\varphi\,\mathfrak{M}^{(n,\,0)} - \binom{n}{1}\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi\,\mathfrak{M}^{(n-1,\,1)} + \ldots\ldots \mp \binom{n}{n-1}\cos\varphi\sin^{n-1}\varphi\,\mathfrak{M}^{(1,\,n-1)} \pm \sin^n\varphi\,\mathfrak{M}^{(0,\,n)}$$

$$m^{(n-1)} = \cos^{n-1}\varphi\,\mathfrak{M}^{(n-1,\,0)} - \binom{n-1}{1}\cos^{n-2}\varphi\sin\varphi\,\mathfrak{M}^{(n-2,\,1)} + \ldots\ldots \mp \binom{n-1}{n-2}\cos\varphi\sin^{n-2}\varphi\,\mathfrak{M}^{(1,\,n-2)} \pm \sin^{n-1}\varphi\,\mathfrak{M}^{(0,\,n-1)}.$$

. . . .

$$m^{(2)} = \cos^2\varphi\,\mathfrak{M}^{(2,\,0)} - 2\cos\varphi\sin\varphi\,\mathfrak{M}^{(1,\,1)} + \sin^2\varphi\,\mathfrak{M}^{(0,\,2)}$$

$$m^{(1)} = \cos\varphi\,\mathfrak{M}^{(1,\,0)} - \sin\varphi . \mathfrak{M}^{(0,\,1)}.$$

Durch diese Ableitung ist die Abhängigkeit der Momente m vom Winkel φ gekennzeichnet. Wir können demgemäss schreiben

$$m^{(k)} = f^k(\varphi),$$

wobei die Hochzahl k beim Functionszeichen ausdrücken mag, dass die Function bezüglich $\cos\varphi$ respective $\sin\varphi$ von $k$ter Ordnung ist.

Der gesuchte Ausdruck für das Moment bezüglich der Axe *A* kann nun in folgender Weise aufgestellt werden:

$$M^{(n)} = f^n(\varphi) - \pi\binom{n}{1}f^{n-1}(\varphi) + \pi^2\binom{n}{2}f^{n-2}(\varphi) - \ldots\ldots \mp \pi^{n-1}\binom{n}{n-1}\cdot f^1(\varphi) \pm \pi^n F$$

Die erste der gestellten Fragen beantwortet sich jetzt von selbst. Denn soll die Gleichung des geometrischen Ortes aller Geraden aufgestellt werden, bezüglich welcher das Moment $n$ter Ordnung der Fläche F denselben Werth

$$M^{(n)} = C$$

besitzt, so lautet dieselbe

$$\pi^n F - \pi^{n-1}\binom{n}{1}f^1(\varphi) + \pi^{n-2}\binom{n}{2}\cdot f^2(\varphi) - \ldots \mp \pi\binom{n}{n-1}f^{n-1}(\varphi) \pm f^n(\varphi) = C. \qquad 1)$$

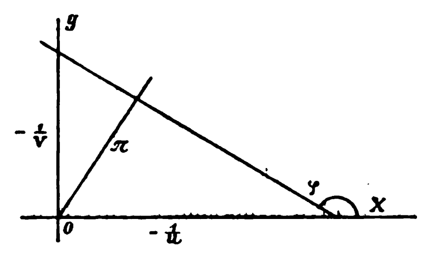
Dies ist die Gleichung einer Curve, ausgedrückt mittelst einer Art von Liniencoordinaten, nämlich durch den Abstand π der erzeugenden Geraden vom Ursprunge O und durch den Winkel φ, welchen diese mit einer bestimmten Axe OX einschliesst.

Bezüglich der Classe dieser Curve kann Folgendes bemerkt werden. Es gelingt unter allen Umständen, die Gleichung homogen zu machen; denn die auf der rechten Seite stehende Constante C braucht zu diesem Zwecke nur mit dem Factor

$$(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)^{\frac{n}{2}}$$

multiplicirt zu werden. Dividirt man sodann die ganze Gleichung durch π^n, und übergeht auf die neuen Liniencoordinaten u und v nach den Transformationsgleichungen (siehe Fig. 3)

Fig. 3.



$$\frac{\sin\varphi}{\pi} = -u$$

$$\frac{\cos\varphi}{\pi} = v,$$

so erhält man die Gleichung der Curve in folgender Gestalt:

$$F - \binom{n}{1}\cdot f^1(u,v) + \binom{n}{2}\cdot f^2(u,v) - \ldots \mp \binom{n}{n-1}\cdot f^{n-1}(u,v) \pm f^n(u,v) = C(u^2+v^2)^{\frac{n}{2}}. \qquad 2)$$

Es ist ersichtlich, dass hier eine Unterscheidung getroffen werden muss, je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist.

Ist n gerade, so wird $\frac{n}{2}$ eine ganze Zahl, und die rechte Seite der Gleichung rational; die Curve besitzt dann die Classe n.

Ist n ungerade, so muss die Gleichung 2) rational gemacht werden; dies geschieht durch Quadriren derselben. Die Classe der Curve ist dann $2n$.

Man kann auch für ein gerades n die Classenzahl der Curve mit $2n$ annehmen, wenn man hinzusetzt, dass die Curve in diesem Falle in zwei Äste zerfällt, welche sich vollkommen decken.

Wir haben also gefunden: der geometrische Ort aller Geraden, bezüglich welcher das Moment n^{ter} Ordnung einer Fläche constant bleibt, ist eine Curve von der Classe $2n$.

2.

Um die zweite Frage zu beantworten, betrachten wir zwei in derselben Ebene gelegene Flächen F_1 und F_2 und beziehen dieselbe auf ein gemeinsames Coordinatensystem XOY.

Jeder der beiden Flächen F_1 und F_2 entspricht eine Schaar von Curven, deren Erzeugungsweise in Nr. 1 betrachtet wurde; der veränderliche Parameter jeder dieser Schaaren ist das Moment $M^{(n)}$. Um daher den Ort aller Axen zu finden, bezüglich welcher die Momente n^{ter} Ordnung der Flächen F_1 und F_2 gleich sind, ist es nur nöthig, aus den Gleichungen der beiden Curvenschaaren den Parameter $M^{(n)}$ zu eliminiren.

Nun sind die Gleichungen dieser Curvenschaaren:

$$M^{(n)} = \pi^n F_1 - \pi^{n-1}\binom{n}{1}\cdot f_1^1(\varphi) + \pi^{n-2}\binom{n}{2}\cdot f_1^2(\varphi)$$
$$\mp\pi\binom{n}{n-1} f_1^{n-1}(\varphi) \pm f_1^n(\varphi)$$

und

$$\pm M^{(n)} = \pi^n F_2 - \pi^{n-1}\binom{n}{1}\cdot f_2^1(\varphi) + \pi^{n-2}\binom{n}{2}\cdot f_2^2(\varphi) - \ldots\ldots$$
$$\mp\pi\binom{n}{n-1}\cdot f_2^{n-1}(\varphi) \pm f_2^n(\varphi),$$

wobei sich das Doppelzeichen $\pm$ auf die Lage beider Flächen gegen die Axe bezieht.

Durch Addition, respective Subtraction dieser Gleichungen erhält man:

$$0 = \pi^n(F_1 \pm F_2) - \pi^{n-1}\binom{n}{1}[f_1^1 \pm f_2^1] + \pi^{n-2}\binom{n}{2}[f_1^2 \pm f_2^2] - \ldots\ldots$$
$$\mp\pi\binom{n}{n-1}[f_1^{n-1} \pm f_2^{n-1}] \pm [f_1^n \pm f_2^n],$$

worin der Einfachheit wegen das Argument φ bei den Functionszeichen weggelassen wurde.

Diese Gleichung repräsentirt zwei Curven n^{ter} Classe; da jedoch bei geradem n das Moment $M^{(n)}$ keinen negativen Werth besitzen kann, so wird in diesem Falle die eine jener beiden Curven imaginär; denn damit $M^{(n)}$ negativ würde, müsste der Hebelarm imaginär sein.

Der geometrische Ort aller Geraden, bezüglich welcher die Momente n^{ter} Ordnung zweier in derselben Ebene liegenden Flächen gleiche Grösse besitzen, ist demnach eine Curve von der Classe $2n$.

3.

Es seien drei in derselben Ebene gelegene Flächen F_1, F_2 und F_3 gegeben. Man suche diejenigen Geraden in dieser Ebene, bezüglich welcher die Momente n^{ter} Ordnung der drei Flächen einander gleich sind.

Der geometrische Ort jener Geraden, bezüglich welcher die Momente n^{ter} Ordnung der beiden Flächen F_1 und F_2 einander gleich sind, ist nach voriger Nummer durch die Gleichung gegeben

$$O = \pi^n(F_1 \pm F_2) - \pi^{n-1}\binom{n}{1}[f_1^1 \pm f_2^1] + \cdots\cdots$$
$$\mp \pi\binom{n}{n-1}[f_1^{n-1} \pm f_2^{n-1}] \pm [f_1^n + f_2^n].$$

Dasselbe lässt sich bezüglich der Flächen F_1 und F_3 sagen, nämlich

$$O = \pi^n(F_1 \pm F_3) - \pi^{n-1}\binom{n}{1}[f_1^1 \pm f_3^1] + \cdots\cdots$$
$$\mp \pi\binom{n}{n-1}[f_1^{n-1} \pm f_3^{n-1}] \pm [f_1^n \pm f_3^n].$$

Sucht man aus diesen Gleichungen die gemeinschaftlichen Werthe von π und φ, so erhält man in ihnen die Coordinaten jener Geraden, welche der Aufgabe entsprechen.

Es gibt also im Allgemeinen $4n^2$ Gerade, bezüglich welcher die Momente n^{ter} Ordnung dreier Flächen einander gleich sind.

Ist n eine gerade Zahl, so beträgt die Anzahl der reellen Geraden, welche der Aufgabe entsprechen, n^2.

4.

Im Nachfolgenden sollen einige Anwendungen der bisher abgeleiteten Sätze gemacht werden.

Momente erster Ordnung.

Für die Momente erster Ordnung (statische Momente) übergeht Gleichung 1) in

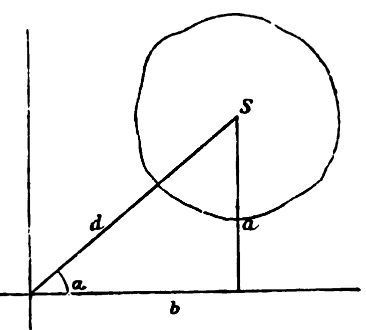
$$\pi F - f^1(\varphi) = C.$$

Nun ist

$$f^1(\varphi) = \cos\varphi\, \mathfrak{M}^{(1,0)} - \sin\varphi \,.\, \mathfrak{M}^{(0,1)}.$$

Bezeichnen a und b die Parallelcoordinaten des Schwerpunktes S der Fläche, sowie d und α dessen Polarcoordinaten, so ist

Fig. 4.



$$\mathfrak{M}^{(1,0)} = aF = dF \sin\alpha$$

$$\mathfrak{M}^{(0,1)} = bF = dF \cos\alpha,$$

somit

$$f^1(\varphi) = dF.\sin(\alpha - \varphi)$$

und

$$\pi - d.\sin(\alpha - \varphi) = \frac{C}{F}.$$

Der geometrische Ort der Geraden, bezüglich welcher das statische Moment der Fläche constant bleibt, ist somit ein Kreis. Mittelpunkt dieses Kreises ist der Schwerpunkt; denn für $d = 0$ (Transformation auf den Schwerpunkt als Coordinatenanfang) ist

$$\pi = \frac{C}{F},$$

d. h. constant; zugleich findet man darin den Radius des Kreises.

Bei Betrachtung zweier Flächen F_1 und F_2 lauten die Gleichungen der unter Nr. 1 abgeleiteten geometrischen Örter

$$F_1[\pi - d_1.\sin(\alpha_1 - \varphi)] = C_1$$

$$F_2[\pi - d_2.\sin(\alpha_2 - \varphi)] = C_2$$

Der geometrische Ort jener Geraden, für welche

$$C_1 = \pm C_2$$

werden soll, wird durch Addition, respective Subtraction beider Gleichungen gefunden; das ist

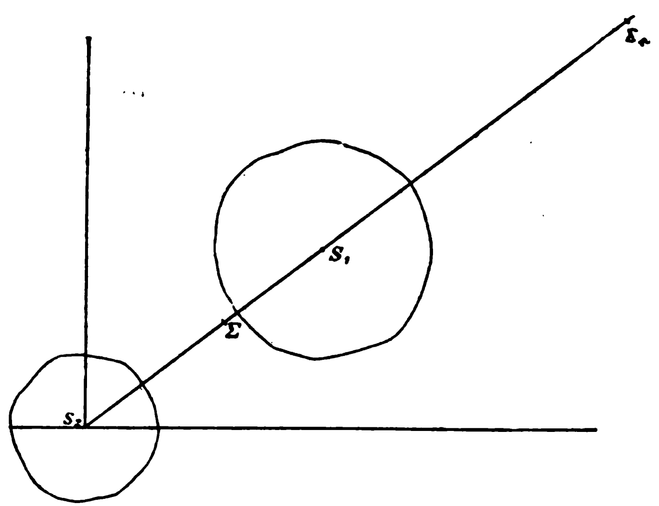
$$\pi(F_1 \pm F_2) = F_1 d_1 \sin(\alpha_1 - \varphi) \pm F_2 d_2 \sin(\alpha_2 - \varphi).$$

Wählt man den Schwerpunkt der Fläche F_2 als Coordinatenanfang, so wird $d_2 = 0$, und

$$\frac{\pi}{\sin(\alpha_1 - \varphi)} = \frac{F_1 d_1}{F_1 \pm F_2}$$

ist die Gleichung des gesuchten geometrischen Ortes. Dieser Ort besteht sonach in zwei Strahlenbüscheln, deren Scheitel in Σ

Fig. 5.



und Σ_1 gelegen sind (Fig. 5). Hiebei ist Σ der Schwerpunkt der als zusammengehörig betrachteten Flächen F_1 und F_2, und Σ_1 der durch die Schwerpunkte S_1 und S_2 der Flächen von Σ harmonisch getrennte Punkt.

Es ist klar, dass Σ und Σ_1 die Ähnlichkeitspunkte je zweier um S_1 und S_2 beschriebenen Kreise sind, bezüglich deren Tangenten die statischen Momente beider Flächen gleich sind.

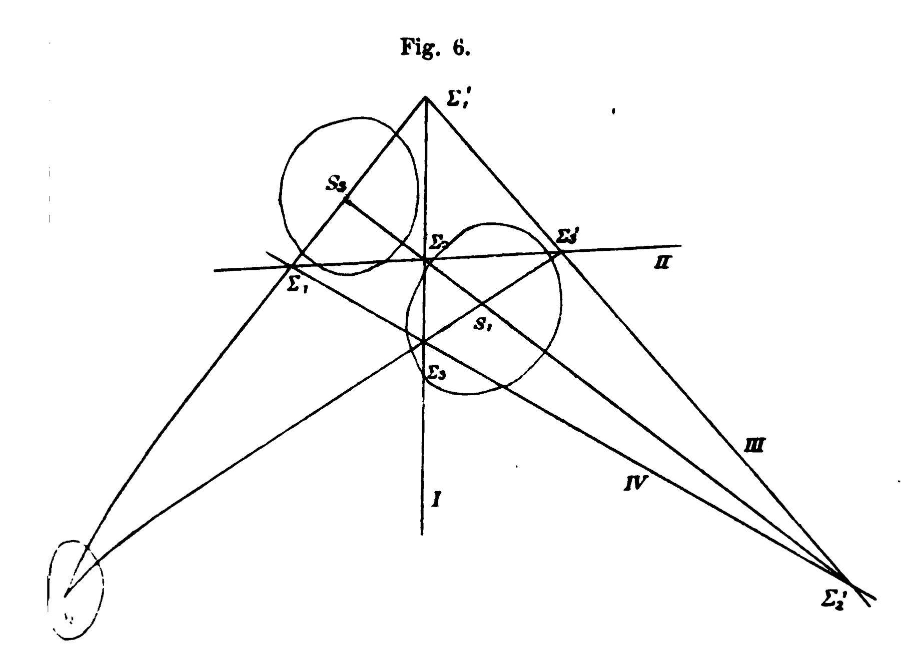
Werden endlich drei Flächen F_1, F_2 und F_3 betrachtet, wobei wieder der Schwerpunkt S_2 von F_2 als Coordinatenanfang gewählt werden mag, so können nach Obigem für die Flächen F_1 und F_2 einerseits, und für F_2 und F_3 anderseits die Gleichungen aufgestellt werden:

$$\pi = \frac{F_1 d_1}{F_1 \pm F_2} \cdot \sin(\alpha_1 - \varphi)$$

$$\pi = \frac{F_3 d_3}{F_3 \pm F_2} \cdot \sin(\alpha_3 - \varphi).$$

Die diesen Gleichungen gemeinschaftlich entsprechenden Werthe von π und φ bestimmen jene Geraden, für welche die

Fig. 6.



statischen Momente der drei Flächen einander gleich sind. Man findet

$$\pi = \frac{F_1 F_3 d_1 d_3 \sin(\alpha_3 - \alpha_1)}{F_1^2 d_1^2 (F_3 \pm F_2)^2 + F_3^2 d_3^2 (F_1 \pm F_2)^2 - 2 F_1 F_2 d_1 d_2 (F_1 \pm F_2)(F_3 \pm F_2) \cos(\alpha_3 - \alpha_1)]^{1/2}}$$

und

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{F_1 d_1 (F_3 \pm F_2) \sin \alpha_1 - F_3 d_3 (F_1 \pm F_2) \sin \alpha_3}{F_1 d_1 (F_3 \pm F_2) \cos \alpha_1 - F_3 d_3 (F_1 \pm F_2) \cos \alpha_3}.$$

Je nach der Wahl der in diesen Ausdrücken enthaltenen Doppelzeichen erhält man vier Werthpaare für π und φ.

Die Geraden, welche auf diese Weise gefunden werden, verbinden, wie aus Fig. 6 ersichtlich ist, die Ähnlichkeitspunkte Σ_3 und Σ'_3 der Momentenkreise der Flächen F_1 und F_2 mit den Ähnlichkeitspunkten Σ_1 und Σ'_1 der Momentenkreise der Flächen F_2 und F_3.

Es liegt in der Natur der Sache, dass diese Geraden auch durch die Ähnlichkeitspunkte Σ_2, Σ'_2 jener Momentenkreise gehen werden, welche durch die Flächen F_3 und F_1 bestimmt werden.

5.

Momente zweiter Ordnung.

Soll der geometrische Ort jener Geraden gefunden werden, für welche das Trägheitsmoment eine Fläche F constant bleibt, so ergibt sich die Gleichung desselben aus 1)

$$\pi^2 F - 2\pi f^1(\varphi) + f^2(\varphi) = M^{(2)},$$

worin

$$f^1(\varphi) = \cos\varphi\, \mathfrak{M}^{(1,0)} - \sin\varphi\, \mathfrak{M}^{(0,1)}$$
$$f^2(\varphi) = \cos^2\varphi\, \mathfrak{M}^{(2,0)} - 2\cos\varphi \sin\varphi\, \mathfrak{M}^{(1,1)} + \sin^2\varphi \,.\, \mathfrak{M}^{(0,2)}.$$

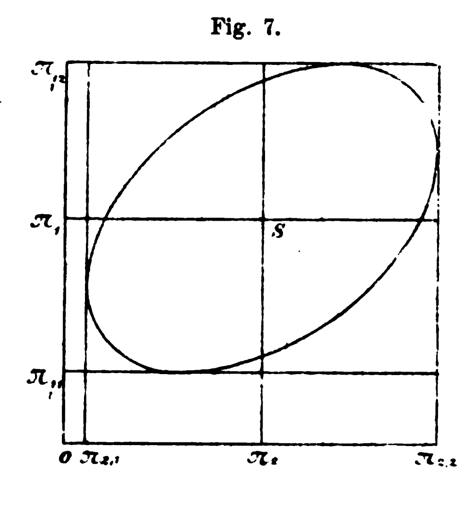
Die Gleichung des Ortes ist also

$$\pi^2 F - 2\pi[\cos\varphi\, \mathfrak{M}^{(1,0)} - \sin\varphi \,.\, \mathfrak{M}^{(0,1)}] + [\cos^2\varphi \,.\, \mathfrak{M}^{(2,0)} - 2\cos\varphi \sin\varphi\, \mathfrak{M}^{(1,1)} + \sin^2\varphi \,.\, \mathfrak{M}^{(0,2)}] = M^{(2)}$$

Der Ort ist eine Curve vierter Classe, zerfällt aber in zwei sich deckende Curven zweiter Classe.

Um den Mittelpunkt dieser Curve zu finden, legen wir parallele Tangenten an dieselbe, wie es aus Fig. 7 ersichtlich ist; wir wählen der Einfachheit wegen jene, für welche $\varphi = 0$, und jene, für welche $\varphi = 90°$ ist.

Fig. 7.



Die Gleichung der Curve übergeht dann für die erste Substitution in

$$\pi^2 F - 2\pi\, \mathfrak{M}^{(1,0)} + \mathfrak{M}^{(2,0)} = M^{(2)}.$$

Nennt man ihre Wurzeln $\pi_{1,1}$ und $\pi_{1,2}$, so ist

$$\pi_{1,1} + \pi_{1,2} = 2\frac{\mathfrak{M}^{(1,0)}}{F},$$

Jener Durchmesser der Curve, welcher zu diesen Tangenten parallel ist, hat die Coordinate

$$\pi_1 = \frac{1}{2}(\pi_{1,1} + \pi_{1,2}),$$

somit ist

$$\pi_1 = \frac{\mathfrak{M}^{(1,0)}}{F}.$$

Ebenso findet man für die zweite Substitution ($\varphi = 90°$) die Gleichung

$$\pi^2 F + 2\pi\mathfrak{M}^{(0,1)} + \mathfrak{M}^{(0,2)} = M^{(2)}$$

und wenn man ihre Wurzeln mit $\pi_{2,1}$ und $\pi_{2,2}$ bezeichnet

$$\pi_{2,1} + \pi_{2,2} = -2\frac{\mathfrak{M}^{(0,1)}}{F},$$

woraus man den numerischen Werth der Coordinate des parallelen Durchmessers findet

$$\pi_2 = \frac{\mathfrak{M}^{(0,1)}}{F}.$$

Die Coordinaten π_1 und π_2 geben sich aber hieraus als die Coordinaten des Schwerpunktes der Fläche zu erkennen; derselbe ist also der Mittelpunkt aller Curven zweiter Classe, bezüglich deren Tangenten das Trägheitsmoment der Fläche constant ist.

Um zu untersuchen, welcher Art diese Curve zweiter Ordnung ist, transformiren wir sie so, dass ihr Mittelpunkt zum Coordinatenanfang wird.

Es ist dann

$$\mathfrak{M}^{(1,0)} = 0 \text{ und } \mathfrak{M}^{(0,1)} = 0$$

und die Gleichung lautet

$$\pi^2 F + [\cos^2\varphi \,.\, T^{(2,0)} - 2\cos\varphi\sin\varphi \,.\, T^{(1,1)} + \sin^2\varphi \,.\, T^{(0,2)}] = M^{(2)},$$

worin

$$T^{(2,0)} = \int d\mu \,.\, y^2,\quad T^{(1,1)} = \int d\mu \cdot yx,\quad T^{(0,2)} = \int d\mu \,.\, x^2$$

die Momente zweiter Ordnung sind bezüglich zweier durch den

Schwerpunkt der Fläche gehenden, aufeinander senkrecht stehenden Axen.

Ist hiebei zugleich

$$T^{(1,1)} = 0,$$

so sind $T^{(2,0)}$ und $T^{(0,2)}$ die Hauptträgheitsmomente und die Gleichung der Curve lautet in ihrer einfachsten Form:

$$\pi^2 F + \cos^2\varphi\, T^{(2,0)} + \sin^2\varphi \,.\, T^{(0,2)} = M^{(2)}.$$

Ob diese Curve eine Ellipse oder Hyperbel ist, lässt sich leicht ermitteln, wenn man untersucht, ob φ imaginär oder reell wird, wenn man $\pi = 0$ setzt. Es ist dann

$$\cos^2\varphi \,.\, T^{(2,0)} + \sin^2\varphi\, T^{(0,2)} = M^{(2)},$$

woraus man findet

$$\operatorname{tang}\varphi = \sqrt{\frac{T^{(2,0)} - M^{(2)}}{M^{(2)} - T^{(0,2)}}}. \qquad 3)$$

Angenommen, es sei $T^{(0,2)} < T^{(2,0)}$, so ist $T^{(0,2)}$ das kleinste mögliche Trägheitsmoment.

Wählt man demnach $M^{(2)} < T^{(0,2)}$, so kann keine reelle Axe existiren, welche dem entspricht; in diesem Falle wird die Curve imaginär.

Wird $T^{(0,2)} < M^{(2)} < T^{(2,0)}$, so liefert die Formel 3) reelle Werthe für φ; die Curve ist somit eine Hyperbel.

Ist endlich $M^{(2)} > T^{(2,0)}$, so erhält man aus 3) imaginäre Werthe für φ; die Curve wird dann eine Ellipse. Den Verlauf und die Gruppirung dieser Curven veranschaulicht Fig. 8.

Für den Fall, wo $M^{(2)} = T^{(0,2)}$ wird, übergeht die Gleichung der Curve in

$$\pi^2 F + \cos^2\varphi\, T^{(2,0)} + \sin^2\varphi \,.\, T^{(0,2)} = T^{(0,2)}$$

oder

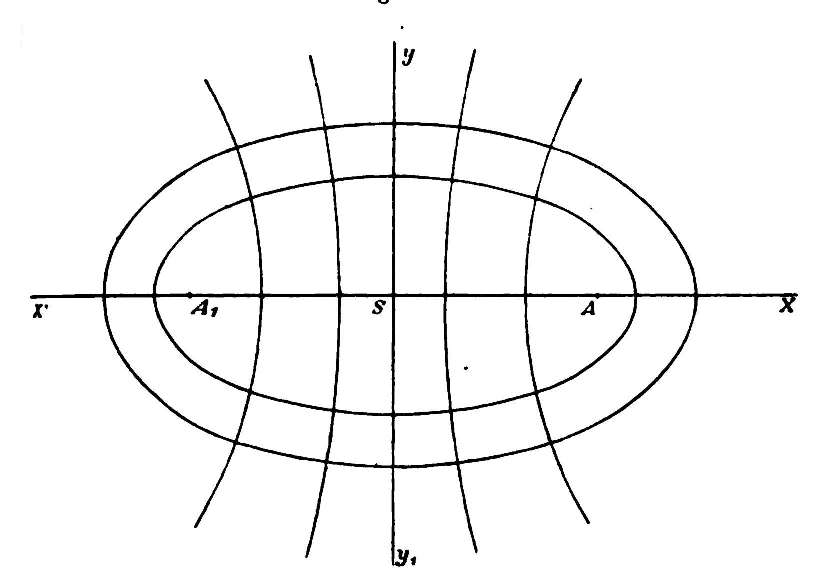
$$\pi^2 F = \cos^2\varphi \{T^{(0,2)} - T^{(2,0)}\}.$$

Da der Ausdruck in der Klammer negativ ist, so kann die Gleichung durch reelle Werthe nur erfüllt werden für $\pi = 0$, $\varphi = 90°$, d. h. die Curve übergeht in die Gerade YY^1.

Für den anderen Grenzfall, wo $M^{(2)} = T^{(2,0)}$ wird, lautet die Gleichung der Curve

$$\pi^2 F = \sin^2\varphi \{T^{(2,0)} - T^{(0,2)}\},$$

Fig. 8.



worin der Ausdruck in der Klammer positiv ist, und woraus folgt

$$\frac{\pi}{\sin\varphi} = \pm\sqrt{\frac{T^{(2,0)} - T^{(0,2)}}{F}}.$$

Dies ist die Gleichung zweier Strahlenbüschel, deren Scheitel zwei Punkte der Axe XX' sind, gleichweit entfernt vom Coordinatenanfang (Fig. 9). Diese Entfernung beträgt

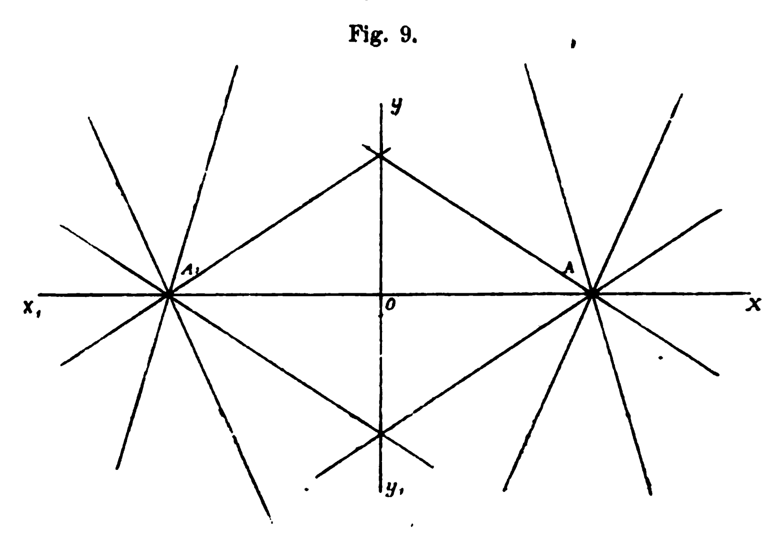
$$d = \pm\sqrt{\frac{T^{(2,0)} - T^{(0,2)}}{F}}.$$

Wie man sich leicht überzeugen kann, sind diese Punkte A und A_1 die Brennpunkte sämmtlicher oben betrachteten Ellipsen und Hyperbeln.

Sämmtliche geometrische Örter gleichwerthiger Momentenaxen für Momente zweiter Ordnung bilden also eine Schaar von

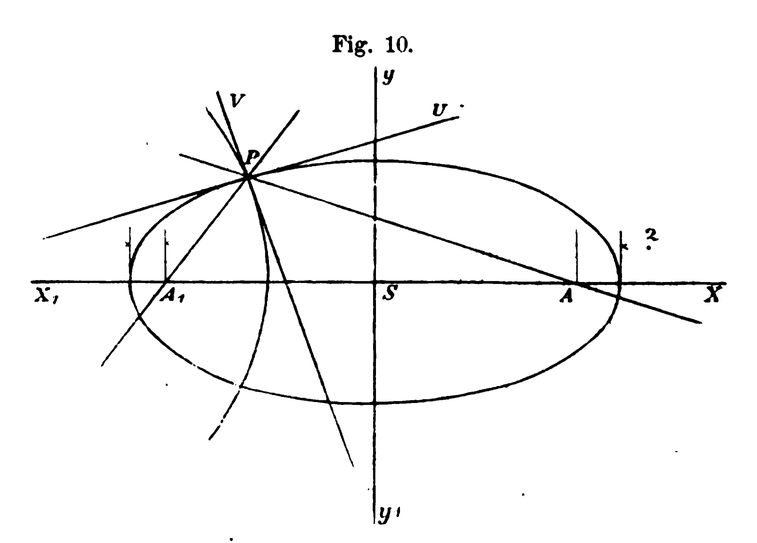
Curven zweiter Classe, welche homofocal sind. Diese Eigenschaft begründet folgende Betrachtung:

Fig. 9.



Fasst man einen beliebigen Punkt P der gegebenen Fläche F, deren Schwerpunkt S ist, ins Auge (Fig. 10), so durchschneiden sich in P zwei geometrische Örter gleichwerthiger Momenten-

Fig. 10.



axen, eine Hyperbel und eine Ellipse. Verbindet man P mit den bekannten Punkten A und A_1 der Fläche, so erhält man jene

durch P gehenden Geraden PA und PA_1, für welche die Trägheitsmomente der Fläche gleich sind, und zwar gleich dem grösseren der Hauptträgheitsmomente.

In den Halbirungslinien PU und PV des Winkels dieser gleichwerthigen Momentenaxen erhält man die Tangenten der sich in P durchschneidenden Ellipse und Hyperbel. Hiebei ist PU jene durch P gehende Axe, für welche das Trägheitsmoment der Fläche am grössten, und PV jene, für welche das Trägheitsmoment der Fläche am kleinsten ist.

PU und PV sind also die Axen-Richtungen der dem Punkte P angehörigen Trägheitsellipse.

Werden zwei Flächen F_1 und F_2 gleichzeitig betrachtet, so lautet die Gleichung für den geometrischen Ort gleichwerthiger Momentenaxen der ersten Fläche

$$\pi^2 F_1 - 2\pi\left[\cos\varphi\,\mathfrak{M}_1^{(1,0)} - \sin\varphi\,.\,\mathfrak{M}_1^{(0,1)}\right] + \\ + \left[\cos^2\varphi\,\mathfrak{M}_1^{(2,0)} - 2\cos\varphi\sin\varphi\,\mathfrak{M}_1^{(1,1)} + \sin^2\varphi\,.\,\mathfrak{M}_1^{(0,2)}\right] = M^{(2)}$$

und für die zweite Fläche

$$\pi^2 F_2 - 2\pi\left[\cos\varphi\,\mathfrak{M}_2^{(1,0)} - \sin\varphi\,.\,\mathfrak{M}_2^{(0,1)}\right] + \\ + \left[\cos^2\varphi\,\mathfrak{M}_2^{(2,0)} - 2\cos\varphi\sin\varphi\,\mathfrak{M}_2^{(1,1)} + \sin^2\varphi\,.\,\mathfrak{M}_2^{(0,2)}\right] = M^{(2)}.$$

Die Gleichung des geometrischen Ortes jener Geraden, bezüglich welcher die Trägheitsmomente beider Flächen gleich sind, erhält man durch Elimination von $M^{(2)}$ aus obigen Gleichungen, d. i. durch Subtraction in folgender Weise:

$$\pi^2(F_1 - F_2) - 2\pi\cos\varphi\left[\mathfrak{M}_1^{(1,0)} - \mathfrak{M}_2^{(1,0)}\right] + 2\pi\sin\varphi\left[\mathfrak{M}_1^{(0,1)} - \mathfrak{M}_2^{(0,1)}\right] + \\ + \cos^2\varphi\left[\mathfrak{M}_1^{(2,0)} - \mathfrak{M}_2^{(2,0)}\right] - 2\sin\varphi\cos\varphi\left[\mathfrak{M}_1^{(1,1)} - \mathfrak{M}_2^{(1,1)}\right] + \\ + \sin^2\varphi\left[\mathfrak{M}_1^{(0,2)} - \mathfrak{M}_2^{(0,2)}\right] = 0.$$

Dies ist eine Curve zweiter Classe. — Um die Coordinaten π_1 und π_2 ihres Mittelpunktes zu finden, beobachten wir denselben Vorgang wie früher. Wir substituiren $\varphi = 0$ und $\varphi = 90°$ in die Gleichung der Curve, wornach wir die beiden neuen Gleichungen für π erhalten:

$$\pi^2(F_1 - F_2) - 2\pi\left[\mathfrak{M}_1^{(1,0)} - \mathfrak{M}_2^{(1,0)}\right] + \left[\mathfrak{M}_1^{(2,0)} - \mathfrak{M}_2^{(2,0)}\right] = 0$$

$$\pi^2(F_1 - F_2) + 2\pi\left[\mathfrak{M}_1^{(0,1)} - \mathfrak{M}_2^{(0,1)}\right] + \left[\mathfrak{M}_1^{(0,2)} - \mathfrak{M}_2^{(0,2)}\right] = 0.$$

Bezeichnen wir die Wurzeln der ersten dieser Gleichungen mit $\pi_{1,1}$ und $\pi_{1,2}$, die der zweiten mit $\pi_{2,1}$ und $\pi_{2,2}$, so ist

$$\pi_{1,1} + \pi_{1,2} = 2\,\frac{\mathfrak{M}_1^{(1,0)} - \mathfrak{M}_2^{(1,0)}}{F_1 - F_2}$$

und

$$\pi_{2,1} + \pi_{2,2} = -2\,\frac{\mathfrak{M}_1^{(0,1)} - \mathfrak{M}_2^{(0,1)}}{F_1 - F_2},$$

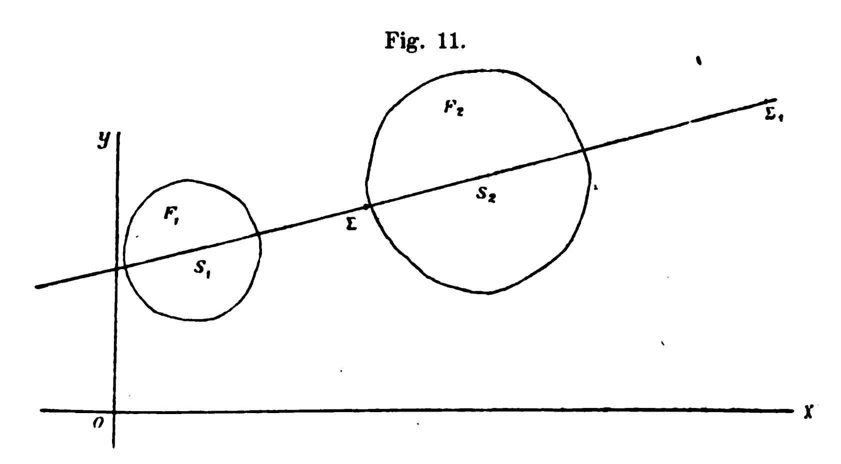
woraus wir die Werthe der Coordinaten des Mittelpunktes der Curve erhalten

$$\pi_1 = \frac{\mathfrak{M}_1^{(1,0)} - \mathfrak{M}_2^{(1,0)}}{F_1 - F_2}$$

$$\pi_2 = \frac{\mathfrak{M}_1^{(0,1)} - \mathfrak{M}_2^{(0,1)}}{F_1 - F_2},$$

Dieser Punkt Σ_1 ist demnach in der Verbindungslinie der Schwerpunkte S_1 und S_2 der beiden Flächen gelegen und wird durch dieselben vom Schwerpunkte Σ der als zusammengehörig betrachteten Flächen harmonisch getrennt (Fig. 11).

Fig. 11.



Für $F_1 = F_2$ ist die Curve eine Parabel; denn ihr Mittelpunkt liegt dann in unendlicher Entfernung.

Transformirt man die Gleichung der Curve auf diesen Mittelpunkt Σ_1, als Coordinatenanfang, so werden nach Nr. 4

$$\mathfrak{M}_1^{(1,0)}-\mathfrak{M}_2^{(1,0)}=0 \text{ und } \mathfrak{M}_1^{(0,1)}-\mathfrak{M}_2^{(0,1)}=0$$

und die neue Gleichung der Curve lautet:

$$\pi^2(F_1-F_2)+\cos^2\varphi[\mathfrak{M}_1^{(2,0)}-\mathfrak{M}_2^{(2,0)}]-2\sin\varphi\cos\varphi[\mathfrak{M}_1^{(1,1)}-\mathfrak{M}_2^{(1,1)}]+$$
$$+\sin^2\varphi[\mathfrak{M}_1^{(0,2)}-\mathfrak{M}_2^{(0,2)}]=0, \qquad 4)$$

worin die Momente $\mathfrak{M}$ selbstverständlich auf die neuen durch den Punkt Σ_1 gehenden Axen bezogen sind.

Die Frage, wann die Curve eine Ellipse oder Hyperbel ist, kann jetzt leicht entschieden werden und zwar auf ähnlichem Wege, wie es zu Beginn dieser Nummer geschehen ist. — Setzt man nämlich $\pi=0$ und dividirt die Gleichung durch $\cos^2\varphi$, so erhält man die Bestimmungsgleichung für φ

$$\operatorname{tang}^2\varphi[\mathfrak{M}_1^{(0,2)}-\mathfrak{M}_2^{(0,2)}]-2\operatorname{tang}\varphi[\mathfrak{M}_1^{(1,1)}-\mathfrak{M}_2^{(1,1)}]+$$
$$+[\mathfrak{M}_1^{(2,0)}-\mathfrak{M}_2^{(2,0)}]=0,$$

woraus man bekommt

$$\operatorname{tang}\varphi=\frac{\mathfrak{M}_1^{(1,1)}-\mathfrak{M}_2^{(1,1)}\pm\sqrt{[\mathfrak{M}_1^{(1,1)}-\mathfrak{M}_2^{(1,1)}]^2-[\mathfrak{M}_1^{(2,0)}-\mathfrak{M}_2^{(2,0)}][\mathfrak{M}_1^{(0,2)}-\mathfrak{M}_2^{(0,2)}]}}{\mathfrak{M}_1^{(0,2)}-\mathfrak{M}_2^{(0,2)}}.$$

Es resultirt also für die Curve die Bedingung

$$[\mathfrak{M}_1^{(1,1)}-\mathfrak{M}_2^{(1,1)}]^2 \lessgtr [\mathfrak{M}_1^{(2,0)}-\mathfrak{M}_2^{(2,0)}][\mathfrak{M}_1^{(0,2)}-\mathfrak{M}_2^{(0,2)}] \begin{cases}\dots\varphi \text{ imaginär: Ellipse}\\ \dots\varphi \text{ reell: Hyperbel}\end{cases}$$

Was die Axenrichtung dieser Curven betrifft, so lässt sich auch diese leicht erkennen. Gleichung 4) wäre nämlich nur dann auf eine Axe der Curve bezogen, wenn der Coëfficient von $\sin\varphi\cos\varphi$ verschwinden würde, d. h. wenn

$$\mathfrak{M}_1^{(1,1)}=\mathfrak{M}_2^{(1,1)}$$

wäre. Axen der Curve sind also jene durch Σ_1 gehenden Geraden, bezüglich welcher die Deviationsmomente beider Flächen gleich sind.

Sollen endlich für drei Flächen F_1, F_2 und F_3 jene Geraden gefunden werden, bezüglich welcher die Trägheitsmomente jener drei Flächen gleich sind, so stelle man die Gleichungen der geometrischen Örter jener Geraden auf, bezüglich welcher die Trägheitsmomente je zweier Flächen (F_1 und F_2, F_2 und F_3) gleich sind, und bestimme dann die gemeinsamen Geraden dieser Örter.

Die Gleichungen jener geometrischen Örter sind nach dem Vorhergehenden

$$\pi^2(F_1-F_2)-2\pi\cos\varphi[\mathfrak{M}_1^{(1,0)}-\mathfrak{M}_2^{(1,0)}]+2\pi\sin\varphi[\mathfrak{M}_1^{(0,1)}-\mathfrak{M}_2^{(0,1)}]+$$
$$+\cos^2\varphi[\mathfrak{M}_1^{(2,0)}-\mathfrak{M}_2^{(2,0)}]-2\sin\varphi\cos\varphi[\mathfrak{M}_1^{(1,1)}-\mathfrak{M}_2^{(1,1)}]+$$
$$+\sin^2\varphi[\mathfrak{M}_1^{(0,2)}-\mathfrak{M}_2^{(0,2)}]=0$$

und

$$\pi^2(F_2-F_3)-2\pi\cos\varphi[\mathfrak{M}_2^{(1,0)}-\mathfrak{M}_3^{(1,0)}]+2\pi\sin\varphi[\mathfrak{M}_2^{(0,1)}-\mathfrak{M}_3^{(0,1)}]+$$
$$+\cos^2\varphi[\mathfrak{M}_2^{(2,0)}-\mathfrak{M}_3^{(2,0)}]-2\sin\varphi\cos\varphi[\mathfrak{M}_2^{(1,1)}-\mathfrak{M}_3^{(1,1)}]+$$
$$+\sin^2\varphi[\mathfrak{M}_2^{(0,2)}-\mathfrak{M}_3^{(0,2)}]=0.$$

Um die gemeinsamen π und φ aus diesen Gleichungen zu ermitteln, erscheint es vortheilhaft, auf die schon vorhin einmal verwendeten Liniencoordinaten u und v zu transformiren, und zwar nach den Relationen

$$\frac{\sin\varphi}{\pi}=-u,\quad \frac{\cos\varphi}{\pi}=v,$$

wodurch die obigen Gleichungen die Form annehmen

$$au^2+2buv+cv^2-du-ev+f=0$$
$$a_1u^2+2b_1uv+c_1v^2-d_1u-e_1v+f_1=0,$$

worin a bis f, a_1 bis f_1 die oben in den Klammern befindlichen Coëfficienten bezeichnen.

Man erhält aus diesen Gleichungen vier Werthpaare für u und v, mithin ebenso viel Werthpaare für π und φ.

Es gibt also vier Gerade, bezüglich welcher die Trägheitsmomente dreier Flächen gleich sind.

Zur wissenschaftlichen Behandlung der orthogonalen Axonometrie.

(Zweite Mittheilung.)

Von **Carl Pelz,**

Professor an der k. k. technischen Hochschule in Graz.

(Mit 1 Tafel.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 3. Februar 1881.)

Vorliegende Arbeit ist eine Fortsetzung der im LXXXI. Bande der Sitzungsberichte der k. Akademie unter demselben Titel veröffentlichten Abhandlung, die einen Beitrag zur wissenschaftlichen Behandlung der orthogonal-axonometrischen Projectionsmethode bilden soll.

Ich habe in der erwähnten Abhandlung die Ersetzung des Axenkreuzes durch den Drehungswinkel und die Zurückführung der axonometrischen Constructionen auf Grund- und Aufriss als unwissenschaftlich und als einen Fehltritt bezeichnet, der nicht einmal vom Standpunkte der Praxis gerechtfertigt werden kann, und demzufolge durchaus keiner Nachahmung würdig erscheint.

Die in der citirten Abhandlung ausgesprochenen und erläuterten Principien habe ich auch im Nachfolgenden strengstens beachtet und gemäss derselben alle auftretenden Probleme blos mit Hilfe der Bildebene und des Axenkreuzes direct gelöst.[1]

1. Man bestimme (siehe Fig. 1) die Entfernung eines Punktes a von der Ebene Σ.

Die axonometrische Projection der vom Punkte a auf die Ebene gefällten Normale N steht auf der Bildtrace $e_1\ e_2$ der Ebene Σ senkrecht, während N' zu der Geraden $A\ p$ parallel ist. Hiebei stellt uns p die Projection des Höhenschnittes des in der

[1] Ich wiederhole zur Wahrung der Priorität nochmals, dass die hier und in der ersten Abtheilung enthaltenen Constructionen mit nur sehr unwesentlichen Modificationen auch für die klinogonale Axonometrie gelten, und verweise auf die in der Einleitung zur ersten Mittheilung diesbezüglich gemachte Bemerkung.

Grundebene liegenden Dreiecks $A\,x\,z$ vor; es ist daher $z\,p$ parallel zu Y, und $x\,p$ senkrecht auf $A\,z$ gezogen worden.

Die Grundriss-projicirende Ebene H von N schneidet Σ in der Geraden $h\,v$, welche durch den Fusspunkt d des Perpendikels N hindurchgeht.

Ziehen wir durch den Punkt a eine Parallele zu Σ_h, so bestimmt diese mit N eine Ebene Q, die auf der Schnittlinie $h\,v$ senkrecht steht. Denken wir uns die Bildebene durch den Punkt d gehend, so wird die Bildtrace von Q mit der in d auf $h\,v$ — in der Bildebene — errichteten Normale zusammenfallen, und die zu Σ_h parallel gezogene Gerade in b schneiden. Wird nun $a\,d$ um Q_b in die Bildebene umgelegt, so erscheint — da $b\,a\,d$ ein rechtwinkliges Dreieck ist — (a) auf der Peripherie eines über $b\,d$ als Durchmesser beschriebenen Halbkreises, und es ist $(a)\,d$ der wahren Länge des Abstandès des Punktes a von der Ebene Σ gleich.

2. Dieselbe Aufgabe kann auch in der nachfolgenden Weise vortheilhaft gelöst werden.

Wir fällen (siehe Fig. 2) vom Punkte a die Senkrechte auf die Ebene Σ. Ihre Construction erfolgte wie im vorangehenden Artikel, nur wurde hier die Bildebene nicht durch A, sondern durch den in der Grundebene liegenden Punkt z gelegt, und die Trace $z\,s$ von Σ auf derselben ermittelt. Es ist $z\,\xi$ normal auf Z und $\xi\,s$ senkrecht auf Y. Die Schnittgerade $h\,v$ der Grundriss-projicirenden Ebene H der Normale geht durch den Fusspunkt d derselben.

Um die wahre Länge der Strecke $a\,d$ zu ermitteln, denken wir uns mit derselben um a als Mittelpunkt in der Ebene H einen Kreis K beschrieben. Die axonometrische Projection dieses Kreises wird eine Ellipse sein, deren grosse Axe zur Bildtrace der Ebene H parallel ist, und in der Projection demzufolge — da H auf Σ_h senkrecht steht — auf Σ_h normal gerichtet sein wird Wir kennen daher von der Ellipse beide Hauptaxen der Lage nach, einen Punkt d, und seine Tangente $h\,v$.

Die Länge der halben Hauptaxe der Ellipse ist der wahre Länge der Strecke $a\,d$ gleich.

Wie im Artikel 4 der Eingangs citirten Abhandlung gezeigt wurde, erhält man diese Halbaxe, indem man $a\,d$ in μ halbirt, vom Punkte μ die Normale auf $h\,v$ bis zum Schnittpunkt m derselben mit der zweiten Axe zieht, und mit dem Radius $m\,d$ um m

den Kreisbogen d (d) beschreibt. Die Strecke a (d) ist der gesuchten wahren Länge gleich.

3. Ein in einer gegebenen Ebene Σ liegender Punkt a soll um die Bildtrace Σ_b derselben in die Bildebene umgelegt werden.

Ziehen wir (siehe Fig. 3) $z p$ normal auf Ax und $s p$ parallel zu Y, so ist $A p$ die axonometrische Projection der vom Coordinatenanfangspunkte A auf die Seitenrissspur Σ_s der Ebene Σ gefällten Normale. Bezeichnet q den Fusspunkt der Normale, so wird auch $q x$ im Raume auf Σ_s senkrecht stehen, und $z q x$ daher die axonometrische Projection eines in der Ebene Σ liegenden rechten Winkels sein.

Die durch a zu den Schenkeln des erwähnten rechten Winkels gezogenen Parallelen schneiden die Bildtrace in den Punkten b, c respective; der umgelegte Punkt (a) wird daher auf der Peripherie des über $b c$ als Durchmesser beschriebenen Halbkreises erscheinen müssen und ist — da a (a) auf Σ_b normal steht — hiemit vollständig bestimmt.

Bemerkung. Da die axonometrische Projection eines ebenen Gebildes und dessen Umlegung orthogonal affine Systeme sind, und diese Affinität durch die Axe Σ_b und ein Paar homologer Punkte a (a) vollkommen bestimmt erscheint, so ist durch die Lösung der vorangehenden Aufgabe auch das Problem der Bestimmung der wahren Gestalt und Grösse einer durch die axonometrische Projection gegebenen ebenen Figur als gelöst zu betrachten.

Und ebenso ist die umgekehrte Aufgabe, nämlich die Bestimmung der axonometrischen Projection eines in einer gegebenen Ebene Σ liegenden Polygons von gegebener Grösse und Gestalt, durch das Vorangehende erledigt.

Bei dieser letzten Aufgabe dürfte es vortheilhaft erscheinen, gleich den Fusspunkt q der Normale $A p$ um Σ_b in die Bildebene umzulegen.

Denken wir uns den Schnittpunkt von $q x$ und Σ_b mit ε bezeichnet, so erscheint (q) auf dem über e_3 ε als Durchmesser beschriebenen Halbkreise, und es kann die axonometrische Projection eines jeden in der Ebene Σ liegenden Punktes, dessen Umlegung gegeben ist, mit Hilfe der Punkte q, (q) leicht construirt werden.

4. Die wahre Länge des Abstandes eines Punktes a von einer Geraden G soll ermittelt werden.

Wir legen (siehe Fig. 4) die Ebene Σ durch a senkrecht auf G, bestimmen den Schnittpunkt d derselben mit G und construiren die wahre Länge von $a\,d$.

Denken wir uns die Bildebene durch den Punkt a gehend, so wird die von a auf die Projection von G gefällte Normale P die Bildtrace der Ebene Σ sein. Der Durchstosspunkt der Geraden P mit der Grundebene ist der Schnittpunkt h_1 derselben mit der Bildtrace E_1 der genannten Ebene. Die Gerade E_1 wird durch den Punkt g gehen, wobei $a\,g$ auf der Projection von Y normal steht, und $a'g$ zu X parallel ist. Durch h_1 ziehen wir Σ_h parallel zu Ap, während Σ_s durch den Seitenrissdurchstosspunkt k der Geraden P geht. Die Schnittlinie δs der Grundrissprojicirenden Ebene der Geraden G mit der Ebene Σ schneidet G im Punkte d, und die Gerade P in c. Ziehen wir durch d die Parallele zu Σ_h bis zu ihrem Schnittpunkt b mit P, so ist $c\,d\,b$ die axonometrische Projection eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse $b\,c$ in der Bildebene liegt. Wird dieses Dreieck sammt der Geraden $a\,d$ um $b\,c$ in die Bildebene umgelegt, so gelangt d nach (d) auf die Peripherie eines über $c\,b$ als Durchmesser beschriebenen Halbkreises und $a\,(d)$ ist der gesuchten wahren Länge des Abstandes $a\,d$ gleich.

5. Die im Vorigen behandelte Aufgabe kann auch in der nachfolgenden Weise gelöst werden.

Wir legen (siehe Fig. 5) durch a eine Parallele zur Grundriss-Spur jener Ebene S, die durch a und G bestimmt ist. Zu dem Zwecke machen wir $\alpha\gamma = \alpha'\beta$ und führen $\gamma\,c$ parallel zu G'. Betrachten wir $a\,c$ momentan als die axonometrische Projection einer in der Grundebene liegenden, daher ebenfalls zu S_h parallelen Geraden, und construiren in bekannter Weise $A\,p$ axonometrisch senkrecht zu derselben, so wird die durch a' zu $A\,p$ gezogene Parallele $a'\,g'$ die Grundriss-Projection einer auf S_h normalen Geraden der Ebene S sein, und daher $a\,g$ auf $a\,c$ im Raume senkrecht stehen. Ist $a\,b$ die Trace der Ebene S auf der durch a gehenden Bildebene, und errichtet man in a die Normale $a\,m$ auf diese Bildtrace, so stellen die Geraden $a\,c$, $a\,g$, $a\,m$ die axonometrische Projection eines rechtwinkligen Axensystems vor. Die

Gerade G liegt in der Coordinatenebene S dieses Axensystems, und es kann daher die axonometrische Projection der Senkrechten $a\ d$ direct gezeichnet werden.

Wir ziehen $g\ q$ normal auf $a\ b$ und $b\ q$ parallel zu $a\ c$. Der Punkt q ist der Höhenschnitt des Dreiecks $a\ b\ g$ und daher $a\ q$ (im Raume) senkrecht stehend auf $c\ g$.

Um die wahre Länge von $a\ d$ zu ermitteln, errichten wir $d\ m$ senkrecht auf G, halbiren $a\ m$ in μ und beschreiben um μ einen Kreisbogen mit dem Radius $\mu\ d$ bis zum Schnittpunkte (d) desselben mit $a\ b$. Die Strecke $a\ (d)$ ist der wahren Länge von $a\ d$ gleich.

6. Der Abstand zweier paralleler Ebenen S, Σ (siehe Fig. 6) ist zu bestimmen. Von einem beliebigen Punkte a der Spur Σ_h — durch den wir zugleich die Bildebene legen wollen — fällen wir die Normale N auf die Ebene S. Die axonometrische Projection derselben steht auf der Bildtrace S_b von S senkrecht, während die Bildtrace E_b der Grundriss-projicirenden Ebene der Normale auf Σ_h normal gerichtet sein wird.

Betrachten wir Σ_h als Grundriss-Spur einer auf $X\,Y$ normalen Ebene, so wird die axonometrische Projection von N' auf der Bildtrace $a\ \sigma$ dieser Ebene senkrecht stehen. Die Bildtracen der Ebenen S und E schneiden sich in β, ihre Grundriss-Spuren in ε, und folglich ist $\beta\ \varepsilon$ die Schnittgerade der beiden Ebenen. Der Schnittpunkt d von $\beta\ \varepsilon$ mit N ist daher der Fusspunkt der Senkrechten N.

Um die wahre Länge von $a\ d$ zu erhalten, legen wir die orthogonal projicirende Ebene dieser Geraden in die Bildebene um. Schneidet die erwähnte projicirende Ebene die S_b in b, so ist $a\ b\ d$ die orthogonale Projection eines rechtwinkligen Dreiecks; nach der Umlegung fällt der Scheitel d des rechten Winkels in die Peripherie eines über $a\ b$ beschriebenen Halbkreises nach (d) und es ist $a\ (d)$ der gesuchten wahren Länge gleich.

7. Die Aufgabe der Bestimmung des Neigungswinkels zweier Geraden können wir in Anbetracht des im Artikel 3 Erörterten als gelöst betrachten, wollen jedoch noch auf einige bei der Lösung derselben sich ergebende Particularitäten hinweisen.

Es seien (siehe Fig. 7) G, H die beiden Geraden, G', H' ihre Grundriss-Projectionen, und die Bildtracen der Coordinatenebenen durch das Dreiseit $x\ y\ z$ gegeben.

Der Durchstosspunkt d der Geraden G mit der Bildebene ist der Schnittpunkt dieser Geraden und der Bildtrace $g z$ ihrer Grundriss-projicirenden Ebene. Ebenso ergab sich der Durchstosspunkt δ der Geraden H, als Schnittpunkt von H mit der Bildtrace $h z$ der Grundriss-projicirenden Ebene dieser Geraden. Durch d, δ ist die Bildtrace E_b der Ebene E der gegebenen Geraden bestimmt. Um die Geraden einfach umlegen zu können, errichten wir in der Grundebene im Punkte A eine Senkrechte auf H'. Diese Gerade steht auf der Grundriss-projicirenden Ebene der Geraden H — daher auch auf H selbst — senkrecht und ihre axonometrische Projection $A b$ ist somit auf $h z$ normal gerichtet. Durch $A b$ kann eine auf H senkrechte Ebene gelegt werden; ihre Bildspur steht auf der axonometrischen Projection von H normal, und schneidet E_b im Punkte β. Da nun $\delta A \beta$ die orthogonale Projection eines rechten Winkels ist, so wird A, nach der Umlegung um E_b, auf dem über $\beta \delta$ in der Bildebene beschriebenen Halbkreise in (A) liegen, und $\delta (A) d$ die wahre Grösse des gesuchten Neigungswinkels der gegebenen Geraden sein.

8. Es soll der Neigungswinkel einer Ebene Σ mit einer Coordinatenebene, zum Beispiel mit der Grundebene construirt werden.

Durch den Coordinatenanfangspunkt A legen wir (siehe Fig. 8) eine Ebene E senkrecht auf die Grundriss-Spur Σ_h der gegebenen Ebene. Die Aufriss-Spur dieser Ebene fällt mit der Z-Axe zusammen, während die axonometrische Projection der Grundriss-Spur $A s$ der Ebene direct gezeichnet werden kann. Die Schnittlinie $s z$ der Ebene E und der Ebene Σ schliesst mit $A s$ den verlangten Neigungswinkel ein.

Wir bestimmen die Spur E_b der Ebene E auf der durch z gehenden Bildebene. Diese Spur steht auf der Projection von Σ_h senkrecht, und schneidet $A s$ im Punkte σ. Nach der Umlegung der Ebene E in die Bildebene erscheint (A) auf einem über $z \sigma$ in der Bildebene beschriebenen Halbkreise, während (s) auf der axonometrischen Projection von Σ_h liegen wird. Der Winkel $z (s) (A)$ ist der gesuchte.

Der Neigungswinkel der Ebene Σ mit der Grundebene ist auch gleich dem Winkel den die Z-Axe mit der von A auf Σ gefällten Normale N einschliesst.

Die Gerade $A\,s$ (Fig. 8) ist die Grundriss-Projection N' der Normale, während die axonometrische Projection von N selbst auf der Bildtrace der Ebene Σ normal steht.

Die Gerade N steht im Raume auf $s\,z$ senkrecht und man kann daher ihre axonometrische Projection auch ermitteln, ohne die Bildtrace der Ebene Σ zeichnen zu müssen.

Denn die Geraden $A\,z$, $A\,s$, $A\,(A)$ können als orthogonale Projection eines neuen Axensystems aufgefasst werden, und da die Gerade $z\,s$ in einer Coordinatenebene desselben liegt, so kann die axonometrische Projection des auf diese Gerade vom Punkte A zu fällenden Perpendikels direct gezeichnet werden.

Schneidet die durch δ parallel zu $A\,s$ gezogene Gerade die Spur $z\,\sigma$ in d, so ist d ein Punkt von N und zugleich der Durchstosspunkt dieser Geraden mit der durch z gehenden Bildebene.

Der Winkel $d\,(A)\,z$ ist dem Neigungswinkel der Ebene Σ mit der Grundebene gleich, und $\sigma\,(A)\,d$ liefert die wahre Grösse des Neigungswinkels der Geraden N mit derselben Coordinatenebene.

9. Wird die Gerade N (Fig. 8) mit ihrer orthogonal projicirenden Ebene in die Bildebene umgelegt, so erhält man in dem rechtwinkligen Dreieck $A\,[A]\,d$ bei d den Neigungswinkel der Geraden N mit der Bildebene und daher bei $[A]$ die wahre Grösse des Neigungswinkels der Bildebene mit der Ebene Σ. Die Strecke $A\,[A]$ ist gleich dem Abstande des Punktes A von der Bildebene, und gleich der zweiten Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, das aus der Hypotenuse $m\,(A)$ und der Kathete $A\,m$ construirt wird.

Ohne Benützung der in Fig. 8 zur Bestimmung der Strecke $A\,[A]$ bereits vorhandenen Daten, kann die Gerade auch nachfolgend in die Bildebene umgelegt werden.

Es sei G (siehe Fig. 9) die gegebene Gerade, und $x\,y\,z$ das Spurendreieck der Coordinatenebenen.

Wir ziehen durch z eine Normale auf die Projection von G' bis zu ihrem Schnittpunkte b mit $x\,y$; dann steht die Gerade $A\,b$ auf den Geraden G und G' im Raume senkrecht. Die Bildtrace der durch $A\,b$ normal auf G gelegten Ebene schneidet die axonometrische Projection von G im Punkte β, während die Bildspur $\delta\,z$ der horizontal projicirenden Ebene der Geraden G durch den Durchstosspunkt d dieser Geraden mit der Bildebene geht.

Wird das auf die Bildebene senkrecht stehende rechtwinklige Dreieck $\beta A d$ in die Bildebene umgelegt, so erscheint (A) auf der Peripherie eines über βd in der Bildebene beschriebenen Halbkreises, und $(A) d$ ist die umgelegte Gerade.

10. Der Neigungswinkel zweier Ebenen S und Σ ist zu bestimmen.

Wir fällen (siehe Fig 10) vom Coordinatenanfangspunkte A auf die beiden Ebenen die Normalen und bestimmen die wahre Grösse des von ihnen eingeschlossenen Winkels.

Die Normale $A p$ der Ebene Σ, hat $A p'$ zur Grundriss- und $u \sigma$ zur Aufriss-Projection. Dabei sind p' und σ die Projectionen der Höhenschnitte der Dreiecke $A x \zeta$ und $A x \upsilon$ respective.

Die Normale $A q$ der Ebene S hat $A q'$ zur Grundriss- und $A s$ zur Seitenrissprojection. Hier sind q', s die axonometrischen Projectionen der Höhenschnitte der Dreiecke $A e_1 y$ und $A y \xi$ beziehungsweise.

Die durch den Punkt x gelegte Bildebene schneidet die Senkrechten $A p$, $A q$ in den Punkten d und δ respective, deren Verbindungsgerade E_b uns die Bildtrace der Ebene E der beiden Normalen liefert.

Betrachten wir E als eine neue Coordinatenebene, $A q$ als eine Coordinatenaxe, und A als Anfangspunkt, so wird die auf $A q$ normale Coordinatenebene die ursprüngliche Grundebene in einer zu S_h parallelen Geraden $A b$ schneiden, und die von b auf die Projection von $A q$ gefällte Normale zur Bildspur besitzen Schneidet diese Bildspur die Bildtrace E_b der Ebene E im Punkte β, so ist $A \beta$ die Projection der zweiten in E liegenden Axe des neuen Coordinaten-Axensystems.

Nach der Umlegung der Coordinatenebene E in die Bildebene gelangt A auf einen über $\delta \beta$ in der Bildebene beschriebenen Halbkreis nach (A) und es ist der Winkel $\delta (A) d$ gleich dem verlangten Neigungswinkel.

Bemerkung. Die Grundriss-Spur der Grundriss projicirenden Ebene Q der Geraden $A q$ schneidet in Fig. 10 die Bildtrace $b x$ der Grundebene in einem ausserhalb der Tafelgrenze liegenden Punkte π. Da jedoch die Ebene Q auf S_h senkrecht steht, so muss ihre Bildtrace $z \pi$ auf der Projection von S_h senk-

recht stehen, und man erhält daher den Punkt δ, wenn man von z die Senkrechte auf die Projection von S_h fällt, und mit $A\,q$ zum Schnitt bringt.

11. Die Bemerkung vom Schlusse des vorangehenden Artikels zeigt, dass zur Lösung der Aufgabe blos die Construction der axonometrischen Projection der beiden Normalen erforderlich ist.

Es sei (siehe Fig. 11) die Ebene Σ durch Σ_h, Σ_v und S durch S_h, S_v gegeben.

Die Bildtrace Σ_b der Ebene Σ erhalten wir in der Verbindungsgeraden der Schnittpunkte τ, σ der Spuren Σ_h, Σ_v mit der Bildebene.

Ebenso wird S_b durch die Punkte t, s, in denen die Spuren S_h, S_v die Bildebene resp. treffen, bestimmt.

Die axonometrischen Projectionen der vom Punkte A auf die gegebenen Ebenen gefällten Normalen N, N_1 stehen auf Σ_b, S_b beziehungsweise senkrecht und können daher direct gezeichnet werden.

Die Bildtrace der Grundriss-projicirenden Ebene der Geraden N geht durch z, ist auf die Projection von Σ_h normal gerichtet, und schneidet N im Durchstosspunkte d dieser Geraden mit der Bildebene. Ebenso ist die von z auf die Projection von S_h gefällte Normale die Bildspur der Grundriss-projicirenden Ebene von N_1 und geht durch den Durchstosspunkt δ der Geraden.

Die Verbindungsgerade E_b der beiden Durchstosspunkte — die auf der axonometrischen Projection der Schnittlinie der beiden Ebenen senkrecht steht, daher δ durch d auch in dieser Weise bestimmt werden kann — liefert uns die Bildspur der durch N, N_1 bestimmten Ebene E. Ziehen wir durch A die Parallele zu S_h und durch ihren Durchstosspunkt b mit der Bildebene die Normale auf die axonometrische Projection von N_1 bis zu ihrem Schnittpunkte β mit E_b, so ist $b\,\beta$ die Bildspur der in A auf N_1 normalen Ebene, und folglich steht auch die Gerade $A\,\beta$ im Raume auf N_1 senkrecht. Nach der Drehung des Punktes A um E_b in die Bildebene fällt (A) auf einen über $\beta\,\delta$ als Durchmesser beschriebenen Halbkreis, und es ist $\delta\,(A)\,d$ die wahre Grösse des Neigungswinkels der gegebenen Ebenen.

12. Ich erlaube mir noch eine Lösung des im vorangehenden Artikel behandelten Problems vorzuführen.

Beide Ebenen sind (siehe Fig. 12) durch ihre Grun
Spuren Σ_h, S_h und durch ihre Bildtracen Σ_b, S_b gegeben.

Durch einen beliebigen Punkt des Raumes legen wi
Ebene E normal auf die Schnittgerade $b\,h$ der beiden Eb
Die Bildspur E_b dieser Ebene E — die wir durch den Sc
punkt d der Spuren Σ_h, Σ_b gelegt haben — steht auf der a
metrischen Projection der Schnittlinie $b\,h$ senkrecht, währe
im Raume, auf der Grundriss-Projection der Schnittlinie
mal gerichtet ist. Um diese Grundriss-Projection $b'\,h$ der Sc
geraden $b\,h$ zu bestimmen, suchen wir die Grundriss-Proj
des Schnittpunktes b der Bildtracen der gegebenen Ebenen
Grundriss-projicirende Gerade des Punktes b bestimmt mi
Axe Z eine Ebene H, deren Bildtrace $b\,z$ ist. Schneidet dah
die Bildspur $x\,y$ der Grundebene in τ, so muss $A\,\tau$,
Grundriss-Spur von H, durch b' gehen.

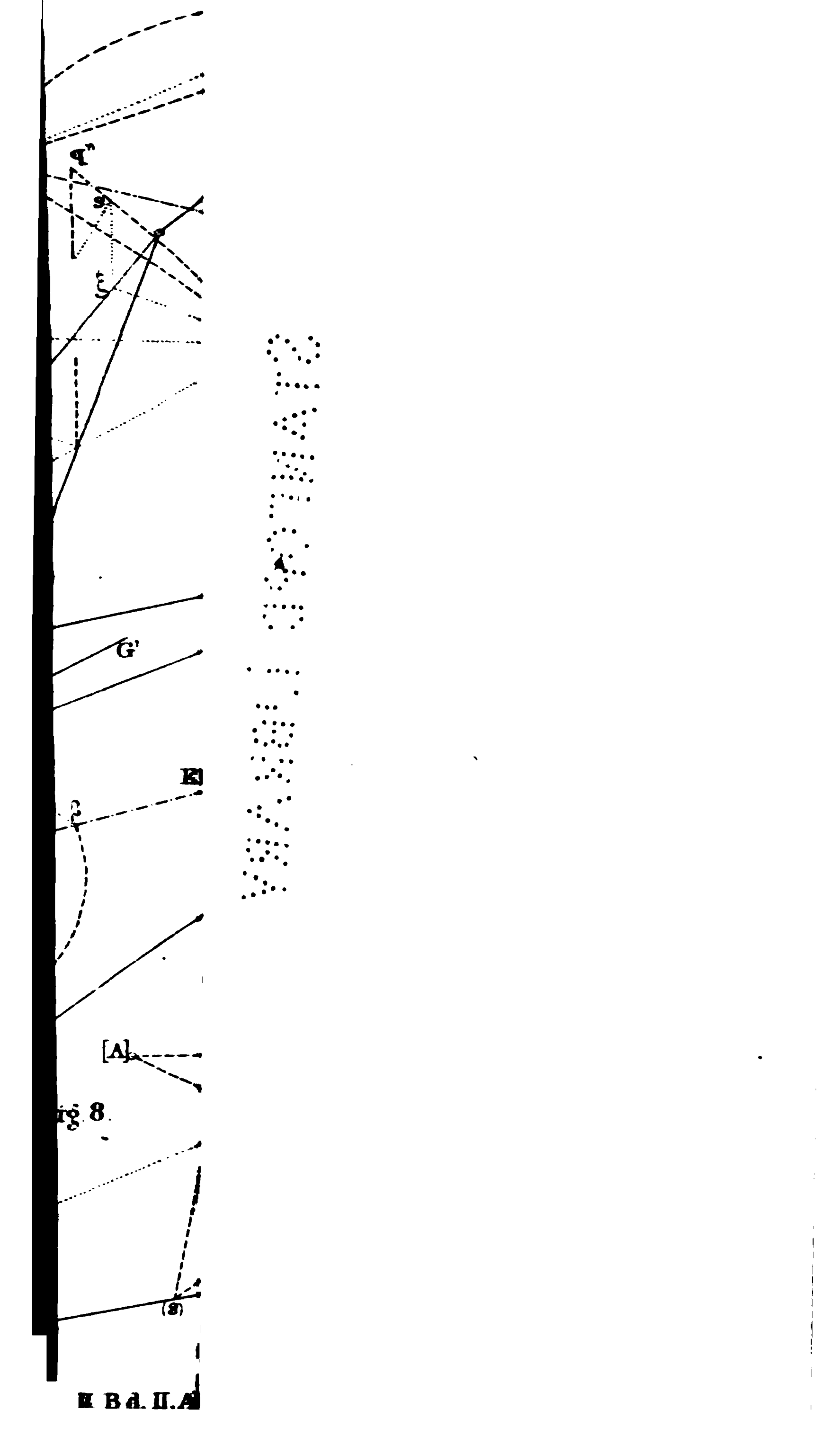
Da in unserer Figur der Punkt z jedoch ausserhalb
Tafelgrenze liegt, so haben wir durch b eine Parallele zu
daher eine Normale auf die Projection der Y-Axe bis zu it
Schnittpunkt g mit $x\,y$ gezogen, und die Grundriss-Proje
der Geraden $b\,g$ construirt. Diese Projection $g\,b'$ ist dur
parallel zur X-Axe zu ziehen.

Wird die Projection von $h\,b'$ von den Projectionen
Axen Y, Z in υ, ζ resp. getroffen, und ist p ($\zeta\,p \parallel A\,x$, $\upsilon\,p \parallel A$
die Projection des Höhenschnittes des Dreiecks $A\,\upsilon\,\zeta$, so ist
parallel zu $A\,p$.

Die Bildtrace $b\,t$ der Grundriss-projicirenden Ebene H_1
Geraden $b\,h$ schneidet E_b in β; wenn man diesen Punkt mit d
Schnittpunkte ε von E_h und $h\,b'$ verbindet, so erhält man
Schnittlinie der Ebenen E und H_1. Diese Schnittlinie $\varepsilon\,\beta$ g
durch den Durchstosspunkt a von $b\,h$ mit E.

Wird durch a die Parallele zu E_h bis zum Schnittpun
mit E_b gezogen, so ist $\beta\,a\,\gamma$ im Raume ein rechtwinkliges D
eck, dessen Hypotenuse $\beta\,\gamma$ in der Bildebene liegt. Nach
Umlegung dieses Dreiecks in die Bildebene gelangt (a) auf
Peripherie eines über $\beta\,\gamma$ beschriebenen Halbkreises, und
Verbindungsgeraden von (a) mit d und dem Schnittpunkte δ d
Spuren S_b, E_b schliessen den gesuchten Neigungswinkel ein.

———————


q''
s
ξ
G'
E
β
[A]
Fig. 8.
(8)
Bd. II.A



Über ein Nullsystem zweiten Grades.

Von **Adolf Ameseder,**

Assistenten für darstellende Geometrie an der k. k. technischen Hochschule in Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 10. Februar 1881.)

I. Geometrischer Zusammenhang der drei Grundwerte eines Doppelverhältnisses.

„Projicirt man einen beliebigen Punkt p der Ebene eines Dreieckes $\Delta_1\Delta_2\Delta_3$ aus den Ecken auf die Gegenseiten nach 1, 2 und 3, und bestimmt man auf den letzteren drei Punkte, und zwar I auf $\overline{\Delta_2\Delta_3}$, II auf $\overline{\Delta_3\Delta_1}$ und III auf $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ derart, dass die Doppelverhältnisswerte $(\Delta_2\Delta_3 1\,\mathrm{I})$, $(\Delta_3\Delta_1 2\,\mathrm{II})$ und $(\Delta_1\Delta_2 3\,\mathrm{III})$ gleich sind den drei Grundwerten eines Doppelverhältnisses, so liegen die Punkte I, II, III mit p allemal auf einer Geraden g."

Um diesen Satz zu beweisen, ordnen wir der Projection 1 des gegebenen Punktes p aus der Ecke Δ_1 auf die Gegenseite $\overline{\Delta_2\Delta_3}$ in dieser einen Punkt I so zu, dass das Doppelverhältniss $(\Delta_2\Delta_3 1\,\mathrm{I})$ den bestimmten Wert h habe, und verbinden I mit p. Die Schnitte dieser Verbindungslinie g mit den zwei anderen Seiten seien II und III, und die Projectionen von Δ_2 und Δ_3 aus p auf dieselben Seiten mögen, wie schon angedeutet, mit 2 und 3 bezeichnet werden. Man sieht nun ohne Weiteres, dass sich die Reihen $\Delta_3\Delta_1 2\,\mathrm{II}$ und $\Delta_2\Delta_3 1\,\mathrm{I}$ für das Centrum p in perspectivischer Lage befinden, und folglich

$$(\Delta_3\Delta_1 2\,\mathrm{II}) = (\Delta_3 1 \Delta_2\,\mathrm{I}) = \frac{\overline{\Delta_2\Delta_3}\,.\,\overline{1\mathrm{I}}}{\overline{\Delta_2 1}\,.\,\overline{\Delta_3 \mathrm{I}}}$$

ist. Setzt man im Zähler des Bruches für $\overline{\Delta_2\Delta_3}$ $\overline{\Delta_2 1}-\overline{\Delta_3\mathrm{I}}$ und für $\overline{1\mathrm{I}}$ $\overline{\Delta_3\mathrm{I}-\Delta_3 1}$ und führt die Multiplication aus, so erhält man die Gleichung

$$(\Delta_3\Delta_1 2\,\mathrm{II}) = \frac{\overline{\Delta_2 1}\,.\,\overline{\Delta_3\mathrm{I}}-\overline{\Delta_3 1}\,.\,\overline{\Delta_3\mathrm{I}}-\overline{\Delta_2 1}\,.\,\overline{\Delta_3 1}+\overline{\Delta_3 1}^2}{\overline{\Delta_2 1}\,.\,{}_3\overline{\Delta\mathrm{I}}},$$

aus welcher durch Substitution von $\overline{\Delta_3 1}-\overline{\Delta_2 1}+\overline{\Delta_2 I}$ für $\Delta_3 I$ im zweiten Gliede des Zählers und darauf folgende Division des Zählers und Nenners durch $\overline{\Delta_3 1 . \Delta_2 I}$, unter der gemachten Voraussetzung

$$(\Delta_2\Delta_3 1\,I) = h, \tag{1}$$

die Gleichung

$$(\Delta_3\Delta_1 2\,II) = \frac{(\Delta_2\Delta_3 1 I)-1}{(\Delta_2\Delta_3 1 I)} = \frac{h-1}{h} \tag{2}$$

resultirt. Ebenso findet man die Relation:

$$(\Delta_1\Delta_2 3 III) = \frac{(\Delta_3\Delta_1 2 II)-1}{(\Delta_3\Delta_1 2 II)} = \frac{1}{1-h}. \tag{3}$$

Nachdem für die bestimmte Aufeinanderfolge $\Delta_3\Delta_1 2$ dieser Punkte, die zwei ersten als Fundamentalpunkte betrachtet, für jeden Wert h' des Doppelverhältnisses dem Punkte 2 nur ein Punkt II zukommt und dieser für den zweiten Grundwerth $\frac{h-1}{h}$ von $(\Delta_2\Delta_3 1\,I)$ auf der Geraden $\overline{Ip}$ liegt, und dasselbe von III gezeigt wurde, ist der vorausgeschickte Satz durch die Gleichungen 1, 2 und 3 bewiesen.

Fassen wir nun noch irgend einen Punkt Δ von g ins Auge, und lassen wir an die Stelle von $\Delta_1\Delta_2\Delta_3$ das Dreieck $\Delta_2\Delta_3\Delta$ und an jene der Geraden g die Linie $\overline{p\Delta}$ treten, so erhalten wir — die cyclische Aufeinanderfolge von $\Delta_1\Delta_2\Delta_3\Delta$ beachtend — indem wir die Schnitte $\overline{p\Delta_1}$ mit $\overline{\Delta_3\Delta}$ und $\overline{\Delta\Delta_2}$, beziehungsweise mit IV und V und die Projectionen der Ecken Δ_2, Δ_3 auf die Gegenseiten mit 4 und 5 bezeichnen, zwei neue Gleichungen:

$$(\Delta_3\Delta 4\,IV) = 1-h, \tag{4}$$

$$(\Delta\Delta_2 5V) = \frac{h}{h-1}; \tag{5}$$

zu welchen durch Wiederholung dieses Verfahrens auf $\Delta_3\Delta\Delta_1$ und $\Delta\Delta_1\Delta_2$ jedoch nur mehr die eine von den angegebenen verschiedene Gleichung:

$$(\Delta_1\Delta 6\,VI) = \frac{1}{h} \tag{6}$$

tritt, die mit jenen ihren Ausdruck in dem folgenden Satz findet:

„Projicirt man die Ecken eines vollständigen Viereckes aus einem Punkte seiner Ebene auf die sechs Seiten, so bilden diese Punkte mit den Ecken auf jeder Seite eine vierpunktige Gruppe. Die Doppelverhältnisswerte dieser Punktreihen sind für drei in einer Ecke zusammentreffende oder ein Dreiseit bildende Seiten die drei Grundwerte eines Doppelverhältnisses; für zwei Gegenseiten jedoch gleich."

Lassen wir die Gerade g um Δ drehen, so beschreibt p, als Schnitt der sich eindeutig entsprechenden Strahlen $\overline{\Delta_1 1}$ und $\overline{\Delta I}$, einen dem Viereck $\Delta_1\Delta_2\Delta_3\Delta$ umschriebenen Kegelschnitt K, der in dieser Art durch den auf $\overline{\Delta_2\Delta_3}$ bezogenen Doppelverhältnisswerth h vollkommen fixirt ist. Man sieht zugleich, dass, wenn man die Punkte des Kegelschnittes K aus den zwei Ecken Δ und Δ_1 auf die Verbindungslinie $\overline{\Delta_2\Delta_3}$ der zwei anderen Ecken projicirt, das charakteristische Doppelverhältniss der so entstandenen Reihen den Wert h hat, und dass die Werte dieser Doppelverhältnisse für die analogen Reihen auf $\overline{\Delta_3\Delta_1}$ und $\overline{\Delta_1\Delta_2}$, die also von den Projectionen der Punkte des Kegelschnittes aus Δ_2 und Δ, respective Δ_3 und Δ gebildet werden, den zwei andern Grundwerthen $\frac{h-1}{h}$ und $\frac{1}{1-h}$ gleich sind. Dieselben Doppelverhältnisswerte kommen jenen Reihen zu, welche drei in einer Ecke zusammenstossende Seiten zu Trägern haben.

Wie jedem Wert von $(\Delta_2\Delta_3 1\,I)$ für einen Punkt Δ nur ein Kegelschnitt K entspricht, ist auch umgekehrt auf K jedem Wert jenes Doppelverhältnisses ein Punkt Δ zugewiesen. Man ermittelt diesen constructiv, indem man durch Δ_1 irgend einen Strahl $\overline{\Delta_1 1}$ legt, seinen zweiten Schnittpunkt p mit K zeichnet, und diesen mit jenem Punkte I verbindet, der dem $\overline{\Delta_1 1}$ und $\overline{\Delta_2\Delta_3}$ gemeinschaftlichen Punkte 1 in der Projectivität $(\Delta_2\Delta_3 1\,I) = h$ zugeordnet ist. Der zweite auf dieser Verbindungslinie liegende Punkt von K ist der gesuchte Punkt Δ.

Man kann zu diesem Punkte auch mittelst eines durch Δ_2 oder Δ_3 gezogenen Strahles in derselben Weise gelangen, nur hat man jetzt anstatt h den Grundwert $\frac{h-1}{h}$ respective $\frac{1}{1-h}$ zu nehmen.

Dies gibt eine Beziehung zwischen den drei Grundwerten und einem Kegelschnitt, die sich folgendermassen aussprechen lässt:

„Legt man durch die Ecken eines einem Kegelschnitte K eingeschriebenen Dreieckes $\Delta_1\Delta_2\Delta_3$ drei von einander unabhängige Strahlen, welche den Kegelschnitt in den Punkten p_1, p_2, p_3 und die Gegenseiten des Dreieckes in 1, 2 und 3 treffen, und weist man diesen Punkten bezüglich $\Delta_2\Delta_3$, $\Delta_3\Delta_1$ und $\Delta_1\Delta_2$, respective auf diesen Geraden die Punkte I, II und III derart zu, dass die Doppelverhältnisswerte $(\Delta_2\Delta_3 1\,\mathrm{I})$, $(\Delta_3\Delta_1 2\,\mathrm{II})$ und $(\Delta_1\Delta_2 3\,\mathrm{III})$ gleich sind den drei Grundwerten eines Doppelverhältnisses; so schneiden sich die Verbindungslinien $\overline{p_1\mathrm{I}}$, $\overline{p_2\mathrm{II}}$ und $\overline{p_3\mathrm{III}}$ in ein und demselben Punkt Δ des Kegelschnittes.“

II. Über Curven $2n$-ter Ordnung mit drei n-fachen Punkten.

1. Wir wollen, um die Beziehung zwischen dem Punkte p und der Geraden g weiter untersuchen zu können, die Bestimmung treffen, dass sich der Doppelverhältnisswert h auf die Seite $\overline{\Delta_2\Delta_3}$, der zweite Grundwert $\frac{h-1}{h}$ auf $\overline{\Delta_3\Delta_1}$ und der dritte auf $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ beziehen möge. Damit jedoch dadurch die Allgemeinheit der Untersuchung auch in formeller Hinsicht nicht beschränkt erscheine, nennen wir die Ecken des Dreieckes Δ_i, Δ_k, Δ_l, und die auf die Gegenseiten bezogenen Doppelverhältnisswerte h_i, h_k und h_l, und führen für die Punkte 1, 2, 3 und I, II, III die Bezeichnung i, k, l, respective J, K, L ein.

Nehmen wir noch an, dass h_i einen bestimmten Wert habe, so sind alle hier in Frage kommenden Verhältnisse gegeben.

Einer jeden Geraden g der Ebene entspricht ein und nur ein auf ihr liegender Punkt p, und jeder Lage des letzteren eine durch ihn gehende Gerade. Dreht sich diese um einen Punkt Δ von allgemeiner Lage, so beschreibt p, wie schon nachgewiesen, einen dem Dreiecke $\Delta_i\Delta_k\Delta_l$ umschriebenen Kegelschnitt C^2, den wir als den dem Punkte Δ zugeordneten definiren wollen. Ist Δ ein Punkt J der Seite $\overline{\Delta_k\Delta_l}$, so liegen die den Strahlen des durch ihn bestimmten Büschels entsprechenden, mit ihnen incidenten Punkte p auf der Geraden $\overline{\Delta_i i}$, welche sich als die Verbindungslinie von

Δ_i mit dem der Relation $(\Delta_k \Delta_l i J) = h_i$ genügenden Punkt i ergibt. Coincidirt g bei der Drehung um J mit $\overline{\Delta_k \Delta_l}$, so kommt p in die Lage i; dieser und, weil das Gesagte für jeden Punkt J gilt, jeder Punkt der Geraden $\overline{\Delta_k \Delta_l}$ ist als ihr entsprechend anzusehen. Einem Punkte J dieser Seite ist hingegen, wenn man ihn als Enveloppe betrachtet, ausser $\overline{\Delta_k \Delta_l}$ noch die Gerade $\overline{\Delta_i i}$, also ein degenerirter Kegelschnitt zugeordnet.

Reciprok verhält es sich mit einer Ecke Δ_i des Dreieckes, ihr sind alle Geraden ihres Büschels beigeordnet, und während die den Punkten einer Geraden g' entsprechenden Geraden einen dem Dreieck $\Delta_i \Delta_k \Delta_l$ eingeschriebenen, auch g' berührenden Kegelschnitt C_2' umhüllen, zerfällt dieser für einen Strahl $\overline{\Delta_i i}$ von Δ_i in diesen und den Punkt J.

Umhüllt die Gerade g eine algebraische Curve n^{ter} Classe C_n, so beschreibt p eine Curve C^{2n}. Diese hat mit einer Geraden g' jene Punkte gemeinschaftlich, in welchen diese von den gemeinschaftlichen Tangenten des ihr entsprechenden Kegelschnittes C_2' und der Curve C_n getroffen wird. Die Anzahl dieser Tangenten ist bekanntlich $2n$, und mithin die Curve C^{2n} von der $2n$-ten Ordnung.

Die Schnittpunkte von C^{2n} mit einem Strahl $\overline{\Delta_i i}$ des Büschels Δ_i ergeben sich, nach dem in den letzten zwei Punkten Gesagten, als die Schnitte der Geraden $\overline{\Delta_i i}$ mit den $n+n$ aus Δ_i und J an C_n gelegten Tangenten $t_1, t_2 \ldots t_n$ und $\tau_1, \tau_2 \ldots \tau_n$. Diese Thatsache zeigt klar, dass C^{2n} in den Ecken des Dreieckes n-fache Punkte hat, und dass sie das Erzeugniss des Büschels Δ_i und der projectivischen „Tangenten-Involution“ [1] n^{ter} Classe τ (auf dem Träger C_n und mit dem geraden Durchschnitt $\overline{\Delta_k \Delta_l}$) ist. Von dieser Entstehungsart der sprachlichen Curve ausgehend, kann man die Bestimmung ihrer Ordnungszahl mittelst des Principes der Correspondenz vollziehen. Aus einem Punkte a einer Geraden g' lassen sich n Tangenten an C_n legen; die ihnen entsprechenden Strahlen von Δ_i treffen g' in ebensovielen Punkten b. Umgekehrt

---

[1] Hier ist unter diesem Namen nicht dasjenige geometrische Gebilde gemeint, welches man gewöhnlich als Involution bezeichnet. Jenes hat, weil sein Träger keine rationale Curve ist, mit diesem nur die Eigenschaft der Vertauschungsfähigkeit seiner Elemente gemein.

fixirt b einen Strahl im Büschel Δ_i, dessen zugeordnete Tangenten der Involution g' in jenen n-Punkten a schneiden, welche wir b zuzuweisen haben. Die Beziehung zwischen den Reihen a und b ist eine n—n deutige; sie haben $2n$ Doppelelemente erster Art, und diese sind die Schnitte der Geraden mit der Curve.

Setzen wir voraus, dass C_n eine allgemeine Curve n^{ter} Classe ist, die zu dem Dreieck $\Delta_i \Delta_k \Delta_l$ in keiner besonderen Lagenbeziehung steht, so schneidet sie $\overline{\Delta_k \Delta_l}$ in $n(n-1)$ Punkten. Ihren Tangenten in diesen Punkten — den $n(n-1)$ Doppelelementen der Involution — entsprechen die Tangenten der Curve C^{2n} aus dem n-fachen Punkt Δ_i; wogegen die n-Tangenten in diesem Punkte den aus Δ_i an C_n gelegten Tangenten — diese als Elemente der Involution aufgefasst — projectivisch conjugirt sind. Die Classenzahl der Curve C^{2n} ist also $n(n+1)$.

Machen wir noch darauf aufmerksam, dass reciprok C_n das Erzeugniss der Punktreihe J auf $\overline{\Delta^k \Delta_l}$ und der projectivischen Punkt-Involution n^{ter} Ordnung ist, welche von dem Büschel $\overline{\Delta_i i}$ auf C^{2n} festgelegt wird, und wiederholen wir, dass ein Punkt von C^{2n} und die ihm entsprechende Tangente von C_n allemal incident sind, so ist wohl genügend dargethan, dass jenes System Σ, welches von dem Punkte p durchlaufen wird, wenn g ein System Σ' beschreibt, quadratisch verwandt mit diesem ist, und dass sich beide Systeme in der speciellen Lagenrelation eines Nullsystemes befinden.

Für dieses „Nullsystem zweiten Grades" ist $\Delta_i \Delta_k \Delta_l$ das Hauptdreieck. Es ist durch dieses und ein Paar entsprechender Elemente p und g eindeutig gegeben; doch genügt zu einer Festlegung, wenn wir die eingangs gemachten Bestimmungen festhalten, auch — ausser der Angabe von $\Delta_i \Delta_k \Delta_l$ — jene des Doppelverhältnisswertes h. Dieser ist nun auch gegeben, wenn man drei entsprechende Punktpaare der Reihen i und J kennt; mithin ist das Nullsystem selbst vollkommen fixirt, wenn ein Hauptpunkt Δ_i, die Gegenseite δ_i des Hauptdreieckes und drei Paare entsprechender Elemente p, g gegeben vorliegen.

Man findet die irgend einem Punkte p entsprechende Gerade g, indem man zu dem Schnitt i der Linie $\overline{\Delta_i p}$ mit δ_i den entsprechenden Punkt J construirt und diesen mit p verbindet. Diese Construction kann offenbar ganz unabhängig von $\Delta_k \Delta_l$, welche die

Doppelpunkte der conlocalen Reihen i und J sind, und als solche auch imaginär sein können, durchgeführt werden.[1]

2. Es dürfte aus diesem Grunde im Allgemeinen nicht nothwendig sein, die beiden Arten des Nullsystems getrennt zu betrachten.

Auf einen Unterschied derselben wollen wir jedoch gleich aufmerksam machen. Er besteht in der Verschiedenheit der n-fachen Punkte einer Curve C^{2n} des einen und einer solchen des andern Systems. Während eine solche in dem System mit drei reellen Hauptpunkten auch drei reelle n-fache Punkte besitzt, deren jeder als Scheitel eines Strahlbüschels betrachtet werden kann, das mit einer Involution n^{ter} Classe, welche dieselbe Curve C_n zum Träger und die dem jeweiligen Scheitel gegenüberliegende Seite des Hauptdreieckes zur Axe hat, die Curve C^{2n} erzeugt, — während also im ersten System zwischen den drei Hauptpunkten Vertauschungsfähigkeit herrscht, kann dies — wenngleich auch nur geometrisch — von dem System mit imaginären Hauptpunkten nicht behauptet werden.

Dass die Realität der drei n-fachen Punkte der Curve C^{2n} ihre Vertauschungsfähigkeit bedingt, folgt unmittelbar aus unserem ersten Satz. Denn betrachten wir, um dies recht deutlich darzulegen, eine Gerade g, welche mit C^{2n} den Punkt p gemeinschaftlich hat, als diesem entsprechend, so ist sie dies für einen bestimmten Wert von h_i in Bezug auf Δ_i und für den zweiten Grundwert h_k rücksichtlich Δ_k. Ist nun g_1 jene Gerade, welche einem andern Curvenpunkt p_1 für den Doppelverhältnisswerth h_i entspricht, so ist sie zugleich auch jene, welche p_1 für h_k in Bezug auf Δ_k zugewiesen ist. Daraus erhellt nun, weil dies für jede Lage

---

[1] Die Verwandtschaft zweiten Grades ist bereits vielfach und ausführlich behandelt worden, und zwar synthetisch von Steiner (Syst. Entwicklung etc.), von Seydewitz (Grunert's Archiv, Bd. 7., pag. 113 bis 148) und Reye (Schlömilch's Zeitschrift, Bd. 11, pag. 280—310); analytisch von Magnus (Aufgabensammlung, pag. 229) und Eduard Weyr (Schlömilch's Zeitschrift, Bd. 14, pag. 445—506). Geiser (in den Mittheilungen der Berner Naturforsch.-Gesellschaft 1865) und Hirst (Proceedings of the Royal Society 1865) haben specielle Arten derselben untersucht.

Das Nullsystem zweiten Grades jedoch scheint man übersehen zu haben.

von p gezeigt werden kann, dass C_n auch Träger einer Tangenten-Involution n^{ter} Classe τ_k ist, welche $\overline{\Delta_l \Delta_i}$ zur Axe hat, und mit dem ihr projectivischen Büschel Δ_k die Curve C^{2n} erzeugt. Das charakteristische Doppelverhältniss für diese zwei Gebilde ist h_k.

3. Jeder Wert von h_i bedingt für ein angenommenes Hauptdreieck $\Delta_i \Delta_k \Delta_l$ ein Nullsystem und für eine gegebene Curve C^{2n}, welche die Hauptpunkte zu n-fachen Punkten hat, eine Curve n^{ter} Classe C_n, die mit jener in der auseinandergesetzten Beziehung steht, d. h. ihre Nullcurve ist. Diese Curven bilden demnach ein System von einfacher Unendlichkeit, dessen Charakteristiken sich leicht ermitteln lassen.

So ist die Zahl der Curven C_n, welche eine Gerade g berühren, $2n$; weil g mit C^{2n} $2n$ Punkte $p_1 p_2 \ldots p_{2n}$ gemeinschaftlich hat, jeder dieser Punkte der Geraden als Nullpunkt zugewiesen werden kann, und jede derartige und nur eine solche Anordnung ein Nullsystem bestimmt, in welchem der Curve C_n eine Curve C_n entspricht, die g berührt. Aus dem im ersten Artikel dieses Abschnittes Gesagten sehen wir auch, dass wir jeden Strahl durch Δ_i einer der n-Tangenten von C^{2n} in diesem Punkte zuweisen können, und dass eine solche Bestimmung ein Nullsystem fixirt, in welchem die Nullcurve C_n von C^{2n} den angenommenen Strahl zur Tangente hat. Ein Strahl durch einen Hauptpunkt berührt also nur n-Curven des Systems C_n. Diese Abweichung findet ihre Erklärung darin, dass die aus Δ_i an C^{2n} gelegten $n(n-1)$ Tangenten eine degenerirte Curve C_n bilden, welche n-mal zu zählen ist.

Lässt man die erwähnte Gerade g um einen Punkt P drehen, und zieht man aus diesem an die $2n$ sie in jeder Lage berührenden C_n die weiteren Tangenten g', deren Anzahl $2n(n-1)$ ist, so bilden diese mit jener ein symmetrisches Strahlensystem vom Grade $2n(n-1)$. Dieses besitzt $4n(n-1)$ Doppelelemente[1] erster Art, von welchen jedoch $3 \times n(n-1)$ mit den drei nach den Hauptpunkten zielenden Strahlen coincidiren und daher nur $n(n-1)$ einzeln Tangenten jener Curven C_n sind, welche durch P laufen. Die Anzahl der durch einen Punkt bestimmten Curven des

---

[1] Siehe Prof. Dr. Emil Weyrs: „Beiträge zur Curvenlehre." A. Hölder in Wien, 1880.

Systemes C_n ist also $n(n-1)$; sie bleibt dieselbe, wenn P ein Punkt J einer Hauptlinie ist, da alle jene Curven C_n diesen Punkt enthalten, welche in den $n(n-1)$ Nullsystemen, die durch die Zuordnung von J und einer der aus Δ_i an C^{2n} möglichen Tangenten gegeben erscheinen, der Curve C^{2n} zukommen.

Die $n(n-1)$ Curven C_n, welche durch irgend einen Punkt einer Geraden laufen, schneiden diese in $n(n-1)[n(n-1)-1] = n[n^3-2n^2+1]$ weiteren Punkten. Ebenso gross ist der Grad jenes symmetrischen Punktsystems, welches die Curven C_n auf einer Geraden herausschneiden. Von seinen $2n[n^3-2n^2+1]$ Doppelelementen erster Art sind $2n$ Berührungspunkte des Trägers mit eben so vielen Curven des Systems, die andern müssen also Doppel- und Rückkehrpunkte dieser Curven vorstellen. Die Ordnungszahl ihres geometrischen Ortes ist $2n^3[n-2]$. Dieser hat in den Hauptpunkten $n^3(n-2)$-fache Punkte; weil jene Curve C_n, welche aus den $n(n-1)$ aus einem solchen an C^{2n} gezogenen Tangenten besteht, jeden durch den Hauptpunkt gehenden Strahl in $n(n-1)$ dort coincidirenden Punkten schneidet, und sie die einzige Curve des Systems ist, welche jenen Hauptpunkt enthält. Es fallen also alle in dem symmetrischen Punktsystem des Strahles dem Hauptpunkt conjugirten $n[n^3-2n^2+1]$ Punkte mit ihm zusammen — er repräsentirt ebensoviele Doppelpunkte, von welchen, weil der Strahl nur n Curven C_n berührt, n als Punkte dieser Art und $n^3[n-2]$ als Schnitte mit der Curve der Doppel- und Rückkehrpunkte des Curvensystems aufzufassen sind. Unter den behandelten symmetrischen Elementensystemen sind jene auf den drei Hauptlinien dadurch ausgezeichnet, dass sich die Elemente eines solchen in $n(n-1)$ projectivische Reihen auflösen, deren gemeinschaftliche Doppelelemente die auf dem Träger befindlichen Hauptpunkte sind. Analog gruppiren sich die Strahlen des symmetrischen Systems, das einen Hauptpunkt zum Scheitel hat, zu n projectivischen Büscheln, die alle die Hauptlinien durch den Scheitel zu Doppelstrahlen haben.

4. Nachdem wir im Vorhergehenden die Hauptmomente des allgemeinen Falles kurz erörtert haben, wollen wir noch des Einflusses gedenken, den eine specielle Lage von C_n gegen das Hauptdreieck auf den Charakter der Curve C^{2n} äussert.

Berührt C_n die Hauptlinie $\overline{\Delta_k\Delta_l}$ an ρ_i Stellen, so lassen sich aus jedem Punkte J dieser Linie nur mehr $n-\rho_i$ von ihr verschiedene Tangenten legen. Von den n auf einem Strahle des Büschels Δ_i befindlichen, von diesem verschiedenen Punkten von C^{2n} fallen daher, für jede Lage desselben, ρ_i in seinen Schnitt i mit $\overline{\Delta_k\Delta_l}$; jene Annahme hat also ein Zerfallen der Curve C^{2n} — die nun das Erzeugniss einer Involution von der Classe $n-\rho_i$ und des Büschels Δ_i ist — in eine Curve C von der Ordnung $2n-\rho_i$, und die ρ_i-mal zu zählende Hauptlinie $\overline{\Delta_k\Delta_l}$ zur Folge.

Nehmen wir noch an, Δ_i wäre ein Punkt der Curve C_n, so fallen von den n aus diesem Punkte an C_n möglichen Tangenten zwei zusammen und bewirken eine Coincidenz von zwei der n-Tangenten von C in Δ_i, und also den Übergang eines der hier vereinigten $\frac{n(n-1)}{2}$ Doppelpunkte in einen Rückkehrpunkt.

Hat demnach allgemein C_n die drei Hauptlinien zu ρ_i, ρ_k, ρ_l-fachen Tangenten und in den Hauptpunkten α_i, α_k, α_l-fache Punkte, wobei selbstverständlich die Bedingungen

$$\alpha_k+\alpha_l+2\rho_i \leqq n$$

und

$$\alpha_i \leqq \frac{[\rho_k+\rho_l-n][\rho_k+\rho_l-n+1]}{2}$$

erfüllt sein müssen, so ist ihre Nullcurve C von der Ordnung $2n-(\rho_i+\rho_k+\rho_l)$ mit $n-(\rho_k+\rho_l)$, $n-(\rho_l+\rho_i)$ und $n-(\rho_i+\rho_k)$-fachen Punkten in Δ_i, Δ_k und Δ_l respective, von denen der erste α_i, der zweite α_k und der dritte α_l Rückkehrpunkte enthält.

Die Classenzahl dieser Curve liesse sich nur mittelst der Plücker'schen Formeln direct aus den angegebenen Singularitäten berechnen. Rechnerisch ist es jedoch einfacher sie in der Weise abzuleiten, wie es im ersten Artikel des zweiten Abschnittes für C^{2n} geschehen ist.

Wir finden, wenn wir annehmen, sie habe noch ρ Doppelpunkte und σ-Spitzen, also C_n ebensoviele weitere reciproke Singularitäten, da die Anzahl der von ihren vielfachen Punkten vertretenen Doppelpunkte nun

$$\delta = 3n(n-1)+\rho+\Sigma\rho_i^2+\Sigma\rho_k\rho_l-(2n-1)\Sigma\rho_i-\Sigma\alpha_i \quad a)$$

ist, und sie $\Sigma\alpha_i + \sigma$ Spitzen besitzt, als ihre Classenzahl

$$m = n(n+1) - \Sigma\rho_i^2 - \Sigma\rho_i - \Sigma\alpha_i - 2\rho - 3\sigma, \qquad b)$$

wobei der Kürze wegen $\rho_i^2 + \rho_k^2 + \rho_l^2 = \Sigma\rho_i^2$, $\rho_i + \rho_k + \rho_l = \Sigma\rho_i$ und $\alpha_i + \alpha_k + \alpha_l = \Sigma\alpha_i$ gesetzt wurde.

Es muss ausdrücklich bemerkt werden, dass es für diese Formeln ganz gleichgiltig ist, ob eine Hauptlinie die Curve C_n doppelt in 1 und 2 berührt oder sie zur Inflexionstangente hat; da das Auftreten der letzteren nur bewirkt, dass nun C — statt wie früher jene Hauptlinie in den 1 und 2 entsprechenden Punkten der Reihe i zu schneiden — sie in den dem Inflexionspunkte zugeordneten Punkte berührt.

Hat C_n auf $\overline{\Delta_k\Delta_l}$ ausser Δ_k, Δ_l noch einen vielfachen, sagen wir π-fachen Punkt, so besitzt C eine dem Büschel Δ_i angehörige, ebenso vielfache Tangente t, welche dem Punkte π bezüglich Δ_k und Δ_l für den Doppelverhältnisswerth h_i des jeweiligen Nullsystems zugeordnet ist und zu Berührungspunkten ihre Schnittpunkte mit den Tangenten von C_n in π hat. Es braucht auch hier wohl nur erwähnt zu werden, das immer $\pi \leqq \frac{n}{2}$ und $\pi + 2\rho_i + \alpha_k + \alpha_l \leqq n$ sein muss.

5. Besondere Hervorhebung verdient noch die folgende Beziehung zwischen der Curve C und irgend einer ihrer Nullcurven C_n.

Wir haben im ersten Artikel dieses Abschnittes erwähnt dass die gemeinschaftlichen Tangenten eines dem Hauptdreiecke eingeschriebenen Kegelschnittes C_2 und einer Curve C_n jene Gerade g, welche in diesem Nullsystem $[C_n, C]$ dem Kegelschnitt entspricht, in jenen $2n - (\rho_i + \rho_k + \rho_l)$ Punkten treffen, welche der Curve C angehören. Daraus folgt aber umgekehrt, dass die Tangenten aus den sämmtlichen Schnittpunkten einer Geraden g mit der Curve C an irgend einen Kegelschnitt, der jene Gerade berührt und dem Hauptdreieck eingeschrieben ist, Tangenten einer und derselben Nullcurve C_n von C für jenes Hauptdreieck sind.

III. Bestimmung der Anzahl der Kegelschnitte eines Netzes, welche eine algebraische Curve doppelt berühren.

Wenn bei einer Bewegung der Geraden g zwei ihrer Schnittpunkte p mit der Curve C unendlich nahe rücken, so werden die ihnen entsprechenden, incidenten Geraden g zu benachbarten Tangenten sowohl in Bezug auf die Curve C_n als auch jenen Kegelschnitt C_2, welcher g entspricht. Ein Übergang der Geraden g in eine Tangente hat also zur Folge, dass auch C_2 und C_n sich berühren, und zwar an eben so vielen Stellen und gerade so oft punktig als g und C, und umgekehrt. Ist also g eine Doppel- oder Inflexionstangente von C, so wird C_2 ein Kegelschnitt sein, welcher C_n beziehungsweise doppelt berührt oder osculirt und dem Hauptdreieck eingeschrieben ist.

Wir sind nun in der Lage zu einer algebraischen Curve C_n für ein beliebiges Hauptdreieck und einen willkürlich zu wählenden Wert des Doppelverhältnisses h_i die zugehörige Nullcurve C zu construiren, und die Singularitäten dieser aus den bekannten jener abzuleiten. Wir wissen, dass die letztere, ausser den vielfachen Punkten in Δ_i, Δ_k, Δ_l, noch eben so viele Doppel- und Rückkehrpunkte hat als C_n Doppel- und Inflexionstangenten besitzt, und dass jeder vielfachen Tangente dieser ein vielfacher Punkt desselben Grades in jener zukommt. Wir sind daher im Stande die Zahl der Doppel- und Inflexionstangenten von C mittelst der Plücker'schen Formeln zu berechnen und finden in diesen Zahlen zugleich, wie schon erwähnt, die Anzahl jener dem Hauptdreieck eingeschriebenen Kegelschnitte, welche C_n doppelt berühren, respective osculiren. [1]

---

[1] Die Frage nach der Anzahl der Curven eines zweistufigen Systems, welche eine andere osculiren oder zweimal zweipunktig berühren, wurde schon mehrfach behandelt. Man vergleiche, ausser den in den letzten Literaturnotizen der „Analytischen Geometrie der höheren ebenen Curven" von Salmon-Fiedler erwähnten Arbeiten, von den Publicationen der letzten Zeit jene von Zeuthen in den Comptes rendus etc., tome 89, pag. 901 und die „Anzahl geometrische Untersuchung des Dreieckes" von H. Schubert in den mathematischen Annalen, Bd. XVII, pag. 189. Unsere Ableitung dieser Anzahlen für ein Kegelschnittnetz ist als eine Anwendung der quadratischen Verwandtschaft gegeben, und benützt ausser dieser nur die Plücker'schen

Um dem Probleme den höchsten Grad von Allgemeinheit zu geben, setzen wir voraus C_n habe die Hauptlinien zu ρ_i, ρ_k, ρ_l-fachen Tangenten und in Δ_i, Δ_k, Δ_l, beziehungsweise α_i, α_k, α_l-fache Punkte. Die Curve C ist dann von der in Art. 4, Absch. 2 angegebenen Art. Ihre Ordnungs- und Classenzahl, sowie die Zahl ihrer Doppelpunkte haben wir an jener Stelle berechnet und können aus diesen Angaben, am bequemsten mit Hilfe der in Cremonas „Einleitung in eine geometrische Theorie der höheren ebenen Curven“ (pag. 143 der deutschen Übersetzung) mit 7 bezeichneten Plücker'schen Formel:

$$2\tau = 2\delta - [n-m][n+m-9],$$

in welcher n die Ordnung, m die Classe, δ die Anzahl der Doppelpunkte und τ die der Doppeltangenten der Curve angibt, die Zahl dieser letzteren, durch Substitution der in Art. 4, Absch. 2 angegebenen Werthe von δ, n und m berechnen.

Wir gelangen in dieser Weise, wenn wir das Resultat, das die Anzahl der C_n doppelt berührenden Kegelschnitte des Gewebes $\Delta_i\Delta_k\Delta_l$ angibt, auf die immer bevorzugten Ortscurven übertragen, zu folgendem Satz:

„Die Anzahl jener eine algebraische Curve n^{ter} Ordnung doppelt berührenden Kegelschnitte, welche durch einen ρ_i-, einen ρ_k- und einen ρ_l-fachen Punkt dieser Curve laufen, ist, wenn die Curve die Verbindungslinien der drei Punkte zu beziehungsweise α_i-, α_k-, α_l-fachen Tangenten hat und ausser diesen Singularitäten noch σ Rückkehrpunkte und eine Anzahl von vielfachen Punkten besitzt, welche ρ Doppelpunkten äquivalent sind:

$$\begin{aligned}\tau = \tfrac{1}{2}\{&n(n-1)(n^2+3n-6)+(2\rho+3\sigma)^2-4\rho[n(n+1)-5-\Sigma\rho_i^2-\\ &-\Sigma\rho_i-\Sigma\alpha_i]-3\sigma[2n(n+1)-9-2(\Sigma\rho_i^2+\Sigma\rho_i+\Sigma\alpha_i)]-\\ &-[2n(n+1)-11]\Sigma\rho_i^2-[2n(n+1)-7]\Sigma\alpha_i-\\ &-2[n(n+1)-1]\Sigma\rho_i+(\Sigma\rho_i^2)^2+2\Sigma\rho_i^2.\Sigma\alpha_i+2\Sigma\rho_i^2.\Sigma\rho_i+\\ &+2\Sigma\rho_k.\rho_l+2\Sigma\rho_i.\Sigma\alpha_i+(\Sigma\alpha_i)^2\}.\end{aligned} \qquad 1)$$

Formeln. Wir haben dem Probleme insoferne den höchsten Grad von Allgemeinheit gegeben, als wir nicht nur annahmen, die Grundpunkte des Netzes seien vielfache Punkte, sondern ihre Verbindungslinien auch mehrfache Tangenten der festen Curve.

Für eine algebraische Curve n^{ter} Ordnung übergeht diese Formel, unter der Voraussetzung, dass von drei Grundpunkten des Kegelschnittnetzes $p = 0, 1, 2, 3$ auf der Curve liegen, in die folgende:

$$\tau_1 = \frac{n(n-1)(n^3+2n^2-6)}{2} - 2p[n(n+1)-(p+3)], \qquad 2)$$

welche wieder für eine rationale Curve n^{ter} Ordnung, bei sonst gleichen Prämissen, die Form:

$$\tau_2 = 4[2n^2-5n+3] - p\left[2n - \frac{p+5}{2}\right] \qquad 3)$$

annimmt.

Auf demselben Wege gelangt man mit Benützung der Gleichung

$$\iota = 3n(n-2) - 6\delta - 8\chi$$

zur Anzahl der Kegelschnitte eines Netzes, welche eine algebraische Curve osculiren. Man findet unter den für die Gleichungen 1, 2, 3, respective gemachten Voraussetzungen die Formeln:

$$\text{I)} \qquad \iota = 3n(n-1) - 6\rho - 8\sigma - 3\Sigma\rho_i^2 - 2\Sigma\alpha_i,$$

$$\text{II)} \qquad \iota_1 = 3\{n(n-1)-p\},$$

$$\text{III)} \qquad \iota_2 = 3\{2(n-1)-p\},$$

aus welchen sich die Anzahl der Krümmungskreise einer algebraischen Curve, welche durch einen Punkt gehen, leicht bestimmen lässt. So erhält man durch Substitution von $\rho_k = \rho_l = 1$ und $\alpha_i = \alpha_k = \alpha_l = 0$, die Anzahl der Krümmungskreise einer cyclischen Curve (mit ρ Doppel- und σ Rückkehrpunkten), welche durch einen ρ_i-fachen Punkt derselben bestimmt sind.

IV. Über Punktsysteme auf einer allgemeinen Curve dritter Ordnung.

Zum Schluss wollen wir die quadratische Verwandtschaft noch verwenden, um aus den bekannten Beziehungen zwischen geraden Punktgruppen auf einer allgemeinen Curve dritter Ordnung C^3 Relationen für Punkte derselben, welche auf Kegelschnitten liegen, abzuleiten. Die schon bekannten Sätze über derartige Punktsysteme übergehen wir jedoch und erwähnen statt

ihrer jene, welche ihnen quadratisch entsprechen. Die Untersuchung selbst beruht auf der aus Absch. 2, Art. 4 sich ergebenden Thatsache, dass einer allgemeinen Curve dritter Classe C_3, welche dem Hauptdreieck eingeschrieben ist, eine diesem Dreieck umschriebene Curve dritter Ordnung C^3 entspricht.

a) Den drei Tangenten a, b, c, welche sich aus einem Punkt p an C_3 legen lassen, sind die drei weiteren Schnittpunkte a', b', c' der Curve C^3 mit jenem dem Hauptdreieck $\Delta_1\Delta_2\Delta_3$ umschriebenen Kegelschnitt K zugewiesen, welcher p in dem Systeme der Curve C^3 zugeordnet ist. Den Tangenten α, β, γ der C_3 aus den Berührungspunkten der Tangenten a, b, c entsprechen die weiteren drei Schnittpunkte A, B, Γ der Curve C^3 mit jenen drei Kegelschnitten des Netzes $\Delta_1\Delta_2\Delta_3$, welche sie in a, b, c respective berühren. Nun schneiden sich bekanntlich α, β, γ in einem Punkte p',[1] und folglich liegen A, B, Γ mit Δ_1, Δ_2 und Δ_3 auf einem Kegelschnitt:

„Sind $\Delta_1\Delta_2\Delta_3 a'b'c'$ die sechs Schnittpunkte eines Kegelschnittes mit einer allgemeinen Curve dritter Ordnung C^3, so schneiden jene drei Kegelschnitte, welche durch Δ_1, Δ_2, Δ_3 gehen und C^3 in a', b', c' respective berühren, diese Curve in drei weiteren Punkten, welche mit Δ_1, Δ_2, Δ_3 wieder auf einem Kegelschnitt liegen."

b) Die Tangenten der Curve C_3 in ihren 12 Schnittpunkten mit den Tangenten a, b, c schneiden sich zu dreien in einem Punkte. Solche Punkte gibt es 16 und je vier liegen auf einer der 12 Tangenten:[2]

„Legt man durch die Punkte Δ_1, Δ_2, Δ_3 und der Reihe nach durch die Punkte a, b, c, welche mit jenen von einem Kegelschnitt K auf C^3 bestimmt werden, jene 12 Kegelschnitte, welche C^3 an anderer Stelle berühren, so liegen diese 12 Berührungspunkte zu dreien mit den Punkten Δ_1, Δ_2 und Δ_3 auf 16 Kegelschnitten K', von welchen je vier durch einen Berührungspunkt gehen."

---

[1] Ein Satz von Maclaurin. Siehe H. Durége: „Die ebenen Curven dritter Ordnung" pag. 136.

[2] Salmon-Fiedler: „Analytische Geometrie der höheren ebenen Curven" pag. 158.

„Man kann die sechs Punkte Δ_1, Δ_2, Δ_3, a', b', c' 20 **Mal** zu dreien combiniren, und jeder Combination entsprechen 16 Kegelschnitte K' — dem Kegelschnitt K selbst daher 320.“

c) Sind a, b, c drei Tangenten durch einen Punkt und a', b', c' ebenfalls, so schneiden sich die Tangenten aus den Punkten aa', bb', cc' wieder in einem Punkt: [1]

Sind a, b, c die weiteren Schnittpunkte von C^3 mit einem Kegelschnitt K, der sie in Δ_1, Δ_2, Δ_3 schneidet, und befinden sich ebenso a', b' und c' mit den letzteren auf einem Kegelschnitt K', so schneiden jene Kegelschnitte, welche durch a und a', b und b', c und c' respective und durch Δ_1, Δ_2, Δ_3 bestimmt sind, die Curve in drei anderen Punkten, welche auch mit Δ_1, Δ_2 und Δ_3 auf einem Kegelschnitt liegen.“

d) Die folgenden Sätze führen wir, wegen Raumersparniss, ohne Beweis an; fügen jedoch jedem Satz eine Bemerkung bei, welche angibt, von wem der ursprüngliche Satz herrührt und auf welcher Seite des citirten, ausführlichen Werkes von Durége derselbe besprochen wird.

„Sind $\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3$ 1 2 3 4 5 6 Punkte einer Curve C^3, I der Schnittpunkt der Kegelschnitte $\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3$ 1 2 und $\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3$ 4 5, II der Schnitt der Kegelschnitte $\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3$ 2 3 und $\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3$ 5 6 und III der vierte gemeinschaftliche Punkt der Kegelschnitte $\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3$ 3 4 und $\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3$ 6 1 und sind I und II Punkte der Curve C^3, so liegt auch III auf derselben.“ (Poncelet l. c., Cremona: Curve piane art. 45. Durége, pag. 137.)

„Sind drei der Berührungspunkte jener Kegelschnitte, welche durch vier Punkte Δ_1, Δ_2, Δ_3 und a gehen und C^3 berühren, Punkte eines Kegelschnittes, welcher drei jener vier Punkte etwa Δ_1, Δ_2, Δ_3 enthält, so liegen diese auf einem Kegelschnitt der C^3 in a osculirt.“ (Durége, pag. 205.)

„Von den vier Berührungspunkten jener Kegelschnitte, welche vier Punkte 1, 2, 3, 4 einer C^3 enthalten und sie an anderer Stelle berühren, liegen im Allgemeinen keine drei mit drei von den Punkten 1, 2, 3, 4 auf einem Kegelschnitt.“ (Durége ibid.)

---

[1] Ein Satz von Poncelet. (Analyse des Transversales, Crelles Journ. Bd. 8, pag. 129.)

„Sind $\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 abc$ sechs Punkte von C^3 auf einem Kegelschnitt und legt man durch $\Delta_1\Delta_2\Delta_3$ und a, dann durch $\Delta_1\Delta_2\Delta_3$ und b und schliesslich durch $\Delta_1\Delta_2\Delta_3$ und c je einen Kegelschnitt, so schneiden diese C^3 in sechs weiteren Punkten, welche auf einer Curve C^4_6 vierter Ordnung liegen, die in Δ_1, Δ_2 und Δ_3 Doppelpunkte hat.“ (Poncelet l. c., Durége pag. 135.)

„Eine Curve C^4_6, deren Doppelpunkte $\Delta_1\Delta_2\Delta_3$ auf C^3 liegen, schneidet diese in weiteren sechs Punkten 1, 2, 3, 4, 5, 6. Legt man durch $\Delta_1\Delta_2\Delta_3$ jene sechs Kegelschnitte, welche C^3 in den Punkten 1, 2, 3, 4, 5, 6 berühren, so bestimmen diese auf C^3 andere sechs Punkte, welche wieder auf einer Curve C^4_6 liegen, die in Δ_1, Δ_2 und Δ_3 ihre Doppelpunkte hat.“ (Cremona l. c., Durége pag. 138.)

„Wenn eine Curve C^4_6, deren Doppelpunkte $\Delta_1\Delta_2\Delta_3$ Punkte von C^3 sind, diese an einer Stelle a fünfpunktig berührt und in b schneidet und a', b' die Schnittpunkte von C^3 mit jenen Kegelschnitten sind, welche durch Δ_1, Δ_2, Δ_3 laufen und sie in a, respective b berühren; so liegt b' auf jener Curve C^4_6, welche C^3 in a' fünfpunktig berührt und in Δ_1, Δ_2, Δ_3 ihre Doppelpunkte hat.“ (Cremona l. c., Durége l. c.)

„Legt man durch einen Punkt 0, in welchem C^3 von einem durch die drei auf ihr befindlichen Punkte Δ_1, Δ_2, Δ_3 gehenden Kegelschnitt osculirt wird und durch Δ_1, Δ_2, Δ_3 drei beliebige Kegelschnitte, so liegen die sechs weiteren Schnitte dieser mit C^3 auf einer Curve C^4_6, welche Δ_1, Δ_2, Δ_3 zu Doppelpunkten hat, und umgekehrt.“ (Serret Algeb. sup. II, pag. 586. Cremona art. 39. Durége, pag. 191.)

„Schneidet ein durch Δ_1, Δ_2, Δ_3 und einen Punkt 0 (siehe vorhergehenden Satz) gehender Kegelschnitt die Curve C^3 in a und b, so gibt es eine Curve C^4_6 mit Doppelpunkten in Δ_1, Δ_2, Δ_3, welche C^3 in a und b osculirt, und umgekehrt.“ (Poncelet, Cremona, Durége, pag. 192.)

Nachdem die neun Wendepunkte einer Curve C^3 auf unendlich vielen anderen Curven dritter Ordnung liegen (welche das syzigetische Büschel bilden), gehören die neun Punkte, in welchen C^3 von Kegelschnitten osculirt wird, die durch drei auf ihr befindliche Punkte Δ_1, Δ_2 und Δ_3 gehen, unendlich vielen Curven sechster Ordnung an, welche in Δ_1, Δ_2 und Δ_3 dreifache Punkte haben.

Strahlende Elektrodenmaterie.

II. Abhandlung.

Von Dr. J. Puluj.

(Ausgeführt im physikalischen Cabinete der Wiener Universität.)

(Mit 2 Holzschnitten.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 10. Februar 1881.)

I.

In einer früheren Abhandlung[1] habe ich meine Ansicht über das Wesen der strahlenden Elektrodenmaterie ausgesprochen und dieselbe vielfach begründet. Nach meiner Ansicht bestehen die von der negativen Elektrode im gasverdünnten Raume ausgehenden Strahlen nicht aus elektrischen Theilchen des zurückgebliebenen Gases, das nach Crookes in einem eigenthümlichen „übergasigen" Zustande, dem vierten Aggregatzustand, sich befinden soll, sondern aus Körpertheilchen, welche durch den elektrischen Strom von der negativen Elektrode losgerissen, mit statischer negativen Elektricität geladen und mit sehr grosser Geschwindigkeit in den gasverdünnten Raum fortgeschleudert werden.

Damit kein Zweifel über die Natur der Kathodenstrahlen obwalte, nenne ich sie „strahlende Elektrodenmaterie".

Ausgehend von der unitarischen Ansicht über das Wesen der Elektricität, habe ich die Phosphoreszenzwirkungen der strahlenden Elektrodenmaterie auf folgende Weise erklärt.

Die äusserst feine Materie, welche den ganzen Weltenraum erfüllt und das Licht und Wärme fortpflanzt, der Äther, lagert sich um die körperlichen Atome und Moleküle, wie die Luftatmosphäre um die Erde. Jeder Körper hat im normalen

[1] Sitzungsber. d. k. Akademie d. Wiss. Bd. 81.

Zustande eine bestimmte Menge dieses ewig bewegten Stoffes. Besitzt er mehr Äther, als er entsprechend der Dichte desselben in unserem Weltenraume haben sollte, so ist er positiv elektrisch, dagegen negativ elektrisch, wenn er weniger Äther enthält. Treffen nun die negativ elektrischen Elektrodentheilchen die Glaswand, so wird, ausser der Erschütterung der körperlichen Moleküle, auch ein Ausgleich der Äthermengen zwischen den anprallenden Theilchen und der getroffenen Stelle stattfinden, welcher Ausgleich ohne Erschütterung der Ätherhüllen der Moleküle nicht vor sich gehen kann. Jede getroffene Stelle der Glaswand wird zum Mittelpunkte von Ätherwellen, ganz analog wie eine ruhige Wasserfläche, von Regentropfen getroffen, in der Ebene Wasserwellen zeigt. In Folge dieser in den Raum ausgesendeten Ätherwellen leuchtet die Glaswand mit dem ihr eigenthümlichen Phosphoreszenzlichte, welches je nach der Zusammensetzung des Glases verschieden sein muss, weil ja auch die Wellenbewegung in Folge der Verschiedenheit der Dichte des Äthers verschieden sein wird.

Dass beim Anprallen der unendlich kleinen Projectile der Elektrodenmaterie ein Theil der Energie ihrer fortschreitenden Bewegung in vibrirende Bewegung der Körpermoleküle der Glaswand, also in Wärme, umgesetzt wird, ist ebenso selbstverständlich, wie dass die Flügelrädchen im Strome jener Projectile sich mitbewegen müssen, wenn nicht andere Ursachen diese Bewegung aufheben oder in entgegengesetzte umwandeln.

Von dieser Annahme über das Wesen der strahlenden Elektrodenmaterie ausgehend, ist es mir ferner gelungen die Wirkung des Magnets auf die Kathodenstrahlen mittelst molekularer elektrischen Convection vollständig zu erklären und diese Erscheinung sowie die Plücker'schen „magnetischen Flächen", die Hittorf'schen spiralförmigen Windungen des Glimmlichtes und die von Reitlinger und Urbanitzky beobachteten Dreifächerflächen unter einen Gesichtspunkt zu bringen.

Die vollständige Übereinstimmung der theoretischen Ergebnisse der molekularen elektrischen Convectionen mit allen bisher beobachteten Erscheinungen berechtigt zum Schlusse, dass die Annahme über das Wesen der strahlenden Elektrodenmaterie,

die als Ausgangspunkt jener Erklärung diente, richtig ist. Dass im Kathodenlichte die Elektricität durch Elektroden- und nicht Gastheilchen convectiv fortgeführt wird, habe ich damit begründet, dass sich an den Glaswänden in der Nähe der Kathode schöne Metallspiegel bilden. Dass das Aluminium keinen Niederschlag bildet, scheint mir die Ursache davon in seiner chemischen Constitution zu liegen. Losgerissene Aluminiumtheilchen fliegen so lange herum, bis sie sich an der positiven Elektrode niederschlagen. Hier möchte ich noch einen Beweis dafür hinzufügen. In einer Röhre wurde ein einseitig mit Kreide überzogenes Glimmerblättchen als Kathode verwendet. In kurzer Zeit haben sich die Glaswände mit einer äusserst feinen Schichte von Kreide beschlagen und zeigten trotz ihrer scheinbar vollkommenen Reinheit und Durchsichtigkeit eine mit Kreide gleiche Phosphoreszenzerscheinung. Wurde nämlich der Glaswand der Finger genähert, so entstand an der gegenüberliegenden Wand der gewöhnliche grüne Fleck, während an der Berührungsstelle dasselbe Phosphoreszenzlicht zu sehen war, wie an dem mit Kreide überzogenen Blättchen. Am schönsten ist diese Erscheinung, wenn der positive Pol des Inductionsapparates zur Erde abgeleitet ist. Die berührte Stelle der Glaswand ist die negative Elektrode, und die losgerissenen Theilchen erzeugen an der gegenüberliegenden Wand eine starke Phosphoreszenz der Glaswand, während an der Berührungsstelle durch die herausfahrenden Elektrodentheilchen nur die leichter erregbaren Kreidetheilchen zum Selbstleuchten gebracht werden. Auch das mit Kreide einseitig überzogene Glimmerblättchen, als Kathode verwendet, leuchtet an seiner ganzen Oberfläche mit einem schönen orangefarbigen Lichte.

An metallischen Kathoden beobachtet man eine gelbe staubartige Schichte, die das Ansehen von Goldstaub hat, und nach meiner in der ersten Abhandlung ausgesprochenen Ansicht wahrscheinlich durch das Glühen der äussersten Oxydschichte oder auch des gebildeten metallischen Niederschlages entstehen soll. Nach der eben beschriebenen Phosphoreszenzerscheinung des mit Kreide überzogenen Glimmerblättchens bin ich jetzt eher geneigt die gelbe Schichte für eine Phosphoreszenzerscheinung der Oxydschichte des Metalls zu halten.

II.

Ganz verschieden ist die Ansicht über das Wesen der Kathodenstrahlen, welche Herr E. Goldstein in den Monatsberichten der Berliner Akademie vom 22. Jänner 1880 ausgesprochen hat und die im Nachfolgenden einer näheren Besprechung unterzogen werden soll.

Werden die Kathodenstrahlen durch eine Glaswand begrenzt, so erzeugen sie bekanntlich an der letzteren ein Selbstleuchten. Goldstein behauptet nun ermittelt zu haben, dass mit dieser Begrenzung durch feste Körper „eine eigenthümliche Differenzirung“ der Strahlen an den der festen Wand zugekehrten Enden verbunden ist, und dass das gesammte Licht um die Kathode sich mit einer „heterogenen“ äusseren Schichte umkleidet. Die Lage der neuen Schichte hängt nur von der Lage der Wand ab, und kann durch Verschiebung derselben gegen die Kathode bei constanter Dichte in beliebige Entfernung gebracht werden (S. 85). Und an einer anderen Stelle (S. 83) heisst es: „der lichterregende Theil ist nicht die ganze Länge, sondern nur das äusserste Ende der Strahlen“.

Das Letztere wird auf die Weise verificirt, dass eine phosphoreszenzfähige Platte einem Bündel Kathodenstrahlen seitlich genähert und nachgewiesen wird, das sie selbst bei grosser Annäherung nicht leuchtet.

Mutatis mutandis könnte man mit gleichem Recht auch von der „Modification“ oder „eigenthümlichen Differenzirung“ eines Strahlenbündels gewöhnlichen Lichtes sprechen, denn auch hier bleibt ein dem Strahlenbündel seitlich genäherter Körper relativ dunkel und leuchtet stark, wenn er in den Weg der Strahlen gebracht wird. Dieses Leuchten findet, ganz analog wie das Phosphoresziren der Wand, an jeder Stelle des Strahlenbündels statt, und wir sprechen doch von keiner „eigenthümlichen Differenzirung“ des Strahlenbündels, selbst dann nicht, wenn das Licht beim Auffallen auf einen schwarzen Körper in Wärme umgewandelt wird. Es wäre für die Erklärung gar nichts gewonnen, wenn wir sie etwa damit abfertigen wollten, dass das Lichtbündel sich mit einer „heterogenen äusseren Wärmeschichte“ umkleidet habe, statt zu sagen: dass an der Oberfläche des schwarzen Körpers die Ätherbewegung in Molekularbewegung umgewandelt worden ist.

Eben so wenig ist die Sache erklärt, wenn wir annehmen, dass die Kathodenstrahlen sich mit einer heterogenen Schicht umkleiden.

Diese „äussere Schicht“ soll auch Strahlen „hoher Brechbarkeit“ aussenden (S. 87), deren Schwingungen an der Wand in jene von grösserer Wellenlänge umgewandelt werden. Da aber die „Modification“ des Strahlenbündels auf jeder beliebigen Substanz, auch auf Quarz, erzeugt wird (S. 34), so müssen diese Strahlen von hoher Brechbarkeit den Quarz wenigstens theilweise passiren und an der gegenüberliegenden Wand Phosphoreszenz erzeugen, was jedoch, wie meine Versuche gelehrt haben, nicht der Fall ist.[1]

Dass die Ursache der Lichterregung an der Glaswand eine „optische Einwirkung“ ist, folgt nach der Ansicht Goldstein's mit Wahrscheinlichkeit zunächst aus der Identität der Farben, welche eine Reihe verschiedener Substanzen beim Leuchten durch elektrische Bestrahlung und durch Insolation ausgeben (S. 83), ferner daraus, dass die Strahlenenden „photochemische“ Wirkungen ausüben, indem jene Substanzen, welche unter dem Einfluss hochbrechbarer Sonnenstrahlen zersetzt werden, dieselben Veränderungen erleiden, wenn sie von den Strahlenenden getroffen werden (S. 84).

Beide Schlussfolgerungen sind jedoch unstatthaft, da hier aus der Gleichheit der Wirkungen auf die Gleichheit der Ursachen geschlossen wird, während doch erfahrungsgemäss verschiedene Ursachen gleiche Wirkungen haben können. Beide Wirkungen, sowohl die chemische Zersetzung als auch die Erregung der Phosphoreszenz, können eben so gut auch eine Folge mechanischer Vorgänge, des Anprallens der mit statischer Elektricität geladenen Körpertheilchen, sein. Dass ein seitwärts von den Kathodenstrahlen aufgestellter Körper nicht phosphoresziren kann, ergibt sich von selbst aus der Annahme einer geradlinigen Bewegung von Elektrodentheilchen.

Mit grösserer Bestimmtheit glaubt aber Goldstein seine Ansicht über den optischen Charakter der betrachteten Wirkungen

---

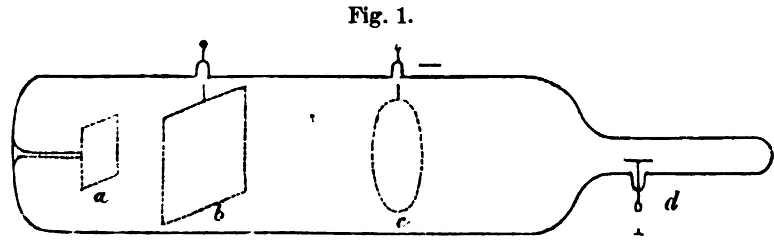
[1] Sitzungsber. d. k. Akademie d. Wiss. Bd. 81, p. 882. Carl's Repertorium, Bd. XVII, p.

daraus folgern zu sollen, dass leuchtfähige Platten wirklich erregt werden, wenn sie im Innern der Gefässe so aufgestellt sind, dass sie sich im Schatten der von der Kathode ausgesendeten Strahlen befinden, dagegen geradlinig mit den durch die Enden der elektrischen Strahlen getroffenen Wandpunkte verbunden werden können. Solche Platten leuchten mit dem ihnen eigenthümlichen Phosphoreszenzlichte auch wenn sie von den Strahlen enden, die selbst „keine messbare Länge haben", um ein Centimeter entfernt sind. „Die Moleküle von den Enden der Kathodenstrahlen senden also, wie gewöhnlich glühende Theilchen, Strahlen nach allen Richtungen und Entfernungen aus, die von der elektrischen Bewegung selbst nicht erreicht werden können" (S. 83).

Wenn nun die Moleküle an den Enden der Kathodenstrahlen nach allen Richtungen Phosphoreszenz erregende Strahlen aussenden, so ist es nicht einzusehen, warum das nicht an einer anderen Stelle des Strahlenbündels geschieht, da ja die Theilchen der Kathodenstrahlen untereinander und mit den Gastheilchen gewiss noch oft genug in der ganzen Länge der Strahlen zusammenstossen werden, ausser man denkt sich diese Theilchen etwa wie Bomben, die erst an der unbeweglichen Glaswand platzen und hochbrechbare Strahlen aussprühen.

Zur Prüfung der obigen Annahme über das Aussenden von Strahlen hoher Brechbarkeit von den Enden der Kathodenstrahlen habe ich in einer Glasröhre, wie sie die nebenstehende Zeichnung

Fig. 1.



zeigt, zwei mit Kreide einseitig überzogene Glimmerblättchen *a* und *b* so angebracht, dass die reinen Seiten der Kathode *c* zugekehrt waren. Das kleinere Blättchen *a* war mittelst eines Glasstäbchens von der Glaswand in der Entfernung von 8 Mm. befestigt; *b* war 1·5 Centimeter von *a* und 2 Centimeter von *c* entfernt und mittelst eines Platindrahtes befestigt, um eventuell als Kathode dienen zu können. Die positive Elektrode war bei *d*.

Beim Durchgang des Inductionsstromes zeigte sich nun bei einer Verdünnung von 0·03 Mm. Quecksilberdruck eine lebhafte Phosphoreszenz von *b* und eine viel schwächere von *c*, welche immer verstärkt werden konnte, wenn das Ende der Glasröhre mit dem Finger berührt wurde. Wäre die Ansicht Goldstein's richtig, so müsste mit der Entfernung vom Ende der Röhre, an welchem das Schattenbild von *b* entsteht, auch die Wirkung der angenommenen hochbrechbaren Strahlen abnehmen, ja es müsste sogar auf dem Blättchen *b* ein Schatten von *a* entstehen, weil jene Strahlen von der Glaswand gegen *a* und *b* gehen sollten.

In einer zweiten Glasröhre habe ich statt der ebenen Kathode *c* eine kleine Aluminiumschale verwendet. In diesem Falle zeigte *a* eine sehr schwache Phosphoreszenz, dagegen war die Phosphoreszenz auf *b* in dem Vereinigungspunkte der Kathodenstrahlen sehr lebhaft. Dieser Phosphoreszenzfleck änderte seine Lage, wenn die Strahlen mittelst eines Magnets abgelenkt wurden.

Ausserdem habe ich an die Glaswand eines Gefässes, im Schatten eines Glimmerblättchens, einen Diamantsplitter, der ungefähr ein Quadratmillimeter gross war, mittelst Gummi angeklebt. Trotzdem das Glas selbst im Schatten ganz dunkel erschien, leuchtete der Diamant im Mittelpunkte des Schattens mit grosser Lebhaftigkeit.

Nach diesen Versuchen unterliegt es keinem Zweifel, dass die obige Annahme der Strahlen höherer Brechbarkeit nicht richtig sein kann. Aus den obigen Experimenten muss gefolgert werden, dass die Phosphoreszenz der Rückseite durch die Kathodenstrahlen verursacht wird, welche die Vorderseite treffen.

Auch das Blättchen *a* und der Diamantsplitter phosphoreszіren, obgleich etwas schwächer, weil viele Elektrotheilchen nach allen möglichen Richtungen zerstreut werden und schon hinreichen, um ein Selbstleuchten der leicht erregbaren Stoffe zu veranlassen.

Bemerkenswerth ist noch der Fall, dass das Blättchen *b* keine Phosphoreszenz zeigt, wenn die mit Kreide überzogene Rückseite mit einem Glimmerblättchen bedeckt ist. Auch eine im Inneren mit Kreide überzogene Glaskugel zeigt nur an der Oberfläche, nicht aber im Innern eine Phosphoreszenzerscheinung.

Bezüglich des von Goldstein „aufgefundenen secundären negativen Lichtes" möchte ich mir die Bemerkung erlauben, dass dasselbe bereits von Poggendorff an den Spitzen der Holtz'schen Trichterröhren beobachtet wurde.[1] Was Goldstein in seiner Abhandlung beschrieben hat, sind jedenfalls schöne Modificationen jener Trichterröhren.

III.

Um das Wesen der Elektricität in verdünnten Gasen zu erklären, beschreibt Goldstein mehrere Entladungsgefässe, in denen Anode und Kathode verschiedene Form und Lage zu einander haben. Ist die Anode ein „terminaler" Draht (Drahtende?) und ihr gegenüber, am zweiten Ende der Röhre, als Kathode eine Scheibe, welche den Röhrenquerschnitt ausfüllt, „so ist einfach anzunehmen: die Elektricität (der negative Strom) geht von der Kathode aus, durchläuft das negative Licht, tritt am Ende desselben in die erste Schicht des positiven Lichts, aus dieser in die zweite etc., bis sie so zur Anode gelangt."

Befinden sich beide Elektroden an demselben Ende der Röhre neben einander, so gehen bekanntlich die Strahlen des negativen Lichtes nicht nach der ganz nahen Anode hinüber, sondern durchfluthen in geraden Richtungen die ganze Länge der Röhre. Soll nun der Strom dennoch nach der Anode gelangen, so muss er „denselben Weg, den er gekommen, wieder zurückgehen". Weiter wird dazu bemerkt: „Irgend eine Wirkung dieses hypostasirten (angenommenen?) zurückkehrenden Stromes aber ist in keiner Weise zu bemerken. Der Magnet lenkt die elektrischen Strahlen nur so ab, wie es der von der Kathode nach dem Strahlenende hinfliessende Strom erfordert; der vorläufig angenommene, zurückkehrende Strom bringt nicht die mindeste Lichterscheinung hervor, obgleich er im selben Medium und jedenfalls nicht in grösserem Querschnitt als die ganze Röhrenweite ausfüllende „hin"-gehende Strom fliesst. Eine etwa von

[1] Pogg. Ann. Bd. 134. Auch Reitlinger u. von Urbanitzky beobachteten, dass der Lichtschein an den Trichterspitzen unter der Einwirkung des Magnetes demselben Gesetze folgt, welches Plücker für das Glimmlicht an negativen Elektroden entdeckt hat. Akadem. Anzeiger in Wien Nr. XIV. 18. Mai 1876.

ihm veranlasste Lichterscheinung müsste aber erkennbar werden, wenn man durch Magnetisiren die gewöhnlich sichtbaren Strahlen, die des „hin“-gehenden Stromes, nach einer Seite der Röhre zusammendrängt; in dem frei gewordenen Raume müsste dann ein etwaiger Lichteffect des hypothetischen zurückgehenden Stromes sich zeigen. Die Erfahrung zeigt aber, dass dieser Raum dunkel ist.“

Es wird dann noch eine Röhre beschrieben, deren eine Hälfte erweitert ist. Das engere Rohrende ist mit einer scheibenförmigen Kathode versehen. Senkrecht zur Axe der Röhre ist noch ein Seitenröhrchen angeschmolzen, welches den Anodendraht enthält. Die Kathodenstrahlen gehen bei einem bestimmten Drucke von der Kathode aus, durchsetzen die positiven Schichten, welche, ungefähr in der Mitte der Röhre beginnend, sich im Seitenrohr fortsetzen, und erzeugen an dem gegenüberliegenden erweiterten Rohrende die Phosphoreszenz der Glaswand.

Daran knüpft nun Goldstein folgende Bemerkung: „Die Annahme, dass die Entladung aus dem negativen Lichte sich in die dem negativen Pol nächste positive Schicht, dann in die zweite Schicht etc. fortpflanze, zwingt also zu der weiteren Annahme, dass die Entladung bei der zuletzt betrachteten Phase, nachdem sie das negative Licht bis an sein in das positive Licht eingesenkte Ende durchlaufen, wieder zurückspringt, um nun die erste positive Schicht zu bilden und dann wieder den schon einmal als negatives Licht zurückgelegten Weg nun unter ganz denselben Verhältnissen als positives Licht noch einmal zurücklegt.“

„Aber selbst hiermit ist die Complication neuer Annahmen, zu welcher die auf den ersten Blick so einfache, sonst adoptirte Vorstellung von der Entladung führt, noch nicht erschöpft. Ich habe mich überzeugt, dass auch das secundäre negative Licht, welches an den Verengungen der Röhre nach der Anode hin ausstrahlt, in das hinter der Verengung folgende positive Licht eindringt; wir würden also das Zurückspringen der Elektricität und ihren Verlauf einmal als positives, einmal als negatives Licht ebenso oft in jeder Röhre haben, als dieselbe Verengungsstellen besitzt.“

Auf Grund dieser Versuche verwirft Goldstein die obige Anschauung über die Entladung in gasverdünnten Räumen und

findet namentlich in der gegenseitigen Durchdringung der Kathodenstrahlen mit den positiven Schichten eine „entschiedene Widerlegung" der convectiven Auffassung des Entladungsvorganges.

Dieser Ansicht kann ich jedoch durchaus nicht beipflichten, da die Annahme über das Zurückspringen des Stromes, als eine ganz willkürliche, mit der convectiven Auffassung der Entladung in gar keinem Zusammenhange steht.

Wie ich bereits in meiner ersten Abhandlung ausgesprochen habe, geschieht die Entladung: 1. durch den gasverdünnten Raum, 2. durch das Glasgefäss und 3. durch die äussere Luft. Die negativ elektrischen Kathodentheilchen, welche in den Gasraum heftig fortgeschleudert werden, geben längs ihrer Bahn einen Theil ihrer statischen Elektricität an die Glastheilchen ab und die letzteren, in Schichtenform sich entladend, leiten die Elektricität zur Anode. Die Elektrodentheilchen selbst bewegen sich aber durch den Gasraum bis zum Ende der Röhre und beim Anprallen derselben an die Glaswand fliesst der Rest ihrer Ladung durch die Glasröhre in den Anodendraht. Die Glaswand mit ihrer ganzen Oberfläche bildet gleichsam eine Anode, und daher braucht der negative Strom nicht erst „zurückzuspringen", um zu den positiven Schichten und dann zum positiven Drahtende zu gelangen.

IV.

Um die obigen und verwandte Entladungserscheinungen zu erklären und die Schwierigkeiten, namentlich das Zurückspringen des Stromes, zu beseitigen, macht Goldstein folgende Annahme:

„Das Kathodenlicht jedes Bündels von secundärem negativen Licht, sowie jede einzelne Schicht des positiven Lichtes stellen, jedes für sich, einen besonderen Strom dar, der an dem der Kathode zugewandten Theile jedes Gebildes beginnt und am Ende der negativen Strahlen, beziehungsweise der Schichtkörper, schliesst, ohne dass der in einem Gebilde fliessende Strom sich im nächsten fortsetzt, respective ohne dass die Elektricität, welche durch eines fliesst, auch der Reihe nach in die andere eintritt." (pag. 97.)

Mit dieser Annahme werden nun die Erscheinungen auf folgende Weise erklärt:

„Ist nun bei nicht sehr grosser Verdünnung die Länge der von der Kathode ausgehenden Entladung noch kürzer als das Intervall zwischen der Kathode und der nächsten Entladungsstelle (von der die erste positive Schicht ausgeht), so muss zwischen Kathodenlicht und erster positiver Schicht sich ein von keiner Entladung durchflossener Raum befinden, in welchem also auch kein Entladungslicht auftritt, der sogenannte dunkle Raum. Wächst die Stromlänge der Kathodenentladung bei der Verdünnung, so dass sie gleich dem Intervall zwischen Kathode und der nächsten Entladungsstelle wird, so erreichen die Kathodenstrahlen das positive Licht, der dunkle Raum ist verschwunden.“

„Wird die Stromlänge der Kathode grösser als jenes Intervall, so setzt das Kathodenlicht sich in denjenigen Raum fort, in den von der zweiten Entladungsstelle her ebenfalls ein Strom sich ergiesst, — das Kathodenlicht ist in das positive Licht hineingedrungen.“

„Ganz ebenso erklärt sich dann die Entstehung des dunklen Raumes zwischen jedem Büschel secundären negativen Lichts und der darauf folgenden Schichte; es erklären sich die dunklen Räume, welche die Schichten zwischen einander bei relativ geringen Verdünnungen zeigen, während sie bei stärkerer Evacuation unmittelbar aneinander stossen etc.“

Ebenso enthalten nach Goldstein's Ansicht die Erscheinungen, die für verschieden geformte und gelagerte Kathoden angeführt wurden, jetzt nichts Räthselhaftes mehr, und „von einem Hin- und Hergehen der Elektricität, von wiederholten Zickzackbahnen der letzteren, von einer neuen lichtlosen Entladungsart etc. braucht, wie man sieht, jetzt keine Rede mehr zu sein.“

Abgesehen davon, dass die voranstehende Erklärung eigentlich nichts anderes ist, als eine Beschreibung beobachteter Thatsachen, lässt sich gegen die obige Annahme, von der die Erklärung ausgeht, einwenden, dass sie sehr unwahrscheinlich ist, da es schwer fällt, sich von einer Entladung eine Vorstellung zu machen, die zwischen den Elektroden erfolgen soll, ohne dass der in einem Gebilde fliessende Strom sich im nächsten

fortsetzt, respective ohne dass die Elektricität, welche durch eines fliesst, auch der Reihe nach in die anderen eintritt.

Eine solche Annahme scheint mir ebenso wenig berechtigt zu sein, wie wenn wir beispielsweise aus dem Vorhandensein der Knoten in einer tönenden Gassäule etwa schliessen wollten, dass zwei benachbarte Schwingungsbäuche von einander unabhängig sind, und zwar in der Weise, dass die schwingende Bewegung durch die Knoten nicht durchgeht.

Wenn auch die einzelnen, durch dunkle Zwischenräume getrennten Schichten des Büschellichtes für das Auge als vollständig von einander unabhängig erscheinen, so werden sie nichts desto weniger nicht „jede für sich von einem besonderen", sondern alle von einem und demselben Strome durchflossen. Wie dabei die dunklen Stellen zwischen den Schichten entstehen können, habe ich in meiner ersten Abhandlung zu erklären versucht und erlaube mir an dieser Stelle in Kürze zu wiederholen.

Von der unitarischen Annahme über das Wesen der Elektricität ausgehend, lässt sich aus derselben eine Folgerung ziehen, die mit der Beobachtung vollkommen übereinstimmt. Wird eine Batterie durch einen Draht geschlossen, so leistet er dem nach Ausgleich strebenden fliessenden Äther einen Widerstand, und es wird daher im Drahte ein theilweises Stauen des Äthers stattfinden, welches, am positiven Pol beginnend, gegen die Mitte des Drahtes bis zu einer Stelle, wo die freie Spannung null ist, abnehmen wird. Jenseits dieser Grenze wird sich ein Mangel an Äther, also negative freie Spannung, in stets zunehmender Weise manifestiren, ganz analog dem Druckgefälle bei strömenden Flüssigkeiten.

Anderseits ist es klar, dass sich die Sache ähnlicherweise auch in evacuirten Röhren verhalten wird. An der Eintrittsstelle des Ätherstromes in die Gassäule wird wegen ihres geringen Widerstandes ein Mangel an Äther, das heisst eine negative freie Spannung entstehen, während am positiven Pol (der Austrittsstelle) ein Stauen des Äthers oder positive freie Spannung entsteht. Es muss daher zwischen beiden Polen eine Stelle geben, die sich gegen die Umgebung weder positiv, noch negativ verhalten wird, und diese indifferente Stelle ist nach meiner Ansicht der

dunkle Raum zwischen dem positiven Lichtbüschel und dem Glimmlichte. Im dunklen Raume ist nach de la Rive keine Elektricitätsströmung nachzuweisen.[1]

Es liegt nun der Gedanke nahe, dass der dunkle Raum nur die erste dunkle Schicht ist, und dass alle dunklen Stellen im positiven Lichtbüschel ebenso viel indifferente Stellen oder Schichten von Spannung null sind, deren Ursprung auf mechanische Weise sich erklären liesse.

Die Entladungen der von der negativen Elektrode losgerissenen Theilchen werden in der eingeschlossenen Luftsäule Verdichtungen und Verdünnungen erzeugen, welche um so regelmässiger verlaufen werden, je regelmässiger der Unterbrecher schwingt. Die Zahl dieser Gaswellen wird von der Natur des Gases, der Form des Gefässes und der Elektroden abhängen. Da ferner das verdünnte Gas den Entladungen einen geringeren Widerstand leistet, als das verdichtete, so werden an den Ein- und Austrittstellen in die Verdichtungen abwechselnd positive und negative Spannungen entstehen.

An der Stelle der grössten Verdichtung wird positive und an der Stelle der grössten Verdünnung eine negative freie Spannung entstehen. Dazwischen werden die indifferenten dunklen Stellen liegen.

Wird die Röhre stärker evacuirt, so müssen die Wellenlängen zunehmen, zugleich aber die Anzahl der Wellen geringer werden, weil das Glimmlicht desto weiter hinausfluthet, je geringer der Bewegungswiderstand des zurückgebliebenen Gases ist. Wird das Glimmlicht mittelst eines Magneten in die Nähe der Kathode zurückgedrängt, so können die Schichten in dem vom Glimmlichte freien Raum entstehen. Die Schichten verschwinden ganz, wenn das Glimmlicht bis zur positiven Elektrode hinausfluthet. Was von allen Hypothesen gilt, lässt sich auch von meiner sagen, dass sie nur schwer bewiesen werden kann, und würde ihre Erklärung einmal gelingen, dann würde sie auch aufhören eine Hypothese zu sein. Was ich aber hier hervorheben möchte, ist ihre Einfachheit, welche der Annahme des Herrn Goldstein fehlt.

---

[1] Pogg. Ann. Bd. 158, p. 271.

V.

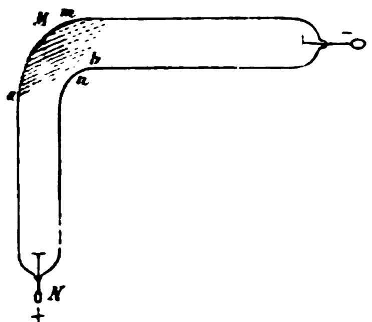
Bekanntlich unterscheidet sich das Kathodenlicht von dem positiven Büschellichte 1. durch die geradlinige von der Anode innerhalb gewisser Grenzen unabhängige Richtung seiner Ausbreitung und 2. durch seine intensive Phosphoreszenzwirkung.

Durch missverstandene Versuche verleitet, glaubt Goldstein die jetzige Anschauung über das positive Licht widerlegt zu haben, und schreibt dem letzteren „wenigstens bei sehr geringen Dichten“ die obigen Eigenschaften des Kathodenlichtes zu.

Wie er dazu gelangte, ersehen wir aus dem Folgenden:

Wenn das positive Licht ein stark evacuirtes, gebogenes Cylinderrohr erfüllt, so beobachtet man an der äusseren Biegung eine helle Phosphoreszenzfläche, ein Halboval von parabolischem Umriss. Der scharf begrenzte Scheitel a ist nach dem positiven Ende des Rohres gekehrt. An der entgegengesetzten, der Kathode zugewendeten Seite b verliert sich die Begrenzung. Die Fläche reicht mit ihrem scharf begrenzten Ende ein wenig nach der positiven Seite über die Verlängerung der inneren Wandung des negativen Schenkels hinaus.

Fig. 2.



Bringt man an dem Entladungsrohr mehrere Biegungen an, so tritt an der äusseren Seite einer jeden Biegung eine ähnliche Phosphoreszenzfläche auf. Daraus geht nach Goldstein's Ansicht hervor, dass nicht die Kathodenstrahlen, sondern das positive Licht selbst die Phosphoreszenz hervorbringt, denn die Kathodenstrahlen könnten „höchstens ein Leuchten an der ersten Biegung veranlassen, über die erste Biegung, ihrer geradlinigen Ausbreitung halber, aber nicht hinausreichen“.

Passend angebrachte Drähte geben auf der phosphoreszirenden Wand scharfe Schatten und die Lage derselben zeigt an, dass die Phosphoreszenz durch Strahlen erregt wird, welche „sich sehr nahe der Röhrenwand parallel von der Seite der Kathode her nach der positiven Seite hin ausbreiten.“

Durch Versuche mit mehrfach gebogenen Röhren gelangt Goldstein zu folgendem Resultate: „Das positive Licht stark verdünnter Gase besteht aus geradlinigen Strahlen, die sich von der negativen nach der positiven Seite fortpflanzen. Die Strahlen bilden ein schwach konisches Büschel, dessen Axe die Mittelaxe des Cylinderrohres ist; wo dieses Büschel die Gefässwand schneidet, erregen die der Wand unmittelbar anliegenden Theile der Strahlen in ihr Phosphoreszenzlicht.“

Wie leicht einzusehen ist, hat die Phosphoreszenzerscheinung eine andere Ursache. Der Längsschnitt des positiven Schenkels *MN* ist als eine Erweiterung des letzten Querschnitts *mn* des negativen Schenkels zu betrachten, es muss daher am letzten Querschnitt *mn*, ebenso wie an der Spitze einer Trichterröhre, negatives Licht entstehen. Dieses Licht breitet sich geradlinig in den Raum vom grösseren Querschnitt aus, und erzeugt an der gegenüberliegenden äusseren Biegung die Phosphoreszenzerscheinung. Da die Kathodenstrahlen sich gegenseitig abstossen, so ist damit auch das „konische“ Büschel erklärt.

Die unrichtige Deutung der Versuche ist um so merkwürdiger, als die „Analogie“ zwischen den vermeintlichen Eigenschaften des positiven Lichtes und den der Kathodenstrahlen „selbst bis zur Negation einer dem positiven Lichte bisher stets zugeschriebenen, charakteristischen Eigenschaft ging“, indem auch das positive Licht nicht den kürzesten Weg nach der Anode suchen soll.

Nach dem hier Gesagten lassen sich auch die Lichterscheinungen in den mehrfach gebogenen Gefässen mit blindsackförmigen Fortsetzungen, die in der Goldstein'schen Abhandlung beschrieben werden, mit Leichtigkeit erklären, worauf ich hier jedoch nicht näher eingehen will, und bemerke nur, dass die Kathodenstrahlen an den Biegungsstellen theilweise auch reflectirt werden und bis an's Ende des Röhrenstücks sich fortpflanzen, in Folge dessen im zweiten von Goldstein betrachteten Falle auch die „blindsackförmigen“ Fortsätze erleuchtet erscheinen.

Bei der Besprechung der Crookes'schen Theorie der Entladung, nach welcher die Gastheilchen an der Kathodenfläche geladen und fortgeschleudert werden, bemerkt Goldstein: „die Strahlen des Kathodenlichtes sind geradlinig sowohl innerhalb der

dritten, wie innerhalb der zweiten Schicht eines geraden Kathodendrahtes. Die Crooke'sche Theorie setzt aber implicite voraus, dass die Entladung, also auch die abstossende elektrische Ladung an der Kathode mindestens so lange dauert, bis die erstabgeschleuderten Theilchen den Durchmesser der zweiten Schicht durchlaufen haben; daraus würde folgen, dass die Strahlen mindestens innerhalb der zweiten Schicht hyperbolisch gekrümmt sein müssen. Denn die abgeschleuderten Theilchen müssen, so lange die abstossende Ladung dauert, den Kraftlinien folgen; die Form der letzteren aber bestimmt sich daraus, dass die Niveauflächen des elektrischen Potentials um einen geraden dünnen Draht confocale Ellipsoide sind.

Da nach meiner Ansicht das Kathodenlicht aus losgerissenen negativ elektrischen Elektrodentheilchen besteht, welche normal zur Oberfläche der Elektrode fortgeschleudert werden, so gilt die obige Einwendung selbstverständlich auch gegen diese Art der Entladung.

Gegen den obigen Einwand hat aber schon Herr Schuster in Nat. 22, S. 536, bemerkt, dass eine Bewegung der Theilchen in Kraftlinien nur bei einer anfänglichen Geschwindigkeit Null derselben erfolgen könnte.

Betreff der Emission der Elektrodentheilchen möchte ich mir noch die Bemerkung erlauben, dass die Theilchen immer senkrecht zur Fläche emittirt werden, dann aber in ihren Bahnen sich gegenseitig abstossen. Die Bewegungsrichtung der Theilchen wird auch durch die Glaswände sehr beeinflusst, so dass eine schalenförmige Kathode keinen Vereinigungspunkt des Kathodenlichtes liefert, wenn die Schale mit ihrem Rande zu nahe an der Glaswand steht. Die Entladung geht bei einem bestimmten Drucke von den Rändern der Schale längs der Glaswand und erzeugt eine lebhafte Phosphoreszenz. Bei einem Druck von ungefähr 0·08 Mm. Quecksilberdruck ist die Entfernung des Vereinigungspunktes der Kathodenstrahlen gleich 1·7 des Krümmungshalbmessers der Schale, wie ich in meiner ersten Abhandlung angegeben habe. Mit dem Druck ändert sich die Lage des Vereinigungspunktes, weil die statischen Ladungen der losgerissenen Theilchen bei grösserer Verdünnung ebenfalls grösser werden, also auch die Abstossung zwischen einzelnen Theilchen zunehmen muss.

Zum Schlusse seiner Arbeit sucht Goldstein die Unwahrscheinlichkeit der convectiven Auffassung der Entladung in den gasverdünnten Räumen zu beweisen. Durch Betrachtung des Entladungsvorganges zwischen zwei Kathoden gelangt er unter einigen, nichtsweniger als wahrscheinlichen Annahmen zum Resultate, dass die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Entladung mindestens 800·000 Meter in einer Secunde betragen muss. Diese nicht unbedeutende Fortpflanzungsgeschwindigkeit der in der Entladung leuchtenden Theilchen müsste auf Grund des bekannten Doppler'schen Satzes das Spectrum des Gases beeinflussen, was jedoch durch die von Goldstein angestellten Versuche nicht bestätigt wird, und somit nach seiner Ansicht gegen die Wahrscheinlichkeit der convectiven Entladung der Elektricität sprechen soll.

Dem gegenüber erlaube ich mir zu bemerken, dass die ungeheuere Geschwindigkeit der bewegten Theilchen von 800·000 Meter höchst unwahrscheinlich und somit das negative Resultat der spectroskopischen Versuche erklärlich ist.

Bei einer Verdünnung von ungefähr 0·5 Mm. Quecksilberdruck entsteht an der Kathode, wie bekannt, ein relativ dunkler Raum, indem die von der Kathode losgerissenen und normal zu ihrer Oberfläche fortgeschleuderten Theilchen die Gastheilchen zurückdrängen und dieselben in einer gewissen Entfernung von der Elektrode im stationären Zustande erhalten. Durch den dunklen Raum bewegen sich die Theilchen in geraden Richtungen, und die Grenze, wo sie mit den Gastheilchen und unter einander zusammenprallen, zeichnet sich durch ihre grosse Helligkeit aus. Jenseits dieser hellen Grenze bewegen sich die Gas- und Elektrodentheilchen nach allen möglichen Richtungen, und in dem Verhältniss, als die Gastheilchen an Zahl überwiegen, nimmt auch die Intensität des Glimmlichtes ab. Mit dem letzteren Namen bezeichne ich das Gemisch aus Elektroden- und Gastheilchen, welches zwischen dem dunklen Raum an der Elektrode und dem nächstfolgenden dunklen Raum liegt.

Da die Elektroden- und Gastheilchen des Glimmlichtes dieselbe Temperatur haben müssen, so muss auch $MU^2 = mu^2$ sein, wenn M, m, U, u Masse und Geschwindigkeit eines Elektroden-, beziehungsweise Gastheilchens bedeutet. Da es höchst wahr-

scheinlich Elektrodentheilchen von verschiedener Grösse, oft ganze Klumpen geben wird, so soll M die Masse eines Theilchens mittlerer Grösse bedeuten. Für die Geschwindigkeit eines Elektrodentheilchens erhält man somit:

$$U = \sqrt{\frac{m}{M}} \cdot u,$$

eine Grösse, die kleiner sein wird, als die Molekulargeschwindigkeit der Gastheilchen, da M in den meisten Fällen grösser sein wird als m.

In der hellen Grenzschichte des dunklen Raumes wird die Zahl der Gastheilchen sehr gering sein, und wir können daher, dieselben als Elektrodentheilchen betrachtend, annehmen, dass in der Volumseinheit N Elektrodentheilchen enthalten sind, welche nach allen Richtungen sich bewegen. Im dunklen Raum entfallen auf eine Volumseinheit N_o Theilchen, welche aber nur in einer Richtung gegen die helle Schicht sich bewegen. Es ist daher der Druck auf eine Flächeneinheit der hellen Schicht, welchen die fortschreitenden Moleküle des dunklen Raumes ausüben:

$$p = N_o M U_o^2,$$

wo U_o die Geschwindigkeit der fortschreitenden Bewegung der Theilchen bedeutet. Dagegen ist der Druck von der entgegengesetzten Seite der hellen Schicht:

$$p = \frac{1}{3} NMU^2,$$

wo aber U die Geschwindigkeit bedeutet, mit der die Theilchen sich nach allen Richtungen bewegen.

Da die helle Schicht im Gleichgewichte sich befindet, so muss:

$$N_o M U_o^2 = \frac{1}{3} NMU^2,$$

und wenn wir wegen Gleichheit der Temperatur auch die Gleichheit der lebendigen Kräfte eines Moleküls annehmen, so finden wir:

$$N_o = \frac{1}{3} N.$$

Die Zahl der Moleküle in der Volumeinheit des dunklen Raumes ist dreimal kleiner als in der hellen Schicht.

Die geringere Helligkeit des relativ dunklen Raumes hängt hauptsächlich mit der geringeren

Zahl leuchtender Elektrodentheilchen zusammen, und nicht, wie von Crookes angenommen wurde, mit dem Mangel an Zusammenstössen derselben mit den Gastheilchen.

Prallen die Elektrodentheilchen gegen ein festes Platinblättchen an, so wird die ganze Energie ihrer fortschreitenden Bewegung in Wärme umgewandelt und das Platin wird weissglühend. Beim Zusammenstoss der Elektrodentheilchen und Gastheilchen wird dagegen die progressive Bewegung der ersteren an die letzteren einfach übertragen und es können daher die beweglichen Theilchen nicht zum Glühen gebracht werden. Ihre Phosphoreszenz wird durch Entladung der Elektricität und nicht durch Zusammenstoss bedingt, weil auch die die Strahlen aussendenden Kathoden phosphoresziren.

Da die ganze Gasmasse in der Glasröhre im stationären Zustande sich befindet, so muss der Druck im dunklen Raume nicht blos dem Druck im Glimmlichte, sondern auch jenem an einer anderen Stelle gleich sein. Es muss daher auch:

$$p = N_o M U_o^2 = \frac{1}{3} n m u^2$$

sein, wenn n m u sich auf das Gas beziehen.

Da die Gastheilchen nach allen Richtungen sich bewegen, so wird auch jetzt, wenn die Temperaturen gleich sind was angenähert der Fall ist:

$$N_o = \frac{1}{3} n \text{ und } U_o = \sqrt{\frac{m}{M}} \cdot u.$$

Die Geschwindigkeit der Theilchen im dunklen Raume ist kleiner als die Molekulargeschwindigkeit der Gase und kann daher einige Hundert Meter betragen, so lange der dunkle Raum noch sichtbar bleibt. Sollte auch die Geschwindigkeit bei höherer Verdünnung, wenn der dunkle Raum das ganze Gefäss erfüllt, noch etwas grösser werden, so wird sie die obige Grösse von 800·000 Metern gewiss nicht erreichen können.

Studien über Caffeïn und Theobromin.

II. Abhandlung.

Von Richard Maly und Franz Hinteregger.

(Mit 1 Holzschnitt.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 10. Februar 1881.)

In der ersten Abhandlung [1] haben wir gezeigt, dass Caffeïn sowohl, als Theobromin durch Chromsäuremischung oxydirt werden, dabei drei Atome Sauerstoff verbrauchen, und dass als Hauptproducte in reichlicher Menge aus dem ersten Dimethylparabansäure, aus dem letzteren Monomethylparabansäure entstehen.

Da die beiden Parabansäuren nach dem Kochen mit der Chromsäuremischung mittelst Äther extrahirt wurden, so bleibt uns noch zu beschreiben, was sich in der ausgeschüttelten Chromalaunmischung vorfindet. Wir werden daher zunächst die hier vorfindlichen Substanzen besprechen und dann auseinandersetzen, welche Oxydationsgleichung sich daraus für die Basen ergibt.

Da vorwiegend und in viel grösseren Quantitäten mit Caffeïn gearbeitet wurde, so gilt das Folgende zunächst für diesen Körper.

Nach dem Ausschütteln mit Äther, welches mehrere Male, aber wegen der Schwierigkeit, die letzten Reste auszuschütteln, doch nicht bis zur völligen Erschöpfung an Cholestrophan vorgenommen werden konnte, wurde immer mit kohlensaurem Baryum digerirt und dadurch zunächst Chromoxyd und Schwefelsäure entfernt. Wird diese Operation in der Wärme vorgenommen, so entwickelt sich deutlicher Geruch nach Ammoniak und Methylamin, von denen das letztere meist in grösserer Menge

---

[1] Diese Sitzungsberichte.

aufgefunden wurde. So wurden nach der Überführung in die Platinsalmiake gefunden:

42·67% Platin,

was in der Mitte zwischen einfachem und Methylplatinsalmiak liegt. Auch der reine Methylplatinsalmiak ist mehrmals dargestellt und in sechsseitigen Blättchen erhalten worden, so dass über dessen Auftreten bei der Oxydation mit Chromsäure kein Zweifel sein konnte.

Erhaltene Procentzahlen sind z. B.

41·83%, 41·38%. 41·49%, 41·16% Platin,

während Methylplatinsalmiak 41·6% Platin enthält.

Nachdem diese Ammoniake nachgewiesen waren, hat sich folgender Weg der Verarbeitung der Filtrate von kohlensaurem Baryumniederschlage als zweckmässig erwiesen.

Da wegen des vom Kaliumchromat herrührenden Gehaltes an Kaliumcarbonat die Flüssigkeit nach Ausfällung des Chromoxydes und der Schwefelsäure alkalisch reagirte, so wurde die Digestion mit Baryumcarbonat nur bei gewöhnlicher oder wenig erhöhter Temperatur vorgenommen, das Filtrat mit verdünnter Salz- oder Schwefelsäure genau neutralisirt und dann am Wasserbade unter sorgfältiger Correctur der Reaction eingedampft.

Der Rückstand wurde mit warmem Alkohol ausgezogen, wobei nur das Kalium als Sulfat (oder Chlorid) hinterblieb. Der alkoholische Auszug eingeengt, gibt einen klaren, fast farblosen Syrup, der nicht krystallinisch wird, höchstens unbedeutende Krystallansätze zeigt.

Löst man den Syrup in Wasser, versetzt mit Baryumchlorid, und reibt mit einem Glasstabe, so trübt sich sofort die Flüssigkeit und scheidet ein weisses, schweres Krystallmehl eines Baryumsalzes, aber im Verhältniss zum oxydirten Caffeïn in nur geringer Menge ab. Die Säure dieses Baryumsalzes schien uns zuerst insoferne wichtig, als wir darin einen zweiten Spaltungskörper des Caffeïns zu erkennen glaubten. Obwohl oft gerade bei sehr sorgfältiger Arbeit nur wenig davon entsteht, so wurde doch bei der häufigen Darstellung eine für die endgültige Untersuchung genügende Menge erhalten.

Methyloxaminsaures Baryum.

Das ausgeschiedene Baryumsalz ist wie schon angedeutet dadurch charakterisirt, dass es leicht übersättigte Lösungen bildet; ein Tropfen davon gibt dann am Uhrgläschen mit einem Glasstabe gerieben Ausscheidung des Salzes. In kaltem Wasser löst sich das Salz schwierig, in heissem leicht auf. Lässt man die heisse Lösung langsam erkalten, so krystallisirt es in wasserklaren, farblosen, losen, harten Krystallen, die besonders, so lange sie unter der Flüssigkeit sich befinden, schönen Demantglanz besitzen.

In Alkohol löst sich das Salz nicht; am Platinblech erhitzt, bläht es sich unter Bildung weisser, pharaoschlangenartiger Bildungen von Baryumcarbonat auf. Mit dem kleinsten Krystall gelingt diese Probe. Es ist stickstoffhältig und enthält Krystallwasser, das bei etwa 100° C. noch nicht weggeht, aber leicht bei 130° C. entweicht, wobei die durchsichtigen Krystalle milchweiss werden. Die exsicatortrockene Substanz bleibt bei 100° C. unverändert.

Analysen.

1. 0·6044 Grm. lufttrockener Substanz gaben 0·4256 Grm. Kohlensäure und 0·1871 Grm. Wasser.
2. 0·5515 Grm. exsicatortrockener Substanz verloren bei 130° C. 0·0520 Grm. Wasser, wobei die Krystalle porzellanartig wurden. Diese mit Natronkalk verbrannt, neutralisirten 9·2 C. C. Säure, wovon 1 C. C. =3·88 Mgr. Stickstoff.
3. 0·3092 Grm. exsicatortrockener Substanz verloren bei 130—140° C. 0·0292 Grm. Wasser. Der Rückstand mit Schwefelsäure abgeraucht gab 0·1896 Grm. Baryumsulfat=0·11148 Grm. Baryum.
4. 0·3581 Grm. exsicatortrockener Substanz verloren bei 130° 0·0344 Grm. Wasser. Der Rückstand mit Schwefelsäure abgeraucht, gab 0·2170 Grm. Baryumsulfat=0·1276 Grm. Baryum.
5. 0·5097 Grm. bei 100° C. getrockneter Substanz gaben 0·3647 Grm. Kohlensäure und 0·1599 Grm. Wasser.
6. 0·5265 Grm. exsicatortrockener Substanz verloren bei 100° C. nichts, bei 140—145° C. 0·0512 Grm. Wasser.
7. 0·4350 bei 100° C. getrockneter Substanz gaben 27·5 C. C. Stickstoff von 13·5° C. und 731 m. m.
8. 0·5116 Grm. drei Tage über Schwefelsäure getrockneter Substanz verloren bei 140° C. in einer Stunde 0·0493 Grm. bei weiterem

Trocknen nichts mehr an Wasser. Der Rückstand mit Schwefelsäure abgeraucht, gab 0·3152 Grm. Baryumsulfat.

In 100 Theilen gefunden:

	1	2	3	4	5	6	7	8
C ...	19·21	—	—	—	19·52	—	—	—
H ...	3·44	—	—	—	3·47	—	—	—
N ...	—	6·47	—	—	—	—	6·97	—
Ba ..	—	—	36·05	35·63	—	—	—	36·22
H_2O .	—	9·40	9·44	9·60	—	9·72	—	9·63

Es stimmen mithin die Analysen auf ein Baryumsalz von der Formel $C_3H_4baNO_3 + H_2O$, welches verlangt:

C_3	36	19·10%
H_6	6	3·18
N	14	7·42
ba	68·5	36·34
O_4	64	33·95
		100·00
Wasser		9·55%

Ein Baryumsalz von der vorstehenden Formel könnte sein das der Amidobrenztraubensäure, der Malonaminsäure oder der Methyloxaminsäure. Von diesen sind die beiden ersten noch unbekannt.

Ein einfacher Versuch liess das Salz als jenes der Methyloxaminsäure von Wurtz erkennen; eine Portion wurde 10 Minuten mit Natronlauge im Kochen erhalten, wobei reichlich der Geruch nach Methylamin auftrat. Darauf wurde das Ganze mit verdünnter Schwefelsäure sauer gemacht, vom Baryumsulfat abfiltrirt; das Filtrat mit Ammoniak im Überschusse, dann mit Essigsäure versetzt, gibt nun mit Chlorcalcium eine reichliche Fällung von Calciumoxalat.

$$\underset{\text{Methyloxaminsäure}}{\begin{matrix} CO\cdot NHCH_3 \\ | \\ CO\cdot OH \end{matrix}} + \begin{matrix} HONa \\ \\ HONa \end{matrix} = \underset{\text{Natriumoxalat}}{\begin{matrix} CO\cdot ONa \\ | \\ CO\cdot ONa \end{matrix}} + NH_2CH_3 + H_2O$$

Da Wurtz[1] in seiner berühmten Abhandlung: „Über eine Reihe mit dem Ammoniak homologer Basen“ nur das Kalksalz der Methyloxaminsäure darstellte, auch sonst kein charakteristisches Salz beschrieben worden ist, so kann das Vorhergehende zum Theil zur Charakteristik der Methyloxaminsäure dienen. Wir haben auch Herrn Professor Rumpf eine Partie schöner Krystalle des methyloxaminsauren Baryums übergeben, und hatte derselbe die Güte, eine genaue krystallographische Untersuchung derselben vorzunehmen und uns Folgendes darüber mitzutheilen:

„Die Krystalle des methyloxaminsauren Baryums gehören dem monoklinen Systeme an.

Es sind kleine, wasserhelle, glasglänzende, oktaëderähnliche Krystalle, vorwiegend aus den beiden fast im Gleichgewichte entwickelten Hemipyramiden *o* und *o'* gebildet. Untergeordnet treten ferners bei manchen Krystallen die Endfläche *P* und das Prisma *m* auf, wie es beistehende Fig. 1 zeigt.

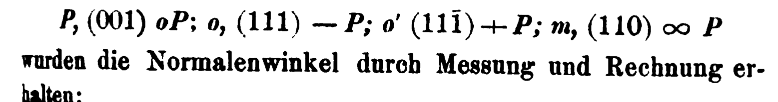
Fig. 1.

Das Parameterverhältniss und der Axenwinkel wurden berechnet aus den in nachfolgender Tabelle mit * versehenen Winkeln.

$$a:b:c = 1\cdot0178 : 1 : 1\cdot3060$$

$$\beta = 87°13'$$

Von den Flächen der Formen:



P, (001) oP; o, (111) $-P$; o' $(11\bar{1}) + P$; m, (110) ∞P

wurden die Normalenwinkel durch Messung und Rechnung erhalten:

	Gemessen	Gerechnet
$o : o = 111 : 1\bar{1}1 =$	*76° 10'	--
$o' : o' = 11\bar{1} : 1\bar{1}\bar{1} =$	*78 48	—
$o : o' = 111 : \bar{1}11 =$	*75 57	—
$P : o = 001 : 111 =$	59 54	59° 51
$P : o' = 001 : \bar{1}11 =$	62 48	62 51

[1] Journal f. prakt. Chemie, 52, 213, 1851.

	Gemessen	Gerechnet
$o : o' = 111 : 11\bar{1} =$	57° 17′	57° 18′
$o : m = 111 : 110 =$	28 12	28 12
$o' : m = 11\bar{1} ; 110 =$	29 10	29 6
$P : m = 001 : 110 =$	—	88 3

Nach der wenig matten Basisfläche *P* herrscht vollkommene Spaltbarkeit. Die Prismenflächen *m* sind parallel ihren Combinationskanten mit den Pyramidenflächen gestreift. Die Pyramidenflächen sind glatt. Spaltungsplättchen geben im Polarisationsapparate ein Interferenzbild, nach welchem die optischen Axen in der Symmetrieebene liegen. Der scheinbare Winkel der optischen Axen beträgt circa 40°. Die Bisectrix fällt in den stumpfen Winkel β und bildet mit der Normalen zur Endfläche beiläufig den Winkel von 5°. Der optische Charakter der Doppelbrechung ist +.

Zufolge der typisch ausgeprägten Verhältnisse bietet das Salz bei seiner Luftbeständigkeit ein gleich interessantes krystallographisches wie optisches Demonstrationsobject und es wäre nur noch zu wünschen, dass grössere Krystalle gewonnen werden."

Die Auffindung der Methyloxaminsäure unter den Oxydationsproducten des Caffeïns schien uns zuerst das Schema des Zersetzungsvorganges abzuschliessen, denn wenn man vom Caffeïn das Cholestrophan abzieht, so bleiben vom Kohlenstoff noch 3 Atome, vom Stickstoff 2 Atome; davon war 1 Atom Stickstoff im Ammoniak, 3 Atome Kohlenstoff und 1 Atom Stickstoff in der Methyloxaminsäure enthalten. Das Auftreten des Methylamins und das der Kohlensäure während des Kochens mit der Chromsäuremischung war leicht dahin zu deuten, dass die Methyloxaminsäure wenig beständig, selbst leicht weiter oxydirt wird und als solche Oxydationsproducte mussten Kohlensäure und Methylamin auftreten nach der Gleichung:

$$\begin{array}{l} CO\quad NHCH_3 \\ | \\ COOH \end{array} + O = 2CO_2 + NH_2CH_3$$

In der That wurde eine kleine Portion Barytsalzes mit Chromsäuremischung in dieser Art angegriffen; im vorgeschlagenen Barytwasser entstand nach einiger Zeit eine Fällung

von Carbonat, während der Rückstand schon mit kalter Lauge Methylamin gab. Obwohl nun dieses Alles vortrefflich dazu stimmte, dass man es in der Methyloxaminsäure mit jenem Rest des Caffeïns zu thun habe, der noch davon fehlt, wenn man die Elemente des Cholestrophans abzieht, so zeigte sich doch bald, dass dies nicht richtig ist, dass die Methyloxaminsäure gar kein directes Oxydationsproduct des Caffeïns ist, sondern dass dieselbe vielmehr erst im Laufe der Verarbeitung der Chromlaugen aus jenem Rest des Cholestrophans entsteht, der auch mehrfacher Ausschüttelungen zum Trotze noch darin gelöst bleibt und bei ber Behandlung mit kohlensaurem Baryum unter alkalische Bedingungen gelangt.

Nun erklärt sich auch, wie es kommt, dass man immer relativ sehr kleine Mengen von methyloxaminsaurem Baryum erhält, das es manchmal gerade bei sehr sorgfältiger Arbeit völlig fehlt und dass man auch dann nicht mehr davon zu Gesichte bekommt, wenn man von vorneherein die Oxydation einschränkt und das Caffeïn nicht mit 3, sondern mit einer nur 2 Atomen Sauerstoff entsprechenden Chromsäuremischung kocht.

Bildung von Dimethyloxamid und von Methyloxaminsäure aus Cholestrophan.

Es ist in der ersten Abhandlung gezeigt, wie rasch und glatt das Cholestrophan in Dimethylharnstoff und Oxalsäure zerfällt, wenn man es mit Alkalien behandelt; verdünnte Kali- oder Natronlauge, Barytwasser und beim Kochen auch Ammoniak wirken in gleicher Weise.

Bei unserer Art der Verarbeitung kam aber nur kohlensaures Baryum in Anwendung, und obwohl es nicht wahrscheinlich schien, dass dieser Körper auf Cholestrophan sollte einwirken können, so haben wir doch den Versuch gemacht, reines Cholestrophan in wässeriger Lösung mit kohlensaurem Baryum zu versetzen, und einige Stunden am Wasserbade zu digeriren.

Die Versuche zeigten, dass sich das Cholestrophan dabei in einen ganz anderen Körper verwandelt. Hat man nach der angegebenen Zeit vom kohlensauren Baryum filtrirt und das Filtrat eingeengt, so krystallisiren nicht mehr die glasigen Tafeln des

Cholestrophans aus, sondern es erscheinen Nadeln oder aus solchen gebildete schneeweisse, seidenglänzende, lockere Aggregate. Die Krystallisation ist homogen bis auf den letzten Rest der Mutterlauge.

Der abfiltrirte kohlensaure Baryt ist nach dem Auswaschen rein, er enthält kein Baryumoxalat, seine Einwirkung konnte daher mit der des Barytwassers oder der der Alkalien keine Ähnlichkeit haben.

Die erwähnte krystallisirte Substanz selbst, von der nicht viel weniger erhalten wird, als Cholestrophan dazu verwendet wurde, unterscheidet sich von letzterem durch Folgendes: Cholestrophan schmilzt bei 145°, der neue Körper schmilzt bei 200° noch nicht, aber in einer trockenen Röhre erhitzt, verflüchtigt er sich vollständig unter Bildung eines weissen wolligen Sublimates.

Ein Blättchen Cholestrophan in Wasser gelöst, mit Ammoniak und einem Tropfen Chlorcalciumlösung durch einige Secunden erhitzt, gibt Calciumoxalat; der neue Körper so behandelt, gibt keinen Niederschlag.

Analyse.

0·3396 Grm. exsicatortrockener Substanz gaben 73·0 C. C Stickstoff, (Temperatur = + 16° C.; Barometerstand = 729·4 M. M.); daraus rechnen sich 65·0 C. C. Stickstoff von 0° bei Normalbarometerstand oder

Gefunden	Berechnet
23·93% Stickstoff	24·14% Stickstoff

Daraus, sowie aus dem Umstande, dass kein Oxalyl durch das Baryumcarbonat abgespalten worden ist, geht hervor, dass der Körper Dimethyloxamid $C_4H_8N_2O_2$ ist.

Seine Bildung aus dem Cholestrophan erfolgt nach folgender Gleichung:

$$H_2\boxed{O + CO}\begin{matrix} NCH_3CO \\ | \\ NCH_3CO \end{matrix} = CO_2 + \begin{matrix} NHCH_3CO \\ | \\ NHCH_3CO \end{matrix}$$

welche dem gewöhnlichen Zerfall des einfachen Harnstoffes in Ammoniak und Kohlensäure correspondirt, nur dass hier die Ammoniakreste durch das Oxalyl zusammengehalten werden.

Während also die alkalischen Hydroxyde das Oxalyl aus dem Cholestrophan herausholen und den Harnstoffrest intact lassen,

greift das kohlensaure Baryum glatt nur das Carbonyl des Harnstoffes heraus.

Lässt man nunmehr auf das Dimethyloxamid stärkere basische Körper einwirken, so wird daraus Methylamin entwickelt, aber je nach der Stärke der Reagentien und der Dauer der Einwirkung ist die Zersetzung verschieden, indem sich entweder nur die eine oder beide der Methylamingruppen ablösen:

$$\begin{array}{llllll} CO & NH.CH_3 & H & OK & COOK & \\ \vert & & + & & = \vert & + 2NH_2CH_3 \ldots \text{ I.} \\ CO & NH.CH_3 & H & OK & COOK & \end{array}$$

Dimethyloxamid — Oxalsaures Kalium — Methylamin

$$\begin{array}{llllll} CONHCH_3 & & & CONHCH_3 & & \\ \vert & + & & = \vert & & + NH_2CH_3 \ldots \text{II.} \\ CO & NHCH_3 & H & OK & COOK & \end{array}$$

Dimethyloxamid — Methyloxaminsaures Kalium — Methylamin.

Die Gliederung I läuft ab, wenn man mit 10percentiger Natronlauge nur eine Minute kocht; sofort ist reichlich oxalsaures Natron in Lösung.

Die Gleichung II realisirt sich, wenn man das Dimethyloxamid mit Barytwasser kurze Zeit kocht; es scheidet sich nur eine kleine Menge von Baryumoxalat ab, und das durch Kohlensäure vom überschüssigen Baryt befreite Filtrat gibt eingeengt, die bekannten klaren, glänzenden, am Platinblech wurstförmig in die Höhe wachsenden Krystalle des methyloxaminsauren Baryums.

Der Process nach der Gleichung II, läuft ferner auch ab, wenn man Dimethyloxamid mit einer verdünnten Lösung von Kaliumcarbonat ein Paar Stunden bei gelinder Wärme digerirt; darauffolgendes Neutralisiren mit verdünnter Salzsäure und Versetzen mit Chlorbaryum gibt wieder die obigen Krystalle.

Hiemit sind wir, allerdings auf einem Umwege, aber auf einem nicht uninteressanten, zur Klarstellung der Abkunft jener Methyloxaminsäure gekommen, die sich aus den Chromlaugen abscheiden liess, denn es braucht wohl kaum noch hervorgehoben zu werden, dass durch die Einwirkung des überschüssigen kohlensauren Baryums, durch welches das Chromsulfat ausgefällt werden

musste, zunächst jene oben erörtete Umwandlung des noch vorhandenen Cholestrophanrestes in Dimethyloxamid zu Stande kam, während dann gleichzeitig, indem das Kalium des Chromalauns sich in Kaliumcarbonat umwandelte, die obige mit II bezeichnete Gleichung während der Dauer des Digerirens ablaufen und die Bildung der Methyloxaminsäure veranlassen musste, soferne nicht ein Theil des Cholestrophans direct vom Kaliumcarbonat getroffen in Oxalat und Dimethylharnstoff gespalten wurde.

Wir kehren nun zur weiteren Verarbeitung jener Flüssigkeit (pag. 422) zurück, aus der durch Zusatz von Chlorbaryum das methyloxaminsaure Baryum abgeschieden worden ist. Es sind nur mehr wenige Substanzen darin enthalten.

Durch Einengen und Ausziehen mit Alkohol wird zunächst das überschüssig zugesetzte Chlorbaryum entfernt; der alkoholische Auszug eingedampft, gibt wieder einen Syrup, aus dem von selbst nichts Deutliches herauskrystallisirt, versetzt man aber mit etwas stärkerer Salpetersäure, so erstarrt der Syrup zu einem krystallinischen Brei, aus welchem man durch Aufstreichen auf Papierlagen das Flüssige entfernt.

Der abgepresste Krystallbrei lässt sich aus warmem Alkohol, worin er leicht löslich, gut umkrystallisiren und bildet dann ein lockeres Hanfwerk weisser Nadeln, deren Natur unschwer zu erkennen ist. Durch Zerlegen des Nitrates mit Baryt und Ausziehen mit Alkohol wurden die langen Spiesse eines Harnstoffes erhalten, und der Titrirversuch mit verdünntem Natron ergab, dass salpetersaurer Dimethylharnstoff vorlag. Die Bildung dieses Körpers ist nach dem früher Vorgebrachten klar, er stammt ebenfalls von dem nicht ausgeschüttelten, durch das kohlensaure Kalium direct angegriffenen Cholestrophan her.

Das endlich, was die Papierlagen aus dem Krystallbrei des salpetersauren Dimethylharnstoffes noch aufgesaugt hatten, war das Chlorid und Nitrat von Methylamin.

Damit sind wir am Ende der Auffindung von Oxydationsproducten des Caffeïns angekommen; es sind folgende:

Cholestrophan,
Ammoniak,

Methylamin,
Kohlensäure

während, was an Dimethylharnstoff und an methylirter Oxaminsäure sich vorfindet, nachweislich secundäre Producte aus dem Cholestrophan sind.

Um irgend welchem Einwande zu begegnen, es könnte ein Oxydationsproduct übersehen worden sein, war es noch nöthig, die Quantität der auftretenden Kohlensäure zu bestimmen; ihre Menge musste, wenn keine anderen als die obigen vier Körper auftreten, 2 Moleküle aus 1 Molekül Caffeïn sein.

Bestimmung der Kohlensäure.

Hierzu diente ein Apparat, der aus folgenden Theilen bestand: Eine kleine, tubulirte Retorte mit einem Rückflusskühler verbunden; in dem Tubulus der Retorte war ein Glasröhrchen befestigt, das mit einem Glashahn oder Quetschhahn verschlossen war. Auf den Rückflusskühler folgte eine Waschflasche mit concentrirter Schwefelsäure, darauf ein Chlorcalciumrohr, ein gewogener Geissler'scher Kaliapparat, ein Kalirohr und endlich ein Schutzrohr.

In die Retorte kam eine gewogene Menge krystallwasserfreien Caffeïns und dazu die Chromsäuremischung, entweder 3 oder 4 Atomen Sauerstoff entsprechend, dann wurde 3 Stunden gekocht, darauf das Schutzrohr mit einem Aspirator verbunden, die Flamme entfernt, der Hahn am Glasröhrchen geöffnet und $^3/_4$ Stunden Luft durchgesaugt. Nachdem die Apparate gewogen waren, wurde von Neuem 3 Stunden gekocht, wieder Luft durchgesaugt, gewogen und dies auch ein drittes Mal wiederholt.

Die Anwendung eines vierten Atomes Sauerstoff haben wir unbedenklich gefunden, nachdem durch eigens dahin gerichtete Versuche constatirt war, dass reines Cholestrophan von Chromsäure nicht mehr erkennbar angegriffen wird.

Versuch 1.

1·1800 Grm. trockenes Caffeïn mit Chromsäuremischung 3 Atomen Sauersoff entsprechend gaben:

Nach den ersten	3 Stunden....	0·452 Grm.	Kohlensäure
„ „ zweiten	3 „	0·073 „	„
„ „ dritten	3 „	0·023 „	„
	daher im Ganzen....	0·548 Grm.	Kohlensäure

oder 100 Theile Caffeïn lieferten 46·6 Theile Kohlensäure.

Versuch 2.

1·1105 Grm. trockenen Caffeïns gaben beim Kochen mit einer 4 Atomen Sauerstoff entsprechenden Chromsäuremischung:

Nach den ersten	3 Stunden...	0·2894 Grm.	Kohlensäure
„ „ zweiten	3 „ ...	0·1368 „	„
„ weiteren	2 „ ...	0·0386 „	„
	daher in 8 Stunden...	0·4648 Grm.	Kohlensäure

oder 100 Theile Caffeïn geben 41·8 Theile Kohlensäure.

Versuch 3.

1·0850 Grm. trockenen Caffeïns gaben beim Kochen mit einer Chromsäuremischung 3 Atomen Sauerstoff entsprechend:

Nach den ersten	3 Stunden....	0·329 Grm.	Kohlensäure
„ „ zweiten	3 „	0·052 „	„
„ „ dritten	3 „	0·026 „	„
	daher in 9 Stunden....	0·407 Grm.	Kohlensäure.

Als neuerdings Chromsäuremischung (1 Atom Sauerstoff) hinzugefügt und wieder 3 Stunden gekocht wurde, resultirten noch 0·072 Grm. Kohlensäure, und beträgt mithin die Gesammtsumme 0·479 Grm. Kohlensäure oder

100 Theile Caffeïn lieferten 44·1 Theile Kohlensäure.

Daher gefunden:

Versuch 1.....	46·6 %	Kohlensäure
„ 2.....	41·8 %	„
„ 3.....	44·1 %	„
Mittel.....	44·16 %	Kohlensäure.

Die Theorie verlangt für:

1 Mol. Kohlensäure aus 1 Mol. Caffeïn	....	22·67%
2 „ „ „ „ „ „	....	45·35%
3 „ „ „ „ „ „	....	68·01%

und es kann nun kein Zweifel sein, dass bei der Oxydation des Caffeïns 2 Atome Kohlenstoff als Kohlensäure austreten.

Die Oxydation des Caffeïns durch Chromsäuremischung findet daher nach folgender Gleichung statt:

$$\underset{\text{Caffein}}{C_8H_{10}N_4O_2} + 3O + 2H_2O = \underset{\text{Cholestrophan}}{C_5H_6N_2O_3} + 2CO_2 + CNH_5 + NH_3$$

und die des Theobromins nach der Gleichung:

$$\underset{\text{Theobromin}}{C_7H_8N_4O_2} + 3O + 2H_2O = \underset{\text{Methylparabansäure}}{C_4H_4N_2O_3} + 2CO_2 + CNH_5 + NH_3$$

Die Benützung dieser Gleichungen zur Aufstellung einer Constitutionsformel für beide Substanzen behalten wir uns, bis weitere Reactionen studirt sein werden, vor.

Synthetische Versuche in der Chinolinreihe.

Von Zd. H. Skraup.

I. Mittheilung.

(Aus dem Universitäts-Laboratorium des Prof. Lieben.)

(Mit 3 Holzschnitten.)

Zahlreiche Arbeiten haben innige Beziehungen zwischen den Alkaloiden und den Basen der Chinolin- und Pyridinreihe festgestellt. Wie nun das Interesse der Chemiker an der ersteren Körperclasse zunahm, wurde auch der letzteren mehr Beachtung gestellt, die so viele bisher nur zum geringen Theile erforschte Eigenthümlichkeiten aufweist, musste aber auch der Umstand, dass die genannten Basen, sowie ihre Derivate nur sehr schwierig zu beschaffende Körper sind, um so fühlbarer werden.

Zwar hat es nicht an erfolgreichen Versuchen gefehlt, Methoden zur synthetischen Darstellung hieher gehöriger Körper zu schaffen und haben dieselben zum mindesten das Verdienst aufzuweisen, dass die Structur des Chinolins und mit ihr jene des Pyridins als feststehend betrachtet werden kann, wie vor allem aus der von Baeyer [1] durchgeführten Synthese des Chinolinssua dem Hydrocarbostyryl hervorgeht.

Als Darstellungsmethode konnten jedoch alle diese Reactionen schon aus ökonomischen Gründen nicht in Betracht kommen und es dürfte desshalb ein Verfahren, das es ermöglicht, Chinolin und eine ganze Reihe seiner bisher gänzlich unbekannten Abkömmlinge mit geringem Aufwand an Mühe und Kosten zu gewinnen, einigen Fortschritt bringen.

---

[1] Ber. Ber. für 1879, 1320.

Dieses Verfahren lehnt sich an die bekannte Untersuchung von C. Graebe [1] über das Alizarinblau an, nach welcher letzterer Körper aus Nitroalizarin und Glycerin unter der wasserentziehenden Wirkung der Schwefelsäure nach der Gleichung

$$\underset{\text{Nitroalizarin}}{C_{14}H_7(NO_2)O_4} + \underset{\text{Glycerin}}{C_3H_8O_3} = \underset{\text{Alizarinblau}}{C_{17}H_9NO_4} + 3H_2O + O_2$$

entstehen soll.

War Graebe's Annahme richtig, sind Alizarinblau, sowie das aus diesem entstehende Anthrachinolin wirklich als dem Chinolin verwandte Körper aufzufassen, dann sollte unter analogen Verhältnissen Nitrobenzol Chinolin liefern und ebenso substituirte Nitrobenzole die entsprechenden Chinolinderivate.

Es war aber hiebei im Vorhinein gleich Folgendes zu beachten:

Nachdem bei dem Brunck'schen Verfahren zur Fabrikation von Alizarinblau Sauerstoff frei wird, der offenbar störend wirkt, wie ja auch Graebe hervorhebt, dass die reichlich entstehenden braunen Nebenproducte diesem Umstande zuzuschreiben sind, konnte in obigen Fällen der Zusatz eines Reductionsmittels von wesentlichem Vortheile sein, und als solches war stets das entsprechende Amidoderivat, speciell bei der Chinolinsynthese das Anilin in erster Reihe zu berücksichtigen, da die Möglichkeit vorlag, dass dieses selbst unter Wasserstoffaustritt mit dem Glycerin Chinolin bilde, so dass die zwei Reactionsgleichungen:

$$\underset{\text{Nitrobenzol}}{C_6H_5NO_2} + \underset{\text{Glycerin}}{C_3H_8O_3} = \underset{\text{Chinolin}}{C_9H_7N} + 3H_2O + O_2$$

$$\underset{\text{Anilin}}{C_6H_5NH_2} + \underset{\text{Glycerin}}{C_3H_8O_3} = \underset{\text{Chinolin}}{C_9H_7N} + 3H_{10} + H_2$$

in der dritten

$$2C_6H_7N + C_6H_5NO_2 + 3C_3H_8O_3 = 3C_9H_7N + 11H_2O$$

sich gewissermassen gegenseitig ergänzten.

---

[1] Liebig's Ann. 201, 333.

In der That zeigten zahlreiche Versuche, dass unter den angedeuteten Verhältnissen die Reactionen im erwünschten Sinne verlaufen und damit Graebe's Anschauung über die Natur des Alizarinblau's als feststehend betrachtet werden kann.

In Nachstehendem werden solche Körper der Chinolinreihe beschrieben, wie sie aus Nitro-, respective amidosubstituirten aromatischen Kohlenwasserstoffen darstellbar sind, andere werden in späteren Mittheilungen Aufnahme finden, die in so kurzer Zeit erfolgen sollen, dass ich das Ersuchen, mir bis dahin dieses Thema noch uneingeschränkt zu überlassen, wohl wiederholen kann.

Chinolin.

Wenn analog der Darstellung von Alizarinblau, Nitrobenzol (10 Thl.) mit Glycerin (20 Th.) und englischer Schwefelsäure (15 Thl.) im Ölbade vor dem Rückflusskühler erhitzt werden, tritt bei 130° unter reichlicher Harzbildung eine überaus energische Reaction ein, bei der gleichzeitig Acroleïnbildung wahrnehmbar ist. Der Kolbeninhalt ist nur zum geringen Theile in Wasser löslich und enthält bloss Spuren von gebildetem Chinolin.

Wird statt Nitrobenzol Anilin gewählt, obiges Verhältniss aber sonst beibehalten, ist bei 140° keine Einwirkung zu beobachten, die aber eintritt, wenn noch etwa 10 Thl. Schwefelsäure zugesetzt und die Temperatur auf 160° gesteigert wird, wobei reichlich Schwefligsäure-Gas entweicht. Nach entsprechender Behandlung der in Wasser fast vollständig löslichen Reactionsmasse resultirten neben unverändertem Anilin etwa 2 Grm. eines zwischen 227—230° übergehenden Öles, das alle Eigenschaften des Chinolins besass.

Die besten Ausbeuten erzielt man mit einem Gemisch von Anilin und Nitrobenzol und glaube ich folgende Vorschrift als zuverlässig empfehlen zu können.

24 Grm. Nitrobenzol, 38 Grm. Anilin und 120 Grm. Glycerin werden in einem gegen 2 L. fassenden Kolben mit 100 Grm. englischer Schwefelsäure vermischt, die warm gewordene Masse geschüttelt, bis das Anilinsulfat vollständig gelöst ist und sodann auf einem Sandbade vor einem langen Rückflusskühler mit einer einfachen Bunsen'schen Lampe erhitzt. Zu Beginn muss die

Operation überwacht werden, um die erste stürmische Reaction, die sich nach etwa 5—10 Minuten einstellt, zu regeln. Wie eine eben kaum bemerkbare Dampfentwicklung beginnt, wird vom Feuer genommen und nach wenigen Augenblicken tritt stürmisches Sieden ein. Wasser und Nitrobenzol sammeln sich im Kühler in um so grösseren Mengen an, je später in der beschriebenen Art für Kühlung gesorgt wurde, und dauert diese heftige Reaction einige Minuten, um nach kurzem Stillstande sich wieder einzustellen, abermals zu pausiren u. s. f. Endlich wird auf das Sandbad gesetzt, auf welchem das intermittirende Sieden von Neuem anfängt, und nachdem der Kolbeninhalt ruhiger geworden ist, kann die Flamme untergesetzt und die Operation sich selbst überlassen werden. Einige Zeit hindurch ist auch dann noch das Sieden nicht andauernd, wird es aber allmälig.

Nach zwei- bis dreistündiger Dauer ist nur wenig unverändertes Nitrobenzol bemerkbar und weiteres Erhitzen nicht mehr nothwendig. Die braune Flüssigkeit versetzt man hierauf mit dem mehrfachen Volum Wasser und leitet einen Dampfstrom durch, bis der Geruch nach Nitrobenzol vollständig verschwunden ist. Die Abscheidung des Chinolins aus der nunmehr gleichzeitig sauer und brenzlich riechenden Lösung kann nun in verschiedener Art erfolgen.

Entweder derart, dass mit Ätznatron übersättigt und die so in Freiheit gesetzte Base mit Dampf übergetrieben wird, wobei es zweckmässig ist, dass man das mit übergehende Wasser, welches, nebenbei bemerkt, vermuthlich durch Oxydation der gelösten und suspendirten Base alle Nuancen von Blassroth bis Blassblau zeigt, endlich missfarbig wird, abzieht und zum Verdünnen des nächsten Blaseninhaltes verwendet, schliesslich für sich destillirt. In der Blase bleibt ein noch immer nach Chinolin riechendes, weiches Harz zurück, das beim Erkalten erstarrt, fast in allen Lösungsmitteln nicht, leicht in Chloroform löslich ist und beim Erhitzen neben erstickend riechenden Dämpfen etwas Chinolin abgibt, oder man verfährt in der Weise, dass das ausgeschiedene Chinolin mit Äther ausgeschüttelt wird, in welchem Falle es räthlich ist, das Absättigen mit Ätznatron fractionell vorzunehmen, um die Hauptmasse der harzigen Nebenproducte vorweg abzuschneiden, die nur sehr geringe Mengen Chinolin mit nieder-

reissen, wenn die Fällung in der Hitze geschieht. Ein wesentlicher Unterschied in der Ausbeute besteht zwischen beiden Verfahren nicht, wohl aber enthält die mit Äther direct ausgeschüttelte Base weit mehr harzige und färbende Antheile.

Die Ausbeute an Rohchinolin beträgt 70—75 Procent vom Gewicht des Anilin-Nitrobenzolgemisches, d. i. rund 60 Procent der theoretisch möglichen.

Statt nach dem üblichen Verfahren, die Rohbase mit Chromsäure zu behandeln, zog ich es vor, das sorgfältig mit Ätzkali getrocknete Öl durch blosse fractionirte Destillation zu reinigen, um eventuell anderweitig entstandene Producte sicher auffinden zu können.

Es gelang aber, ausser geringen Mengen von Wasser und Äther, von denen insbesondere das erste bis in die höchsten Fractionen mit überging, nur noch etwas Anilin (höchstens 4 Procent der Rohbase) abzuscheiden, obzwar nach der ersten Destillation die Fraction 200—205 einen Platinchlorid energisch reducirenden Körper enthielt, der bei weiter fortgesetzter Destillation vollständig verschwand.

Das Anilin wurde durch seinen Siedepunkt (182—183° uncorr.) Geruch, durch die Chlorkalkreaction und durch sein Sulfat als solches constatirt. Die Analyse des wasserfrei krystallisirenden Platinsalzes lieferte überdies:

0·3780 Grm. gaben 0·1238 Grm. Pt.

Berechnet	Gefunden
33·05	32·66

Das Rohchinolin geht schon bei der ersten Destillation fast ausschliesslich zwischen 225—230° über, und nach zweimaliger Wiederholung derselben bei 227—228°. Das niedersiedende wird in seinem Siedepunkte durch Anilin und durch Wasser, das zum Theil den Korken entstammt, gedrückt; die höher als 228 übergehenden Antheile sind gleichfalls wesentlich Chinolin mit Zersetzungsproducten desselben sowie der Korkstöpsel.

Auch durch häufige Destillation ist ein hartnäckig anhaftendes, nichtbasisches Harz nicht entfernbar, dessen Anwesenheit die grosse Lichtempfindlichkeit der Base verursacht, und beim

Lösen in verdünnten Säuren an der bleibenden Trübung oder doch dem eigenthümlichen terpentinartigen Geruch wahrgenommen wird. Vollständig entfernt man dasselbe durch Kochen der in Schwefelsäure gelösten Base mit Kaliumbichromat oder auch durch Überführung des Chinolins in das saure Sulfat. Dieselbe geschieht sehr einfach durch Lösen desselben in der etwa sechsfachen Menge Alkohols und durch Zufügen der berechneten Menge concentrirter Schwefelsäure. Nach dem Erkalten wird filtrirt, mit Alkohol nachgewaschen und so auch aus ziemlich dunkelgefärbtem Materiale schneeweisses Salz erhalten, das mit Ätzkali zersetzt, die reine Base liefert.

Ganz reines Chinolin ist vollkommen farblos, hält sich, zumal im Dunkeln, lange ungefärbt, nach längerem Stehen bildet sich in demselben aber wieder etwas der schon erwähnten nicht basischen Verunreinigung.

Die Analyse ergab:

0·2517 Grm. lieferten 0·7712 Grm. CO_2 und 0·1207 Grm. H_2O
0·3364 Grm. lieferten 34·5 Cbcm. N bei 23° C. und 748·2 Mm Druck.[1]

Berechnet für C_9H_7N	Gefunden 1	Gefunden 2
C....83·72	83·56	—
H.... 5·42	5·32	—
N....10·86	—	11·36

Behufs Vergleiches des bisher beschriebenen Chinolins mit solchem aus anderen Quellen, habe ich mir die Base aus Cinchoninsäure dargestellt, indem ich diese in Partien zu 3 Grm. mit Ätzkalk erhitzte, und hiebei eine um etwas grössere Ausbeute

[1] Bei der Stickstoffbestimmung wende ich seit einiger Zeit den sehr bequemen Apparat von Ludwig an, und will hiebei nur hervorheben, dass in demselben eine Kalilauge vom sp. G. 1·37, wie sie im hiesigen Laboratorium zur Absorption sonst üblich ist, nicht verwendet werden kann, da regelmässig totale Verstopfung des einen Ansatzrohres eintritt. Bei einer Lauge von etwa 1·25 sp. G. ist nichts Derartiges zu fürchten und bei den Dimensionen des Apparates weitaus genug Ätzkali in Lösung, um rasche Absorption zu bewirken.

erzielt als wie sie Königs beschreibt (Ber. Ber. f. 1879, 97), gleichzeitig auch geringe Mengen des von ebendemselben beschriebenen festen Körpers beobachtet. Nebenbei bemerkt, bleibt dieser bei einzelnen Operationen fast ganz aus und zeigt sich in der Regel erst bei schon ziemlich hoher Temperatur. Die Trennung desselben vom Chinolin ist seines hohen Siedepunktes wegen, durch blosse Destillation leicht ausführbar.

Das synthetische Chinolin und das aus Cinchoninsäure, die auch sonst in vollkommenster Übereinstimmung stehen, ergaben folgende Constanten:

	Chinolin	
	synthetisch	aus Cinchoninsäure
Corr. Siedepunkt bei 746·8 Mm. Druck,	237·1	236·6
Sp. G. bezogen auf Wasser von 0°		
bei 0°...	1·1081	1·1088
„ 20°...	1·0947	1·0949
„ 50°...	1·0699	1·0716

Aus beiden Basen wurden die Platindoppelsalze dargestellt und gleichfalls identisch gefunden.

Die Chinolinplatindoppelverbindung stellt im vollkommen reinen Zustande, durch Fällung in der Kälte erzeugt, einen lichtorangegelben, krystallinisch werdenden Niederschlag dar, der in kaltem Wasser sehr schwer, weit leichter in kochendem, sowie in heisser verdünnter Salzsäure löslich ist, und beim Erkalten in glänzenden, schön orangegelben Nädelchen anschiesst, die 2 Mol. Wasser enthalten, aus welchem Lösungsmittel sie krystallisirten und ob sie mit Wasser allein, oder aber schliesslich mit Alkohol und Äther gewaschen wurden.

Das Krystallwasser entweicht grösstentheils schon bei 100°, vollständig bei 105—110°. Das Salz verliert hiebei seinen Glanz.

1. 0·4093 Grm. lieferten 0·0206 Grm. H_2O und 0·1127 Grm. Pt.
2. 0·3892 „ „ 0·0200 „ „ „ 0·1075 „ „
3. 0·3858 „ „ 0·0203 „ „ „ 0·1066 „ „
4. 0·3468 „ „ 0·0177 „ „ „ 0·0969 „ „

Berechnet für $(C_9H_7N)_2H_2PtCl_6+2H_2O$	Gefunden			
	1	3	2	4
$2H_2O$... 5·09	5·03	5·12	5·26	5·10
Pt .....28·00	27·54	27·62	27·63	27·94

Zur Bestimmung 2 diente ein Salz aus Cinchoninsäure-Chinolin, in 1, 2, 3, wurde bloss mit Wasser, in 4 auch mit Alkohol und Äther gewaschen, wobei, wie man sieht, allein eine vollständig reine Verbindung resultirte.

Die Löslichkeit der beiden Platinsalze (1 und 2) in Wasser von 11° zeigte sich mit:

1. 60·7802 Grm. Lösung hinterliesen 0·0401 Grm. Trockensubstanz und 0·0142 Grm. Pt.
2. 64·8286 Grm. Lösung hinterliessen 0·0380 Grm. Trockensubstanz und 0·0129 Grm. Pt.

Aus den Pt-Mengen berechnet sich die Löslichkeit des wasserfreien Salzes mit 1 : 1249, resp. 1 : 1478.

Die Doppelverbindungen zersetzen sich schon beim Eindampfen ihrer wässerigen Lösung und wie es scheint theilweise bei längerem Stehen unter Wasser. Ersteres beweisen die übereinstimmende Abweichung zwischen Salz und Platin in obigen Bestimmungen, sowie der bei jenem deutlich wahrnehmbare Chinolingeruch, für das zweite spricht die theilweise Form- und Farbenveränderung der Krystalle.

Der Schmelzpunkt der reinsten Doppelverbindung aus synthetischem und aus Cinchoninchinolin wurde bei 225° beobachtet, einen nur wenige Grade niederen Verflüssigungspunkt zeigte das Doppelsalz des Chinolins aus Hydrocarbostyryl, die Herr Prof. Baeyer mir zum Vergleiche zu überlassen die besondere Freundlichkeit hatte. Auch in Form und Farbe zeigte dasselbe keine Unterschiede, leider reichte die Menge desselben zu einer eingehenderen Untersuchung nicht hin.

Die angeführten Daten genügen vollständig, um die Identität des nach meinem Verfahren darstellbaren Chinolins mit demjenigen, das im Cinchoninmolekül gebunden ist, darzuthun, es erscheint mir aber auch diese Identität sich auf das von Baeyer dargestellte zu erstrecken. Die Baeyer'sche Synthese zeigt, dass

die Schliessung des zweiten, des Pyridinringes, in der Ortho stellung erfolgt, dies muss aber auch in der eben beschriebene Reaction der Fall sein, da nur dann die glatte Oxydation de entstandenen Base zu Pyridinderivaten verständlich ist. Nachden nach Hoogewerff und van Dorp's Untersuchungen Cinchonin chinolin wiederum identisch sein dürfte mit dem aus Steinkohlen theer, ist bisher nur Eines der zwei Chinoline, die entsprechen den α- und β-Derivaten des Naphtalins möglich wären, bekann

Oxydation des Chinolins.

Chinolin ist schon öfter der Einwirkung oxydirender Agentie unterworfen worden; ich unternahm diese Untersuchung haupt sächlich, um in eben berührtem Sinne unzweideutigen Aufschlus zu erhalten.

Chromsäure wirkt auch in ziemlich concentrirter Lösung un beim Kochen sehr schwierig ein, noch mehr concentrirte Salpete säure, am leichtesten oxydirt noch Kaliumpermanganat bei erhöhte Temperatur.

Die Oxydation geschah, indem zu Chinolin, das etwa in de 40fachen Menge Wassers vertheilt war, unter Erwärmen a Wasserbad nach und nach eine gesättigte Lösung von Kalium permanganat zufloss. Die Entfärbung, am Anfang träge, wurd bald rascher und verlangsamte erst ganz auffällig, als auf 10 Th Chinolin etwa 87 Thle. des übermangansauren Kalis in Acti kamen. Die Gleichung

$$C_9H_7N + O_9 = C_7H_5NO_4 + 3CO_2 + H_2O$$

würde 75 Thle. erfordern.

Die vom Manganniederschlage durch Auskochen, Filtri und Pressen getrennte Flüssigkeit ist schwach gelb gefärbt, w aber nach vorhergehender Neutralisation mit Salpetersäure e gedampft, merklich dunkler. Ammoniak enthält sie nur in Spure

[1] Beträchtliche Mengen desselben entstehen, wenn der Zufluss Chamäleonlösung, besonders solcher, die heiss gesättigt ist, zu rasch sich geht, unter lebhaftem Kochen der Flüssigkeit. Die Ausbeute Chinolinsäure ist dann auch ziemlich gering. Wird jedoch nur mit 3 Pro Permanganat gearbeitet, so ist der Verbrauch desselben wenig grösser die Theorie erfordert und auch die Ausbeute sehr zufriedenstellend.

Silbernitrat fällt einen in der Kälte gallertartigen, in der Hitze krystallinisch werdenden Niederschlag, der immer und schon nach Kurzem nachdunkelt und nach dem Auswaschen in kochendem Wasser vertheilt und mit Schwefelwasserstoff unter Vermeidung längeren, als gerade nothwendigen Durchleitens zersetzt wird. Es resultirt so eine gelbbraune Flüssigkeit, die nach dem Concentriren und Erkalten gelbliche Krusten einer Säure ansetzt, die vermittelst Thierkohle wiederholt aus Wasser umkrystallisirt weisse, körnige Krystalle darstellt, die selten einzeln angeordnet, in der Regel zu Krusten verwachsen sind.

Sie ist identisch mit der Chinolinsäure von Hoogewerff und van Dorp; [1] sie sintert unter Braunfärbung und merklicher Gasentwicklung bei 190—195°, schmilzt mitunter auch bei dieser Temperatur, um gegen 200° dann wieder fest zu werden, und verflüssigt sich schliesslich, resp. das zweitemal bei 231°. Die Säure zeigt dieselbe Löslichkeit in Wasser und dasselbe Verhalten gegen Kupferacetat wie die von den zwei genannten Chemikern aus Cinchoninchinolin und aus Steinkohlentheer gewonnene Säure.

Sie krystallisirt wasserfrei und ergab bei der Analyse:

1. 0·2402 Grm. lieferten 0·4386 Grm. CO_2 und 0·0627 Grm. H_2O
2. 0·3052 „ „ 25·5 Cbcm N bei 27° C. und 740 Mm.

	Berechnet für $C_7H_5NO_3$	Gefunden 1	Gefunden 2
C	50·29	49·79	—
H	2·99	2·90	—
N	8·38	—	8·93

Mit Rücksicht auf den Umstand, dass Hoogewerff und van Dorp die Chinolinsäure früher erhielten als ich, habe ich, um der ausführlichen Charakterisirung seitens der zwei Chemiker nicht vorzugreifen, die Säure hauptsächlich nur so weit untersucht, als es die Verfolgung anderer Ziele erforderte.

Neutrales Kaliumsalz. Die mit Ätzkali abgesättigte Säurelösung dunstet über Schwefelsäure zu einer aus feinen, weissen

[1] Liebig's Ann. 204, 84.

Nädelchen bestehenden Masse ein, die in Wasser äusserst leicht löslich ist und aus diesem der Hauptmenge nach schon durch Zusatz von wenig Alkohol in Form eines Öles fällt, das erst mit fortschreitender Concentration krystallinisch erstarrt. In absolutem Alkohol löst sich das Salz so gut wie nicht. Es krystallisirt mit 2 Mol. H_2O, von denen das eine schon bei 120°, das andere aber erst bei 210° entweicht, worauf bei 230° theilweise Zersetzung (Pyridingeruch) eintritt.

Zur Analyse wurde sorgfältig auf Thonplatten, dann zwischen Papier getrocknete Substanz benützt.

1. 0·3815 Grm. verlor bis 120° getrocknet 0·0235 Grm. H_2O und lieferte 0·2387 Grm. K_2SO_4.
2. 0·3869 Grm. verlor bis 210° getrocknet 0·0507 Grm. H_2O und lieferte 0·2338 Grm. K_2SO_4.

Berechnet für $C_7H_3K_2NO_4 + 2H_2O$		Gefunden 1	Gefunden 2
K_2	28·01	28·08	27·47
$1H_2O$	6·44	6·16	—
$2H_2O$	12·89	—	13·10

Saures Kalisalz. Dieses wurde auf zwei Arten dargestellt. Das eine Mal durch Zusammenbringen der berechneten Menge Säure und titrirter Kalilauge. Auf Zusatz von nicht ganz dem gleichen Volum Alkohol zur warmen concentrirten Salzlösung scheiden sich während dem Erkalten hübsche, glänzende Prismen ab, die in verdünntem Alkohol sehr schwer, fast unlöslich in absolutem sind. Sie lösen sich sehr leicht in Wasser und krystallisiren aus demselben in grossen rhombischen Tafeln, die meist übereinander geschoben sind. In beiden Formen enthält das Salz 2 Mol. Krystallwasser, die es beim Trocknen auf 100—110° vollständig verliert, und beim Stehen an freier Luft dann nicht wieder anzieht. Höher erhitzt, bleibt es bis 200° nahezu unverändert, von wo ab Kohlensäure und ein geringes Sublimat von Nicotinsäure entweichen, bis bei 230° der Trockenverlust dem der Gleichung

$$C_7H_4KNO_4 = CO_2 + C_6H_4KNO_2$$

sprechenden sehr nahe kommt, wornach auch die Trockensub- nz nahezu nur nicotinsaures Kalium ist. Bei Anwendung grösserer agen (1—2 Grm.) muss auf 230—240° erhitzt werden. Unter ativ sehr geringer Bräunung vollzieht sich obige Reaction, und ält man auf diese Weise weit leichter reine Nicotinsäure, als rch Erhitzen der Chinolinsäure für sich.

Das Auftreten freier Nicotinsäure erklärt sich am einfachsten durch, dass analog dem Verhalten der sauren Oxalate, Succinate t., ein Theil des Chinolinsalzes in Neutralsalz und freie inolins. zerfällt, die gleich wieder unter Kohlensäureabspaltung e Monocarbonsäure liefert. Dadurch würde auch erklärt werden, rum auch nach vollständiger Beendigung der Gasentwicklung e schwach alkalisch reagirende Schmelze stets einen kleinen heil an chinolinsaurem Salz enthält.

Die Analyse des sorgfältig von der Mutterlauge befreiten lzes ergab:

1. 0·4017 Grm. bis 110° getrocknet, verloren 0·0609 Grm. H_2O
2. 0·3560 „ „ „ „ „ 0·0539 „ „

	Berechnet für $C_7H_4KNO_4 + 2H_2O$	Gefunden 1	Gefunden 2
$2H_2O$	14·93	14·95	14·86

1. 0·3462 Trockensubstanz gab 0·1471 Grm. K_2SO_4
2. 0·3642 „ „ 0·1553 „ „

	Berechnet für $C_7H_4KNO_4$	Gefunden 1	Gefunden 2
K	19·06	19·07	19·13

Herr Prof. v. Lang hatte die Güte, das aus Wasser krystal- te Salz zu messen und mir hierüber mitzutheilen:

Krystallsystem: triklinisch; beobachtete Flächen: (001) (010) (100) (110).

Normalenwinkel: 010·001 = 73° 50′
100·010 = 69° 40′
100·001 = 56° 0′

Die Krystalle sind tafelförmig durch das Vorherrschen d Fläche (010).

Ein zweites saures Kalisalz suchte ich derart zu gewinn dass das saure Barytsalz mit Ätzkali vorerst neutralisirt und da rasch mit Schwefelsäure der Baryt ausgefällt wurde. Wur weiter ebenso wie oben verfahren, entstand auf Alkoholzus eine Krystallisation mit nur 9·9 Proc. Krystallwasser, ein zwei Mal, als das saure Barytsalz nicht wie im ersten Falle erst a dem normalen, sondern durch directes Zufügen von 1 Mol. Ba(OH zu 2 Mol. Säuren entstand, eine andere mit nur 2·3 Proc. Wass erhalten.

Das in letzterem Falle erhaltene Salz zeigte aber bei erhöht Temperatur keinerlei Unterschied von dem erst beschriebene krystallisirte in wenig Wasser gelöst bei freiwilliger Verdunstu wieder mit 2 Mol. H_2O in Tafeln, die nach Prof. v. Lang's B stimmungen die vorerwähnten Formen besitzen, andererse konnte durch Alkoholzusatz auch aus dem durch directe Sättigu erhaltenen Salz eine Krystallisation mit 5·3 Proc. Wasser erhalt werden, so dass es überhaupt fraglich ist, ob mehr — basisc Säuren mit Carboxylgruppen von ungleicher Benachbarung v schiedene existenzfähige saure Salze zu bilden im Stande sin und daher meine Hoffnung, aus einem eventuellen zweiten saur Salze zu der der Chinolinsäure zweitcorrespondirenden Monoc bonsäure zu gelangen, schon aus diesem Grunde vergeblich se musste.

In letzterer Beziehung sei noch erwähnt, dass der Versu durch trockene Destillation das aus dem sauren Kalisalze dar stellte Kaliumammonsalz das Nitril jener zu erlangen u tiefgehender Zersetzung geringe Mengen eines öligen d Pyridin ähnlich riechenden Destillates liefert, das mit Kalila gekocht, unter Ammoniakentwicklung und entsprechend weit Behandlung wieder nur Nicotinsäure (Schmelzpunkt 23 lieferte.

Neutrales Barytsalz. Dieses fiel bei einem der früh Versuche aus der Lösung des Baryumkaliumsalzes theilw schon bei grosser Verdünnung (circa 1·500) in der Kälte her der Rest beim Einengen der Mutterlauge. Es stellt weisse, kör Krystalle dar.

0·4046 Grm. bis 220° getrocknet, gaben 0·0225 Grm. H_2O und 0·2941 Grm. $BaSO_4$

	Berechnet für $C_7H_3BaNO_4 + H_2O$	Gefunden
Ba......	42·80	42·73
H_2O	5·62	5·85

Bei höherem Trocknen verliert es noch immer an Gewicht (bis 260° im Ganzen 0·0237) ohne merklich nach Pyridin zu riechen, so dass auch bei diesem Salz für den Wassergehalt die übrigen Bestimmungen massgebender sind, als die Trocknung, wie ich es schon bei den Salzen der Tricarbonsäure des Pyridins [1] beobachten konnte.

Das **neutrale Silbersalz** $C_7H_3Ag_2NO_4$ wird weiter unten beschrieben werden, es entsteht, vermischt mit wenig saurem Salz, schon bei Zusatz von Silbernitrat zur Lösung der freien Säure.

Wenn chinolinsaurer Kalk oder andere Salze mit überschüssigem Ätzkalk erhitzt werden, erhält man (etwa 30 Proc. von dem ursprünglich verwendeten Chinolin) ein öliges Destillat, das zur Hälfte aus Pyridin, zur andern aus einer hochsiedenden Substanz, wahrscheinlich Dipyridin, besteht.

Lepidine.

Nachdem sich herausgestellt hatte, dass Amido- und Nitrobenzol in so glatter Weise in Chinolin überführbar sind, lag nichts näher, als die Reaction mit noch weiter substituirten Benzolabkömmlingen und zunächst mit den Toluidinen und Nitrotoluolen zu versuchen. In der That entstehen aus den leichter zugänglichen —*o*- und —*p*-Derivaten Basen, die isomer mit dem Lepidin sind; das schwer darstellbare —*m*-Amido, resp. Nitrotoluol wird demnächst gleichfalls in Untersuchung gezogen werden.

Die zwei methylirten Chinoline sollen als Toluchinoline beschrieben werden, um in der Bezeichnung mit dem von Graebe erhaltenen Anthrachinolin und mit dem später noch zu erwähnenden Naphtochinolin in Übereinstimmung zu stehen. Dadurch

[1] Wien. Akad. Ber.

werden sie ferner präcis als im Benzolkern substituirtes Chinolin hingestellt und von den isomeren Verbindungen unterschieden, deren Methylgruppe im Pyridinkern sitzt. Für letztere den Collectivnamen Lepidin im engeren Sinne ausschliesslich zu gebrauchen empfiehlt sich um so mehr, als der bisher unter demselben Namen aus dem Chinonin gewonnene Körper zweifellos zu ihnen gehört. Consequent ist es dann auch, das Chinolin als Benzochinolin zu bezeichnen, und unter dem Namen Chinoline alle jene Körper zu begreifen, die durch Aneinanderlagerung eines Pyridinkernes mit einem um 2CH verminderten aromatischen Körper entstanden gedacht werden können. Die Darstellung der zwei Lepidine, resp. Toluchinoline ist ganz analog der des Benzochinolins.

Die Rohmaterialien wurden durch Destillation, resp. durch Überführung in das Oxalat und Krystallisation desselben aus Wasser gereinigt. [1] Das Orthonitrotoluol etwa 12 mal fractionirt ging nahezu innerhalb eines Grades über, enthielt aber wahrscheinlich noch Spuren der Paraverbindung und gelang es mir ebenso wenig wie Widemann [2] durch Oxydationsmittel eine vollkommene Zerstörung der letzteren zu erzielen.

In beiden Fällen wurde 25 Grm. Nitrotoluol, 38 Grm. Toluidin mit 120 Grm. Glycerin und 100 Grm. engl. Schwefelsäure erhitzt, die Erscheinungen sind hier ganz so wie bei Darstellung des Chinolins, nur ist das Sieden etwas weniger stürmisch. Es beginnt auch hier zwischen 150—160° und sinkt die Temperatur allmälig auf 140°. Die Reactionsmasse hat Farbe und Geruch wie die der Chinolinbereitung und wird durch Verdünnen mit Wasser, Abblasen mit Wasserdampf zur Entfernung der unzersetzten Nitroverbindungen, alkalisch machen und Übertreiben der entstandenen Basen mit Wasserdampf auch weiter so behandelt, wie es früher angegeben wurde. Auch hier bleibt in der Blase ein Harz zurück, das dem Chinolinharz vollkommen gleicht.

---

[1] Die von E. und O. Fischer, Ber. Ber. f. 1880, 2205 gemachte Beobachtung, dass das nach dem Bindschaedler'schen Verfahren gereinigte Orthotoluidin noch immer Paratoluidin enthalte, das nur auf dem Wege des Acetderivates entfernt werden könne, war bei Anstellung dieser Versuche noch nicht bekannt, dürfte übrigens hier kaum irgendwie ins Gewicht fallen.

[2] Liebig's Ann. 193, 202.

Bei der Darstellung des Orthotoluchinolins wurde das nicht angegriffene Nitrotoluol aufgefangen und so ein Fünftel des zur Reaction gebrachten wiedergewonnen.

Die weitere Reinigung der Basen geschah durch Trocknen mit Ätzkali und wiederholte Rectification und zeigten sich hier ganz ähnliche Erscheinungen wie sie beim Chinolin ausführlich beschrieben wurden.

Die Ausbeute betrug bei der Orthoverbindung aus 50 Grm. Nitro- und 76 Grm. Amidotoluol 72 Grm. des Toluchinolins, dieselben Mengen der Paraderivate lieferten 74 des entsprechenden Methylchinolins, d. i. 45 Proc., resp. 47 Proc. der Ausbeute, die nach der Gleichung

$$2C_7H_9N + C_7H_7NO_2 + 3C_3H_8O_3 = 3C_{10}H_9N + 11H_2O$$

zu erwarten wäre. [1]

Orthotoluchinolin ist eine nur schwach gelbliche Flüssigkeit, schwerer wie Wasser, leicht mischbar mit Äther und Alkohol, sehr schwer löslich in Wasser, stark lichtbrechend und ohne Einwirkung auf Lakmuspapier. Vollständig rein, färbt es sich auch bei Lichtzutritt nur sehr allmälig dunkler, bräunt sich aber unter Atmosphärendruck stets bei längerem Erhitzen. Sein Geschmack ist brennend, der Geruch dem des Chinolins zum Verwechseln ähnlich, und in heissem Wasserdampf vertheilt, riecht es ebenso stechend wie Chinolin.

Der Siedepunkt wurde bei 751·3 Mm. Druck mit 247·3 bis 248·3 corr. gefunden.

Das specifische Gewicht bezogen auf Wasser derselben Temperatur ist:

bei 0°: 1·0852; bei 20°: 1·0734; bei 50°: 1·0586.

In einer Mischung von fester Kohlensäure und Äther, in der Chinolin vollständig zu weissen Krystallen erstarrte, zeigte es nicht die Spur von Krystallisation, ebenso nicht als die Temperatur durch rasche Verdunstung im Vacuum noch erniedrigt wurde.

---

[1] Wird für das —o-Chinolin die unangegriffene Menge von Nitrotoluol in Abrechnung gebracht, steigt die Ausbeute auf 54 Procent.

Die Analyse lieferte:

1. 0·2727 Grm. gaben 0·8362 Grm. CO_2 und 0·1534 Grm. H_2O
2. 0·2780 „ „ 23 Cbcm N, bei 17° und 758 Mm.

	Berechnet für $C_{10}H_9N$	Gefunden 1	Gefunden 2
C	83·92	83·63	—
H	6·29	6·25	—
N	9·79	—	9·59

Salze des Orthotoluchinolins.

Platindoppelverbindung. Die Lösung der freien Base in viel verdünnter kochender Salzsäure mit Platinchlorid versetzt, lässt gut ausgebildete Prismen von dunkelorangegelber Farbe fallen, die besser ausgebildet und in Wasser, sowie verdünnter Salzsäure weit schwieriger löslich sind als das Chinolindoppelsalz.

Es enthält 2 Mol. Krystallwasser, die schon bei 100° grösstentheils entweichen.

0·3830 Grm. gab bis 110° getrocknet 0·0193 Grm. H_2O und lieferte 0·1015 Grm. Pt.

	Berechnet für $(C_{10}H_9N)_2H_2Cl_6Pt + 2H_2O$	Gefunden
Pt	26·93	26·50
$2H_2O$	4·90	5·02

Saures schwefelsaures —o— Toluchinolin. Wenn, wie es für das analog zusammengesetzte Chinolinsalz angegeben wurde, die mit doppeltem Volumen Alkohol vermischte Base mit concentrirter Schwefelsäure versetzt wird, fällt jeder Tropfen weisse Krystalle; wird Säure so lange zugesetzt, bis die anfänglich gebildete Gelbfärbung verschwunden ist, gesteht das Ganze schon in der Hitze zu einem dichten Krystallbrei schneeweisser Prismen, die in Alkohol sehr schwer, leicht in Wasser löslich sind. Dieselben mit Alkohol gewaschen, auf Thonplatten dann zwischen Papier sorgfältig getrocknet, sind wasserfrei.

0·4579 Grm. gaben 0·4439 Grm. $BaSO_4$

	Berechnet für $C_{10}H_9N\ H_2SO_4$	Gefunden
H_2SO_4	40·66	40·76

Salzsaures —o— Toluchinolin. Die alkoholische Lösung der Base mit Salzsäure vermischt, scheidet nichts Festes ab, auch nicht wenn man Äther zufügt. Beim Verdunsten über Schwefelsäure bildet die ganz dicke Lösung grosse, sehr gut ausgebildete, durchsichtige Prismen, die zum Theil strahlig angeordnet sind. Dies Salz ist krystallwasserhältig und kann nur über Schwefelsäure getrocknet werden, da es sich bei erhöhter Temperatur merklich verflüchtigt. Bei nicht ganz zweistündigem Erhitzen auf 105° verflüchtigte sich in einem Versuche weit über die Hälfte ohne erhebliche Zersetzung.

0·4616 Grm. verloren nach 70 Stunden 0·0738 Grm. H_2O und lieferten 0·2276 Grm. AgCl und 0·0008 Grm. Ag.

	Berechnet für $C_{10}H_9N.HCl + 2^1/_2H_2O$	Gefunden
Cl	15·81	15·64
$2^1/_2H_2O$	20·05	20·40

Pikrinsäureverbindung. Eine heisse weingeistige Lösung des —o-Toluchinolins mit einer kalt gesättigten kochenden Lösung von Pikrinsäure in Alkohol versetzt, lässt nach und nach kleine, intensiv schwefelgelbe Blättchen fallen, die sich während dem Erkalten reichlich vermehren. Sie sind in Äther und Benzol noch schwieriger löslich als in Alkohol. Ihrer Schwerlöslichkeit halber lassen sie sich mit letzterem leicht und vollständig auswaschen.

Der Schmelzpunkt liegt bei 200°.

0·2753 gaben 37·5 Cbcm. N bei 17·8° und 746·6 Mm.

	Berechnet für $C_{10}H_9N.C_6H_2(OH)(NO_2)_3$	Gefunden
N	15·05	15·48

Methyljodverbindung. —o-Toluchinolin mit etwas überschüssigem Methyljodid im verschlossenen Rohr mehrere Stunden auf Wasserbadwärme erhitzt, ist nach dem Erkalten in gelbe

Krystalle verwandelt, die durch Äther, der sie sehr schwer löst, leicht von einer anhängenden röthlich gefärbten Verunreinigung befreit werden können. Dieselben sind leicht in Alkohol, verdünntem Weingeist, sowie in Wasser löslich. Ätzkali zersetzt dieselben schon in der Kälte unter Abscheidung eines nahezu farblosen Öles. Wahrscheinlich geht hier ein ähnlicher Process vor sich, wie ich ihn beim Chinolinmethyljodid beobachtete, und der von Claus u. Himmelmann[1] beim Chinolinbenzylchlorid, von Claus u. A. bei den Chinaolkaloiden näher studirt wurde, wonach das Öl ein im Pyridinkern methylirtes —o— Toluchinolin sein könnte.

0·2608 Grm. bei 100° getrockneter Substanz gaben 0·2117 Grm. AgJ.

	Berechnet für $C_{10}H_9NCH_3J$	Gefunden
J	44·56	44·56

Oxydation des —o— Toluchinolins. Nur Kaliumpermanganat wirkt verhältnissmässig energisch auf die Base ein. Die Oxydation geschah ähnlich wie beim Chinolin, doch nur mit einer dreiprocentigen Chamäleonlösung und sehr vorsichtig, so dass auch für 5 Grm. der Base statt der berechneten 1350 CC. nicht mehr wie 1380 CC. bis zum schliesslichen langsamen Verschwinden der Rothfärbung nothwendig waren. Als so viel des oxydirenden Agens zugeflossen war, als die Bildung einer Chinolinmonocarbonsäure erfordert, hatte sich das Toluchinolin nur sehr wenig verringert, so dass die intermediäre Entstehung jener nicht anzunehmen ist.

Die Oxydationsflüssigkeit roch noch deutlich nach unzersetzter Base, durch Destillation im Wasserdampfstrome wurden aber nur wenige Tröpfchen derselben erhalten.

Die vom Manganniederschlage getrennte Lösung in derselben Art verarbeitet, wie es für Darstellung der Chinolinsäure beschrieben ist, lieferte schliesslich über 2 Grm. einer Säure, in deren Mutterlauge Oxalsäure nachgewiesen werden konnte.

Die ersterhaltene zeigte im reinen Zustande in Schmelzpunkt, Form und Löslichkeit keinerlei Unterschied mit der Chinolinsäure; das durch Fällen der mit Ammoniak abgesättigten

[1] Ber. Ber. f. 1880, 2045.

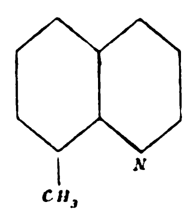
Säurelösung mit Silbernitrat gallertartig ausfallende Silbersalz, das bald krystallinisch wird, gab überdies stimmende Zahlen.

Es ist wasserfrei, und lässt sich ohne Zersetzung über 110° trocknen. Stärker erhitzt, zersetzt es sich unter starkem Aufblähen zu schwarzen, theeartigen Blättern.

0·3205 Grm. gaben 0·1812 Grm. Ag.

	Berechnet für $C_7H_3Ag_2NO_4$	Gefunden
Ag	56·69	56·54

Die Überführung des —o— Toluchinolins in die Chinolinsäure, d. i. eine Dicarbonpyridinsäure beweist, dass auch bei dessen Bildung die Schliessung des zweiten Ringes in der Orthostellung erfolgt, seine Structur desshalb nur durch die Formel



ausdrückbar ist. Die Bezeichnung als Orthoderivat hat nicht nur in Folge seiner Entstehung aus Orthoderivaten der Benzolreihe Berechtigung, sie ist auch sonst vollkommen klar und ungezwungen, wenn man das dem N zunächst liegende C-Atom mit jenem als Basis nimmt und von diesem Atompaare ausgehend, in üblicher Weise die rechts und links liegenden Orte in der gewöhnlichen Reihenfolge benennt.

Paratoluchinolin.

Das aus —p— Nitro- und —p— Amidotoluol entstehende Methylchinolin stellt frisch destillirt eine gleichfalls nur schwach gelblich gefärbte, lichtbrechende Flüssigkeit dar, die gegen Licht empfindlicher ist als die Orthoverbindung oder das Benzochinolin und darum schon nach kurzem Stehen röthlichbraun wird. In

Löslichkeitsverhältnissen und sonstigen Eigenschaften schliesst sie sich vollständig den für die genannten zwei Körper beschriebenen an. Der Geruch des —p— Toluchinolins erinnert gleichzeitig an den des Chinolins und den des Paratoluidins, ist, besonders in verdünntem Zustande, sehr angenehm und dem des spanischen Flieders *(Syringa v.)* nicht unähnlich. Durch Abkühlen konnte sie ebenso wenig wie das —o— Toluchinolin krystallisirt erhalten werden. Der Siedepunkt wurde bei 745 Mm. Druck mit 257·4 bis 258·6' ermittelt. Das specifische Gewicht, bezogen auf Wasser derselben Temperaturen, ist:

bei 0° 1,0815, bei 20° 1,0681, bei 50° 1,0560,

also stets geringer als das der Orthoverbindung, mit dem es darin übereinstimmt, dass ihre Eigengewichte kleiner sind wie die des Chinolins.

Die Analyse bestätigte die nach der Entstehungsart wahrscheinliche Zusammensetzung:

1. 0·2280 Grm. gaben 0·7022 Grm. und 0·1279 Grm. H_2O.
2. 0·3832 „ „ 35·0 CC. N bei 22° und 745·2 Mm.

	Berechnet für $C_{10}H_9N$	Gefunden 1	Gefunden 2
C	83·92	83·99	—
H	6·29	6·19	—
N	9·79	—	10·16

Das Paratoluchinolin liefert eine Reihe gut charakterisirter Verbindungen, von denen hauptsächlich diejenigen eingehender untersucht worden sind, die den bei dem —o— Derivat beschriebenen verwandt sind.

Platindoppelsalz. Durch Fällung in der Kälte erzeugt, erscheint es in Form eines schwach gelblichgefärbten krystallinischen Niederschlages, aus verdünnter Salzsäure krystallisirt, in der es, ebenso wie in Wasser, auch in der Kochhitze sehr schwer löslich ist, schiesst es in lichtgelben, haarfeinen Prismen an, denen nur wenige etwas deutlicher ausgebildete prismatische Krystalle mit einem Stich ins Bräunliche beigemischt sind. Auch diese Platindoppelverbindung enthält 2 Mol. Krystallwasser, die beim Trocknen bei 120° vollständig entweichen.

1. 0·4542 Grm. verloren 0·0227 Grm. H_2O und hinterliessen 0·1222 Grm. Pt.
2. 0·3963 Grm. verloren 0·0169 Grm. H_2O und hinterliessen 0·1067 Grm. Pt.

Berechnet für $(C_{10}H_9N)_2H_2ClbPt+2H_2O$		Gefunden 1	Gefunden 2
Pt	26·93	26·90	26·92
H_2O	4·90	4·99	4·37

Saures Sulfat. Die Darstellung dieses gut krystallisirenden Salzes geschah wie bei der Orthoverbindung ersichtlich ist; es erfolgte aber nicht augenblicklich Krystallisation, die erst bei mehrstündigem Stehen über Schwefelsäure eintrat, wobei weisse Prismen, ganz ähnlich dem Orthosalz in reichlicher Menge anschossen. Auch das Sulfat des —p— Toluchinolins ist in Alkohol schwer, äusserst leicht in Wasser löslich.

Das sorgfältig zwischen Fliesspapier getrocknete Salz enthält Krystallwasser, das bei längerem Stehen (7 Tage) über Schwefelsäure entweicht.

0·4296 Grm. verloren 0·0306 Grm. und gaben 0·3896 Grm. $BaSO_4$.

Berechnet für $C_{10}H_9N.H_2SO_4+H_2O$		Gefunden
H_2SO_4	37·83	38·14
H_2O	6·95	7·12

Salzsaures —p— Toluchinolin. Unter denselben Verhältnissen wie beim Orthosalz dargestellt, dunstet seine Lösung zu feinen, verfilzten Nadeln ein, die nur schwierig von der anhängenden dicken Mutterlauge befreit werden können. Sie sind leicht löslich in Wasser und Alkohol. Im Exsiccator werden sie weiss, und nehmen beim darauffolgenden Trocknen im Wasserbade erheblich an Gewicht ab, wobei sie bräunlichgelb werden und etwas zusammenbacken.

0·3210 Grm. bei 100° bis zum constanten Gewicht getrocknet, verloren 0·0177 Grm.

Berechnet für $C_{10}H_9NHCl+\frac{1}{2}H_2O$	Gefunden
4·77	5·51

0·3033 Grm. Trockensubstanz gaben 0·2393 Grm. ClAg und 0·00179 Ag.

	Berechnet für $C_{10}H_9N.HCl$	Gefunden
ClH	20·39	20·17

Pikrinsäureverbindung. Als so verfahren wurde, wie es für die Orthoverbindung beschrieben ist, fiel ein Pulver von schön gelber Farbe aus, das beim Erkalten sich nicht mehr vermehrte. Die Doppelverbindung ist in kochendem Alkohol noch schwerer, wie die des —o— Toluchinolins löslich, von Äther und Benzol wird sie ebenso spärlich aufgenommen. Schmelzpunkt 229°.

0·2681 Grm. bei 100° getrockneter Substanz gaben 36 CC. N bei 17° und 740·9 Mm.

Berechnet für $C_{10}H_9N.C_6H_3N_3O_7$	Gefunden
15·05	15·21

Jodmethylverbindung. Die Darstellung dieses Körpers wurde nach einem bisher nicht beschriebenen Verfahren und zwar in der Art vorgenommen, dass eine ätherische Lösung der Base mit Jodmethyl in einem Rohre verschlossen wurde. Die anfänglich kaum gefärbte Flüssigkeit färbt sich bald gelblich und es scheiden sich schwachgelbliche feine Prismen ab, die nach und nach reichlicher ausfallen, nach eben 48stündigem Stehen sich aber nicht mehr vermehren. Durch Waschen mit Äther werden sie leicht rein erhalten. Diese Methode, die inzwischen Claus u. Mallmann [1] für die Darstellung des Jodmethylchinin's beschrieben haben, hat den Vortheil, dass die Bildung gefärbter Nebenproducte bei derselben fast ganz ausbleibt. Kalilauge zersetzt die Doppelverbindung, sowie die des —o— Toluchinolins, bei 100° getrocknet, färbt sie sich dunkler gelb ohne wesentlich an Gewicht zu verlieren.

[1] Ber. Ber. f. 1881, 76.

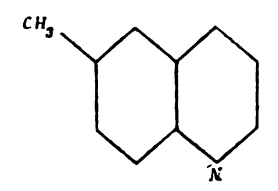
0·2544 Grm. bei 100° getrockneter Substanz lieferten 0·2060 Grm. JAg und 0·0024 Grm. Ag.

Berechnet für $C_{10}H_9N.CH_3J$	Gefunden
J....44·56	44·87

Oxydation des Paratoluchinolins. Wenn die Base mehrere Stunden mit Chromsäurelösung bei gleichzeitiger Anwesenheit von Schwefelsäure gekocht wird, bleibt die Hauptmasse derselben unverändert, und es sind nur geringe Mengen einer durch Silbernitrat fällbaren Säure nachweisbar, die überdies in zur weiteren Untersuchung wenig einladender Form auftritt.

Kaliumpermanganat wirkt etwas schwieriger, sonst aber ga so wie auf das Orthotoluchinolin ein und ist als Oxydationsproduct auch hier Chinolinsäure und zwar in reichlicher Ausbeute nachweisbar.

Im Zusammenhange mit dem vorstehend Erörterten ergibt sich für das Paratoluchinolin die folgende Lagerungsformel,



die auch die Zulässigkeit der näheren Bezeichnung als Paraderivat begründet.

α-Naphtochinolin.

Mit diesem Namen sei eine gut krystallisirbare Base bezeichnet, die aus α-Nitronaphtalin und α-Naphtylamin in der schon in drei Fällen illustrirten Weise entsteht.

Zuvor sei eine Bemerkung über die Rohmaterialien gestattet.

Das Naphtylamin aus dem Handelspräparate durch Destillation von färbenden Antheilen zu befreien, ist ziemlich umständlich und des bekannten Geruches halber nichts weniger wie angenehm. Weit rascher und bequemer erhält man ein reines

Präparat, wenn die höchstens einmal rectificirte Base in der etwa achtfachen Menge Alkohol gelöst, und dann etwas weniger als die für das Neutralsalz berechnete Menge concentrirter Schwefelsäure nach und nach zugesetzt wird.

Nach dem Erkalten erhält man durch Filtriren und Waschen mit Alkohol, endlich mit Wasser, und Absaugen auf porösen Platten ein Präparat, das vollständig weiss ist, wenn der Zutritt directen Lichtes während dem Trocknen vermieden wurde.

Das Mononitronaphtalin stellte ich in gewöhnlicher Weise, nur mit der Abänderung dar, dass Naphtalin in Kolben in Partien zu 50 Grm. mit bloss dem doppelten Gewichte concentrirter Salpetersäure übergossen und eben nur bis zum Auftreten rother Dämpfe erhitzt wurde. Wird es dann vom Feuer genommen, vollzieht sich die Reaction ruhig von selber und das nach vollständigem Erkalten mit viel Wasser ausgefällte Product besteht zur Gänze aus dem Mononitroderivate mit sehr geringen Mengen einer braunen Verunreinigung.

Die ersten Versuche zur Darstellung des Naphochinolins boten insoferne Schwierigkeiten, als bei kürzerem Erhitzen und geringerem Schwefelsäurezusatz viel unverändertes Nitronaphtalin, und, was für Isolirung der neuen Base weit unangenehmer ist, Naphtylamin nachweisbar ist, bei länger dauernden Operationen und mit mehr Schwefelsäure massenhaft nichtbasische Harze unter Verminderung der Ausbeute resultiren.

Am zweckmässigsten erwies sich, 14 Grm. Nitronaphtalin, 30 Grm. Naphtylaminsulfat, mit 80 Grm. Glycerin und 30 Grm. englischer Schwefelsäure durch 5—6 Stunden vor dem Rückflusskühler zu erhitzen, dessen Anbringung weniger desshalb nothwendig ist, um die ziemlich schwierig flüchtige Nitroverbindung, als vielmehr das entstandene Wasser im Kolben zu behalten, und damit eine schädliche Temperaturerhöhung zu vermeiden. Die Reaction beginnt zwischen 150—160 und verläuft sehr mässig, gegen Ende der Operation sinkt das Thermometer auf etwa 140°.

Die entstandene dicke Flüssigkeit, die nach genannter Zeit nur sehr wenig Nitronaphtalin enthält, hat Farbe und Geruch wie die bei der Darstellung von Chinolin und der Toluchinoline, scheidet auf Wasserzusatz aber weit mehr Harz ab.

Da das Naphtachinolin mit Wasserdämpfen nur sehr schwer flüchtig ist, muss bei seiner Isolirung anders verfahren werden als bei den anderen bisher beschriebenen Basen. Zweckmässig erwies sich, die vom abgeschiedenen Harz abgegossene Flüssigkeit mit Äther zu überschichten und unter Kühlung mit einem starken Wasserstrahl nach und nach Ätznatron bis zur deutlichen alkalischen Reaction zuzusetzen. Das in Freiheit gesetzte Naphtochinolin geht fast vollständig in Äther über und nur sehr geringe Mengen werden von einem gleichzeitig auftretenden, in Äther unlöslichen Harz mit niedergeschlagen. Ein nicht unbeträchtlicher Theil des letzteren wird durch das Naphtochinolin dafür aber in ätherischer Lösung gehalten, kann aber entfernt werden, wenn diese im Wasserbade abdestillirt, und der Destillationsrückstand in wenig überschüssiger, verdünnter Schwefelsäure gelöst wird. Die Hauptmasse des Harzes bleibt ungelöst und wird abfiltrirt, aus der Sulfatlösung die Base wieder in Freiheit gesetzt und in Äther aufgenommen.

Schliesslich wird sorgfältig mit Ätzkali getrocknet,[1] zuerst aus dem Wasserbade, dann über freiem Feuer destillirt. Nachdem Äther und Wasser entfernt sind, steigt das Thermometer rasch weit über 300 und geht dann ein farbloses, später ein immer dunkleres Öl über, das in der Regel nach einigem Stehen, u. z. immer schwieriger und unvollständiger erstarrt, je später es überdestillirt ist. Dies rührt von einem noch höher als das Naphtochinolin siedenden Körper her, der erst bei beginnender Rothgluth und unter sehr starker Zersetzung zu sieden beginnt, in Alkohol so gut wie nicht, leichter in Benzol löslich ist und bisher nicht näher untersucht werden konnte.

Zur weiteren Reinigung wird das rohe Naphtochinolin in etwa dem 8—10fachen Volumen Alkohol gelöst, die zur Bildung des sauren Sulfates nöthige Menge von concentrirter Schwefelsäure zugesetzt und die herausgefallene Krystallmasse durch Absaugen und Waschen mit Alkohol von der braunen Mutterlauge befreit. Die aus dem Salze mit Ammoniak abgeschiedene Base,

[1] Wenn mehr als Spuren von Wasser anwesend sind, ist die Destillation unmöglich, da unter heftigem Prasseln fast jedesmal Übersteigen eintritt und muss dann das Trocknen durch einen Strom trockenen Wasserstoffes beendigt werden.

die nun bald fest wird[1] neuerdings destillirt, geht dann vollständig farblos über und erstarrt sehr leicht. Die Ausbeute an Naphtochinolin ist etwa 25 Procent der theoretischen; nachdem auch bei Darstellung der Toluchinoline geringere Ausbeuten erzielt wurden, als bei der von Chinolin, scheint es, dass allgemein mit steigendem Moleculargewichte der Procentsatz sich erniedrigt.[2]

In reinem Zustande stellt das Naphtochinolin ein farbloses Öl dar, das besonders in kleinen Tröpfchen tagelang flüssig bleiben kann, augenblicklich aber erstarrt, wenn ein Stäubchen bereits krystallisirter Substanz zugebracht wird.

Es gesteht so zu prachtvollen, meist strahlig angeordneten, blendend weissen Prismen. Ziemlich gut ausgebildete Krystalle liefert die ätherische Lösung oder die in absolutem Alkohol und Benzol, verdünnter Alkohol scheidet es in Blättchen ab. Von Äther, Benzol und Alkohol wird es sehr leicht aufgenommen, ebenso auch von einer Mischung von gleichen Voluminas Wasser und Alkohol, Wasser allein nimmt nur Spuren desselben auf. Verdünnte Säuren lösen es leicht und vollständig.

Es ist nahezu geschmacklos und besitzt einen eigenthümlich aromatischen Geruch, der etwas dem des Naphtylamins ähnelt, schwächer und weniger ekelhaft wie dieser ist, mit der Zeit aber auch lästig wird.

Der Schmelzpunkt liegt bei 50°, der Siedepunkt etwas unterhalb dem des Quecksilbers und wurde vermittelst eines Luftthermometers bei 747 Mm. Druck mit 251° ermittelt, eine Zahl, die ich mit einiger Reserve mittheile, die aber der Wahrheit nicht allzuferne stehen wird.[3] Ich beabsichtige, den Versuch mit mehr Material zu wiederholen.

---

[1] Aus sehr verunreinigten Salzlösungen abgeschiedene Base erstarrt wochenlang nicht, auch wenn Krystalle derselben eingetragen werden.

[2] Einfacher und für die Ausbeute wahrscheinlich günstiger dürfte es sein, künftighin die durch die erste Fällung mit Ätzkali erhaltene Base. sammt dem ihr beigemischten Harz von Wasser möglichst zu befreien, aus eisernen Retorten zu destilliren und das Destillat im Wege des Sulfates zu reinigen.

[3] Einem freundlichen Rathe des Herrn Prof. v. Lang folgend, geschah obige Siedepunktsbestimmung in der Weise, dass ein etwa 6 Mm.

Oxydationsmittel verändern das Naphtochinolin nur schwierig. Kaliumpermanganat wirkt in der Kälte fast gar nicht, auch in der Hitze nur schwierig ein. Eisessigchromsäurelösung oxydirt auch nach längerem Kochen nur partiell; die erkaltete Flüssigkeit setzt Krystalle ab, die vorwiegend Naphtochinolinchromat sind, nebst einem in Benzol ziemlich leicht löslichen Körper, der in hübschen orangegelben Nädelchen krystallisirt und vielleicht ein Chinon ist. Gleichzeitig verschwindet ein Theil des Naphtochinolins und ist möglicherweise zu einer Chinolindicarbonsäure umgewandelt worden, Verhältnisse, die noch genauer untersucht werden sollen.

0·3159 Grm. Naphtochinolin gaben 21·3 CC. N von 17·8° und 744 Mm.

Berechnet für $C_{13}H_9N$	Gefunden
N....7·82	7·64

Platindoppelsalz. Dasselbe fällt auch aus der stark verdünnten, kochenden Lösung der Base in verdünnter Salzsäure in kaum mit freiem Auge erkennbaren lichtgelb gefärbten Prismen aus, die in Wasser und verdünnter Salzsäure noch weit schwieriger löslich sind, als die früher beschriebenen Doppelsalze.

Wie diese, enthält es 2 Mol. Wasser, die es bei 110° vollständig verliert.

0·3865 Grm. verloren 0·0173 Grm. H_2O und hinterliessen 0·0930 Grm. Pt.

---

weites Glasrohr auf der einen Seite geschlossen, auf der anderen eng ausgezogen wurde. In der Mitte des engeren Theiles brachte ich eine Marke an und konnte dann das Gefässvolum bis zur Marke, durch Füllen mit Hg und Wägen leicht ermittelt werden. Beim Versuch kam das entleerte Gefäss vermittelst eines einfach durchbohrten Pfropfens in den Hals des Fractionirkölbchens derart, dass der enge Theil nur so weit herausragte, dass noch an der Marke abgeschmolzen werden konnte. Als die Destillation einige Minuten im Gange war, wurde mit dem Gaslöthrohr an der markirten Stelle geschlossen, die Spitze unter Quecksilber geöffnet, nach dem Aufsteigen auf gleiches Volum gebracht und durch Wägung die eingetretene Quecksilbermasse ermittelt. Aus den gefundenen Zahlen lässt sich mit Hilfe der in gewöhnlicher Art beobachteten Daten, wie Druck und Temperatur, die Siedetemperatur berechnen.

Berechnet für $(C_{13}H_9N)_2H_2Cl_6Pt+2H_2O$	Gefunden
Pt....24·53	24·06
$_2H_2O$.. 4·46	4·47

Saures Naphtochinolinsulfat. Dieses schon erwähnte Salz krystallisirt in schwachgelblichen Prismen, die in Wasser äusserst leicht, schwer auch in kochendem Alkohol löslich sind, aus welchem sie beim Erkalten mit unveränderter Farbe anschiessen. Es ist wasserfrei und kann bis 160° unverändert erhitzt werden.

0·4022 Grm. gaben 0·3398 Grm. $BaSO_4$

Berechnet für $C_{13}H_9N.H_2SO_4$	Gefunden
35·38	35·53

Das **salzsaure Naphtochinolin** dunstet aus wässeriger Lösung zu einem Aggregat feiner schwachgelblicher Nädelchen ein, die in absolutem Alkohol nicht, sehr leicht in verdünntem und in Wasser löslich sind.

Die **Methyljodverbindung** ist jedenfalls darstellbar, von mir aber rein noch nicht erhalten worden, da bei verschiedenen Versuchen die vollständige Überführung der Base in die Doppelverbindung nicht gelang.

Pikrinsäureverbindung. Sie unterscheidet sich in Farbe und sonstigen Eigenschaften so gut wie nicht von den vorerwähnten Verbindungen und bildet mikroskopische Prismen. Die bei 100° getrocknete Substanz lieferte bei der Analyse:

0·2243 Grm. gaben 0·4662 Grm. CO_2 und 0·0643 Grm. H_2O.

Berechnet für $C_{13}H_9N.C_6H_2(NO_2)_3OH$	Gefunden
C....55·88	56·68
H.... 2·94	3·14

Die Structur des Naphtochinolins ist nicht in dem Grade sichergestellt, wie die der vorerwähnten Basen, da die Oxydationsproducte desselben noch nicht experimentell festgestellt wurden. Mit einiger Sicherheit lässt sich nach den vorliegenden Analogien

aber der Schluss ziehen, dass seine Bildung gerade so erfolgt, wie die des Chinolins und seiner Homologen und seine Constitution durch folgende Formel daher ausgedrückt werden kann. Der Einfachheit halber ist es zweckwässig, diese Base als α-Derivat und daher mit dem Namen α-Naphtochinolin zu bezeichnen.

N

Schlussbemerkungen.

Die Siedepunkte der beschriebenen Körper zeigen mit den Siedepunkten der Substanzen, aus denen sie ableitbar sind, eine Regelmässigkeit, die wohl mehr als zufällig ist und die folgende Tabelle erkennen lässt.

Siedepunkte.

	Benzolreihe	Toluolreihe		Naphtalin-reihe	Anthracen-reihe
		—o—	—p—		
Kohlenwasserstoff	81·5	111		218	360
Nitrokörper	205	223	237	304	—
Amidoderivat	184	199	198	310	—
Chinolinderivat	237	248	258	351	446

Die Differenzen zwischen den Zahlen der letzten Reihe mit denen der voranstehenden zeigen eine gewisse Übereinstimmung, die am augenfälligsten in der dritten Reihe sich zeigt, indem die Siedepunktsdifferenz zwischen den Monamidoderivaten, und den zugehörigen Chinolinkörpern zwischen 50 und 60 beträgt und nur in der Naphtalinreihe auf 41 fällt.

Ebenso ergibt sich die Übereinstimmung zwischen der Chinolinreihe und der des Benzols, dass —p— Derivate höher sieden, wie die —o— Verbindungen.

Über die Constitution des Chinolins und demnach auch seiner Derivate ist in neuester Zeit eine Controverse aufgetaucht, in die ich hier um so weniger eintreten kann, als die in vorliegender Untersuchung mitgetheilten Thatsachen den brennenden Punkt nur nebensächlich berühren. Es scheint mir aber aus der Übereinstimmung im Bildungsverhältnisse der beschriebenen Körper ein neuer schwerwiegender Beleg für die Körner'sche Hypothese zu erwachsen und andererseits das ganze Capitel noch zu wenig erforscht zu sein, um mit Sicherheit behaupten zu können, dass die beobachteten eigenartigen Verhältnisse nicht einfach Ausfluss der durch die Körner'sche Formel ausgedrückten eigenartigen Constitution des Chinolins sind. Kurz nach Veröffentlichung meiner vorläufigen Mittheilung über die Synthese des Chinolins ist von W. König's[1] die Anschauung entwickelt worden, dass in erster Phase Acroleïnanilin gebildet, dieses dann durch den Sauerstoff des Nitrobenzols zu Chinolin oxydirt wird, worauf der Rest des seines Sauerstoffes beraubten Nitrobenzols mit dem Acroleïn unter Wasserabspaltung ein weiteres Molekül Chinolin liefert.

Für diese Anschauung scheint mir vor Allem die Thatsache zu sprechen, dass der Beginn der Reaction in allen bisher beobachteten Fällen bei 150—160° eintritt, also jener Temperatur, bei der die unbedingt in erster Phase gebildete Glycerinschwefelsäure unter Acroleïnbildung zerfallen dürfte, ferner, dass der Acroleïngeruch nie wahrnehmbar ist, wenn die Reactionsmasse Anilin enthält, sehr deutlich aber ist, wenn nur Nitrobenzol mit Glycerin und Schwefelsäure erhitzt wird.

Immerhin bleibt es auffallend, dass das Acroleïn bei Anwesenheit von Anilin im Momente seiner Entstehung vollständig zum Aufbaue von Chinolinderivaten verbraucht, respective polymerisirt wird.

Für die, wie es scheint allgemein anwendbare Methode zur Synthese von Chinolinabkömmlingen ist es von Wichtigkeit, dass Versuche mit nicht correspondirenden Amido- und Nitrokörpern mit Bestimmtheit ergaben, dass stets beide Chinolinderivate entstehen, nur wie es scheint, das dem Nitrokörper entsprechende stets in geringerer Menge, eine Angabe, die ich heute schon nicht

---

[1] Ber. Ber. f. 1880. 911.

für überflüssig halte, mit Hinblick auf den Umstand, als die Ausbeuten in einigen Fällen den Gedanken nahelegen könnten, dass nur das Nitro-, respective Amidoderivat in die Chinolinreaction träte.

Die bisher erzielten Resultate berechtigen wohl zu dem Schlusse, dass auch nitrirte, respective amidirte, Äthyl-, Propyl- und andere Benzole in ähnlicher Weise reagiren werden, wie es jetzt an vier Beispielen dargethan ist. Es lässt sich daher eine ganze Reihe von Chinolinen mit Kohlenstoffseitenketten, aber auch mit anderen substituirenden Gruppen und zwar mit bekannter Stellung der Seitenketten mit Sicherheit voraussehen und das Ziel, das Weidel und Cobenzl[1] auf dem Wege der directen Substitution von Chinolinderivaten mit elektronegativen Elementen und Radicalen anstreben, dürfte heute schon zum grossen Theile und, wie mir scheint, in sehr einfacher Weise erreicht sein.

---

[1] Monatshefte 1. 844.

Über die Berechnung der Differentialquotienten der wahren Anomalie und des Radius vector nach der Excentricität in stark excentrischen Bahnen.

Von dem w. M. Prof. Dr. E. Weiss.

Die Berechnung der Differentialquotienten des Radius vector und der wahren Anomalie nach der Excentricität lässt sich bekanntlich nach den gewöhnlich üblichen Ausdrücken nicht mehr mit der nöthigen Sicherheit und Bequemlichkeit ausführen, sobald die Excentricität von der Einheit wenig abweicht, weil im Nenner der betreffenden Ausdrücke der Factor $1-e$ erscheint. Für solche Fälle führen aber die nachstehenden Betrachtungen, wie ich glaube, auf die einfachste Weise zu praktisch brauchbaren Formeln.

Mit Beibehaltung der allgemein üblichen Bezeichnungen hat man bekanntlich:

$$\frac{kt}{q^{3/2}(1+e)^{1/2}} = \int \frac{dv}{(1+e\cos v)^2} = \frac{1}{(1+e)^2} \int \frac{dv}{\cos^4 \frac{v}{2} \left(1+\frac{1-e}{1+e}\operatorname{tg}^2\frac{v}{2}\right)^2}.$$

Führt man zur Erleichterung der Integration die Hilfsgrösse ein:

$$\theta = \frac{1-e}{1+e}\operatorname{tg}^2\frac{v}{2}, \qquad 1)$$

so erhält man nach einigen einfachen Reductionen:

$$\frac{kt(1-e)^{3/2}}{2q^{3/2}} = \int \frac{(1-e)+(1+e)\theta}{(1+\theta)^2}\, d\sqrt{\theta} = \operatorname{arctg}\sqrt{\theta} - \frac{e\sqrt{\theta}}{1+\theta}\cdot \qquad 2)$$

Zählt man die Zeit vom Perihele an, so ist keine Integrationsconstante hinzuzufügen; man hat daher nach Restitution des

Werthes von θ:

$$\frac{kt(1-e)^{3/2}}{q^{3/2}} = 2 \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg}\frac{v}{2}\right) - \frac{e\sqrt{1-e^2}\sin v}{1+e\cos v}. \qquad 3)$$

In elliptischen Bahnen von mässiger Excentricität bedient man sich zur Berechnung der wahren Anomalie mit Vortheil der sogenannten excentrischen Anomalie, indem man setzt:

$$\operatorname{tg}\frac{E}{2} = \sqrt{\theta} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg}\frac{v}{2}.$$

Bei Bahnen von grosser Excentricität wird man aber wegen der Kleinheit von $1-e$ Reihenentwicklungen zur unmittelbaren Bestimmung von v vorziehen, und bekommt dadurch aus Gleichung 2) zunächst:

$$\frac{kt(1-e)^{3/2}}{2q^{3/2}} = \frac{(1+\theta)\operatorname{arctg}\sqrt{\theta} - e\sqrt{\theta}}{1+\theta}$$

$$= \frac{\sqrt{\theta}}{1+\theta}\left[1-e+\frac{2}{3}\theta - 2\theta^2\left(\frac{1}{15}-\frac{\theta}{35}+\frac{\theta^2}{63}-\frac{\theta^3}{99}+\ldots\right)\right]$$

$$= \frac{(1-e)\sqrt{\theta}}{1+\theta} + \frac{1}{3}\frac{\theta\sqrt{\theta}}{1+\theta}\left[2-6\theta\left(\frac{1}{15}-\frac{\theta}{35}+\frac{\theta^2}{63}-\ldots\right)\right].$$

Bezeichnet man mit R den Ausdruck:

$$R = 6\left[\frac{1}{15}-\frac{\theta}{35}+\frac{\theta^2}{63}-\frac{\theta^3}{99}+\ldots\right], \qquad 4)$$

so erhält man mit Rücksicht auf die Bedeutung von θ leicht:

$$\frac{kt(1+\theta)\sqrt{1+e}}{2q^{3/2}} = \operatorname{tg}\frac{v}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{1+e}\cdot\operatorname{tg}^3\frac{v}{2}\left(1-\frac{1}{2}R\theta\right). \qquad 5)$$

Die Differentiation der Gleichung 3) nach v und e liefert:

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{kt\,de}{q^{3/2}\sqrt{1+e}} = \frac{(2+e\cos v)\sin v\,de - (1-e^2)\,dv}{(1+e\cos v)^2}.$$

Nach den eingeführten Bezeichnungen ist aber:

$$1+e\cos v = (1+e)\cos^2\frac{v}{2} - (1-e)\sin^2\frac{v}{2} = (1+e)\cos^2\frac{v}{2}(1+\theta). \qquad 6)$$

Substituirt man daher in der letzten Gleichung für $\frac{kt}{2q^{3/2}}$ seinen Werth aus 5) und setzt man überdies:

$$(1+e\cos v)^2 = (1+e\cos v)(1+e)(1+\theta)\cos^2\frac{v}{2},$$

so erhält man nach einigen leicht ersichtlichen Reductionen:

$$\frac{1}{2}\sin v[3+\frac{2}{1+e}\operatorname{tg}^2\frac{v}{2}(1-\frac{1}{2}R\theta)]\,de =$$

$$= \frac{(2+e\cos v)\sin v\,de-(1-e^2)\,dv}{(1+e\cos v)}$$

oder auch:

$$(1-e^2)\,dv = \frac{1}{2}\sin v[(1-e\cos v)-\frac{2(1+e\cos v)}{1+e}\operatorname{tg}^2\frac{v}{2}(1-\frac{1}{2}R\theta)]\,de$$

Ersetzt man hierin $1+e\cos v$ dort, wo es nicht mit θ multiplicirt erscheint, wieder durch seinen Werth aus 6), so findet sich:

$$(1-e^2)\,dv = \frac{1}{2}\sin v\left[(1-e)\cos v-2\theta\sin^2\frac{v}{2}+\frac{1+e\cos v}{1+e}R\theta\operatorname{tg}^2\frac{v}{2}\right].$$

Schreibt man hier für θ seinen Werth:

$$\theta = \frac{1-e}{1+e}\operatorname{tg}^2\frac{v}{2},$$

so sieht man, dass jetzt der unbequeme Factor $1-e$ wegfällt; bedenkt man ferner, dass ist:

$$r = \frac{q(1+e)}{1+e\cos v}, \qquad 7)$$

so kann der vorstehende Ausdruck auch in den folgenden umgeformt werden:

$$\frac{dv}{de} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin v}{(1+e)^2}\left[(1+e)\cos v-2\sin^2\frac{v}{2}\operatorname{tg}^2\frac{v}{2}+\frac{q}{r}R\operatorname{tg}^4\frac{v}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin v}{(1+e)^2}\left[1+e\cos v-2\operatorname{tg}^2\frac{v}{2}+\frac{q}{r}R\operatorname{tg}^4\frac{v}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin v}{(1+e)^2}\left[\frac{q(1+e)}{r}-2\operatorname{tg}^2\frac{v}{2}+\frac{q}{r}R\operatorname{tg}^4\frac{v}{2}\right],$$

oder endlich in den noch etwas einfacheren:

$$\left(\frac{dv}{de}\right) = \frac{q\sin v}{2r(1+e)^2}\left[1+e-\frac{2r}{q}\operatorname{tg}^2\frac{v}{2}+R\operatorname{tg}^4\frac{v}{2}\right], \tag{8}$$

Was den Differentialquotienten des Radius vector nach der Excentricität betrifft, liefert die Differentiation der Gleichung 7) die Relation:

$$\frac{dr}{de} = \frac{q}{(1+e\cos v)^2}\left[2\sin^2\frac{v}{2}+e(1+e)\sin v\frac{dv}{de}\right]$$
$$= \frac{r^2\sin v}{q(1+e)^2}\left[\operatorname{tg}\frac{v}{2}+e(1+e)\frac{dv}{de}\right].$$

Substituirt man darin für $\frac{dv}{de}$ den eben gefundenen Werth, so erhält man nach und nach:

$$\left(\frac{dr}{de}\right) = \frac{r\sin v}{2(1+e)^2}\left[\frac{2r\operatorname{tg}\frac{v}{2}}{q}+e\sin v-\frac{2re\sin v\operatorname{tg}^2\frac{v}{2}}{q(1+e)}+\frac{eR\sin v}{1+e}\operatorname{tg}^4\frac{v}{2}\right]$$
$$= \frac{r\sin v}{2(1+e)^2}\left[\frac{2r\operatorname{tg}\frac{v}{2}}{q}\cdot\frac{1+e\cos v}{1+e}+e\sin v+\frac{e}{1+e}R\sin v\operatorname{tg}^4\frac{v}{2}\right]$$
$$= \frac{r\sin v}{2(1+e)^2}\left[2\operatorname{tg}\frac{v}{2}+e\sin v+\frac{e}{1+e}R\sin v\operatorname{tg}^4\frac{v}{2}\right],$$

oder endlich noch etwas einfacher:

$$\frac{dr}{de} = \frac{r\sin^2 v}{2(1+e)^2}\left[1+e+\operatorname{tg}^2\frac{v}{2}+\frac{e}{1+e}R\operatorname{tg}^4\frac{v}{2}\right]. \tag{9}$$

Um die Formeln 8) und 9) bequem berechnen zu können, ist eine Tabulirung von R erforderlich; es lautet nach 4):

$$R = 6\left[\frac{1}{15}-\frac{\theta}{35}+\frac{\theta^2}{63}-\frac{\theta^3}{99}+\ldots\right].$$

So lange nun θ sehr klein ist, hat die Berechnung von R keine Schwierigkeit; sobald aber θ grösser wird, convergirt die obige Reihe ziemlich langsam. Führt man jedoch statt θ eine neue Variabele ξ ein, welche mit θ durch die Relation verbunden ist:

$$\xi = \frac{\theta}{1+\theta}, \quad \theta = \frac{\xi}{1-\xi}$$

und entwickelt man nach steigenden Potenzen von ξ, so erhält man:

$$R = 6\left[\frac{1}{3.5} - \frac{\xi}{5.7} - \frac{4}{5}.\frac{\xi^2}{7.9} - \frac{4.6}{5.7}.\frac{\xi^3}{9.11} - \frac{4.6.8}{5.7.9}.\frac{\xi^4}{11.13} - \ldots\right] \quad 1($$

eine Reihe, welche für elliptische Bahnen nicht nur wesentlich rascher convergirt, als die ursprüngliche, sondern auch insofern angenehmer zu berechnen ist, als alle ihre Glieder gleich bezeichnet sind. Da ferner in elliptischen Bahnen, wie schon früher erwähnt wurde:

$$\theta = \mathrm{tg}^2 \frac{E}{2}$$

ist, so ist:

$$\xi = \frac{\mathrm{tg}^2 \frac{E}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2 \frac{E}{2}} = \sin^2 \frac{E}{2}.$$

Die Transformation kommt also darauf hinaus, dass man die Grösse R nach steigenden Potenzen des Sinus statt nach solchen der Tangente der halben excentrischen Anomalie entwickelt.

Nach der Formel 10) hat der Assistent der hiesigen Sternwarte, Herr Dr. J. v. Hepperger, die am Schlusse beigefügte Tafel für $\log R$ berechnet. Sie wurde von $\theta = -0\cdot200$ bis $\theta = +0\cdot200$ in Intervallen von $0\cdot004$ und von da bis zum Schlusse in solchen von $0\cdot008$ streng siebenstellig berechnet und hierauf ebenfalls siebenstellig bis auf Intervalle von $0\cdot001$ interpolirt. Die fünfte Stelle des Logarithmus dürfte daher selten um mehr als eine halbe Einheit fehlerhaft sein. Für hyperbolische Bahnen (θ negativ) habe ich die Tafel nur bis $\theta = -0\cdot2$ fortführen lassen, da bisher noch keine Bahn aufgefunden worden ist, bei welcher die Excentricität die Einheit beträchtlich übersteigt und mir desshalb eine weitere Ausdehnung der Tafel wenigstens vorläufig für überflüssig erscheint; für elliptische Bahnen habe ich sie indess mit Rücksicht auf die rasch anwachsende Zahl der periodischen Kometen bis auf $\theta = +0\cdot5$ erstrecken lassen.

Übersichtlich zusammengefasst, stellt sich daher die Berechnung der Differentialquotienten des Radius vector und der wahren Anomalie nach der Excentricität, nach den hier entwickelten Formeln folgendermassen dar.

Mit dem Argumente:

$$\theta = \frac{1-e}{1+e}\operatorname{tg}^2\frac{v}{2}$$

entnimmt man der angehängten Tafel $\log R$, und berechnet dann $\left(\frac{dv}{de}\right)$ und $\left(\frac{dr}{de}\right)$ nach den Ausdrücken:

$$\left(\frac{dv}{de}\right) = \frac{q\sin v}{2r(1+e)^2}\left[1+e-\frac{2r}{q}\operatorname{tg}^2\frac{v}{2}+R\operatorname{tg}^4\frac{v}{2}\right]$$

$$\left(\frac{dr}{de}\right) = \frac{r\sin^2 v}{2(1+e)^2}\left[1+e+\operatorname{tg}^2\frac{v}{2}+\frac{e}{e+1}R\operatorname{tg}^4\frac{v}{2}\right].$$

Schliesslich bemerke ich noch, dass erst vor Kurzem Prof. Dr. Th. v. Oppolzer in den Monatsberichten der königl. preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin für 1878, pag. 852 ff. durch Wegschaffen des Factors $1-e$ die erste strenge Lösung des Problems der Ermittelung der fraglichen Differentialquotienten für nahe parabolische Bahnen gegeben hat. Auf dem hier von mir eingeschlagenen Wege erreicht man aber dieses Ziel, wie ich glaube, durch einfachere Entwicklungen, und es gestaltet sich auch das Schlussresultat insofern erheblich einfacher, als v. Oppolzer vier Hilfsreihen einführt, zwei (von ihm mit E_2^v und E_4^v bezeichnet) zur Berechnung von $\frac{dv}{de}$ und zwei (E_0^r und E_4^r) zur Berechnung von $\frac{dr}{de}$ während in meinen Formeln blos eine Hilfsreihe (R) vorkommt.

θ	log R	Diff.	θ	log R	Diff.	θ	log R	Diff.
—0·200	9·64213	—22	—0·150	9·63153	—21	—0·100	9·62134	—20
0·199	9·64191	—22	0·149	32	—20	0·099	14	—20
0·198	69	—21	0·148	12	—21	0·098	9·62094	—20
0·197	48	—22	0·147	9·63091	—21	0·097	74	—20
0·196	26	—21	0·146	70	—21	0·096	54	—19
0·195	05	—22	0·145	49	—20	0·095	35	—20
0·194	9·64083	—21	0·144	29	—21	0·094	15	—20
0·193	62	—22	0·143	08	—21	0·093	9·61995	—20
0·192	40	—21	0·142	9·62987	—20	0·092	75	—20
—0·191	19	—22	—0·141	67	—21	—0·091	55	—20
—0·190	9·63997	—21	—0·140	46	—20	—0·090	35	—20
0·189	76	—22	0·139	26	—21	0·089	15	—20
0·188	54	—21	0·138	05	—21	0·088	9·61895	—19
0·187	33	—21	0·137	9·62884	—20	0·087	76	—20
0 186	12	—22	0·136	64	—21	0 086	56	—20
0·185	9·63890	—21	0·135	43	—20	0·085	36	—20
0·184	69	—21	0·134	23	—21	0·084	16	—19
0·183	48	—22	0·133	02	—20	0·083	9·61797	—20
0·182	26	—21	0·132	9·62782	—21	0·082	77	—20
—0·181	05	—21	—0·131	61	—20	—0·081	57	—20
—0·180	9·63784	—22	—0·130	41	—21	—0·080	37	—19
0·179	62	—21	0·129	20	—20	0·079	18	—20
0·178	41	—21	0·128	00	—20	0·078	9·61698	—20
0·177	20	—21	0·127	9·62680	—21	0·077	78	—19
0·176	9·63699	—21	0·126	59	—20	0·076	59	—20
0·175	78	—22	0·125	39	—21	0·075	39	—19
0·174	56	—21	0·124	18	—20	0·074	20	—20
0·173	35	—21	0·123	9·62598	—20	0·073	00	—20
0·172	14	—21	0·122	78	—21	0·072	9·61580	—19
—0·171	9·63593	—21	—0·121	57	—20	—0·071	61	—20
—0·170	72	—21	—0·120	37	—20	—0·070	41	—19
0·169	51	—21	0·119	17	—20	0·069	22	—20
0·168	30	—21	0·118	9·62497	—21	0·068	02	—19
0·167	09	—21	0·117	76	—20	0·067	9·61483	—20
0·166	9·63488	—22	0·116	56	—20	0·066	63	—19
0·165	66	—21	0·115	36	—20	0·065	44	—20
0·164	45	—21	0·114	16	—21	0·064	24	—19
0·163	24	—21	0·113	9·62395	—20	0·063	05	—20
0·162	03	—20	0·112	75	—20	0·062	9·61385	—19
—0·161	9·63383	—21	—0·111	55	—20	—0·061	66	—20
—0·160	62	—21	—0·110	35	—20	—0·060	46	—19
0·159	41	—21	0·109	15	—20	0·059	27	—19
0·158	20	—21	0·108	9·62295	—20	0·058	08	—20
0·157	9·63299	—21	0·107	75	—20	0·057	9·61288	—19
0·156	78	—21	0·106	55	—21	0·056	69	—20
0·155	57	—21	0·105	34	—20	0·055	49	—19
0·154	36	—21	0·104	14	—20	0·054	30	—19
0·153	15	—20	0·103	9·62194	—20	0·053	11	—19
0·152	9·63195	—21	0·102	74	—20	0·052	9·61192	—20
0·151	74	—21	0·101	54	—20	0·051	72	—19
—0·150	9·63153	—21	—0·100	9·62134	—20	—0·050	9·61153	—19

θ	log R	Diff.	θ	log R	Diff.	θ	log R	Diff.
−0·050	9·61153	−19	0·000	9·60206	−19	+0·050	9·59291	−18
0·049	34	−20	+0·001	9·60187	−18	0·051	73	−18
0·048	14	−19	0·002	69	−19	0·052	55	−18
0·047	9·61095	−19	0·003	50	−18	0·053	37	−18
0·046	76	−19	0·004	32	−19	0·054	19	−18
0·045	57	−19	0·005	13	−18	0·055	01	−18
0·044	38	−20	0·006	9·60095	−19	0·056	9·59183	−18
0·043	18	−19	0·007	76	−18	0·057	65	−18
0·042	9·60999	−19	0·008	58	−19	0·058	47	−18
−0·041	80	−19	+0·009	39	−18	+0·059	29	−18
−0·040	61	−19	+0·010	21	−19	+0·060	11	−17
0·039	42	−19	0·011	02	−18	0·061	9·59094	−18
0·038	23	−19	0·012	9·59984	−19	0·062	76	−18
0·037	04	−20	0·013	65	−18	0·063	58	−18
0·036	9·60884	−19	0·014	47	−19	0·064	40	−18
0·035	65	−19	0·015	28	−18	0·065	22	−18
0·034	46	−19	0·016	10	−19	0·066	04	−17
0·033	27	−19	0·017	9·59891	−18	0·067	9·58987	−18
0·032	08	−19	0·018	73	−18	0·068	69	−18
−0·031	9·60789	−19	+0·019	55	−19	+0·069	51	−18
−0·030	70	−19	+0·020	36	−18	+0·070	33	−18
0·029	51	−19	0·021	18	−18	0·071	15	−17
0·028	32	−19	0·022	00	−19	0·072	9·58898	−18
0·027	13	−19	0·023	9·59781	−18	0·073	80	−18
0·026	9·60694	−19	0·024	63	−18	0·074	62	−18
0·025	75	−19	0·025	45	−19	0·075	44	−17
0·024	56	−19	0·026	26	−18	0·076	27	−18
0·023	37	−18	0·027	08	−18	0·077	09	−18
0·022	19	−19	0·028	9·59690	−18	0·078	9·58791	−17
−0·021	00	−19	+0·029	72	−19	+0·079	74	−18
−0·020	9·60581	−19	+0·030	53	−18	+0·080	56	−18
0·019	62	−19	0·031	35	−18	0·081	38	−17
0·018	43	−19	0·032	17	−18	0·082	21	−18
0·017	24	−19	0·033	9·59599	−19	0·083	03	−18
0·016	05	−18	0·034	80	−18	0·084	9·58685	−17
0·015	9·60487	−19	0·035	62	−18	0·085	68	−18
0·014	68	−19	0·036	44	−18	0·086	50	−17
0·013	49	−19	0·037	26	−18	0·087	33	−18
0·012	30	−18	0·038	08	−18	0·088	15	−17
−0·011	12	−19	+0·039	9·59490	−19	+0·089	9·58598	−18
−0·010	9·60393	−19	+0·040	71	−18	+0·090	80	−17
0·009	74	−19	0·041	53	−18	0·091	63	−18
0·008	55	−18	0·042	35	−18	0·092	45	−18
0·007	37	−19	0·043	17	−18	0·093	27	−17
0·006	18	−19	0·044	9·59399	−18	0·094	10	−18
0·005	9·60299	−18	0·045	81	−18	0·095	9·58492	−17
0·004	81	−19	0·046	63	−18	0·096	75	−17
0·003	62	−19	0·047	45	−18	0·097	58	−18
0·002	43	−18	0·048	27	−18	0·098	40	−17
0·001	25	−19	0·049	09	−18	0·099	23	−18
0·000	9·60206	−19	+0·050	9·59291	−18	+0·100	9·58405	−17

θ	log R	Diff.	θ	log R	Diff.		log R	Diff.
+0·100	9·58405	—17	+0·150	9·57547	—17	+0·200	9·56714	—16
0·101	9·58388	—18	0·151	30	—17	0·201	9·56698	—17
0·102	70	—17	0·152	13	—17	0·202	81	—16
0·103	53	—17	0·153	9·57496	—17	0·203	65	—16
0·104	36	—18	0·154	79	—17	0·204	49	—17
0·105	18	—17	0·155	62	—16	0·205	32	—16
0·106	01	—18	0·156	46	—17	0·206	16	—17
0·107	9·58283	—17	0·157	29	—17	0·207	9·56599	—16
0·108	66	—17	0·158	12	—17	0·208	83	—16
+0·109	49	—18	+0·159	9·57395	—17	+0·209	67	—17
+0·110	31	—17	+0·160	78	—16	+0·210	50	—16
0·111	14	—17	0·161	62	—17	0·211	34	—16
0·112	9·58197	—18	0·162	45	—17	0·212	18	—16
0·113	79	—17	0·163	28	—17	0·213	02	—17
0·114	62	—17	0·164	11	—17	0·214	9·56485	—16
0·115	45	—17	0·165	9·57294	—16	0·215	69	—16
0·116	28	—18	0·166	78	—17	0·216	53	—17
0·117	10	—17	0·167	61	—17	0·217	36	—16
0·118	9·58093	—17	0·168	44	—16	0·218	20	—16
+0·119	76	—17	+0·169	28	—17	+0·219	04	—16
+0·120	59	—18	+0·170	11	—17	+0·220	9·56388	—16
0·121	41	—17	0·171	9·57194	—17	0·221	72	—17
0·122	24	—17	0·172	77	—16	0·222	55	—16
0·123	07	—17	0·173	61	—17	0·223	39	—16
0·124	9·57990	—17	0·174	44	—17	0·224	23	—16
0·125	73	—17	0·175	27	—16	0·225	07	—16
0·126	56	—18	0·176	11	—17	0·226	9·56291	—17
0·127	38	—17	0·177	9·57094	—17	0·227	74	—16
0·128	21	—17	0·178	77	—16	0·228	58	—16
+0·129	04	—17	+0·179	61	—17	+0·229	42	—16
+0·130	9·57887	—17	+0·180	44	—16	+0·230	26	—16
0·131	70	—17	0·181	28	—17	0·231	10	—16
0·132	53	—17	0·182	11	—17	0·232	9·56194	—16
0·133	36	—17	0·183	9·56994	—16	0·233	78	—16
0·134	19	—17	0·184	78	—17	0·234	62	—16
0·135	02	—17	0·185	61	—16	0·235	46	—17
0·136	9·57785	—18	0·186	45	—17	0·236	29	—16
0·137	67	—17	0·187	28	—16	0·237	13	—16
0·138	50	—17	0·188	12	—17	0·238	9·56097	—16
+0·139	33	—17	+0·189	9·56895	—16	+0·239	81	—16
+0·140	16	—17	+0·190	79	—17	+0·240	65	—16
0·141	9·57699	—17	0·191	62	—16	0·241	49	—16
0·142	82	—17	0·192	46	—17	0·242	33	—16
0·143	65	—17	0·193	29	—16	0·243	17	—16
0·144	48	—16	0·194	13	—17	0·244	01	—16
0·145	32	—17	0·195	9·56796	—16	0·245	9·55985	—16
0·146	15	—17	0·196	80	—17	0·246	69	—16
0·147	9·57598	—17	0·197	63	—16	0·247	53	—16
0·148	81	—17	0·198	47	—16	0·248	37	—16
0·149	64	—17	0·199	31	—17	0·249	21	—16
+0·150	9·57547	—17	+0·200	9·56714	—16	+0·250	9·55905	—16

θ	log R	Diff.	θ	log R	Diff.	θ	log R	Diff.
+0·250	9·55905	—16	+0·300	9·55119	—16	+0·350	9·54353	—15
0·251	9·55889	—16	0·301	03	—15	0·351	38	—15
0·252	73	—16	0·302	9·55088	—16	0·352	23	—15
0·253	57	—15	0·303	72	—15	0·353	08	—15
0·254	42	—16	0·304	57	—16	0·354	9·54293	—15
0·255	26	—16	0·305	41	—15	0·355	78	—15
0·256	10	—16	0·306	26	—16	0·356	63	—15
0·257	9·55794	—16	0·307	10	—15	0·357	48	—15
0·258	78	—16	0·308	9·54995	—15	0·358	33	—15
+0·259	62	—16	+0·309	80	—16	+0·359	18	—15
+0·260	46	—16	+0·310	64	—15	+0·360	03	—15
0·261	30	—15	0·311	49	—16	0·361	9·54188	—15
0·262	15	—16	0·312	33	—15	0·362	73	—15
0·263	9·55699	—16	0·313	18	—16	0·363	58	—15
0·264	83	—16	0·314	02	—15	0·364	43	—15
0·265	67	—16	0·315	9·54887	—15	0·365	28	—15
0·266	51	—16	0·316	72	—16	0·366	13	—15
0·267	35	—15	0·317	56	—15	0·367	6·54098	—15
0·268	20	—16	0·318	41	—15	0·368	83	—15
+0·269	04	—16	+0·319	26	—16	+0·369	68	—15
+0·270	9·55588	—16	+0·320	10	—15	+0·370	53	—15
0·271	72	—15	0·321	9·54795	—15	0·371	38	—15
0·272	57	—16	0·322	80	—16	0·372	23	—15
0·273	41	—16	0·323	64	—15	0·373	08	—15
0·274	25	—16	0·324	49	—15	0·374	9·53993	—15
0·275	09	—15	0·325	34	—16	0·375	78	—15
0·276	9·55494	—16	0·326	18	—15	0·376	63	—15
0·277	78	—16	0·327	03	—15	0·377	48	—14
0·278	62	—16	0·328	9·54688	—16	0·378	34	—15
+0·279	46	—15	+0·329	72	—15	+0·379	19	—15
+0·280	31	—16	+0·330	57	—15	+0·380	04	—15
0·281	15	—16	0·331	42	—15	0·381	9·53889	—15
0·282	9·55399	—15	0·332	27	—16	0·382	74	—15
0·283	84	—16	0·333	11	—15	0·383	59	—15
0·284	68	—15	0·334	9·54596	—15	0·384	44	—14
0·285	53	—16	0·335	81	—15	0·385	30	—15
0·286	37	—16	0·336	66	—16	0·386	15	—15
0·287	21	—15	0·337	50	—15	0·387	00	—15
0·288	06	—16	0·338	35	—15	0·388	9·53785	—15
+0·289	9·55290	—16	+0·339	20	—15	+0·389	70	—15
+0·290	74	—15	+0·340	05	—15	+0·390	55	—14
0·291	59	—16	0·341	9·54490	—15	0·391	41	—15
0·292	43	—15	0·342	75	—16	0·392	26	—15
0·293	28	—16	0·343	59	—15	0·393	11	—15
0·294	12	—15	0·344	44	—15	0·394	9·53696	—14
0·295	9·55197	—16	0·345	29	—15	0·395	82	—15
0·296	81	—16	0·346	14	—15	0·396	67	—15
0·297	65	—15	0·347	9·54399	—15	0·397	52	—15
0·298	50	—16	0·348	84	—15	0·398	37	—14
0·299	34	—15	0·349	69	—16	0·399	23	—15
+0·300	9·55119	—16	+0·350	9·54353	—15	+0·400	9·53608	—15

θ	log R	Diff.
+0·400	9·53608	—15
0·401	9·53593	—15
0·402	78	—14
0·403	64	—15
0·404	49	—15
0·405	34	—14
0·406	20	—15
0·407	05	—15
0·408	9·53490	—14
+0·409	76	—15
+0·410	61	—15
0·411	46	—14
0·412	32	—15
0·413	17	—14
0·414	03	—15
0·415	9·53388	—15
0·416	73	—14
0·417	59	—15
0·418	44	—14
+0·419	30	—15
+0·420	15	—15
0·421	00	—14
0·422	9·53286	—15
0·423	71	—14
0·424	57	—15
0·425	42	—14
0·426	28	—15
0·427	13	—14
0·428	9·53199	—15
+0·429	84	—14
+0·430	70	—15
0·431	55	—14
0·432	41	—15
0·433	26	—14
0·434	12	—15
0·435	9·53097	—14
0·436	83	—15
0·437	68	—14
0·438	54	—15
0·439	39	—14
+0·440	9·53025	—14

θ	log R	Diff.
+0·440	9·53025	—14
0·441	11	—15
0·442	9·52996	—14
0·443	82	—15
0·444	67	—14
0·445	53	—14
0·446	39	—15
0·447	24	—14
0·448	10	—15
+0·449	9·52895	—14
+0·450	81	—14
0·451	67	—15
0·452	52	—14
0·453	38	—14
0·454	24	—15
0·455	09	—14
0·456	9·52795	—14
0·457	81	—15
0·458	66	—14
+0·459	52	—14
+0·460	38	—14
0·461	24	—15
0·462	09	—14
0·463	9·52695	—14
0·464	81	—14
0·465	67	—15
0·466	52	—14
0·467	38	—14
0·468	24	—14
0·469	10	—15
+0·470	9·52595	—14

θ	log R	Diff.
+0·470	9·52595	—14
0·471	81	—14
0·472	67	—14
0·473	53	—14
0·474	39	—15
0·475	24	—14
0·476	10	—14
0·477	9·52496	—14
0·478	82	—14
+0·479	68	—14
+0·480	54	—15
0·481	39	—14
0·482	25	—14
0·483	11	—14
0·484	9·52397	—14
0·485	83	—14
0·486	69	—14
0·487	55	—14
0·488	41	—15
+0·489	26	—14
+0·490	12	—14
0·491	5·52298	—14
0·492	84	—14
0·493	70	—14
0·494	56	—14
0·495	42	—14
0·496	28	—14
0·497	14	—14
0·498	00	—14
0·499	9·52186	—14
+0·500	9·52172	—14

$$\left(\frac{dv}{de}\right) = \frac{q\sin v}{2r(1+e)^2}\left[1+e-\frac{2r}{q}\operatorname{tg}^2\frac{v}{2}+R\operatorname{tg}^4\frac{v}{2}\right]$$

$$\left(\frac{dr}{de}\right) = \frac{r\sin^2 v}{2(1+e)^2}\left[1+e+\operatorname{tg}^2\frac{v}{2}+\frac{e}{1+e}R\operatorname{tg}^4\frac{v}{2}\right].$$

SITZUNGSBERICHTE

DER

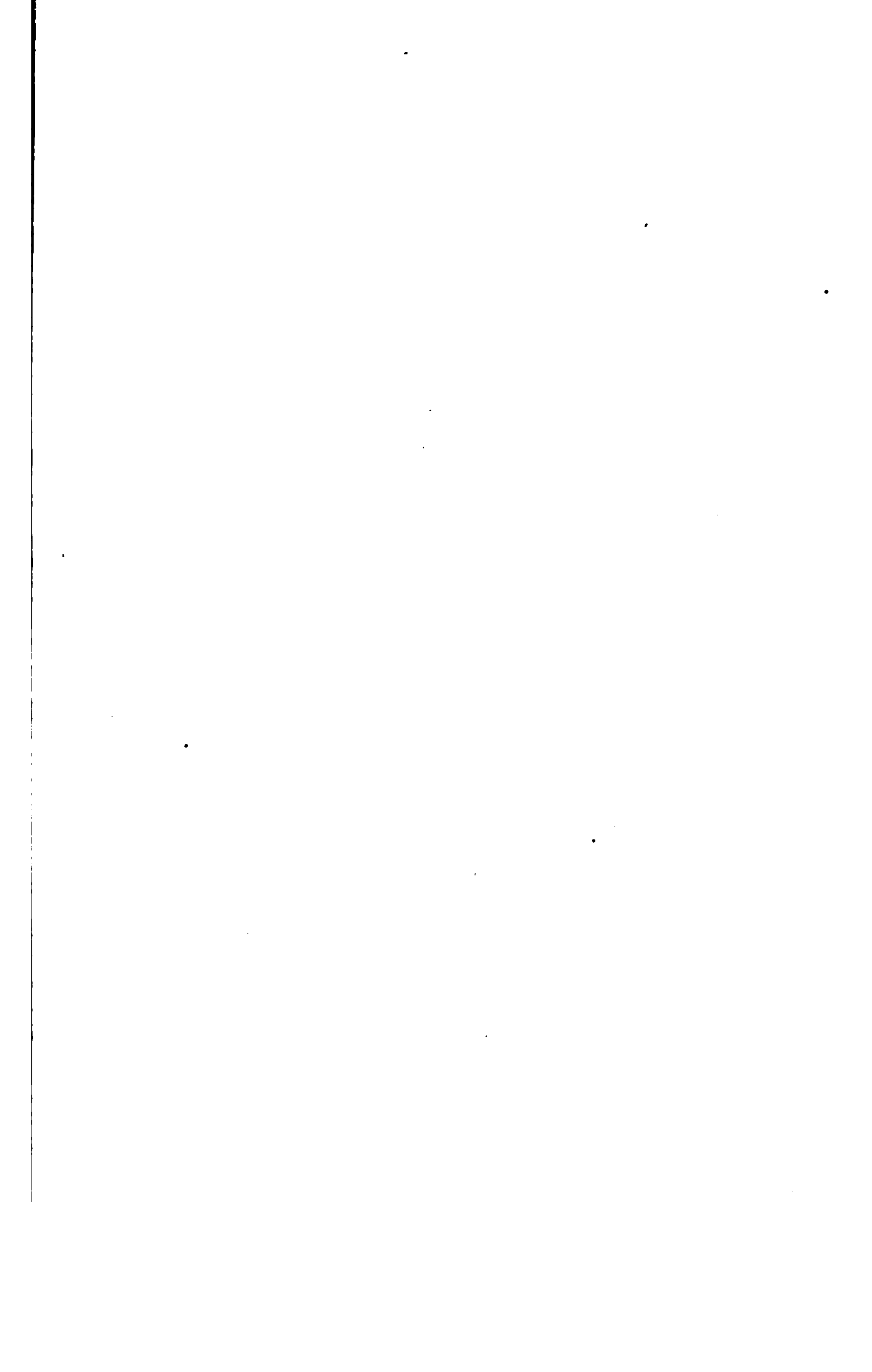
KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LXXXIII. Band. III. Heft.

ZWEITE ABTHEILUNG.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Mechanik, Meteorologie und Astronomie.



VII. SITZUNG VOM 10. MÄRZ 1881.

In Verhinderung des Vicepräsidenten übernimmt Herr Dr. L. J. Fitzinger den Vorsitz.

Der Secretär legt zwei Dankschreiben vor, und zwar von Herrn Dr. H. Weidel, Adjuncten am ersten chemischen Laboratorium der Wiener Universität, für die ihm zur Fortsetzung seiner Untersuchungen über die Pyridin- und Chininreihe sowie der Alkaloide, dann von Herrn Dr. M. Kretschy, Assistenten an diesem Universitäts-Laboratorium, für die ihm zur Fortführung seiner Untersuchung der Kynursäure bewilligte Subvention.

Herr Prof. Dr. P. Weselsky übersendet eine von ihm in Gemeinschaft mit Herrn Dr. R. Benedikt im Laboratorium für analytische Chemie an der technischen Hochschule in Wien ausgeführte Arbeit: „Über die Einwirkung der salpetrigen Säure auf Pyrogallussäureäther".

Das c. M. Herr Regierungsrath Prof. Dr. Adolf Weiss übersendet als achten Beitrag seiner „Mittheilungen aus dem pflanzenphysiologischen Institute der Prager Universität" eine Abhandlung des Assistenten dieses Institutes und Privatdocenten Herrn Dr. J. Kreuz unter dem Titel: „Entwicklung der Lenticellen an beschatteten Zweigen von *Ampelopsis hederacea* Mch."

Herr Prof. J. V. Janovsky an der höheren Staatsgewerbeschule in Reichenberg, übersendet eine Abhandlung: „Über eine neue Azobenzoldisulfosäure."

Herr Dr. Max Margules, Privatdocent an der Universität in Wien, übersendet eine Abhandlung: „Über die Bestimmung des Reibungs- und Gleitungscoëfficienten aus ebenen Bewegungen einer Flüssigkeit."

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. „Zur Reduction Abel'scher auf elliptische Integrale", von Herrn Dr. Max Ungar in Wien.
2. „Von den Curven einer Fläche, welche die Krümmungscurven derselben unter constantem Winkel schneiden", von Herrn Dr. Ed. Mahler in Wien.
3. „Centigrad-Photometer. Neues optisches Instrument zur directen Bestimmung der Intensität jedweder künstlichen Lichtquelle", von Herrn Dominico Coglievina, Ingenieur in Wien.
4. „Das Archimedische Gesetz des Sehens", von Herrn Vendelin Muschek in Prag.

Das w. M. Herr Director J. Hann überreicht eine Abhandlung: „Über den täglichen Gang des Luftdruckes, der Temperatur, der Feuchtigkeit, Bewölkung und Windstärke auf den Plateaux der Rocky Mountains".

Das w. M. Herr Professor von Barth überreicht eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit: „Über die Einwirkung von Schwefelsäure auf Mono-, Di- und Tribrombenzol", von Herrn Dr. J. Herzig.

Das w. M. Herr Professor Ad. Lieben überreicht eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit: Über krystallinische Verbindungen von Chlorcalcium mit Alkoholen," von Herrn J. B. Heindl.

Das w. M. Herr Hofrath Ritter v. Brücke überreicht eine Arbeit aus dem physiologischen Institute der Wiener Universität: „Über die Nervenendigung in den glatten Muskelfasern", von Herrn stud. med. Alexander Lustig.

Herr Prof. Dr. Franz Toula in Wien erstattet Bericht über die im Auftrage der kaiserlichen Akademie im Spätsommer 1880 unternommene Reise zur Fortsetzung der von ihm im Jahre 1875 begonnenen geologischen Untersuchungen im westlichen Balkan und überreicht eine Abhandlung unter dem Titel: „Grundlinien der Geologie des westlichen Balkan", nebst einer geologischen Übersichtskarte des Gebietes von der Wasserscheide zwischen Isker und Vid bis an die Nišava, als die Ergebnisse seiner beiden Reisen.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Academia nacional de ciencias de la Republica Argentina: Boletin. Tomo III. Entrega 2 y 3. Cordoba 1879; 8°.

Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique. 50° Année, 3° série, tome I, Nr. 1. Bruxelles, 1881; 8°.

— de Médecine: Bulletin. 45° Année, 2° série, tome X, Nrs. 3, 7, 8 & 9. Paris, 1881; 8°.

— impériale des sciences de St. Pétersbourg: Bulletin. Tome XXVII, Nr. 1. St. Pétersbourg, 1881; 4°.

Akademie der Wissenschaften, k. zu München: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe, 1881. Heft 1, München, 1881; 8°.

Annales des Mines: 7° série, Tome XVIII. 5° livraison de 1880. Paris, 1880; 8°.

Apotheker-Verein, allgem. österr.: nebst Anzeigen-Blatt. XIX. Jahrgang, Nr. 6 & 7. Wien, 1881; 8°.

Bibliothèque universelle: Archives des sciences physiques et naturelles. 3° période. Tome V, Nr. 1. — 15. Janvier 1881. Genève, Lausanne, Paris, 1881; 8°.

Central-Commission, k. k., zur Erforschung und Erhaltung der Kunst- u. historischen Denkmale: Mittheilungen. VII. Bd., 1. Heft. Wien, 1881; 4°.

— k. k. statistische: Ausweis über den auswärtigen Handel der österr.-ungar. Monarchie im Jahre 1879. VI. Abtheilung, XL. Jahrgang. Wien, 1880; gr. 4°.

Chemiker-Zeitung: Central-Organ. Jahrgang V. Nr. 7—9. Cöthen, 1881; 4°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Tome XCII, Nrs. 6—8. Paris, 1881; 4°.

Elektrotechnischer Verein: Elektrotechnische Zeitschrift. II. Jahrgang, 1881. Heft II, Februar. Berlin, 1881; 4°.

Genootschap, provincial utrechtsch van Kunsten en Wetenschappen: Verslag gehouden den 24. Juni 1879 und 29. Juni 1880. Utrecht, 1879—1880; 8°.

— — Aanteekeningen van het Verhandelde in de Sectie-Vergaderingen gehouden den 24. Juni 1879. Utrecht, 1879: 8°.

Gesellschaft, Deutsche chemische: Berichte. XIV. Jahrgang, Nr. 2 & 3. Berlin, 1881; 8°.

— österr., für Meteorologie. Zeitschrift. XVI. Band. März-Heft 1881. Wien, 1881; 8°.

— k. k. mährisch-schlesische, zur Beförderung des Ackerbaues, der Natur- und Landeskunde in Brünn: Mittheilungen. 1880. LX. Jahrgang. Brünn; 4°.

Gewerbe-Verein, n.-ö.: Wochenschrift. XLII. Jahrgang. Nr. 5—9. Wien, 1882; 4°.

Ingenieur- und Architekten-Verein, österr.: Wochenschrift, VI. Jahrgang, Nr. 5—9. Wien, 1881; 4°.

Institut, königl. preussisches geodätisches: Publication. Winkel- und Seitengleichungen; von Dr. Alfred Westphal. — Über die Beziehung der bei der Stations-Ausgleichung gewählten Nullrichtung; von Wilh. Werner. Berlin, 1880; 4°.

Instituut, koninklijk nederlandsch meteorologisch: Jaarboek voor 1876. XXV. Jahrgang. 2. Deel. Utrecht, 1880; quer 4°.

Militär-Comité, technisches und administratives: Mittheilungen über Gegenstände des Artillerie- und Genie-Wesens. Jahrgang 1881. I. Heft. Wien, 1881; 8°.

Mittheilungen aus J. Perthes' geographischer Anstalt, von Dr. A. Petermann. XXVII. Band, 1881. II. Gotha, 1881; 4°.

Moniteur scientifique du Docteur Quesneville: Journal mensuel. 25e Année, 3e série, Tome XI, 471e livraison. Mars 1881. Paris; 8°.

Nature. Vol. XXIII. Nrs. 590—592. London, 1881; 4°.

Nuovo Cimento, il: Giornale. 3a serie, Tomo IX. Gennaio 1881. Pisa; 8°.

Observatory, the: A monthly review of Astronomy. No. 47. March, 1881. London; 8°.

Reichsanstalt, k. k. geologische: Verhandlungen. 1881. Nr. 4. Wien; 8°.

Repertorium für Experimental-Physik etc. von Dr. Ph. Carl. XVII. Band, 4. Heft. München und Leipzig. 1881; 8°.

Rostock, Universität: Akademische Schriften pro 1879—1880. 20 Stücke 4° & 8°.

Société mathematique de France: Bulletin. Tome IX, Nr. 1. Paris, 1880; 8°.

Société botanique de France: Bulletin. Tome XXVII, (2e série, Tome II). Paris, 1880; 8°.

— hollandaise des sciences à Harlem: Archives néerlandaises de sciences exactes et naturelles. Tome XV, 3e—5e livraisons. Harlem, Paris, Leipzig, 1880; 8°.

— Néerlandaise de Zoologie: Tijdschrift. V. Deel. 3. Aflevering. Leiden, 1881; 8°.

Society, the royal astronomical: Monthly notices. Vol. XLI. Nr. 3. January 1881. London; 8°.

— the royal geographical: Proceedings and monthly Record of Geography. Vol. III. Nr. 3. March 1881. London; 8°.

Wiener medizinische Wochenschrift. XXXI. Jahrgang. Nr. 8 bis 10. Wien, 1881; 4°.

Wissenschaftlicher Club in Wien: Monatsblätter. II. Jahrgang, Nr. 5. Wien, 1881; 8°.

— Ausserordentliche Beilage Nr. IV.

— — Jahresbericht 1880/1881. V. Vereinsjahr. Wien, 1881; 8°.

Zoologische Station zu Neapel: Mittheilungen, zugleich ein Repertorium für Mittelmeerkunde. II. Band, III. Heft. Leipzig, 1881; 8°.

Über den täglichen Gang des Luftdruckes, der Temperatur, der Feuchtigkeit, Bewölkung und Windstärke auf den Plateaux der Rocky Mountains.

Von dem w. M. Dr. J. Hann.

Es sind bis jetzt äusserst wenige Resultate stündlicher meteorologischer Aufzeichnungen aus den Vereinigten Staaten bekannt geworden. Darum bleibt es sehr zu bedauern, dass das meteorologische Departement des Signal Office in Washington trotz der grossen pecuniären Mittel, über welche dasselbe zu meteorologischen Zwecken verfügt, diesem wichtigen Gegenstande bisher, wie es scheint, gar keine Aufmerksamkeit zugewendet hat. Da jetzt der ganze meteorologische Dienst in den Vereinigten Staaten unter die Leitung des Signal Office gestellt wurde, so ist zu besorgen, dass wir noch auf längere Zeit hinaus über den täglichen Gang der wichtigsten meteorologischen Elemente in dem grössten Theile des Gebietes der Vereinigten Staaten in Unkenntniss bleiben. Die Observatorien des küstennahen Ostens, New-York, Philadelphia, Washington, an denen der tägliche Gang einiger oder aller meteorologischen Elemente beobachtet worden ist oder jetzt beobachtet wird, liegen in einem klimatischen Gebiete, welches sich sehr unterscheidet von jenem des grossen Mississippi-Thales oder gar von dem der weiten Plateauländer am Ostfusse der Rocky Mountains, sowie der Hochthäler zwischen diesem Gebirge und der Sierra Nevada. Während der tägliche Gang der meteorologischen Elemente an jenen Observatorien sich weniger unterscheidet von jenen an anderen Orten ähnlicher Breite, wie wir ihn bereits kennen, ist die Kenntniss der täglichen Änderungen des Luftdruckes, der Temperatur, Feuchtigkeit etc.

in einem continentalen Klima und auf grossen Hochebenen zwischen dem 30. und 40. Breitegrad geradezu ein besonderes Desideratum der Meteorologen. Die Stationen des Signal Office westlich vom Mississippi wären desshalb in der Lage, durch stündliche Beobachtungsreihen dem Fortschritte der Meteorologie die grössten Dienste zu leisten.

Je weniger nun zunächst eine Aussicht dazu vorhanden ist, desto dankbarer müssen wir die Leistungen der amerikanischen Vermessungs-Ingenieure auch auf diesem Gebiete anerkennen. Ganz kürzlich ist uns wieder eine werthvolle derartige Leistung zur Kenntniss gekommen. Die Resultate derselben sind enthalten in dem Werke: Report upon U. S. Geograph. Surveys West of the one Hundredth Meridian, in Charge of First Lieut. Geo. M. Wheeler, Corps of Eng. U. S. Army. Vol. II. Astronomie and barometric Hypsometry. Washington 1877.[1] (566 Seiten und zahlreiche Tafeln.) In dieser Publication findet sich, was der Titel nicht vermuthen lassen würde, eine grössere Reihe stündlicher Beobachtungen des Luftdruckes, der Temperatur, des trockenen und nassen Thermometers, der Windstärke und der Bewölkung. Dieselben sind an allen astronomischen, zur Bestimmung der geographischen Coordinaten eingerichteten Stationen angestellt worden und beziehen sich allerdings nur auf kürzere Zeitperioden. Bei dem grossen Interesse aber, welches sich an die Kenntniss des täglichen Ganges der genannten meteorologischen Elemente auf den Plateaux der Rocky Mountains knüpft, und bei dem Umstande, dass die täglichen Curven der gleichen Elemente an verschiedenen Stationen so übereinstimmend verlaufen, dass es gestattet ist, Mittelwerthe von grösserer Verlässlichkeit aus ihnen abzuleiten, schien es mir angezeigt, eine Bearbeitung des hier gebotenen werthvollen Materiales vorzunehmen und die Resultate zur Kenntniss der Fachgenossen zu bringen. Es wäre sonst auch sehr zu besorgen, dass die wenigen Seiten meteorologischen Inhalts in dem dicken Quartbande überhaupt einer Beachtung entgehen könnten und die werthvollen Resultate mühsamer stündlicher Aufzeichnungen (in Summe an nahe 400 Tagen) für die Meteorologie verloren gingen.

[1] Nach Wien ist dieser Band erst zu Anfang dieses Jahres (1881) gekommen.

Die Vermessungs-Expeditionen waren ausgerüstet mit Greens mercurial cistern barometer (mountain pattern), ebenso mit Psychrometern und Maximum- und Minimum-Thermometern von Green in New York. Die Windstärke und Bewölkung wurden nach der zehntheiligen Scala geschätzt. Die Beobachtungsresultate sind corrigirt für die Instrumentalfehler und der Luftdruck ist auf 32° reducirt. Die mitgetheilten Resultate des täglichen Ganges der einzelnen Elemente für jede Station sind bereits für die unperiodischen Schwankungen corrigirt nach den Vorschriften, welche Williamson in seinem trefflichen Werke: „On the use of the barometer“ (New York 1868) gegeben hat. Der tägliche Gang ist in der Form von Abweichungen der Stundenmittel vom Gesammtmittel mitgetheilt, auch für die Psychrometerdifferenzen und die absolute und relative Feuchtigkeit ist dieselbe Form der Mittheilung gewählt. Auf 16 Tafeln ist ferner der Gang dieser Abweichungen graphisch dargestellt worden. Diese Darstellungen sind sehr vortheilhaft für die leichtere Beurtheilung, wie weit die einzelnen kürzeren Reihen in Bezug auf die tägliche Änderung des gleichen Elementes übereinstimmen, und daher unbedenklich zu Mittelwerthen vereinigt werden können. Die Übereinstimmung selbst der 8- bis 14tägigen Barometermittel, soweit sie den typischen täglichen Gang des Luftdruckes zum Ausdrucke bringen, ist in der That eine überraschende. Mein anfängliches Bedenken, dass hier ausgeglichene Werthe vorliegen, wurde gleich wieder beseitigt, theils durch den immerhin im Detail noch ziemlich unregelmässigen und eckigen Verlauf der Curven, theils durch die folgende Stelle in dem begleitenden Texte:

„The results are given as observed, and the curves are not in all cases smooth, but are published as material for what they are worth, and it is considered best to give the results with only such corrections as are evidently erroneous, shown by plotting the individual observations, and with no discussion.“

Es werden diese günstigen Resultate bloss 8- bis 14tägiger stündlicher Aufzeichnungen erklärlich, wenn man berücksichtigt, dass sie sich auf den Sommer und Herbst beziehen, sowie auf Breiten zwischen 41° und 36°, und dass der tägliche Gang aller Elemente, jenen der absoluten Feuchtigkeit ausgenommen, sehr gross ist.

Ausser den in dem obengenannten Werke erhaltenen Beobachtungen habe ich noch benützt eine stündliche Beobachtungsreihe auf der höchsten Station der U. Pacificbahn, Shermann (Wyoming) in 2537 Meter (nach dem Nivellement der Ingenieure) vom 17. Juni bis 15. August 1872. Die directen stündlichen Beobachtungen des Barometers, der Temperatur eines trockenen und nassen Thermometers, der Windrichtung und Geschwindigkeit (gemessen mittelst eines Robinson'schen Anemometers) und der Bewölkung sind enthalten in dem Report of the Superintendent of the U. S. Coast Survey 1872. Stündliche Mittelwerthe für die gesammten 60 Tage finden sich bereits abgeleitet vor für das Barometer, die Temperatur des trockenen Thermometers und die relative Feuchtigkeit. Letztere konnten aber keine Verwendung finden, da die Berechnung nach Williamsons Tafeln (Glaishers Constanten) ohne Rücksicht auf den Barometerstand geschah. Ich habe desshalb die stündlichen Temperaturmittel des befeuchteten Thermometers abgeleitet und daraus nach Regnaults Formel die Dampfspannung und relative Feuchtigkeit berechnet, ausserdem auch noch die stündlichen Mittel für Bewölkung und Windgeschwindigkeit gebildet. Der stündliche Gang des Luftdruckes zu Fort Churchill, Sacramento und S. Francisco wurde dem obgenannten Werke von Williamson entlehnt.

Die folgende Tabelle I enthält die Namen, Positionen, Beobachtungszeiten und wichtigsten meteorologischen Mittelwerthe jener Stationen, für welche in dem Werke von Wheeler stündliche Mittelwerthe für Perioden von mindestens 10 Tagen mitgetheilt sind. Sherman ist des Vergleiches wegen beigefügt.

Die stündlichen Aufzeichnungen des Luftdruckes, der Temperatur und Feuchtigkeit an diesen Stationen wurden in drei Gruppen von Mittelwerthen vereinigt, wobei die Seehöhe und die Jahreszeit das Argument der Abgrenzung der Gruppen bildeten.

Gruppe *A* umfasst die Stationen: Georgetown (2), Green-River (2), Beaver ($3^1/_2$), Trinidad ($1^1/_2$), Santa Fé und Colorado Springs (je 1). Die eingeklammerten Zahlen geben an, mit welchen Gewichten mit Rücksicht auf die Beobachtungsdauer diese Stationen in die Mittelwerthe eingetreten sind. Seehöhe 8588 bis 5916 englische Fuss, Beobachtungszeiten zwischen 5. Juni bis 19. September in Summe 111 Tage.

Tab. I. Übersicht der Stationen auf den Plateaux der Rocky Mountains.

Ort	Westl. Länge	Nördl. Breite	Seehöhe Meter	Beobachtungs-Zeit	B. Mm.	t Celsius	t—t' Celsius	Tägl. Ampl. Luftdruck[1]	Tägl. Ampl. Temp.	Bewölkung 0—10
Santa Fé, New Mexico	105°56'7	35°41'3	2147	11.—20. Juni 73	593·4	21 2	7·8	1·9	17 6	3·5
Trinidad, Colorado	104 30·0	37 10·8	1842	4.—19. Sept. 73	616 1	18·5	6·5	1 8	17·9	4 5
Labran, Colorado	105 6·3	38 33·1	1590	12.—27. Aug. 73	633·6	23·7	7·2	1 7	20·8	4·3
Colorado Springs, Colorado	104 49·3	38 49·7	1829	29. Juli — 10. Aug. 73	616 2	19·9	4·2	2 0	14·5	5·5
Georgetown, Colorado	105 41 5	39 42·6	2617	16. Juni — 5. Juli 73	559 1	18·0	8·8	2·2	16·4	3·3
Hughes Col., Colorado	104 49 0	39 59 4	1531	12.—23. Juli 73	637·4	24·9	9 5	2·1	24 2	3·6
Cheyenne, Wyoming	104°48'8	41° 7'8	1841	15. Sept. — 21. Oct. 72	612·2	10·6	5·5	1 7	19·5	2·5
Laramie, Wyoming	105 35 6	41 18·9	2171	6.—20. Dec. 72	584·8	— 8 3	1 8	1·7	17·2	4 1
Green River, Wyoming	109 28·1	41 36 6	1858	5.—29. Juni 73	611·5	18 7	9·3	1·9	21·2	2 5
Ft. Fred. Steele, Wyoming	106 56·8	41 46·7	2085	30. Oct. — 27. Nov. 72	598·7	— 4 6	2 1	1·5	7·8	4·8
Gunnison, Utah	111°49'3	39° 9'4	1568	1. Nov. — 1. Dec. 72	634 4	— 2·1	2·7	2 1	19 2	4·0
Salt Lake City, Utah	111 53·7	40 46·1	1320	13. Juli — 1. Aug. 72	651·5	23 6	9·5	2·0	18·7	2 2
Beaver, Utah	112 38·6	38 16·4	1802	8—25. Aug., 30. Aug.—7. Sept. 72	616 6	19·4	8 7	2·4	15·3	2 7
Pioche, Nevada	114 26 3	37 55·4	1811	27. Sept. — 14. Oct. 72	615·5	17·1	10 8	1 4	13·0	1·5
Cottonwood Springs, Nevada	115 16·5	36 3·0	1051	31. Aug. — 14. Sept. 71	672·3	25 5	12·7	2·0	15·4	1 0
Camp Independenc, Cal.	118 12·7	36 50 2	1206	19. Juli — 9. Aug. 71	660·0	24·1	9·8	2·8	15·4	1·4
Shermann Wyoming	105°23'5	41° 7'8	2533	17. Juni — 15. Aug. 72	565 9	13·6	5·5	0·8	9·9	5·2

[1] Differenz des Morgen-Maximums vom Nachmittags-Minimum.

Gruppe *B* umfasst die Stationen: Salt Lake City ($1^1/_2$), Camp Independence ($1^1/_2$), Hughes, Labran, Cottonwood Springs (je 1). Seehöhe 5021 bis 3449 Fuss, Beobachtungszeiten zwischen 12. Juli — 14. September, in Summe 85 Tage.

Gruppe *C* (nur für Luftdruck) Cheyenne, Fort Fred. Steele, Gunnison Utah (je 1), an jeder Station wurde nahe während eines vollen Monates oder darüber beobachtet und zwar zwischen 15. September und 1. December, Seehöhe 6840 bis 5145 Fuss.

Gruppe *D*, für Luftdruck, enthält das Mittel aller genannten Stationen, dem noch Pioche (Nev.) beigezogen wurde, so dass es sich in Summe auf 309 Beobachtungstage stützt. In dieses letzte Mittel, welches zuerst gebildet worden war, sind die Stationen mit etwas anderen Gewichten eingetreten, als oben für die ersten Gruppen sich angegeben findet.

Ich muss noch bemerken, dass bei mehreren Stationen die Summe der positiven und negativen Abweichungen vom Mittel, wie sie in dem Werke von Wheeler mitgetheilt werden, nicht gleich sind. Diese Fehler, grösstentheils in Folge eines in der letzten Stelle nicht genauen Gesammtmittels entstanden, konnten fast durchgängig richtig gestellt werden.

Ich lasse nun die Tabelle II, enthaltend den Gang des Luftdruckes in Form von Abweichungen von den Mittelwerthen, folgen (siehe pag. 490).

Die Mittelwerthe des täglichen Ganges des Luftdruckes für die Gruppen *A* und *B* stimmen so vollkommen überein, dass wir in ihnen eine hinlänglich genaue Darstellung der täglichen Oscillation des Barometers auf den Hochebenen des Felsengebirges im Sommer erblicken dürfen. Das Charakteristische dieser Oscillation ist:

Frühes Eintreten des ersten Maximums schon um 8^h am., grosser Barometerfall bis zum stark entwickelten nachmittägigen Minimum um 5^h pm., kleines nächtliches Maximum circa um Mitternacht, kaum bemerkbares Morgen-Minimum. Der Luftdruck hält sich die ganze Zeit von 9^h Abends circa bis über Mittag über dem Mittel.

Die Tagescurve des Luftdruckes im Sommer auf den Plateaux des westlichen Nordamerika ist also ganz analog jener im Innern

Gruppe	A	B	C	D	Sherman	Ft. Churchill[1]	Sacramento	S. Francisco	Ft. Churchill	Sacramento	S. Francisco
Breite	38°8	38°5	40°7	39°3	41°7'8	39°18'	38°34'	37°48'	39°18'	38°34'	37°48'
Seehöhe ...	2020	1326	1830	1790	2533	1128	25	7	1317	25	7
Zahl d. Tage	111	85	96	309	60	30	60	60	120	240	240
Jahreszeit ..	Sommer		Oct. Nov.	Juni—Nov.	Sommer	Sommer	Sommer	Sommer	Jahr	Jahr	Jahr
Luftdruck	601·6	651·7	615·1	618·1	565·9	666·5	758·8	761·6	(651·7)	761·8	763·7
1h am.	·30	·13	·04*	·18	— ·09	(·40)	(— ·05)	(— ·20)	(·18)	(— ·06)	(— ·05)
2	·26	·13*	·10	·15*	— ·17	(·47)	(— ·05)	(— ·25)	(·15*)	(— ·12)	(— ·10)
3	·22*	·22	·19	·18	— ·19*	(·50)	(— ·05*)	(— ·27*)	(·16)	(— ·14)	(— ·13)
4	·31	·26	·25	·23	— ·17	·57	— ·03	— ·30	·18	(— ·17*)	— ·15*
5	·51	·53	·33	·40	·01	(·70)	·10	— ·07	(·33)	(— ·02)	— ·05
6	·63	·61	·45	·58	·06	(·88)	·25	·22	(·51)	·19	·12
7	·79	·79	·49	·69	·19	**1·01**	·66	·49	(·74)	·57	·40
8	**·80**	**·91**	·71	**·79**	·37	·90	·76	·66	·79	·75	·63
9	·68	·83	**·77**	·76	**·40**	·75	·86	·77	**·82**	·90	·84
10	·54	·61	·69	·63	·34	·58	**·87**	**·84**	·79	**·99**	**·89**
11	·31	·51	·51	·43	·29	·29	·81	·79	·54	·87	·76
Mittag	·02	·27	·04	·10	·16	— ·09	·69	·66	·16	·57	·48
1h	— ·32	— ·18	— ·35	— ·28	— ·01	— ·39	·43	·41	— ·27	·19	·10
2	— ·71	— ·53	— ·70	— ·64	— ·14	— ·75	·13	·08	— ·63	— ·17	— ·23
3	— ·92	— ·78	— ·88	— ·86	— ·29	— ·97	— ·23	— ·25	— ·89	— ·45	— ·48
4	—1·05	—1·07	— ·97*	—1·02*	— ·35	—1·18	— ·53	— ·53	—1·01	— ·63	— ·64
5	—1·15*	—1·21*	— ·81	—1·04*	— ·40*	—1·28*	— ·79	— ·71	—1·01*	— ·78	— ·74*
6	—1·00	—1·06	— ·65	— ·89	— ·32	—1·18	— ·91*	— ·73*	— ·88	— ·78*	— ·71
7	— ·72	— ·81	— ·45	— ·66	— ·19	— ·95	— ·92*	— ·68	— ·61	— ·70	— ·56
8	— ·35	— ·46	— ·21	— ·33	— ·07	— ·59	— ·81	— ·45	— ·35	— ·52	— ·33
9	·02	— ·11	·05	·00	·16	— ·24	— ·61	— ·20	— ·12	— ·35	— ·13
10	·21	·07	·16	·18	·19*	(·02)	— ·35	— ·10	(·05)	— ·14	·00
11	·30	·14	**·15**	·20	·16	(·22)	— ·15	— **·07**	(·15)	(— ·02)	**·05**
Mitternacht	**·33**	**·21**	·09	**·22**	·06	(·33)	— ·08	— ·12	(**·20**)	(— **·01**)	·03
Mittel	·51	·52	·42	·48	·20	·63	·47	·41	·48	·42	·36

[1] Die eingeklammerten Werthe sind von Williamson interpolirt.

des asiatischen Continents und steht im directen Gegensatze zum täglichen Gange des Barometers auf Bergen von entsprechender Seehöhe, wo umgekehrt das Nachmittags-Minimum sich fast bis zum Verschwinden vermindert und das Morgen-Minimum hingegen das Haupt-Minimum wird.

Es ist demnach, wie schon lange bekannt aber noch nie so entscheidend durch Beobachtungen nachgewiesen worden ist, nicht die absolute Seehöhe, sondern die örtliche Lage auf einem Bergabhange oder auf einem Berggipfel, welche die tägliche Barometercurve so wesentlich beeinflusst. Auf Hochebenen und in Hochthälern ist der tägliche Gang wie in der Niederung und auffallenderweise ist die Grösse der täglichen Amplitude von der Seehöhe fast unabhängig. In Tabelle I habe ich die tägliche Veränderung des Luftdruckes vom Morgen-Maximum zum Nachmittags-Minimum für jede einzelne Station mitgetheilt. Es lässt sich daraus ersehen, dass die Seehöhe kaum einen Einfluss auf die Grösse der täglichen Oscillation hat, wahrscheinlich aber die Umgebung der Station von grossem Einfluss ist. Man darf annehmen, dass in grossen Thälern die Amplituden grösser sind, als in sehr weiten Becken oder auf freien Hochebenen in gleicher Seehöhe.

Station	Seehöhe	Tägl. Ampl. des Barom.	Tägl. Ampl. des Therm.
Georgetown....	2617	2·2	16·4
Santa Fé......	2147	1·9	17·6
Green River....	1858	1·9	21·2
Trinidad......	1842	1·8	17·9
Colorado Springs	1829	2·0	14·5
Beaver.......	1802	2·4	15·3
Mittel..	2016	2·0	17·1
Labran.......	1590	1·7	20·8
Hughes..... ..	1531	2·1	24·2
Gunnison......	1568	2·1	19·2
Salt Lake City .	1320	2·0	18·8
Independence ..	1206	2·8	15·4
Cottonwood Sp..	1051	2·0	15·4
Mittel..	1378	2·1	18·9

Die tägliche Oscillation des Luftdruckes ist demnach in der Seehöhe von 2016 Meter noch eben so gross, wie in 1378 Meter,

die tägliche Wärmeschwankung ist in dem tieferen Niveau gleichfalls nur wenig grösser. Es zeigen ferner die Stationen mit der grössten täglichen Wärmeschwankung nicht die grössten täglichen Barometeroscillationen, wie man vielleicht hätte annehmen mögen.

Der tägliche Gang des Barometers auf der Station Sherman zeigt eine ziemlich auffallende Verschiedenheit von jenem aller übrigen hier angeführten Plateaux-Stationen; namentlich ist hervorzuheben die geringe tägliche Amplitude, welche nur $^1/_3$ von jener an der noch etwas höheren Station Georgetown beträgt. Wahrscheinlich dürfte sich dies durch die Lage der Station Sherman erklären, welche dem Kamme des von Osten her sanft ansteigenden Plateau's entspricht. In dem Report der Coast Survey, der die Beobachtungen enthält, heisst es: Sherman is situated on the summit of the Black Hills, the eastern most range of the Rocky-Mountains, and at the highest elevation crossed by the Union Pacific Railroad. The summit is a plateau, the ascent to which from the Missouri River is to gradual, that the traveler looks in vain for the „Hills". Even when the summit is reached, the snowcapped mountains to the westward, as seen across the southern terminus af Laramie Valley, are so prominent, and apparently high, as to keep up, in a measure, the illusion that the observer is still on the so-called „Plains". Die tägliche Barometerschwankung zu Sherman dürfte demnach einigermassen jenen Einflüssen unterworfen sein, welche sich auf Bergkämmen und Berggipfeln äussern, und in einer Verspätung des Vormittags-Maximums, Abschwächung des Nachmittags-Minimums und Verstärkung des Morgen-Minimums bestehen, wie es sich gerade bei Sherman, verglichen mit den anderen Stationen, die wohl alle Thallage haben, zeigt. Jedenfalls ersieht man daraus, welch' grossen Einfluss die Localität auf die tägliche Barometeroscillation hat.

Die früher namhaft gemachten Eigenthümlichkeiten der täglichen Barometeroscillation, wie sie die Gruppenmittel *A* und *B* zeigen, dürften sich am einfachsten erklären durch die Vorgänge, welche ich bei einer andern Gelegenheit erläutert habe.[1] Mit steigender Wärme fliesst von den Luftschichten über einem Thale

[1] Zur Meteorologie der Alpengipfel. Sitzungsberichte der Wiener Akademie, Octoberheft 1878, Band LXXVIII.

eine gewisse Luftmenge gegen die Bergabhänge hin ab, daher das frühere Eintreten des Morgen-Maximums und die ungewöhnliche Vertiefung des Nachmittags-Minimums. Nachts fliessen die Luftmengen wieder zurück, daher die Unterdrückung des Morgen-Minimums (auf Abhängen und Gipfeln umgekehrt die Verstärkung dieses Minimums).

Ein analoger Vorgang findet zwischen Land und Meer statt, bei Tag fliesst in der Höhe die Luft über dem Lande zum Meere hin ab und bewirkt dort eine Drucksteigerung, welche sich schon an den Küsten in der Verspätung des Morgen-Maximums und Nachmittags-Minimums äussert. Abends und Nachts kehrt sich der Vorgang um, es fliesst Luft in der Höhe vom Meere gegen das Land ab, dort steigt der Druck, an der Küste sinkt er und das Abend-Maximum fällt daher klein aus. Dies zeigt sich schon sehr gut in dem täglichen Barometergang zu S. Francisco und Sacramento. Bildet man die Differenzen zwischen den täglichen Barometercurven der Gruppe *B* und S. Francisco (die Gruppe *B* repräsentirt auch eine Inlandcurve überhaupt), so tritt dieses Verhältniss sehr deutlich hervor:

Inland (Gruppe *B*) — S. Francisco.

7^h am.	·30 Mm.	1^h pm.	—·59	7^h pm.	—·13	1^h am.	·33
8	·25	2	—·61	8	—·01	2	·38
9	·06	3	—·53	9	·09	3	·49
10	—·23	4	—·54	10	·17	4	·56
11	—·28	5	—·50	11	·21	5	·60
Mittag	—·39	6	—·33	Mittern.	·33	6	·41

Zur Zeit des Wärme-Maximums erscheint der Luftdruck an der Küste am meisten gesteigert, zur Zeit des Temperatur-Minimums hingegen im Inlande. Von 9^h Vormittags circa bis 8^h Abends scheint oben mehr Luft gegen die See hin abzufliessen, als unten zum Ersatze herbeiströmt, umgekehrt verhält es sich während der Nacht. F. Chambers hat schon vor einiger Zeit dasselbe nachgewiesen mittelst der stündlichen Beobachtung der sieben Observatorien des Met. Committee in England.[1]

[1] Quarterly Journal of the Met. Soc. Vol. V. Diurnal Variations of the Barometric Pressure in the British Isles.

Die Aufstellung einer allgemeinen Theorie der täglichen Barometer-Oscillation wird wesentlich erleichtert, wenn wir uns vorher über die Modificationen klar werden, welche die tägliche Schwankung des Luftdruckes erleidet durch die tägliche periodische Übertragung von Luft vom Lande gegen die See und vom Thal gegen die Berge und wieder zurück.

Der tägliche Gang in der Gruppe *C* zeigt den Einfluss der Jahreszeit, respective der Abnahme der Insolation und Erwärmung der Luftschichten. Das Morgen-Maximum tritt später ein, das Nachmittags-Minimum früher, die Amplitude wird kleiner.

In dem im Sommer unter einer wahrhaft afrikanischen Hitze und Trockenheit leidenden Gebiete von Arizona erreicht die tägliche Oscillation des Luftdruckes eine ausserordentliche Grösse, wie die folgenden Zahlen zeigen:

Ft. Mohave 35°2′ N. 230 Meter (August und September.)

Täglicher Gang des Luftdruckes in Abweichungen vom Mittel.

7h am.	1·7 Mm.	3h pm.	—1·0 Mm.
8	1·7	4	—1·9
9	1·8	5	—2·2
10	1·6	6	—2·1
11	1·2	7	—1·9
Mittag	0·7	8	—1·6
1	0·1	9	—1·0
2	—0·7	Amplitude	4·0

Die nun folgende Tabelle III enthält die Daten über den täglichen Gang der Temperatur, der absoluten und relativen Feuchtigkeit auf den Plateaux der Rocky Mountains im Sommer.

Die Mittel für Gruppe *A* und *B* sind auf die gleiche Weise gebildet worden, wie jene für das Barometer. Über die Berechnung der Feuchtigkeit ist es nöthig, einige Erörterungen vorauszuschicken.

Die Originaltabellen enthalten, wie schon bemerkt, die Abweichungen der Stundenmittel der Psychrometerdifferenz, der absoluten und relativen Feuchtigkeit vom Gesammtmittel. — Die Berechnung der Feuchtigkeit geschah nach Willamson's[1] Tafeln.

[1] Williamson: On the use of the barometer. Appendix. Practical tables pg. 73 etc.

welche auf den Constanten von Glaisher (1856) beruhen und mit einen mittleren Luftdruck von 29"7 (= 754 Mm.) berechnet sind. Abgesehen davon, dass die Glaisher'schen Constanten gegenüber den allgemein acceptirten von Regnault namentlich bei grösserer Lufttrockenheit sehr abweichende (grössere) Feuchtigkeiten geben, ist es an sich unzulässig, eine Psychrometertafel, welche für einen Luftdruck von 754 Mm. berechnet ist, auf Beobachtungen in Höhen anzuwenden, wo der Luftdruck nur mehr 672 bis 559 Mm. beträgt. Da die sogenannte Barometercorrection der Psychrometerformel mit der Psychrometerdifferenz wächst, so wird durch ihre Vernachlässigung auch der tägliche Gang der absoluten und relativen Feuchtigkeit gefälscht.

Ich musste daher die Feuchtigkeit neu berechnen und leitete desshalb zuerst für die Gruppen *A* und *B* den mittleren Gang der Psychrometerdifferenzen ab, sowie deren absoluten Werthe.[1] Mittelst dieser letzteren wurde die Temperatur des feuchten Thermometers wieder hergestellt und dann darauf die Regnault'sche Psychrometerfromel angewendet.[2] (Siehe pag. 496.)

Betrachten wir zunächst den Gang der Temperatur, so zeigt derselbe für Sherman, Gruppe *A* und *B* trotz der beträchtlichen Höhenunterschiede, grosse Übereinstimmung. Was am auffallendsten hervortritt ist, dass das Maximum so nahe auf Mittag fällt, zu Sherman circa auf $12^1/_2$, Gruppe *A* detto $12^1/_2$, Gruppe *B* (700 Met. niedriger) $1^1/_2{}^h$ pm. Das Maximum der Lufttemperatur an der Erdoberfläche fällt also hier sehr nahe zusammen mit dem Maximum der Insolation. Dies ist wohl ein Effect der starken Wärmeausstrahlung auf diesen luftverdünnten und trockenen Höhen, welche eine weitere Ansammlung der Wärme nach Culmination der Sonne, wie sie in der Niederung stattfindet, nicht zulässt. Vielleicht trägt auch die Zunahme der Bewölkung nach Mittag etwas hiezu bei, es ist aber wohl zu erwägen, dass ja auch in der Niederung die Bewölkung nach Mittag

---

[1] Da die einzelnen Beobachtungen des trockenen und feuchten Thermometers nicht mitgetheilt sind, blieb kein anderes Verfahren übrig.

[2] Williamson's Tafeln geben selbst für grosse Höhen trotz der Vernachlässigung der Barometercorrection noch viel zu grosse Werthe der Feuchtigkeit. Z. B. Cottonwood Springs: *e* nach Regnault's Formel 4·2, nach Williamson's Tafeln 6·1 Mm. etc.

Tab. III. **Täglicher Gang der Temperatur, der absoluten und relative Feuchtigkeit.**

	Sherman 41°1 N 2533 Met. 60 Tg.				Gruppe *A* 38°8 N 2020 Met. 111 Tg.				Gruppe *B* 38°5 N 1326 Met. 85 Tg			
	t	*t—t'*	*e*	Rel. Feuch.	*t*	*t—t'*	*e*	Rel. Feuch.	*t*	*t—t'*	*e*	Rel. Feuch
1h am.	9·4	3·0	5·8	**66**	12·8	4·6	5·9	54	17·6	6·3	6·6	44
2	9·2	3·0	5·7	65	11·8	4·2	5·8	56	17·2	6·2	6·6	45
3	9·0	3·0	5·6	65	11·2	4·0	5·7	57	16·5	5·9	6·4*	46
4	8·7*	3·0	5·4*	65	10·5*	3·7	5·6*	60	15·8	5·5	6·5	49
5	8·8*	3·0	5·5	63	10·4*	3·5	5·8	**61**	15·2*	4·9	6·7	**53**
6	10·4	3·8	5·6	60	13·0	4·5	6·2	55	18·4	5·8	7·8	50
7	12·5	4·8	5·7	52	16·6	5·9	6·7	48	22·3	7·3	8·9	41
8	14·2	5·6	**5·8**	48	19·9	7·4	**7·2**	42	25·4	9·1	**9·0**	37
9	15·9	6·9	5·5	41	22·7	9·3	7·0	34	27·8	10·9	8·6	31
10	17·2	7·8	5·3	36	25·3	11·0	6·8	30	30·4	12·6	8·5	26
11	18·2	8·6	5·1*	33	26·4	11·7	6·7	26	31·9	13·6	8·5	24
Mittag	**18·6**	8·8	5·1*	32*	**27·0**	12·4	6·4	24	33·1	14·6	8·1	22
1	**18·4**	8·3	5·5	35	**27·0**	12·5	6·3	24	**33·8**	15·0	7·7	20
2	18·2	8·1	5·5	35	26·8	12·6	6·1	23*	33·4	15·3	7·4	19*
3	18·2	8·1	5·5	36	26·3	12·3	6·0	23*	32·7	14·8	7·5*	20
4	17·6	7·7	5·6	37	25·4	11·8	6·0	24	31·7	14·1	7·6	22
5	16·7	7·1	5·7	40	24·3	11·2	5·9	26	30·1	12·9	**7·8**	25
6	16·0	6·7	5·7	42	21·9	9·8	5·8*	30	27·1	11·3	7·4	28
7	14·1	5·4	5·9	49	19·5	8·2	6·0	36	24·2	9·4	7·6	34
8	12·4	4·5	5·9	55	17·3	6·8	**6·1**	42	21·6	8·6	(7·2)	38
9	11·6	4·0	**6·0**	59	16·0	6·2	**6·0**	44	20·4	7·9	6·8	38
10	10·9	3·6	**6·0**	62	14·9	5·7	6·0	47	19·6	7·3	6·8	41
11	10·3	3·3	5·9	63	14·3	5·4	5·9	49	18·9	6·9	6·8	42
Mittn.	9·8	3·1	5·2	66	13·5	5·0	5·9	51	18·1	6·5	6·8	44
Mittel	13·6	5·5	5·6	50	18·95	7·90	6·2	40	24·28	9·28	7·5	35

noch zunimmt und dass trotzdem das Wärme-Maximum im Sommer dort erst zwischen 2h und 4h pm. eintritt.

Das Minimum, natürlich in erster Linie von der Jahreszeit abhängig, tritt an allen drei Punkten zwischen 4h und 5h ein. Die tägliche Schwankung der Temperatur ist sehr gross, bei Gruppe *B* erreicht sie selbst im Mittel von nahe 3 Monaten noch 18°1 C. In einzelnen Fällen wurden ganz erstaunlich grosse tägliche Wärmeschwankungen beobachtet, von denen hier welche eine Erwähnung verdienen.

Green River	27/28. Juni 1873.	11h am	33°2,	4h am	3°8	Diff.	29°4
Ogden (Utah)	30. Sept. 1873	3h am	— 0·2	1h pm	26·4	„	26·6
Prescott Ariz.[1]	2/3. Nov. 1872	1h pm	27·3	2h am	—1·7	„	29·0
Gunnison	2. Nov. 1872	2h am	— 8·0	2h pm	17·2	„	25·2
Laramie	8. Dec. 1872	7h am	—12·7	1h pm	17·2	„	29·9
Cheyenne Wy.	9. Oct. 1873	6h am	— 6·7	2h pm	24·4	„	31·1
Hughes Co.	13/14. Juli 1873	1h pm	41·7	5h am	11·6	„	30·1
Labran Co.	27. Aug. 1873	4h am	11·2	12h Mittg.	43·7	„	32·5

Dies sind gewiss Wärmeänderungen im Laufe eines halben Tages, wie sie in den Wüsten der alten Welt kaum extremer beobachtet worden sind.

Der tägliche Gang der absoluten Feuchtigkeit ist gleichfalls sehr übereinstimmend an allen drei Punkten, das erste Maximum (für Gruppe *A* und *B* zugleich das Hauptmaximum des Tages) tritt schon um 8h Morgens ein, dann sinkt die Dampfspannung wieder und erreicht um Mittag oder Nachmittags ein Minimum. Ein zweites Maximum tritt Abends ein und etwa um 4h Morgens ein zweites Minimum. Da die tägliche Amplitude nur gering ist, so ist die Verschiedenheit der Eintrittszeiten der nachmittägen Extreme leicht erklärlich, es handelt sich nur um Differenzen von einigen Zehnteln des Millimeters und die Mittel beruhen ja nur auf Beobachtungen von 2—4 Monaten. Der hier gefundene tägliche Gang der Dampfspannung stimmt mit jenem überein, welcher von den continentalen Stationen Russlands bekannt ist, namentlich ist hiefür das Morgen-Maximum bezeichnend, welches an den Orten *A* und *B* sehr ausgesprochen auftritt.

Der tägliche Gang der relativen Feuchtigkeit verläuft sehr einfach, von einem Morgen-Maximum um 5h zu einem tiefen Nachmittags-Minimum um 2h. Bei Sherman fällt das Maximum

---

[1] 34°33'N 1622 Meter Seehöhe.

schon auf 1ʰam., das Minimum auf Mittag. Die Amplituden sind sehr gross und betragen für Sherman 34%, für Gruppe *A* 38%, für Gruppe *B* wieder 34 %. An letzterem Orte erreicht selbst das Maximum keinen höheren Betrag als 53% und das nachmittägige Minimum sinkt auf 19% herab. Ob jedoch die **Regnault**'sche Psychrometerformel für diese Trockenheitsgrade und bei dem geringen Luftdruck noch hinreichend genaue Resultate gibt, ist sehr zu bezweifeln. Wir stellen im Nachfolgenden einige der extremsten beobachteten Psychrometerdifferenzen, wie sie dem Werke von Wheeler entnommen werden können, zusammen und leiten daraus die Werthe der relativen wie der absoluten Feuchtigkeit nach der gewöhnlichen Regnault'schen Formel ab. Als Luftdruck zur Zeit der Beobachtung konnte nur der mittlere Werth desselben an jeder Station in die Formel eingeführt werden.

Station	Datum	t	t'	$t-t'$	e	Relat. Feuch.
Georgetown	24 VI. 73	33·3	16·2	17·1	6·0	·157
Green River	20 „ „	34·7	15·3	19·4	3·4	·082
Santa Fé	18 „ „	36·8	18·1	18·7	6·4	·140
S. Lake City	19 VII. 72	37·2	17·6	19·6	4·6	·098
Hughes	15 „ 73	42·4	16·7	25·7	0·9	·015
Independence	27 „ 71	30·9	13·2	17·7	2·0	·059
Beaver	4 VIII. 72	30·5	12·7	17·8	2·2	·066
Labran	14 „ 73	41·7	21·3	20·4	8·3	·138
Cottonwood Spr.	1 IX. 71	37·3	14·7	22·6	0·2	·004
Trinidad	16 „ 73	34·0	17·1	16·9	6·1	·153

Die hier angeführten Trockenheitsgrade gehören zu den extremsten, welche überhaupt bekannt sind. Die Regnault'sche Psychrometerformel wird in einigen dieser Fälle wohl nur mehr eine sehr geringe Annäherung an die Wahrheit geben. Man sieht, dass die trockenen Plateauländer des westlichen Amerika eine Gelegenheit bieten würden zur Prüfung der Psychrometerformeln, wie sie sich kaum irgend anderswo günstiger wieder finden dürfte. Alle nöthigen Elemente wären vorhanden, grösste Trockenheit, hohe Temperaturen und niedriger Luftdruck; Temperatur wie Feuchtigkeit noch dazu in weiten Grenzen variirend.

Ich habe die zwei extremsten Fälle (Hughes, Cottonwood Springs) auch nach Belli's Psychrometerformel berechnet, in der zur Rechnung bequemeren Form, welche ihr Chistoni gegeben hat und mit den von diesem Autor für t' zwischen 10 und 15° und B zwischen 680 und 688 Mm. ermittelten Constanten.[1] Man erhält:

Hughes $e = 1 \cdot 14$ (statt $0 \cdot 91$) relat. Feuchtigk. $1 \cdot 8\%$
Cottonwood Springs $e = 0 \cdot 59$ („ $0 \cdot 20$) „ „ $1 \cdot 2$.

Wahrscheinlich sind diese höheren Werthe richtiger als die niedrigeren, welche Regnault's Formel gibt.

Von der Station Laramie (Wyoming 41°19′, 7123 feet) liegt die Angabe vor: 13. Dec. 1872 3^hpm. $t = 14{\cdot}4$, $t' = 2 \cdot 2$, somit $t - t' = 12{\cdot}2$. Sowohl Regnault's Formel (mit Rücksicht auf den Luftdruck) als jene Belli's geben für diesen Fall eine negative Dampfspannung. Wenn also die Beobachtung richtig war, so zeigt sie, dass bei niedrigen Temperaturen und grosser Trockenheit alle Psychrometerformeln ihre Anwendbarkeit verlieren.

Alle bisher an den Stationen auf den Plateaux des Felsengebirges angestellten Feuchtigkeitsbeobachtungen dürften für die Meteorologie fast gänzlich verloren sein, da sie ohne Rücksicht auf den niedrigen Luftdruck nach den gewöhnlichen Tafeln berechnet sind, die zu einer Neuberechnung nöthige Daten aber nicht mitgetheilt werden. Da die sogenannte Barometercorrection der Psychrometerformel in diesen Fällen schon einen grossen Betrag erreicht (in obigen extremen Fällen erhält man Hughes: e ohne Correction $-1 \cdot 3$ Mm., Barometer-Correction $+2 \cdot 4$ Mm., Cottonwood Springs: e ohne Correction $-1 \cdot 1$, Barometer-Correction $+1 \cdot 5$ etc.), so erklärt es sich leicht, dass in den Bulletins des Signal Office die relative Feuchtigkeit zu Denver und anderen Plateau-Stationen häufig auf 0% herabsinkt. Welche Gelegenheit hätte auch hier das Signal Office, der Meteorologie unschätzbare Dienste zu leisten, wenn es auf seinen Stationen im Felsengebirge vergleichende Beobachtungen an Psychrometern und absoluten Hygrometern anstellen liesse.

---

[1]
$$e = \frac{e' - 0 \cdot 00078\,(t - t')\,(b - e')}{1 + [0 \cdot 0178\,(t - t')\,(b - e')] : b}$$

Siehe Annali della Meteorologia Italiana, Vol. I, 1880.

Die Tabelle IV enthält nachträglich einige Daten über den täglichen Wärmegang im Spätherbst und Winter an Stationen, von denen eine längere Beobachtungsreihe vorlag, ferner den täglichen Gang der Bewölkung und der Windgeschwindigkeit auf den Plateaux der Rocky Mountains im Sommer. (Siehe pag. 501.)

Es ist sehr auffallend, dass im täglichen Wärmegang des Herbstes und des Winteranfanges das Maximum erst gegen 2^h also circa $1^1/_2$ Stunden später eintreten soll als im Sommer. (Siehe Tab. III.) Allerdings ist zu berücksichtigen, dass diese Beobachtungsresultate sich auf andere Stationen beziehen und die Beobachtungsperioden nur kurz sind. Die einzige Erklärung kann aber hierin nicht liegen. Die täglichen Temperatur-Amplituden sind auch in dieser späten Jahreszeit noch sehr erheblich: Cheyenne 19°5, Gunnison 19°3, Laramie 17°2. (December.)

Der tägliche Gang der Bewölkung auf dem Plateau des Felsengebirges ist (wenigstens im Sommer) sehr ausgesprochen und sehr regelmässig, wie die Zahlen für die Gruppen *A*, *B* und für Sherman zeigen.

Der mittlere tägliche Gang der Bewölkung ist abgeleitet worden aus den Beobachtungen an den Stationen: Georgetown (2), Green River (2), Santa Fé, Colorado Springs, Beaver (2), Trinidad, Cheyenne (2), Pioche Nev., Ft. Steele, Salt Lake City, Hughes, Independence (2), Labran, Cottonwood Springs, Gunnison. Neben dem Gesammtmittel *B* ist auch das Partialmittel *A* der erstgenannten fünf Stationen in die Tafel aufgenommen worden, um zu zeigen, dass der tägliche Gang selbst für einzelne Localitäten und im Mittel von kaum drei Monaten schon ebenso bestimmt hervortritt, wie im Mittel aller Stationen und 10monatlicher Beobachtungen. Übrigens zeigt auch Sherman allein selbst im Mittel von blos 60 Tagen den gleichen Gang.

Das Maximum der Bewölkung tritt zwischen 3^h und 4^hpm. ein (zu Sherman schon um 2^hpm.), dann nimmt die Bewölkung continuirlich ab bis zu einem sehr ausgeprägten Minimum um 3^h Morgens, die Bewölkung sinkt um diese Zeit auf $^1/_3$ bis $^1/_2$ von der um 2—4^h Nachmittag herrschenden herab. Gleich nach erreichtem Minimum steigt die Bewölkung anfänglich wieder rasch zu einem zweiten secundären Maximum zwischen 5 und 7^h Morgens, welches wohl der Nebelbildung zugeschrieben werden darf. Es

	Täglicher Gang der Temperatur				Tägl. Gang der Bewölkung			Täglicher Gang der Windstärke		
Ort	Cheyenne	Ft Steele	Gunnison	Laramie	A	B	Sherman	B	Sherman	
N.-Breite . . .	41°8′	41°47′	39°10′	41°19′	Zahl der Beobachtungstage			Zahl der Beobachtungstage		
Seehöhe . .	1841	2085	1568	2171	86	309	60	264	60	60
Periode . . .	15. Sept.—21. Oct.	November	November	6—20. Dec.	Skale 0—10			1—10	miles pro Stunde	
Bewölkung	2 5	4 8	4·0	4·1					*a*	*b*
Temperatur	10°6	—4·6	—2 0	—8·3						
1h am	—7·7	—1·9	—5·4	—5·3	1·98	2·14	3·72	**1·18**	12·2	11·7
2	—8·1	—2·2	—6·2	—5·1	1·76	1·92	3·58	1·06	10·0	10·7
3	—8·5	—2·4	—7·2	—5·6	1·74*	1·90*	3·50*	0·96	10·3	10·1*
4	—8 4	—3·1	—7·6	—6·0	2·31	2·10	4·05	0·95*	10·1	10·5
5	—8·5*	—[illegible]·2*	—8·1*	—6·6*	2·41	2 18	**4·33**	0·94*	11·1	10·8
6	—8·3	—3·7*	—7·6	—6·2	**2·74**	2·53	4·17	0·98	10·9	11·6
7	—6 8	—2·5	—7 0	—4·4	2·41	**2·67**	3·72	1·00	13·2	12·7
8	0·1	—1·3	—3·2	—2·4	2·33*	2 53	3·80	1·09	13·5	13·8
9	4·9	0·5	1·2	1·5	2·46	2·60	4·00	1·12	14·9	14·5
10	7·4	2 6	4·7	5·4	2·82	2·78	4·73	1·16	14·6	15·2
11	8·7	3·3	7·2	8 7	3·43	3·18	5·82	1·25	16·6	16·0
Mittag	9·9	3 5	9·2	9·2	3·57	3·37	6·57	1·47	16·5	16·5
1	10·7	3·7	10·4	**10·2**	4·43	3·91	7·17	1·64	16·1	16·5
2	**11·0**	**4·0**	**11·2**	**10·6**	5·13	4·25	**7·25**	1·76	17·2	17 0
3	10·8	3·9	9·2	8·5	**5·54**	**4·50**	7·17	**1·83**	17·4	**17·4**
4	9·7	2·8	7·1	6 4	5·47	**4·40**	7 03	1·82	17·7	**17·5**
5	6·4	1·4	4·5	1·8	5·41	4·32	6·42	1 64	17·2	17·0
6	1·6	0·5	1·6	—0·6	5·31	4·12	6·22	1·43	15·8	15·7
7	—1·1	—0 2	0·0	—1·4	4·44	3·69	5·85	1·18	13·9	13·8
8	—2 8	—0·3	—0·9	—2·2	4 19	3 21	5 87	1·14	11·5	12 3
9	—4·4	—0·7	—1·9	—2·7	3·14	2·73	5·30	1·16	12·5	12·0
10	—5·2	—1·2	—2·9	—4·2	2·61	2·41	4·63	1·10	11·4	11·7*
11	—6·4	—1·5	—3·9	—4·8	2·03	2·20	4·40	1·03*	11·9	11·8
Mitternacht	—7·2	—1 6	—4·5	—5·2	2 07	2·19	4·43	1 10	12·2	**12·2**
Mittel . .	6·1	2·2	5·5	5·2	3·32	3·00	5 16	1·25	**13·7**	13·7

[1] Die Columne *a* enthält die rohen Mittel, die Columne *b* die ausgeglichenen Werthe, jedes Stundenmittel wurde mit dem halben Betrage seiner Nachbarwerthe zu einem Mittel vereinigt.

findet dann rasch wieder eine Aufheiterung statt und um 8^ham. tritt noch ein kleines secundäres Minimum ein.

Dieser Gang der Bewölkung stimmt überein mit jenem, welcher auch in Wien im Sommerhalbjahr beobachtet wird, die Amplitude ist aber an letzterem Orte viel kleiner.

Den täglichen Gang der Windstärke habe ich abgeleitet für die Station Sherman und als Mittel der Stationen: Georgetown, Green River, Santa Fé, Colorado Springs, Hughes, Independence, Beaver, Labran, Cottonwood Springs, Cheyenne, Pioche, Ft. Fred. Steele und Gunnison. Den längeren Beobachtungsreihen ist ein doppeltes Gewicht beigelegt worden. Die Windstärke wurde an diesen Stationen geschätzt nach der Skale 1—10, zu Sherman gemessen mittelst eines Robinson'schen Schalenkreuzes. Der tägliche Gang der Windgeschwindigkeit, wie er auf diese Weise sich herausstellte, stimmt vollkommen überein mit dem für alle Orte in wärmeren Klimaten bisher gefundenen. Das Maximum tritt ein zwischen 3^h und 4^h pm., das absolute Minimum Morgens zwischen 2^h und 4^h. Sehr bezeichnend und gleichfalls an vielen anderen Orten sich wiederholend ist das kleine secundäre Maximum um Mitternacht oder 1^h Morgens, dem ein kleines Minimum zwischen 10 und 11^h pm. vorausgeht. Es ist dies wahrscheinlich der Effect eines Nachtwindes (absteigenden Thalwindes), der aber sehr schwach bleibt. Die Amplitude der täglichen Windstärke ist relativ sehr gross, indem das Maximum zum doppelten Betrage des Minimums anschwillt.

Nachstehend gebe ich zum Schlusse noch eine kleine Tabelle, welche zum Vergleiche mit den früheren von Interesse ist, indem sie den täglichen Gang aller Elemente an einer Küstenstation (Californiens) ersichtlich macht. (Siehe pag. 503.)

Die tägliche Amplitude des Luftdruckes an der Küste ist blos 1·9 Mm., während sie im Innern des Landes (Mohave) 4 Mm. erreicht, die tägliche Wärmeschwankung beträgt blos 11°0, die absolute Feuchtigkeit erreicht ihr Maximum zugleich mit dem Wärmemaximum. Die Luft ist bei Nacht mit Feuchtigkeit gesättigt, die relative Feuchtigkeit nimmt aber bis Mittag um 34% ab. Sehr ausgesprochen ist der tägliche Gang der Windstärke, das Maximum fällt auch hier auf den Nachmittag, der Gang der Bewölkung ist aber der entgegengesetzte von dem auf den Plateaux

Los Angeles Cal. 34°3′ N.-Br., 118°11′ W., 99 Meter Seehöhe.
11—28. Juni 1875. (18 Tage.)

Zeit	*b*	*t*	*t′*	*e*	Relative Feucht.	Wind-stärke	Bewölkung
1ʰ am	—·16	13·4	12·6	10·4	91	0·0	8·1
2	—·19*	13·4	12 6	10·4	91	0 1	8·1
3	—·16	13·3	12·2	9·9	88	0·2	8·5
4	·09	13·3	12·3	10·1	89	0·4	8·6
5	·30	13·5	12·6	10·3	90	0·6	9·5
6	·42	14·7	13·5	10 8	87	0·4	8·6
7	·80	16·4	14·4	11·0	79	0·7	7·9
8	1·11	18·6	15·3	10·9	69	1·0	7·6
9	·90	20·6	16·8	11·9	66	1·0	6·7
10	·83	22·7	18·0	12·5	61	1·2	2·4
11	·55	23·5	18·3	12·5	58	1·6	0·6
Mittag	·30	24·3	18·8	12·8	57	2·0	0·1
1	·12	23·9	18·7	12·9	59	3·1	0·1
2	—·11	22·1	17·7	12·4	63	3·1	0·1
3	—·34	21·7	17·3	12·0	62	3·0	0 0
4	—·67	21·3	17·0	11·8	63	3·3	0·0
5	—·85	20 7	16·8	11·9	66	3 0	0·0
6	—·85*	19·7	16·3	11·7	69	2·8	0·0
7	—·72	16·9	14·8	11·3	79	1·1	0 0
8	—·51	14·9	13·7	10·9	87	0·9	0·3
9	—·26	14·0	13·1	10·7	89	0·6	1·0
10	—·16	14·0	12·6	10·0	85	0·4	3·6
11	—·19	13 6	12·5	10·1	88	0·1	5·9
Mitternacht	—·24	13·5	12·7	10·5	90	0·1	7·6
Mittel..	753·71[1]	17·7	15·0	11·2	76	1·28	4·0

zur Zeit des Temperatur-Minimums fast vollständige Himmelsbedeckung, mit steigender Wärme rasche Aufheiterung, so dass die Stunden von Mittag bis 8ʰ Abends fast völlig heiter sind.

[1] Mittel der Abweichungen: 0·45, wie für Sacramento und S. Francisco.

Studie über Energie producirende chemische Processe.

Von F. Wald.

(Aus dem chemischen Laboratorium der deutschen technischen Hochschule zu Prag.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 17. Februar 1881.)

Es ist bekannt, dass eine Reihe chemischer, mit grosser Energieproduction verbundener Processe erst unter dem Einflusse äusserer Einwirkungen, z. B. der Temperaturerhöhung, des Lichtes etc. stattfinden kann; es genügt also gewöhnlich die chemische Affinität allein nicht, um einen chemischen Vorgang zu Stande zu bringen.

Zur Erklärung dieser Thatsache pflegt man anzunehmen, dass die Ätherhüllen der Moleküle die hinreichende Näherung der Atome verhindern, und dadurch unter normalen Umständen gewisse chemische Processe unmöglich machen.

Es ist immerhin bedenklich, den Ätherhüllen eine so grosse Widerstandsfähigkeit zuzuschreiben; nimmt man aber diese Erklärung an, dann vermag man sich allerdings Rechenschaft zu geben, warum sich etwa Schwefeldioxyd nicht direct an der Luft oxydirt; wie soll aber erklärt werden, dass gerade bei den gewöhnlichsten Vorgängen, den Wechselzersetzungen der Salze etc., bei welchen die freiwerdende Wärmemenge sehr klein ist, die Ätherhüllen gar kein Hinderniss bieten? Auch käme man leicht in die Lage, bald die Ätherhülle eines Moleküles als sehr fest anzunehmen, weil es sich mit einem anderen nur sehr schwer umsetzt, bald aber dieselbe als sehr lose annehmen zu müssen, weil dasselbe Molekül mit einem dritten ohne Schwierigkeit einen chemischen Process durchmacht.

Es ist daher diese Erklärung nicht consequent durchführbar, und der Versuch berechtigt, eine neue aufzustellen. Ehe ich aber dies unternehme, muss ich Einiges vorausschicken; ich lege dabei meinen Betrachtungen die Anschauung von Clausius zu Grunde.

Mehrere Forscher sind zur Annahme gelangt, dass die Moleküle nur einen kleinen Antheil an der Raumerfüllung irgend eines Körpers haben, dass also die Dimensionen der Moleküle im Vergleiche zu ihren mittleren Abständen ziemlich klein sind. Insbesondere gilt dies von den Molekülen der Gase, deren mittlere Abstände etwa 10—12mal grösser sind als jener der festen und flüssigen Körper; so vergrössert sich das Volumen des Wassers bei der Verdampfung etwa 1700mal, daher wachsen die mittleren Entfernungen der Wassermoleküle im Verhältniss $\sqrt[3]{1} : \sqrt[3]{1700}$ oder circa 1 : 12.

Weiter nimmt man allgemein an, dass die chemischen Wechselwirkungen nur bei dem unmittelbaren Zusammenstosse der Moleküle stattfinden. Nun werden aber besonders in irgend einem Gase selten mehr als zwei oder drei Moleküle zusammenstossen, weil die mittleren Molekulardistanzen ziemlich gross sind, und daher im Falle eines Zusammentreffens zweier oder dreier Moleküle es immer viel wahrscheinlicher ist, dass ein viertes oder fünftes an ihnen vorbeigehen wird, als dass es ebenfalls in solche Nähe kommen sollte, um irgendwie mit ihnen eine Wechselwirkung einzugehen.

Es ist eben gar kein Grund vorhanden, dass sich die Moleküle an einer Stelle derart anhäufen, und dafür an anderen Stellen grosse Lücken übrig lassen. In geringerem Grade gilt dieses auch von den Molekülen fester und flüssiger Körper.

In Gasen sind also unter gewöhnlichen Umständen solche Processe wie $N_2 + 3H_2 = 2NH_3$ oder $4HCl + O_2 = 2H_2O + 2Cl_2$ schon an und für sich wenig wahrscheinlich, und, wie noch gezeigt werden soll, ohne äussere Einwirkungen geradezu unmöglich. Weiter folgt aus dieser Darstellung, dass allgemein jene chemischen Processe langsamer stattfinden werden, welche eine grössere Anzahl Moleküle erfordern, denn die grössere Anzahl derselben findet sich seltener zusammen.

Auch ist klar, dass der Schauplatz einer chemischen Umsetzung sehr klein ist, dass also die Atome, welche sich an dem chemischen Vorgange betheiligen, nur sehr kleine Wege zu machen haben; aber selbst auf diesen verschwindend kleinen Wegen erhalten sie oft einen ausserordentlich grossen Zuwachs an lebendiger Kraft. So wird z. B. bei der Bildung eines

Wassermoleküls eine Wärmemenge von rund 68000 Wärmeeinheiten frei, die also genügen würde, um einem Moleküle Wasserstoff die Geschwindigkeit von 17.000 Meter zu ertheilen. Ohne Zweifel erhalten also die Atome bei einer Umlagerung zu neuen Molekülen oft immense Endgeschwindigkeiten, und legen die kleinen Wege, welche sie zu machen haben, in fast unendlich kleiner Zeit zurück.

Dieser Umstand schliesst aber die Annahme aus, dass mehrere Moleküle, welche gerade in einer chemischen Wechselwirkung stehen, durch die Affinitäten verkettet, gemeinschaftlich irgendwie beträchtliche Wege machen, und dabei mit einer Reihe anderer Moleküle in Stosswirkung gerathen könnten. Alle diese Betrachtungen führen zu dem Schlusse, dass Moleküle, die eben einen Energie producirenden Vorgang durchmachen, nur mit wenigen anderen Molekülen in Berührung kommen, insolange die normalen Verhältnisse nicht durch Temperaturänderungen, mechanische oder elektrische Einwirkungen etc. gestört werden.

Ich glaube nun den Satz aufstellen zu dürfen, dass es zur Beendigung eines chemischen, Energie producirenden Vorganges nothwendig sei, dass ein Theil dieser Energie den eben in Bildung begriffenen Molekülen entzogen werde, und zwar gilt dies in allen Fällen, in welchen die producirte Energie hinreicht, die neuen Moleküle über jene Temperatur zu erhitzen, bei welcher sie erfahrungsgemäss noch bestandsfähig sind.

Kommen z. B. zwei Moleküle Wasserstoff mit einem Moleküle Sauerstoff in hinreichende Nähe, so entstehen zwei Moleküle Wasser; nach dem Gesetze von der Erhaltung der Arbeit reicht aber die producirte Energie gerade aus, diese Moleküle zu zerlegen, und die ursprünglichen Moleküle O_2 und $2H_2$ mit ihrer ursprünglichen Temperatur etc. herzustellen. Da sie aber die neuen Moleküle weit über ihre Bestandstemperatur bringt, so muss diese Umkehrung des betrachteten Processes auch sofort eintreten, und der ganze Vorgang entzieht sich der Wahrnehmung.

Soll nun diese Umkehrung verhindert werden, so ist es nothwendig, den Atomen der neuen Verbindungen im Momente ihrer Vereinigung so viel Energie zu entziehen, dass der Rest derselben die Temperatur der neuen Moleküle wenigstens nicht über die obere Grenze der Dissociationstemperatur bringen kann.

Das natürlichste Mittel hiezu ist, die neuen Moleküle mit Hilfe anderer entsprechend abzukühlen; dazu ist aber das Zusammentreffen einer grösseren Zahl von Molekülen nothwendig, welches unter gewöhnlichen Umständen nicht zu erwarten ist. So lange aber diese Zahl nicht gegeben ist, ist auch die endgiltige Verbindung, die Wahrnehmung des chemischen Processes unmöglich.

Ich will hier ausdrücklich hervorheben, dass nicht angenommen werden kann, dass etwa einige wenige, abkühlende Moleküle das Bestehen der eben entstandenen Verbindungen dadurch sichern könnten, dass sie denselben successive Energie entziehen, sie den sonst vorhandenen Molekülen mittheilen, zurückkehren, wieder Energie aufnehmen würden etc; es ist dies mit Rücksicht auf die ausserordentlich kurze Dauer der chemischen Umlagerung und des Rückgängigwerdens derselben unstatthaft; diese Dauer ist weit kürzer als die Zeit, welcher die abkühlenden Moleküle zu jenen Wegen bedürfen würden.

Welche Folgen hat aber eine theilweise, wenn auch ungenügende Abkühlung der neuen Verbindungen durch zufällig hinzugekommene, andere Moleküle? Die Rückbildung der ursprünglichen Bestandtheile (z. B. O_2 und $2H_2$) wird dadurch nicht verhindert werden, aber die rückgebildeten Moleküle werden eine entsprechend niedere Temperatur besitzen. Stossen sie daher im Verlaufe der nächsten Zeit mit irgend einem anderen Moleküle zusammen, so werden sie ihm Energie entziehen; andererseits werden aber jene Moleküle, welche früher die Energie aufnahmen, den übrigen Molekülen Energie mittheilen, und daher wird sich auch dieser Vorgang einer Beobachtung durch das Thermometer entziehen.

Ich glaube hiemit gezeigt zu haben, dass es nicht nothwendig ist, den Ätherhüllen der Moleküle irgend welche besondere Widerstandsfähigkeit zuzuschreiben.

Es mögen nun einige chemische Processe näher untersucht werden. Dabei mögen die zur Beendigung eines Processes nöthigen Energie aufnehmenden Moleküle kurzweg „Abkühlungsmoleküle" genannt werden.

In einem Gemenge von Wasserstoff mit Luft oder Sauerstoff soll die Bildung des Wassers zu Stande kommen. Als Abkühlungsmoleküle sollen die der gegebenen Gase in Verwendung kommen.

Da eine etwaige, von den Molekülen während der kurzen Dauer der chemischen Umsetzung verrichtete äussere Arbeit nur verschwindend klein sein kann, so setzen wir durchwegs die specifischen Molekularwärmen für constantes Volumen in Rechnung, und zwar für die Elementargase 4,782 (berechnet aus Bunsen's Angabe der specifischen Wärme des Wasserstoffes), für den gebildeten Wasserdampf 6,5178 (mit Benützung derselben Quelle). Als obere Grenztemperatur der Dissociation des Wassers möge 3000° C. gelten.

Der Process $2H_2 + O_2 = 2H_2O$ liefert $2 \cdot 68360 = 136720$ Wärmeeinheiten, sofern Wasserstoff und Sauerstoff von 0° C. Wasser von gleicher Temperatur liefern. Nach meiner Annahme soll aber höchstens Wasserdampf von 3000° C. gebildet werden, daher muss von obiger Zahl der ganze Wärmebetrag subtrahirt werden, welchen Wasser von 0° C. aufnehmen muss, um in Dampf von 3000° C. zu übergehen. Es sind dies 3600 Wärmeeinheiten für die Erhitzung auf 100° C., weiter 19318 für die Verdampfung (36.536,6) und endlich $2 \cdot 18902$ W. E. ($2 \cdot 6,5178 \cdot 2900$) für die Erhitzung des Dampfes um weitere 2900° C. Der Rest 76006 W. E. soll x Moleküle, deren specifische Molekularwärme 4,782 beträgt, um 3000° C. erhitzen, daher x, die Anzahl Abkühlungsmoleküle = 5,3. Die Wasserbildung erfordert also nach meinen Anschauungen ausser den drei unmittelbar in den Process eingreifenden Molekülen noch mindestens 5—6 andere; es wird aber Niemand annehmen, dass sich in einer Gasmasse an irgend einer Stelle (selbst an der Gefässwand) ohne besondere Veranlassung acht bis neun Moleküle anhäufen können.

Noch grössere Zahlen ergeben sich für die Verbrennung des Kohlenstoffs zu Kohlensäure; es liefert dieser Process mehr Wärme (96960 W. E. für jedes Atom C), es kommen ferner von dieser nicht so beträchtliche Werthe in Abzug, und endlich beginnt die Dissociation von CO_2 schon bei 1200°, dürfte also jedenfalls ziemlich weit unter 3000° C. beendet sein: daraus erklärt sich aber einfach die schwierige Verbrennbarkeit des Kohlenstoffs im Vergleiche zu Wasserstoff, eine Eigenschaft, die er auch in organischen Verbindungen beibehält.

Führt man die Rechnung für die Oxydation des Schwefeldioxydes durch Sauerstoff, also für den Process $2SO_2 + O_2 = 2SO_3$,

so findet man etwa 9—10 Abkühlungsmoleküle (freiwerdende Wärmemenge für ein Molekül SO_3 = 32160 W. E., Dissociationstemperatur etwa 1000° C.). Daraus folgt aber ohne Weiteres die Erklärung dafür: *a*) dass Schwefel im Sauerstoff oder an der Luft nie zu SO_3 verbrennt, denn schon die Verbrennung zu SO_2 erfordert eine gewisse Zahl von Abkühlungsmolekülen; sollten gar die obigen 9—10 dazukommen, so wäre eine derartige Anhäufung von Molekülen nothwendig, dass kein uns zur Verfügung stehendes Mittel genügt, um dieselbe hervorzubringen; *b*) dass sich SO_2 mit Sauerstoff nur sehr schwer zu SO_3 verbindet. Ganz unmöglich ist es aber, Schwefelsäure direct durch einen einzigen Process aus ihren Elementen darzustellen, weil ihre Bildungswärme sehr gross ist (192910 W. E.), die Dissociation derselben in H_2O und SO_3 aber schon bei etwas mehr als 300° C. beginnt.

Durch Oxydation des Jods durch Sauerstoff zu J_2O_5 könnte eine Wärmemenge von 44860 Einheiten pro Molekül frei werden. Da aber dieser Vorgang auch ohne Abkühlungsmoleküle sieben Moleküle erfordern würde ($2J_2 + 5O_2 = 2J_2O_5$), so ist er wahrscheinlich geradezu unmöglich.

Ähnliches gilt von der Bildung des Wasserstoffdioxydes aus seinen Elementen, wodurch 45290 Einheiten frei werden könnten; da aber die Dissociationstemperatur des H_2O_2 äusserst niedrig liegt (es zerfällt theilweise schon bei gewöhnlicher Temperatur), so würde der Vorgang $H_2 + O_2 = H_2O_2$ so viel Abkühlungsmoleküle erfordern, dass er dadurch zur Unmöglichkeit wird. Daher kann auch bei der Verbindung von O_2 mit H_2 nie H_2O_2 entstehen, nicht aber desshalb, weil die Wasserbildung mehr Wärme liefert. Läge die Dissociationstemperatur des H_2O_2 eben so hoch oder noch höher als die von H_2O, dann würde bei der Verbrennung des Wasserstoffs wenigstens vorwiegend der erstere Körper entstehen.

Die Bildung des Ammoniaks aus den Elementen liefert 26710 Einheiten; da aber dieser Process schon an und für sich 4 Moleküle erfordert, so ist man zur Folgerung berechtigt, dass er (mit Rücksicht auf die ebenfalls erforderlichen Moleküle zur Abkühlung) nur schwierig zu Stande zu bringen sein muss, wie es ja die Erfahrung bestätigt.

Ein weiteres Beispiel liefert die Verbrennung des Ammoniaks, ein Vorgang, welcher (abgesehen von Nebenprocessen) nach dem Schema $4NH_3+3O_2 = 6H_2O+2N_2$ vor sich geht. Die freiwerdende Energie beträgt rund 300000 Einheiten (sechsmal 68360 weniger viermal 26710); aber dennoch entzündet sich das Ammoniak nicht von selbst an der Luft oder im Sauerstoff, aus dem Grunde, da sich unter normalen Umständen nicht einmal die sieben direct in den Process eingreifenden Moleküle zusammenfinden, geschweige denn, dass noch Abkühlungsmoleküle hinzukämen.

Dagegen liefert die Umsetzung des Ammoniaks mit Chlor ($2NH_3+3Cl_2 = 6HCl+N_2$) nur etwa 78600 Einheiten (sechsmal 22000 E. für das gebildete Salzsäuregas weniger zweimal 26700 E. für die Zerlegung des Ammoniaks), also kaum etwas mehr als ein Viertel jener Wärmemenge, die bei der Verbrennung desselben Gases im Sauerstoff frei wird. Folglich muss dieser Process viel leichter stattfinden als der letztere: Die Erfahrung zeigt, dass sich ein Tropfen Salmiakgeist im Chlor sofort entzündet.

Endlich mag noch die Umsetzung des Schwefelwasserstoffs mit Sauerstoff näher betrachtet werden. Verwendet man beide Körper im Gaszustande, so liefert der Process 129700 Einheiten (zweimal 68360 für das gebildete Wasser weniger zweimal 4510 für den zerlegten Schwefelwasserstoff) und verläuft nach dem Schema $2H_2S+O_2 = 2H_2O+S_2$. Die Temperatur der Producte darf 3000° C. nicht übersteigen; von obigen 127700 Einheiten hat man wieder die Verdampfungswärme etc. des Wassers im Betrage von 60714 Einheiten, sowie die analogen Werthe für den Schwefel abzuziehen. Gesetzt, dass die Erwärmung des Schwefels auf 3000°C. 20000 E. in Anspruch nimmt (welcher Werth kaum zu niedrig gegriffen sein dürfte), so bedarf man doch zur Ableitung der übrigen Energie (46318 Einheiten) immer noch drei bis vier O_2- oder H_2S-Moleküle; es erfordert also der betrachtete Vorgang im Ganzen sechs bis sieben Moleküle, und ist daher unter normalen Umständen unmöglich. Die Erfahrung lehrt auch, dass sich die trockenen Gase nicht umsetzen.

Ist dagegen der Schwefelwasserstoff im Wasser gelöst, so ist von den obigen 46318 Einheiten noch die Absorptionswärme

zweier H_2S-Moleküle im Betrage von 9500 Einheiten abzuziehen. Kommen nun noch zwei Abkühlungsmoleküle Wasser in Verwendung, so können sie die ganze noch abzuleitende Wärmemenge von 36818 Einheiten aufnehmen, ohne die Temperatur von 3000°C. zu erreichen. Es zeigt also die Rechnung, dass der Process unter diesen Umständen schon durch fünf oder allenfalls sechs Moleküle zu Ende geführt werden kann; diese Anzahl lässt aber doch vermuthen, dass er nicht momentan stattfinden kann. Diese Resultate stehen aber in vollständiger Übereinstimmung mit den Thatsachen.

II.

Es wäre nun zu zeigen, durch welche Mittel es möglich ist, jene Processe zu ermöglichen, welche unter normalen Umständen an der ungenügenden Anzahl zusammenstossender Moleküle scheitern, d. h. durch welche Mittel man das Zusammentreffen einer hinreichenden Zahl von Molekülen bewirken kann.

In sehr vielen Fällen kann man es schon durch eine Temperaturerhöhung erreichen; die Geschwindigkeit der Moleküle wächst proportional der Quadratwurzel aus der absoluten Temperatur, dagegen wachsen besonders bei festen und flüssigen Körpern die mittleren Molekulardistanzen viel langsamer, und darum steigt mit der Temperatur auch die Zahl zusammenstossender Moleküle. Desshalb besteht für Phosphor, Schwefel etc. eine gewisse Entzündungstemperatur. Indessen genügt die so bewirkte Erhöhung der Zahl zusammenstossender Moleküle für manche Processe nicht; man kommt aber zum Ziele, wenn man eine hinreichende, plötzliche Temperaturdifferenz benachbarter Schichten eintreten lässt. Die erwärmten Moleküle suchen sich von einander zu entfernen, drängen die Moleküle der kälteren Schichten zusammen, und so kommt leichter ein Zusammentreffen mehrerer Moleküle zu Stande. Es vermögen daher gewisse Körper, wie Wasserstoffhyperoxyd oder Stickstoffpentoxyd, nur dann zu explodiren, wenn man sie so rasch erwärmt, dass benachbarte Schichten derselben grössere Temperaturunterschiede zeigen, im entgegengesetzten Falle zersetzen sich diese Körper nur langsam. Besonders gilt aber dies von Gasgemischen, die ja einen hohen Ausdehnungscoëfficienten haben, und bei welchen es oft darauf

ankommt, die Zahl der zusammenstossenden Moleküle mindestens zu verdoppeln, wie z. B. für die Bildung des Wassers. Auch hierin stimmt meine Theorie mit den Thatsachen; H. Davy und Grotthus versuchten Knallgas durch gleichmässiges, langsames Erhitzen bis beinahe zur Rothgluth zur Explosion zu bringen; diese trat aber nicht ein, sondern es bildete sich innerhalb einer oder mehrerer Minuten langsam Wasser (dabei wirkten wahrscheinlich die Glaswände als „Contactsubstanz").

Für das Begünstigen chemischer Vorgänge durch grosse Temperaturdifferenzen spricht übrigens noch ein wesentliches Moment. Mit der blossen Temperaturerhöhung geht nämlich immer eine Arbeitsleistung in den gegebenen Molekülen vor sich: diese erleichtert zwar jenen Atomen, welche die neuen Verbindungen zu bilden streben, die Arbeit des Zerreissens der ursprünglichen Verbindungen, aber eben desshalb bleibt mehr an abzuleitender Energie übrig, was ein Mehrerforderniss an Abkühlungsmolekülen zur Folge hat; andererseits steigt auch die Temperatur jener Moleküle, welche in die Lage kommen, als Abkühlungsmoleküle zu wirken, sie können dann weniger Wärme aufnehmen, und es muss auch aus diesem Grunde die Zahl der nothwendigen Abkühlungsmoleküle (und zwar weitaus rascher) mit der Temperatur steigen. Findet aber die Verbindung an der Grenze zweier ungleich warmer Schichten statt, dann hat wenigstens die Hälfte der Abkühlungsmoleküle die niedere Temperatur, kann daher mehr Wärme aufnehmen, und der Process erfordert weniger Abkühlungsmoleküle, kann also leichter hervorgerufen werden.

Aber auch durch mechanische Mittel, z. B. durch Schlag, Druck oder Reibung, kann man die Moleküle derart zusammendrängen, dass sie in grösserer Zahl zusammentreffen; hat dann der Process in einer Schichte stattgefunden, so leistet die entstandene Temperaturänderung das Übrige. Manche Körper explodiren sogar, wenn eine Schallwelle von grosser Intensität auf sie einwirkt. Dabei zeigt sich ein merkwürdiger Unterschied zwischen der Wirkungsfähigkeit hoher und tiefer Töne. Jodstickstoff explodirt z. B. nur durch Töne, die mindestens 60 Schwingungen in der Secunde repräsentiren; aber gerade dieser Unterschied lässt sich nach meinen Anschauungen sehr leicht erklären,

während die gewöhnliche Erklärung solcher Einwirkungen durch die Arbeitsleistung der zugeführten Energie für diese Erscheinung kaum einen Grund anzugeben vermag. Es hängt nämlich die Zahl zusammenstossender Moleküle wesentlich davon ab, ob nahezu gleich dichte Schichten aneinander stossen, oder ob die benachbarten Schichten grosse Dichtenunterschiede zeigen. Da ein Dichtenunterschied ähnlich wirkt, wie eine Temperaturdifferenz, so wird natürlich die Wirkung im letzteren Falle ungleich günstiger sein. Da nun hohe Töne viel kürzere Wellen erregen, als tiefe, so werden die nächst benachbarten Schichten des beeinflussten Körpers viel grössere Unterschiede der Dichte zeigen, wenn sie ein hoher Ton trifft, als wenn sie durch einen tiefen afficirt werden; daher wird auch eine kürzere Schallwelle besser wirken als eine intensivere, aber längere Welle.

Auch eine Verdichtung der umsetzungsfähigen Masse kann das Zusammenstossen der nöthigen Anzahl Moleküle bewirken; doch gestattet meine Ansicht den Schluss, dass es besonders in Gasmassen weniger auf eine langsame Verkleinerung des Volumens, als vielmehr auf das plötzliche Hervorrufen grosser Dichtenunterschiede in benachbarten Schichten ankommen wird. Dieses Resultat stimmt auch mit der Erfahrung; Delaroche und Degen versuchten Knallgas durch langsames Verdichten auf 50, beziehungsweise auf 150 Atmosphären zur Explosion zu bringen, ohne dass es ihnen gelungen wäre.

Ich zeigte, dass jede Temperaturerhöhung eine Steigerung des Bedarfes an Abkühlungsmolekülen mit sich bringt; da man nun das Zusammentreffen der nöthigen Zahl Moleküle mittelst mechanischer Einwirkungen ohne besonders grosse Temperaturerhöhung erreichen kann, so ist klar, dass diese Einwirkungen oft leichter zum Ziele führen können als Temperaturerhöhung; es kann also eine gewisse Energie als Schlag eine Explosion verursachen, während sie als Wärme ganz ohne Wirkung bleibt. Man kann z. B. Schwefel- oder Selenstickstoff bis auf 200° C. erhitzen, ehe er explodirt, wogegen die geringste Reibung, ein Druck oder sogar blosse Berührung die Explosion verursacht. Ebenso verpufft reines Phosphin PH_3 mit O_2 erst in Folge einer Erhitzung über 100° C., dagegen schon in Folge der geringen Reibung eines Glasstöpsels im Halse einer Flasche.

Flüssiges Chlormonoxyd explodirt, wenn man es in eine andere Glasröhre umgiessen will, oder wenn man jene, in welcher es sich befindet, mit einer Feile ritzt (Roscoe). Ein Tropfen Chlortrioxyd zerschmettert nach Brandau ein Becherglas, wenn es von einer Höhe von 20 Cm. in dasselbe hineinfällt.

Viele dieser Erscheinungen vermag indess die gewöhnliche Anschauung eben so gut zu erklären, sie lässt uns aber im Stiche, sobald es sich um die Einleitung eines chemischen Processes durch Entziehen von Energie handelt. Thatsächlich kann man Phosphin mit Sauerstoff gemengt zur Explosion bringen, wenn man eine Druckverminderung eintreten lässt. Man kann diese derart bewirken, dass man eine Toricelli'sche Röhre, welche das Gemenge enthält, aus der schiefen Lage in eine vertikale bringt.

Nach meiner Ansicht reicht es zur Explosion einer Gasmasse hin, wenn man eine hinreichende Stauung der Moleküle bewirkt, welche das Zusammentreffen der nothwendigen Zahl von Molekülen zur Folge hat. Ist man im Stande, diese Stauung durch Ableitung von Energie hervorzurufen, so ist dies sogar vortheilhafter, weil dann auch die Temperatur der Abkühlungsmoleküle sinkt, man also einer geringeren Zahl derselben bedarf.

Beachtet man nun die Molekulargewichte beider Körper ($O_2 = 31{\cdot}92$ und $PH_3 = 33{\cdot}96$), so findet man, dass sie wenig von einander abweichen; daher müssen auch ihre mittleren Molekulargeschwindigkeiten nahezu ganz gleich sein. Vermindert man also den Druck, der auf dem Glase lastet, so werden alle Moleküle, mögen sie O_2 oder PH_3 sein, mit nahezu gleicher Geschwindigkeit der wegbewegten Wand nacheilen, und sie gleichzeitig einholen; sie müssen nun einen Theil ihrer Geschwindigkeit an die Wand abgeben (ihre Temperatur sinkt, indem sie die Wand fortbewegen helfen) und so werden sie bei ihrer langsameren Rückbewegung mit den übrigen Molekülen, die noch der Wand nacheilen, nothwendigerweise in die erforderliche Stauung gerathen.

Wollte man denselben Versuch mit einem anderen Gasgemenge anstellen, dessen Moleküle wegen der grösseren Gewichtsdifferenz auch grössere Unterschiede in den Geschwindigkeiten zeigen, so wird die Stauung zu schwach sein. In einem Gemenge von Sauerstoff mit Wasserstoff werden die Moleküle des letzteren

Gases den Sauerstoffmolekülen weit vorauseilen, und ehe diese nachkommen, wird die Stauung der Wasserstoffmoleküle ganz vorbei sein.

Ich will noch Einiges über die Grösse der Flammen beifügen, und zeigen, dass auch in diesem Punkte meine Anschauungen den Thatsachen besser entsprechen, als die gewöhnlichen Ansichten. Man vermag an der Hand der gewöhnlichen Theorie für die verschiedenen Grössen zweier Flammen keinen anderen Grund anzugeben, als dass das eine Gas mehr, das andere weniger von dem die Verbrennung unterhaltenden Gase braucht und umgekehrt. Aber als Beweis, dass diese Erklärung nicht genügt, will ich folgende Thatsachen (nach dem Handbuche von Gmelin-Kraut) anführen: Wasserstoff gibt in Sauerstoff eine viel kleinere Flamme als ölbildendes Gas (1 Mass H_2 braucht $^1/_2$ Mass O_2, ölbildendes Gas braucht 3 Mass O_2 zur Verbrennung). Die Flamme des Wasserstoffes im Sauerstoff ist kleiner als in der Luft, aber es zeigt sich die Ausnahme, dass das Wasserstoffgas in der Luft eine kleinere Flamme gibt als im Chlor oder Stickoxydulgas, wobei 1 Mass Wasserstoff 2·4 Mass Luft und nur 1 Mass Chlor oder Stickoxydulgas braucht.

Diese Erscheinungen erklären sich sehr einfach, wenn man bedenkt, dass zu den betrachteten Processen viel mehr Moleküle nothwendig sind, als man gewöhnlich annimmt. Es braucht ein Molekül ölbildendes Gas C_2H_4 nicht nur mehr Sauerstoffmoleküle zur Verbindung, sondern auch mehr Abkühlungsmoleküle als der Wasserstoff; es liefert nämlich weitaus mehr Wärme (334800 E. gegenüber 68360 E. als Verbrennungswärme des Wasserstoffes), muss also nothwendigerweise eine grössere Flamme liefern. Die Flamme des Wasserstoffes in der Luft muss nothwendigerweise grösser sein als die im Sauerstoff, denn sobald im Sauerstoff $2H_2$ mit der entsprechenden Zahl anderer (H_2 oder O_2) Moleküle zusammentrifft, kann das erste beste Sauerstoffmolekül zur Verbindung dienen; in der Luft sind aber auf je ein O_2 etwa $4N_2$ vorhanden, und daher wird sehr oft das günstige Zusammentreffen der Moleküle erfolglos bleiben, weil der Wasserstoff nicht rasch genug Sauerstoff in der Nähe findet.

Verbrennt aber Wasserstoff im Stickoxydulgas, so liefert ein Molekül davon nicht mehr 68360 E., sondern um 18000 mehr,

welche durch das Zerfallen von N_2O in N_2 und O frei werden: daher bedarf der Process $H_2+N_2O = H_2O+N_2$ für ein Molekül gebildeten Wassers zwei Moleküle zur Abkühlung mehr, als die Verbrennung im Sauerstoff. Bei dieser entstehen aber immer zwei Moleküle H_2O auf einmal, während durch die Verbrennung in N_2O nur immer eines gebildet wird; soll daher eine bestimmte Zahl von Wasserstoffmolekülen in N_2O verbrennen, so muss doppelt so oft das günstige Zusammentreffen einer genügenden Zahl Moleküle eintreten; daher muss die Flamme von H_2 in N_2O grösser sein als in O_2.

Auch die abnorme Grösse der Wasserstoffflamme im Chlor erklärt sich aus dem Umstande, dass zu dieser Verbrennung eine grössere Zahl von Abkühlungsmolekülen nothwendig ist; da ferner diese Flamme keine so hohe Temperatur besitzt, wie jene des Knallgases ist, so findet sich auch diese Zahl seltener zusammen.

Es scheint, dass sich nach den hier entwickelten Grundsätzen auch das Entleuchten der Gasflammen durch Einleitung anderer Gase wird besser erklären lassen. Der Grund für die unvollständige Verbrennung des Gases im leuchtenden Theile der Flamme wäre der Mangel an Abkühlungsmolekülen von hinreichend niedriger Temperatur; jedes in diesen Theil der Flamme eindringende Luftmolekül muss nämlich durch den äusseren Saum der Flamme gehen, und nimmt dabei eine hohe Temperatur an, daher können dann im inneren Theile nur Processe stattfinden, die wenig Wärme liefern, also nur unvollständige Verbrennungen. Mengt man aber das Leuchtgas mit einem anderen Gase, dann fällt dieser Grund weg, und das Leuchten hat ein Ende. Wenigstens spricht für diese Erklärung der Umstand, dass Wibbel mehr Sauerstoff einleiten musste, als zur Verbrennung der leuchtenden Theilchen nothwendig war. Nebenbei bemerkt, gelang es mir auch, durch einen entsprechend geformten Platindraht die Entleuchtung einer kleinen Flamme zu bewirken; sobald der Draht erglühte, begann das Leuchten wieder.

Die Ausführungen im Eingange dieser Abhandlung lassen erkennen, dass doch zeitweilig in einem Körper oder an dessen Berührungsstellen mit einem anderen, das Zusammentreffen der zu irgend einem Processe genügenden Zahl von Molekülen eintreten

kann; daher können diese Processe (Oxydationen, Fäulniss etc.) langsam vor sich gehen, ohne dass eine äussere Veranlassung dazu vorhanden wäre. Da hiebei immer Wärme frei wird, so kann sich die Zahl zusammenstossender Moleküle steigern, und eine Selbstentzündung oder Selbstexplosion eintreten.

Ein Process kann natürlich auch dadurch ermöglicht werden, dass ein bereits stattfindender chemischer Vorgang durch Wärmeproduction das Zusammentreffen der nöthigen Zahl von Molekülen bewirkt; auf diese Art pflanzen sich z. B. Verbrennungen fort. Ähnlich erklärt sich die Selbstentzündung des Natriums im feuchten Chlorgase; im trockenen Chlor entzündet es sich erst bei 200° C. Ohne Zweifel findet hiebei zuerst folgender Process statt: $Na_2 + 2H_2O = 2NaHO + H_2$. Dieser ist erfahrungsgemäss schon bei gewöhnlicher Temperatur möglich (er liefert bloss etwa 67000 Einheiten, gegenüber den 2·97690 = 195380 Einheiten des Processes $Na_2 + Cl_2 = 2NaCl$; die in Betracht kommenden Dissociationstemperaturen von NaHO und NaCl sind wenigstens nicht so sehr verschieden, um das für NaHO günstige Verhältniss der producirten Wärmemengen zu paralysiren — somit stimmt auch hier meine Ansicht mit den Thatsachen; der erstere Vorgang ist sehr gut bei Temperaturen möglich, bei welchen der zweite noch nicht eintreten kann). Die bei diesem Vorgange freiwerdende Wärmemenge erhitzt das Natrium so weit, dass auch für den zweiten Vorgang genug Moleküle zusammmentreffen, daher die Verbrennung auch eintritt.

Ich zeigte, dass in dem Falle, als zu einem Processe nicht genug Abkühlungsmoleküle vorhanden sind, diese zwar Wärme aufnehmen, aber die Rückbildung der ursprünglichen Verbindungen nicht hindern können, dass aber die rückgebildeten Moleküle eine entsprechend niedere Temperatur annehmen. Dadurch ist aber eine Temperaturdifferenz gegeben, welche nach dem Vorangehenden eine Vergrösserung der Zahl zusammenstossender Moleküle zur Folge haben wird; sie wird um so grösser sein, je mehr Energie der Process entwickeln kann, und kann selbst genügen, diesen Process zu ermöglichen, d. h. ein Process kann das Zusammentreffen der nöthigen Zahl Moleküle selbst bewirken. Hieraus erklärt sich dann die Erscheinung, dass viele Processe mit sehr grosser Energieproduction, ebenso leicht aber mit

Verbrennung oder Explosion eintreten, wie Vorgänge mit sehr kleiner Energieentwicklung.

Ein hieher gehöriges Beispiel scheint die Verbrennung des Silicomethans SiH_4 zu sein. Zahlen über die Verbrennungswärme dieses Körpers stehen mir zwar nicht zur Verfügung, aber man bekommt eine ungefähre Vorstellung von derselben, wenn man bedenkt, dass die von Si über 219000 Einheiten, die von H_4 über 136000 Einheiten beträgt. Kommt nun dieser Körper im reinen Zustande in Berührung mit Luft, so erhöht er die Zahl zusammenstossender Moleküle; unterstützt man diese Wirkung durch eine geringe Temperaturerhöhung (z. B. durch Einführung einer heissen Messerklinge), so tritt Explosion ein. Ist aber das Gas mit Wasserstoff gemengt, dann ist selbst dieses nicht nothwendig: die Erhöhung der Zahl zusammenstossender Moleküle genügt zur Entzündung des freien Wasserstoffs, der selbst wieder den Silicomethan zur Explosion bringt.

Ein anderes Beispiel dieser Art liefert das Chlortrioxyd Cl_2O_3, welches schon durch die blosse Gegenwart leicht oxydirbarer Körper (Phosphor, Arsen etc.) zur Explosion gebracht wird; zum Theile verhält sich auch das Chlormonoxyd in dieser Weise. Beide können durch das Zerfallen in ihre Bestandtheile eine beträchtliche Wärmemenge liefern; stehen sie mit einem der genannten Körper in Berührung, so tritt momentan eine Oxydation mit sehr grosser Energieproduction ein; sie entwickelt nämlich so viel Wärme, als die betreffende (sehr grosse) Verbrennungswärme mehr der Zerfallswärme des Chloroxyds beträgt; auch das freiwerdende Chlor kann momentan in Verbindung eingehen. Wegen Mangels an Abkühlungsmolekülen werden zwar diese Processe sofort rückgängig, aber die entstandene Vermehrung der Zahl zusammenstossender Moleküle genügt, um diese Processe im nächsten Augenblicke zu ermöglichen, oder es tritt Explosion des Chloroxyds ein.

III.

Die bisherigen Ausführungen über die Mittel, einen chemischen, viel Energie producirenden Vorgang zu Ende zu führen, bezogen sich nur auf die Hervorbringung der Zusammenstösse einer genügenden Zahl von Molekülen. Doch hat man noch ein

Mittel zur Verfügung: Man kann die producirte Energie statt in Wärme in chemische Arbeit oder einen galvanischen Strom umsetzen, und so einen Theil oder alle Abkühlungsmoleküle entbehrlich machen.

Um das erstere zu bewirken, braucht man nur neben dem productiven Hauptprocesse einen consumirenden Nebenprocess verlaufen zu lassen; man kommt so zu der Folgerung, dass ebenso wie ein producirender Hauptprocess Bedingung für die Möglichkeit eines consumirenden Nebenprocesses sein kann, auch umgekehrt oft die Einleitung eines solchen Nebenprocesses Bedingung für die Möglichkeit des Hauptprocesses ist.

Ein Beispiel solcher theilweisen Umwandlung der freiwerdenden Energie in Arbeit bietet die Oxydation des Schwefeldioxyds zu Trioxyd in den Bleikammern. Ich zeigte, dass der Process $2SO_2 + O_2 = 2SO_3$ an der Luft oder im Sauerstoff desshalb nicht von selbst eintreten kann, weil er im Ganzen etwa 14 Moleküle erfordern würde. Verwendet man aber statt des freien Sauerstoffs ein Oxydationsmittel, welches den Sauerstoff nur unter Energieaufwand abgibt, so wird die freiwerdende Energie wesentlich kleiner, und ihre Ableitung kann leichter bei gewöhnlicher Temperatur stattfinden.

Ein derartiges Oxydationsmittel ist das Stickstoffdioxyd NO_2, welches bei der Reduction zu Stickoxyd NO etwa 19100 Einheiten bindet; daher werden bei dem Processe $SO_2 + NO_2 = SO_3 + NO$ statt 32160 Einheiten nur noch 13060 Einheiten frei. Von dieser nehmen aber das entstandene SO_3 und NO gerade genug auf, dass bei Gegenwart eines einzigen überzähligen Moleküles Wasserdampf die Temperatur 800°C. nicht überschreitet; es ist also unter diesen Umständen der Process sehr leicht möglich.

Eine andere derartige Erscheinung ist die Verbrennung des krystallisirten Siliciums im Kohlendioxyd, welche schon bei Rothgluth eintritt, während die Verbrennung desselben Körpers im Sauerstoff selbst bei Weissgluth nur oberflächlich und langsam stattfindet. Der letztere Vorgang liefert etwa 219000 Einheiten; bei der Verbrennung im Kohlendioxyd werden dagegen wegen der Reduction von $2CO_2$ zu $2CO$ nur etwa 85400 Einheiten frei (der consumirende Nebenprocess $2CO_2 = 2CO + O_2$ erfordert einen Energieaufwand von 133600 Einheiten). Es kann somit die

Verbrennung des Siliciums im CO_2 rasch und leicht unter solchen Umständen stattfinden, unter welchen die Verbrennung im Sauerstoff gar nicht gelingt.

In derselben Weise erklärt sich die räthselhafte Erscheinung, dass das krystallisirte Silicium von dem Kaliumcarbonat schon bei Temperaturen angegriffen wird, bei welchen es selbst dem schmelzenden Salpeter widersteht; es muss eben dem Kaliumcarbonat den Sauerstoff unter Energieaufwand entreissen, während er ihm vom Salpeter förmlich aufgedrängt wird.

Auch die besprochene Bildung von Natriumhydroxyd durch Zerlegung des Wassers ist ein Beispiel dieser Art; die Auflösung des Wassermoleküls in seine Bestandtheile ist der consumirende Nebenprocess.

Hieher gehört wohl auch die Umsetzung von Kohlenoxyd mit Ammoniak zu Cyan und Wasser in einer Flamme ($2CO + 2NH_3 + O = C_2N_2 + 3H_2O$ oder vielmehr das Doppelte hievon). Hier wären die Zerlegung von 4CO und Bildung von $2C_2N_2$ die consumirenden Nebenprocesse (Energieaufwand von 120600 und 164000 Einheiten) zur Ammoniakverbrennung als Hauptprocess, so dass die Oxydation von $4NH_3$ nur 15000 bis 20000 Einheiten statt über 300000 liefern würde. Dabei wären gar keine Abkühlungsmoleküle nothwendig; die grosse Zahl der direct in den Process eingreifenden Moleküle kann in einer Flamme sehr gut zusammentreffen, und ist daher von diesem Standpunkte der Process sehr gut möglich.

Es scheint übrigens, dass neben stark Energie producirenden Vorgängen oft von selbst consumirende Nebenprocesse eintreten. und so den Hauptvorgang erleichtern. Bei Gegenwart von Stickstoff entsteht z. B. bei der Knallgasexplosion immer Salpetersäure; dies wäre freilich ein producirender Vorgang, da aber eine sehr grosse Zahl von Molekülen nothwendig wäre, wenn dieser Körper durch einen einzigen Process entstehen sollte ($H_2 + 3O_2 + N_2 = 2HNO_3$, also 5 Moleküle nebst sehr vielen Abkühlungsmolekülen), so wird man wohl annehmen müssen, dass zuerst Stickoxyde entstehen, aus welchen dann durch einen Secundärprocess Salpetersäure gebildet wird. Da die Bildungswärme der Stickoxyde durchwegs negativ ist, so ist ihre Entstehung ein consumirender Nebenprocess. Ähnlich verhält es sich auch mit

der Bildung des Ammoniumnitrits in der Flamme des Wasserstoffs an der Luft.

Statt die bei einem chemischen Processe freiwerdende Energie eine Arbeit verrichten zu lassen, kann man sie auch in einen galvanischen Strom verwandeln; es ist gleichgiltig, ob dieser Strom durch einen besonderen Leiter geht, oder ob er bloss innerhalb der umsetzungsfähigen Masse verläuft. Das letztere findet z. B. bei der beschleunigten Wasserstoffentwicklung aus Zink- und Salz- oder Schwefelsäure statt, wenn unreines Zink verwendet, oder Platin in die Flüssigkeit eingeführt wird. Ähnliche Beobachtungen wurden ja auch in Bezug auf andere Vorgänge gemacht.

Ein schlagendes Beispiel dieser Art ist aber die Verbindung von Wasserstoff mit Sauerstoff bei gewöhnlicher Temperatur wenn dadurch ein Strom (z. B. ein Polarisationsstrom) erregt werden kann; hier drängt sich förmlich der Gedanke auf, dass die Ableitung der producirten Energie (als Strom) die Bedingung für die Verbindung beider Gase ist.

Es gibt noch ein Princip zur Ermöglichung jener Processe, welche sehr viele Abkühlungsmoleküle erfordern, und zwar ist es die Zerbröcklung solcher Processe in mehrere einfachere.

Hieher gehört z. B. die Verbrennung der Cellulose, des Talgs, Stearins und anderer hoch zusammengesetzter organischer Substanzen; eine Verbrennung derselben ohne vorherige Zersetzung ist unmöglich, denn sie würde eine solche Zahl von Sauerstoffmolekülen erfordern, dass nicht einmal diese, um so weniger aber noch die erforderliche Zahl Abkühlungsmoleküle zusammenzubringen wären. Ihre Verbrennung ist aber möglich, wenn sie erst in eine Reihe einfacherer Körper zerfallen, deren Oxydation einzeln betrachtet, weitaus weniger Sauerstoff- und Abkühlungsmoleküle erfordert.

Ganz Ähnliches findet bei der Darstellung der Schwefelsäure statt; ich zeigte, warum es unmöglich ist, diesen Körper auf einmal aus seinen Elementen aufzubauen; die Darstellung gelingt aber, wenn man erst SO_2, dann SO_3 und endlich $H_2O+SO_3 = H_2SO_4$ bildet.

Denkt man sich auch das Wasser aus seinen Elementen dargestellt, so zerfällt die Erzeugung von H_2SO_4 in vier Processe, die einzeln natürlich nur je einen Theil der ganzen Bildungs-

wärme der Schwefelsäure liefern, und deren Endproducte in drei Fällen auch eine höhere Dissociationstemperatur besitzen als die von H_2SO_4 ist, daher weitaus weniger Abkühlungsmoleküle erfordern; daher sind diese Einzelnprocesse möglich, dagegen ein sie alle umfassender Process unmöglich.

Zum Theile kann man auch die Darstellungsweise des Chlors aus Salzsäure hieherrechnen. Statt des Processes $4HCl + O_2 = 2H_2O + 2Cl_2$ lässt man z. B. folgende Vorgänge eintreten:

Zweimal den Process $2HCl + MgO = H_2O + MgCl_2$, und dann
Einmal „ „ $2MgCl_2 + O_2 = 2MgO + 2Cl_2$.

Dabei zerfällt also der ursprüngliche, wenigstens 5 Moleküle erfordernde Process in drei einzelne, die nur je drei Moleküle erfordern.

Dasselbe gilt von dem Deacon'schen Chlorprocesse mit Hilfe von Ziegelsteinen, die zweckmässig mit einem leicht oxydirbaren Metallsalze getränkt werden. Die mit Salzsäuredämpfen bei höherer Temperatur eintretende Luft oxydirt diese Salze (oder den Eisengehalt der Ziegelsteine), die Salzsäure reducirt sie wieder; dabei zerfällt die Oxydation (abgesehen von dem Oxydationsprocesse des Salzes) in zwei einfachere Processe von der Form $2HCl + O = H_2O + Cl_2$.

Endlich kann in einzelnen Fällen das Eintreten eines chemischen Processes zwischen Gasen dadurch ermöglicht werden, dass man sie in Lösung bringt, weil in Flüssigkeiten viel complicirtere Processe möglich sind; da in denselben die mittleren Molekulardistanzen kleiner sind, ist auch die Zahl der nothwendigen Moleküle leichter zusammenzubringen.

IV.

Zur weiteren Bestätigung meiner Ansichten will ich noch folgende Folgerungen aus denselben ziehen, und mit Beispielen belegen:

a) dass unter zwei analogen Vorgängen jener leichter stattfindet, welcher weniger Energie liefert (NB. wenn die Dissociationstemperaturen der Endproducte nicht derart abweichen, dass die Vergleichung unmöglich wird);

b) dass innerhalb gewisser Grenzen eine Vergrösserung der bei einem Processe freiwerdenden Energie durch einen

producirenden Nebenprocess kein Erleichtern, sondern ein Erschweren des Vorganges zur Folge hat. Erzeugt der Nebenprocess zu viel Energie, so kann freilich das Zusammentreffen der nothwendigen Zahl Moleküle durch den beginnenden Vorgang selbst bewirkt werden und Selbstentzündung oder Selbstexplosion eintreten.

Als Belege zu *a)* mögen folgende Zahlenwerthe (Handbuch von Gmelin-Kraut, dem fast alle in dieser Abhandlung benützten Zahlen entnommen sind) angeführt werden:

Silicium	mit	O	zu	SiO_2	verbrannt,	gibt 219240	Einheiten.
„	„	Cl	„	$SiCl_4$	„	nur 157640	„
Bor	„	O	„	B_2O_3	„	gibt 158600	„
„	„	Cl	„	BCl	„	nur 104000	„
Arsen	„	O	„	As_2O_5	„	gibt 219400	„
„	„	O	„	As_2O_3	„	„ 154590	„
„	„	Cl	„	$AsCl_3$	„	nur 74451	„
Phosphor	„	O	„	P_2O_5	„	„ 356314	„

Die Verbrennungswärme des Phosphors in Chlor ist mir nicht bekannt, aber gewisse Reactionen des PCl_3 (besonders mit Wasser) ergeben eine Zahl von ungefähr 100000 Einheiten. Die Verbrennung zu PCl_5 fällt ausser Betracht, da PCl_5 schon bei sehr niederen Temperaturen in $PCl_3 + Cl_2$ zerfällt.

Alle diese Elemente liefern also bei der Verbrennung im Chlor weitaus weniger Wärme als im Sauerstoff, und dennoch entzünden sie sich (wenigstens im amorphen Zustande) im ersteren Gase von selbst.

Überhaupt scheint es, dass die grössere Activität des Chlors im Vergleiche zu Sauerstoff in vielen Fällen darauf beruht, dass viele Chlorverbindungen eine kleinere Bildungswärme besitzen.

Als Belege zu *b)* mögen folgende Beispiele dienen:

Wasserstoff oder Schwefeldioxyd werden unter normalen Umständen vom Sauerstoff nicht oxydirt, weil zu viel Wärme frei wird; nimmt man statt Sauerstoff Ozon, so wird das Übel noch grösser, denn Ozon liefert beim Zerfallen in O_2 und O selbst noch etwa 29600 Einheiten. Daraus erklärt sich die Erscheinung, dass Ozon weder Wasserstoff noch Schwefeldioxyd oxydiren kann, sofern diese Körper trocken sind; dagegen gelingt die Wasserbildung aus Wasserstoff und Ozon bei Gegenwart von Stickstoff

und anderen oxydirbaren Substanzen (v. Babo), weil dabei consumirende Nebenprocesse (Oxydation) erfolgen. Interessant ist auch der Vergleich des Verhaltens der Stickoxyde N_2O, NO und N_2O_5 gegen Kalium, Phosphor, Schwefel, Kohle etc.

N_2O liefert bei dem Zerfallen in seine Bestandtheile 18000 Cal.
NO „ „ „ „ „ „ „ 43400 „
N_2O_5 „ „ „ „ „ „ „ 45200 „

Daher wird bei einer Wechselwirkung dieser Oxyde mit den genannten Substanzen die bei der beginnenden Oxydation freiwerdende Energie für je ein Atom aufgenommenen Sauerstoffs grösser, und zwar bei N_2O und NO um die ganze Zerfallswärme, bei N_2O_5 um 9040 Einheiten. Im vollen Einklange damit steht auch das Verhalten des Kaliums etc. zu den Stickoxyden: sie entzünden sich in Wechselwirkung mit N_2O oder N_2O_5 schwieriger als im Sauerstoff; tritt aber Entzündung ein, so brennen sie natürlich viel heftiger. Kalium muss in NO schon sehr stark erhitzt werden, brennender Schwefel oder eine Kerzenflamme in das Gas eingeführt, verlöschen vollständig, und dasselbe geschieht mit Phosphor, wenn er nicht schon früher an der Luft heftig brannte. Es reichen eben die betreffenden Flammentemperaturen nicht aus, um das Zusammentreffen einer genügenden Zahl von Molekülen zu bewirken.

Auch vermögen die Stickoxyde organische Substanzen nicht zu entzünden, während concentrirte Chlorsäure oder Salpetersäure Papier, Sägespähne etc. zur Entzündung bringen, weil das Zerlegen dieser Säuren einen beträchtlichen Energieaufwand erfordert, also weniger Abkühlungsmoleküle nothwendig sind.

Die hier kurz angedeutete Theorie dürfte wohl kaum genügen alle diesbezüglichen Erscheinungen zu erklären; allein die in vielen Fällen auffallende Übereinstimmung derselben mit den Thatsachen dürfte wohl den Schluss erlauben, dass sie der Wahrheit näher komme als die gewöhnliche Anschauung. Die Anwendung des hier benützten Calküls zur Erklärung anderer molekularer Vorgänge (Überkaltung, Umwandlung der Körper in andere allotrope Zustände etc.) behalte ich mir vor.

Über die Einwirkung von Schwefelsäure auf Mono- Di- und Tribrombenzol.

Von Dr. J. Herzig.

(Aus dem Universitätslaboratorium des Prof. v. Barth.) (LVIII.)

Bei der Einwirkung von Schwefelsäure auf bromirte Kohlenwasserstoffe erhielt man bis jetzt in der Regel Producte, die zugleich Brom und die Sulfogruppe enthielten, also bromirte Sulfosäuren waren. Die einschlägigen Versuche haben aber das gemeinsam, dass bei gewöhnlicher Temperatur operirt wurde und es lag daher nahe, zu versuchen, ob nicht vielleicht bei höherer Temperatur die Reaction in dem Sinne verläuft, dass ein Austausch des Broms gegen die Sulfogruppe stattfindet. Obwohl nun die Versuche, die ich in dieser Richtung angestellt habe, nicht vom gewünschten Erfolge begleitet waren, entbehren sie doch nicht eines gewissen Interesses und ich will daher die Resultate derselben im Folgenden kurz anführen.

Einwirkung von Schwefelsäure auf Monobrombenzol.

Erhitzt man 1 Theil Monobrombenzol mit etwa 10 Theilen engl. Schwefelsäure am Rückflusskühler, so löst sich dasselbe in der Schwefelsäure auf, die Lösung bräunt sich, wobei bedeutende Mengen schwefliger Säure sich entwickeln. Sistirt man die Operation nach etwa 8 Stunden und trägt das Gemisch in Wasser ein, so scheidet sich fast nichts aus und man hat dann eine braunrothe Lösung verschiedener bromirter Benzolsulfosäuren, deren Trennung ich auf folgende Weise bewerkstelligt habe.

Zunächst wurde die Lösung 4—5 Mal mit Äther geschüttelt, der eine stark sauer reagirende Substanz aufnahm. Diese wurde ins Kaliumsalz umgewandelt, welches in wasserfreien glänzenden

Blättchen krystallisirt und bei der Analyse Zahlen ergab, wie sie die Formel eines dibrombenzolsulfosauren Kaliums erfordert.

I. 0·4260 Grm. Substanz gaben 0·3107 Grm. Kohlensäure und 0·0365 Grm. Wasser.

II. 0·4288 Grm. Substanz gaben 0·4497 Grm. Bromsilber.

III. 0·5648 Grm. Suhstanz gaben 0·3445 Grm. schwefelsaures Baryum.

IV. 0·6092 Grm. Substanz gaben 0·1552 Grm. schwefelsaures Kalium.

In 100 Theilen:

	Gefunden				$C_6H_3Br_2KSO_3$
	I.	II.	III.	IV.	
C	19·89	—	—	—	20·33
H	0.95	—	—	—	0·84
Br	—	44·62	—	—	45·19
S	—	—	8.37	—	9·04
K	—	—	—	11·42	11·01

Da die gefundenen Zahlen mit den theoretischen nicht sehr gut übereinstimmen und mit Rücksicht auf den jedenfalls merkwürdigen Umstand, dass diese Sulfosäure der wässerigen Lösung durch Äther entzogen werden konnte, habe ich zur Controle noch das Baryumsalz dargestellt und analysirt.

Die Analyse ergab folgende Zahlen:

0·6594 Grm. Substanz bei 150° getrocknet ergaben 0·1967 Grm. schwefelsaures Baryum.

In 100 Theilen:

	Gefunden	$(C_6H_3Br_2SO_3)_2Ba$
Ba	17·53	17·86

Die Krystallwasserbestimmung ergab einen Gehalt von $3^1/_2$ Molekülen Wasser.

0·7092 Grm. Substanz verloren bei 150° 0·0508 Grm. Wasser.

In 100 Theilen:

	Gefunden	$(C_6H_3Br_2SO_3)_2Ba+3^1/_2H_2O$
H_2O	7.14	7·50

Die Säure dürfte nach alledem mit der von Lenz[1] ausführlich beschriebenen Dibrombenzolsulfosäure (1, 3, 5) identisch sein.

Nach dem Ausschütteln mit Äther wurden die Wässer zur Entfernung der Schwefelsäure mit Bleioxyd neutralisirt, vom schwefelsauren Blei abfiltrirt und dann eingedampft. Dabei schied sich bei einer gewissen Concentration ein in kaltem Wasser schwer lösliches Bleisalz aus, während ein anderes in Lösung blieb. In der Erwartung, die zwei eventuell verschiedenen Säuren so von einander trennen zu können, wurden die Bleisalze sorgfältig geschieden und gesondert aufgearbeitet. Sie wurden mit Schwefelwasserstoff zersetzt in die Kaliumsalze umgewandelt, und die Analyse derselben ergab, dass sie beide dieselbe Zusammensetzung haben, u. zw. die eines monobrombenzoldisulfosauren Kaliums.

Die Analyse des aus dem schwer löslichen Bleisalze dargestellten Kaliumsalzes ergab folgendes Resultat:

I. 0·5053 Grm. bei 120° getrockneter Substanz ergaben 0·2278 Grm. schwefelsaures Kalium.

II. 0·7745 Grm. bei 120° getrockneter Substanz ergaben 0·6869 Grm. Bromsilber.

In 100 Theilen:

	Gefunden	$C_6H_3Br(KSO_3)_2$
Br	20·04	20·35
K	20·19	19·82

Die Kaliumbestimmung ergab für das andere aus dem leicht löslichen Bleisalze erhaltene Kaliumsalz dieselbe Zusammensetzung.

---

[1] Ann. Ch. d. Pharm. 181, S. 23.

0·3538 Grm. bei 120° getrockneter Substanz gaben 0·1588 Grm. schwefelsauren Kaliums.

In 100 Theilen:

	Gefunden	$C_6H_3Br(KSO_3)_2$
K	20·12	19·82

Zur quantitativen Brombestimmung fehlte es mir an Material, doch war qualitativ ein bedeutender Bromgehalt nachweisbar. Ich führe dies an, weil die Zahlen für das Kaliumsalz der Benzolsulfosäure und der Monobrombenzoldisulfosäure in Bezug auf den Gehalt an Kalium mit einander fast übereinstimmen.

Die Bildung einer höher bromirten Verbindung bei der Einwirkung von Schwefelsäure auf Monobrombenzol in höherer Temperatur liess nur zwei Erklärungen zu. Es konnten nämlich entweder 2 Moleküle Monobrombenzolsulfosäure unter Bildung von Dibrombenzolsulfosäure und Benzolsulfosäure im Sinne der Gleichung

$$2C_6H_4Br(HSO_3) = C_6H_3Br_2(HSO_3) + C_6H_5(HSO_3)$$

auf einander einwirken oder es konnte ein Molekül vollkommen oxydirt werden, während das Brom in statu nascendi auf ein zweites Molekül Monobrombenzolsulfosäure reagirte. Erstere Annahme schien ausgeschlossen, weil mir sonst wohl kaum die gebildete Benzolsulfosäure hätte entgehen können. Um nun aber in Bezug auf die Deutung des Vorganges ganz sicher zu gehen und andererseits mich von der Erweiterung, deren die Reaction fähig ist, zu überzeugen, habe ich noch das Paradi- und das symmetrische Tribrombenzol in den Kreis meiner Untersuchung gezogen.

Einwirkung von Schwefelsäure auf Paradibrombenzol.

Die Reaction geht hier viel glatter vor sich, man erhält nur geringe Mengen unveränderten Bibrombenzols zurück, und gebromte Sulfosäuren finden sich, wahrscheinlich ihrer leichten

Zersetzbarkeit wegen,[1] im Endproducte gar nicht vor. Trägt man nach 6—7 stündigem Erhitzen am Rückflusskühler das Gemisch in Wasser, so scheidet sich eine nur schwach röthlich braun gefärbte feste Masse aus und die überstehende Flüssigkeit zeigt fast dieselbe Farbe. Die ausgeschiedene Substanz wurde dann destillirt und aus Alkohol, Chloroform und Eisessig fractionirt krystallisirt. Chloroform wurde zur Reindarstellung der in Alkohol zu schwer löslichen Fractionen angewandt, während Eisessig die Reinigung desjenigen Theiles bewerkstelligen sollte, der sich in Alkohol zu leicht löste. Ich erhielt folgende constant schmelzende Fractionen.

Eine bei 136—138 (uncorr.) schmelzende, in Nadeln krystallisirende Substanz, die sich als Tetrabrombenzol erwies.

I. 0·3493 Grm. Substanz gaben 0·2295 Grm. Kohlensäure und 0·0185 Grm. Wasser.

II. 0·3621 Grm. Substanz gaben 0·6988 Grm. Bromsilber.

In 100 Theilen:

	Gefunden		
	I.	II.	$C_6H_2Br_4$
C....	17·89	—	18·27
H ...	0·59	—	0·50
Br...	—	81·49	81·21

Die selbst in warmem Alkohol nur sehr lösliche Fraction wurde aus Chloroform umkrystallisirt, schmolz constant bei 306—308° (uncorr.) und erwies sich als Hexabrombenzol.

I. 0·3204 Grm. Substanz gaben 0·1552 Grm. Kohlensäure und 0·0075 Grm. Wasser.

II. 0·3532 Grm. Substanz gaben 0·7203 Grm. Bromsilber.

In 100 Theilen:

	Gefunden		
	I.	II.	C_6Br_6
C....	13·20	—	13·04
H ...	0·26	—	—
Br...	—	86·69	86·95

[1] Für die Pentabrombenzolsulfosäure ist (Berl. Ber. 1876, 479) direct beobachtet worden, dass sie bei 180—200° unter Entwicklung von SO_2 ein aus feinen Nadeln bestehendes Sublimat (Pentabrombenzol?) liefert.

Eine dritte Fraction erhielt ich endlich, welche alle Eigenschaften eines Gemisches zeigte, den Schmelzpunkt 80—87° besass, die ich aber wegen ihrer sehr geringen Quantität weder durch Alkohol, noch durch Eisessig und Chloroform in die Componenten zerlegen konnte. Die Brombestimmung (79·64%) zeigte aber, dass jedenfalls Körper vorlagen, die einen grösseren Bromgehalt besitzen als das Ausgangsmateriale, da die Anwesenheit von Hexabrombenzol so ziemlich ausgeschlossen ist.

Die Wässer wurden mit Bleioxyd neutralisirt, wobei sich nur Spuren eines löslichen Bleisalzes bildeten. Durch Kochen der unlöslichen Bleisalze mit Schwefelsäure habe ich mich überzeugen können, dass dieselben fast ausschliesslich Bleisulfat enthielten.

Was die Quantität der Reactionsproducte betrifft, so entsteht hauptsächlich Tetrabrombenzol, während vom Hexabrombenzol bei 25 Grm. Dibrombenzol nur so viel erhalten wurde, als zur Analyse nöthig war. Dabei ist zu bemerken, dass die Reindarstellung des Hexabrombenzols ohne namhaften Verlust vor sich gehen kann. Bemerkenswerth ist noch, dass das Tetrabrombenzol vom Schmelzpunkte 138° (1, 2, 4, 5) zum Paradibrombenzol vollkommen symmetrisch ist.

Sieht man von der Bildung bromirter Benzolsulfosäuren ab, so verläuft die Reaction analog wie beim Monobrombenzol. Auch hier bilden sich höher bromirte Producte, ohne dass Benzolsulfosäure auftreten würde. Es liessen sich vielmehr in den abströmenden Gasen namhafte Mengen Kohlensäure nachweisen, so dass hier zweifellos ein Theil des Benzols oxydirt wurde.

Einwirkung von Schwefelsäure auf Tribrombenzol. (1, 3, 5.)

Die Reaction verläuft in ähnlicher Weise wie die oben beschriebenen und ist schon in 4—5 Stunden beendet; als Hauptproduct wird Hexabrombenzol neben geringen Mengen anderer bromhaltiger Körper gebildet. Es liesse sich möglicherweise in vielen Fällen diese Reaction zur Gewinnung des Hexabrombenzols mit Erfolg anwenden, da die Reindarstellung desselben sehr einfach und bequem ist. Das Reactionsproduct 2—3 Mal mit

kochendem Alkohol ausgezogen zeigt schon den Schmelzpunkt 305—307° (uncor.) und ist ganz reines Hexabrombenzol, wie die Analyse des so erhaltenen Productes zeigt.

I. 0·3938 Grm. Substanz gaben 0·1864 Grm. Kohlensäure und 0·0070 Grm. Wasser.
II. 0·4302 Grm. Substanz gaben 0·8789 Grm. Bromsilber.

In 100 Theilen:

	Gefunden		C_6Br_6
	I.	II.	
C....	12·90	—	13·04
H ...	0.19	—	—
Br...	—	86·93	86·95

Bei den Nebenproducten habe ich mich darauf beschränkt, zu constatiren, dass sie mehr Brom enthalten als dem Tribrombenzol entspricht.

Auch hier bildet sich keine Benzolsulfosäure, während die Kohlensäure in den abströmenden Gasen sehr leicht nachgewiesen werden konnte. Der Nachweis von Kohlenoxyd konnte mir weder hier noch beim Dibrombenzol gelingen.

Lässt man die Schwefelsäure länger einwirken, so wird auch das Hexabrombenzol unter Entwicklung von Kohlensäure, schwefliger Säure und Bromwasserstoff zersetzt und es wird daher die Ausbeute an Hexabrombenzol geringer. Bei einer Reactionsdauer von vier Stunden erhielt ich aus 15 Grm. Tribrombenzol 8·5 Grm. Hexabrombenzol, während 13·1 Grm. hätten erhalten werden sollen, wenn sich gar keine Nebenproducte bilden würden, und ausserdem das gebildete Hexabrombenzol von der Schwefelsäure vollkommen unangegriffen bliebe.

Es sei noch besonders hervorgehoben, dass in allen soeben beschriebenen Fällen durchaus keine Verkohlung eintrat, wie sie sonst nicht selten bei Einwirkung von Schwefelsäure auf organische Substanzen in höherer Temperatur beobachtet wird. Bei einem directen Versuche mit Tribrombenzol wurde die Flüssigkeit ursprünglich braun, ging dann ins weinrothe über, war schliesslich

nach 12-stündigem Erhitzen ganz farblos und enthielt in diesem Stadium nur noch Schwefelsäure.

Schliesslich erwähne ich noch, dass die Schwefelsäure auf Tribromphenol ganz ähnlich und nur ungleich stärker reagirt. Nach vier Stunden war die Flüssigkeit ganz hellroth und beim Eintragen in Wasser schieden sich nur Spuren eines braunrothen amorphen Körpers aus, während in der Lösung keine organische Substanz nachweisbar war. Langsamer und unter Bildung einer grösseren Menge brauner amorpher Massen reagirt die Schwefelsäure auf das Tribrommesitylen.

Über krystallinische Verbindungen von Chlorcalcium mit Alkoholen.

Von **Joh. Bapt. Heindl.**

(Aus dem Universitätslaboratorium des Prof. A. Lieben.)

Auf Anrathen meines hochverehrten Lehrers des Herrn Professors A. Lieben unternahm ich es, die Entstehung und Zusammensetzung der Alkoholate des Chlorcalciums näher zu untersuchen.

Im Jahre 1828 erhielt Graham[1] durch Einwirkung von wasserfreiem Alkohol auf wasserfreie Chloride Verbindungen, die er „Alcoats" benannte, und deren Constitution er dahin auffasste, dass der Alkohol darin die Stelle von Krystallwasser einnehme.

Unter den von ihm beschriebenen Verbindungen befindet sich eine Chlorcalciumverbindung, welcher er auf Grund der vorgenommenen Chlorcalciumbestimmung die Formel $2CaCl_2 + 7C_2H_6O$ beilegt.

Sonderbarerweise wurde längere Zeit hindurch dieser sehr interessanten Entdeckung von den Chemikern wenig Aufmerksamkeit zugewendet, und mochten wohl die Schwierigkeiten, die die Darstellung reiner Alkoholate bietet, Ursache sein, dass die Existenz derselben sogar von Einbrodt[2] in Zweifel gezogen wurde, obwohl inzwischen auch Kane[3] eine Verbindung $CaCl_2 + 4CH_4O$ beschrieben hatte. Erst im Jahre 1848 wurden durch Chodnew's „Beiträge zur Kenntniss der Alkoholate"[4] Einbrodt's Zweifel als unberechtigt erklärt, und gibt der Verfasser dieser Abhandlung bekannt, dass er ein Alkoholat von der Zu-

---

[1] The philosoph. Mag. and Ann. IV. 265, 331 auch Pogg. XV 150.

[2] Ann. d. Chem. und Pharm. LXV, p. 115.

[3] Ann. d. Chem. und Pharm. XIX, p. 168.

[4] Petersburg Acad. Bull. VIII, p. 150.

sammensetzung $CaCl_2 + 4C_2H_6O$ erhalten habe, und dass möglicherweise ein Alkoholat von der Zusammensetzung $3CaCl_2 + 4C_2H_6O + 2H_2O$ bestehe.

Von dieser Zeit wurden die Ansichten Graham's durch die Resultate der Arbeiten von Robiquet[1] ($SnCl_4 + 2C_2H_6O$), Demarcay[2] ($TiCl_4 + C_2H_6O$), Schützenberger[3] ($PtCl_4 + 2C_2H_6O$), Williams[4] ($SbCl_5 + CH_4O$ und $SbCl_5 + C_2H_6O$), Simon[5] ($LiCl + 3CH_4O$, $LiCl + 4C_2H_6O$, $MgCl_2 + 6CH_4O$ und $MgCl_2 + 6C_2H_6O$), Bauer und Klein[6] ($SnCl_4 + 2C_5H_{12}O$), Linnemann[7] ($CaCl_2$ + Isopropylalkohol), Johnson[8] ($CaCl_2$ + Amylalkohol), welche sich jedoch zumeist auf andere Chloride als Chlorcalcium beziehen, wiederholt bestätiget.

Da die Angaben Graham's, Kane's und Chodnew's rücksichtlich der Alkoholate des Chlorcalciums nicht übereinstimmten, schien eine neuerliche Untersuchung wünschenswerth.

Bevor ich zur Darlegung meiner Versuche und deren Resultate übergehe, will ich noch betreffs der bei der Darstellung der Chlorcalcium-Alkoholverbindungen einzuhaltenden Vorsichtsmassregeln bemerken, dass sie genau dieselben sind, die Herr Professor A. Lieben in seiner vor Kurzem erschienenen Abhandlung „Über Verbindungen von Chlorcalcium mit fetten Säuren"[9] pag. 920, sub 1, 2, 3 angibt, und wiederhole nur kurz, dass auch von diesen Verbindungen gilt:

1. dass die Berührung der Verbindungen mit der Atmosphäre möglichst vermieden werden muss, daher ein Abpressen zwischen Filtrirpapier durchaus unzulässig erscheint;

2. dass das Waschen der Krystalle mit demjenigen absoluten Alkohol, welcher einen Bestandtheil der Verbindung bildet, zweckmässig ist;

---

1 Jahresber. 1854, 560.
2 Berl. Ber. VIII, p. 750.
3 Jahresber. 1870, 388.
4 Jahresber. 1876, 331.
5 Journ. f. pract. Chem. Neue Folge 20, p. 371.
6 Ann. d. Chem. und Pharm. CXLVII, p. 249,
7 Ann. d. Chem. und Pharm. CXXXVI, p. 38.
8 Journ. f. pract. Chem. 62, p. 264.
9 Monatshefte f. Chemie 1880, p. 919.

3. dass die Verbindungen durch Liegenlassen über Chlorcalcium oder Schwefelsäure von anhängendem Alkohol nicht vollkommen befreit werden können, weil sie sich zugleich zersetzen.

Bemerken will ich noch, dass ich bisher nie Verbindungen von Chlorcalcium, Wasser und Alkohol erhielt, die einen constanten Wassergehalt gezeigt hätten.

Versuchsreihe I.

Chemisch reines, geschmolzenes Chlorcalcium wurde, um es von etwaigem Wassergehalte zu befreien, vor jedem Versuche in einem Platintiegel frisch geschmolzen, hierauf in einer Porzellanschale möglichst rasch gepulvert, und noch warm in einen gut verschlossenen Kolben, in dem sich über wasserfreiem Bariumoxyd frisch abdestillirter Äthylalkohol vom specifischen Gewichte 0·793 bei 15° C. befand, eingetragen. Der mit dieser Mischung gefüllte Kolben wurde mit einem Rückflusskühler, der mit seinem oberen Ende in ein Chlorcalciumrohr mündete, verbunden, und durch 24—48 Stunden auf eine dem Siedepunkte des Alkohols nahe liegende Temperatur erwärmt.

In dem Grade als Chlorcalcium gelöst wurde, wurde auch die im Kolben befindliche Flüssigkeit dickflüssiger und zugleich trüb; doch schieden sich beim Erkalten in der Regel keine Krystalle ab. Einmal wurden wohl solche Krystalle erhalten, doch konnte man sie zur Analyse nicht verwenden, weil noch ungelöstes Chlorcalcium, ferner der als Verunreinigung anwesende Kalk beigemischt sein konnte.

Ich liess, sobald das Reactionsgemisch gesättigt zu sein schien, dasselbe im gut verschlossenen Kolben unter einer Exsiccatorglocke sich klären, was in der Regel 8—10 Tage dauerte, goss sodann die klare syrupdicke Flüssigkeit in eine unter einer Exsiccatorglocke über Schwefelsäure aufgestellte Krystallisirschale aus.

Je nach der Concentration der Flüssigkeit schieden sich nun nach längerer oder kürzerer Zeit, in der Regel schon nach Ablauf von 3—6 Stunden, am Rande der Flüssigkeit fächerartig gruppirt, feingestreifte, durchsichtige Kryställchen aus. Nach Ablauf längerer Zeit setzte sich die Krystallisation über die Oberfläche der Flüssig-

keit fort, und bildete sich auf derselben eine Decke, zusammengesetzt aus grösseren und kleineren sechsseitigen, feingestreiften Tafeln, die das weitere Abdunsten der Flüssigkeit wesentlich beeinträchtigte, wesshalb sie stets möglichst rasch mit einem Glasstabe zerstört wurde, worauf sich die einzelnen Krystallplättchen zu Boden setzten. Sobald die aus der Flüssigkeit herausragenden Krystalle anfingen weiss zu werden, wurde die ganze Krystallmasse in ein birnförmiges Absaugegefäss, wie solches in der bereits citirten Abhandlung des Herrn Professors A. Lieben, pag. 926, genauer beschrieben ist, gebracht; dieses war mit seinem unter dem Glashahne befindlichen Ende in einen doppelt gebohrten Kork eingefügt, der ein Pulverglas verschloss, und mittelst seiner zweiten Bohrung mit einem U-Rohre, das mit Schwefelsäure benetzte Bimssteinstückchen enthielt, und weiterhin mit der Luftpumpe in Verbindung gesetzt war.

Die Mutterlauge wurde nun mit Hilfe der Luftpumpe abgesaugt, eine geringe Menge wasserfreien Alkohols zum Waschen aufgegossen und langsam durch die Krystallmasse durchgesogen. Dabei lösten sich mir, da ich diese Versuche bei einer Temperatur von ungefähr 15—18° R. ausführte, stets erhebliche Mengen der Krystalle, wesshalb ich stets trachten musste, das völlige Waschen der Krystalle mit möglichst wenig Alkohol zu bewerkstelligen. Die auf diese Art von der Mutterlauge befreiten Krystalle wurden hierauf möglichst rasch auf eine vorher gut getrocknete poröse Thonplatte, die über Schwefelsäure oder, wie sich in der Folge zeigte, besser über frisch geschmolzenem Chlorcalcium unter einer Glocke sich befand, ausgeleert, auf derselben ausgebreitet, und 2—6 Tage liegen gelassen. Wie lange die Krystalle auf der Thonplatte zu liegen haben, ist zum grossen Theile abhängig von ihrer Masse und ihrer Vertheilung auf der Thonplatte; zweckmässig ist es die Krystalle in möglichst dünner Schichte auf derselben aufzutragen, da dadurch einer Zersetzung der oberen Krystallschichten, während die unteren noch feucht sind, am besten vorgebeugt wird, und ein Trocknen der Krystalle in möglichst kurzer Zeit (24—48 Stunden) erreicht wird.

Wenn Schwefelsäure als Trockenmittel angewendet wurde, stellte es sich als schwierig heraus, ein homogenes Product zu erhalten, weil die oberste Schichte schon verwittert, während die

untere noch feucht ist; es ist daher zweckmässiger Chlorcalcium anzuwenden, und kann unter Umständen vortheilhaft sein, die Krystalle durch ein darüber gestülptes grosses Uhrglas vor zu rascher oberflächlicher Verwitterung zu schützen.

Die auf diese Art getrockneten Krystallmassen wurden hierauf mittelst Glanzpapier, auf das sie von der Thonplatte geschüttet wurden, möglichst rasch in ein Pulverglas gebracht, das gut verschlossen in einem Exsiccator aufbewahrt wurde.

Zwei auf diese Art dargestellte Partien lieferten bei der Analyse folgende Resultate:

Partie *A*.

0·4635 Grm. Krystalle lieferten 0·2503 Grm. $CaSO_4$.

0·4680 Grm. derselben Substanz gaben 0·5357 Grm. AgCl.

0·7812 Grm. derselben Substanz lieferten 0·5168 Grm. Wasser und 0·838 Grm. Kohlensäure.

0·7205 Grm. lieferten 0·4625 Grm. Wasser und 0·7615 Grm. Kohlensäure.

0·5367 Grm. derselben Substanz lieferten 0·3553 Grm. Wasser und 0·554 Grm. Kohlensäure.

0·550 Grm. lieferten 0·369 Wasser und 0·5818 Grm. Kohlensäure.

Wenn man die gefundenen Zahlen auf eine Formel rechnet, so passen sie wohl am besten auf die folgende:

$$CaCl_2 + 3C_2H_6O$$

	Berechnet	Gefunden			
Ca.....	16·06	15·88	—	—	—
Cl.....	28·51	28·31	—	—	—
C......	28·91	29·24	28·82	28·15	28·85
H	7·22	7·35	7·13	7·35	7·46
O	19·30	—	—	—	—
	100·00				

Partie *B*.

Diese wurde dazu benützt, um den Einfluss kennen zu lernen, den ein längeres Liegen der Krystalle auf der Thonplatte über Chlorcalcium äussert. Zu diesem Zwecke wurden kleine Partien

der Krystalle nach zweitägigem, nach achttägigem, nach sechzehntägigem und nach neunundzwanzigtägigem Liegen von der Thonplatte genommen und analysirt; dabei war freilich bei jedem Abheben der Glocke die Möglichkeit gegeben, dass Feuchtigkeit aus der Atmosphäre zutreten konnte. Während der ersten zwei Tage waren die Krystalle auf der Thonplatte mit einem Uhrglase bedeckt. Die Analysen gaben folgende Resultate:

α. Nach zweitägigem Liegen:

0·3053 Grm. Krystalle gaben 0·166 Grm. $CaSO_4$.

0·533 Grm. derselben Substanz lieferten 0·3565 Grm. Wasser und 0·5690 Grm. Kohlensäure.

β. Nach weiterem sechstägigem Liegen:

0·4191 Grm. Krystalle lieferten 0·238 Grm. $CaSO_4$.

0·61 Grm. derselben Substanz gaben 0·4095 Grm. Wasser und 0·6122 Grm. Kohlensäure.

0·4977 derselben Substanz lieferten 0·3147 Grm. Wasser und 0·4938 Grm. Kohlensäure.

γ. Nach weiterem achttägigem Liegen:

0·184 Grm. Krystalle gaben 0·1209 Grm. $CaSO_4$.

0·4727 Grm. derselben Substanz lieferten 0·3148 Grm. $CaSO_4$.

0·3907 Grm. derselben Substanz lieferten 0·225 Grm. Wasser und 0·3356 Grm. Kohlensäure.

0·43 Grm. derselben Substanz lieferten 0·2385 Grm. Wasser und 0·3672 Grm. Kohlensäure.

δ. Nach weiterem dreizehntägigem Liegen:

0·966 Grm. Krystalle gaben 0·6861 Grm. $CaSO_4$.

0·3241 Grm. derselben Substanz lieferten 0·1505 Grm. Wasser und 0·1725 Grm. Kohlensäure.

Berechnet man aus dem Calcium den Chlorcalciumgehalt, und aus dem Kohlenstoff den Alkoholgehalt, so ergibt sich in 100 Theilen:

	$CaCl_2+3C_2H_6O$	Gefunden			
		α	β	γ	δ
Chlorcalcium	44·577	44·372	46·342	54·001	57·521
Alkohol	55·423	55·791	52·459	44·744	38·563
Wasser und Fehler ...	—	—	1·199	1·255	3·916
	100·000		100·000	100·000	100·000

Diese Zahlen sprechen deutlich dafür, dass Chlorcalcium, als Trockenmittel angewandt, langsam zersetzend auf die Alkoholate einwirkt.

Was das Steigen des Wassergehaltes betrifft, schreibe ich selbes der durch das wiederholte Öffnen der Glocke herbeigeführten Berührung mit der Atmosphäre zu.

Ich versuchte nun, statt durch Verdunsten der alkoholischen Lösung über Schwefelsäure, auch auf dem Wege zu Krystallen von Chlorcalciumalkoholat zu gelangen, dass ich die trübe, in der Hitze bereitete Lösung filtrirte und dann erkalten liess. Unmittelbar wurden dadurch wohl keine Krystalle erhalten, allein, wenn man die filtrirte Flüssigkeit in der zu beschreibenden Weise weiter concentrirte, so erhielt man eine reichliche Krystallausscheidung, die nur noch gewaschen, und vom überschüssigen Alkohol befreit zu werden brauchte, um zur Analyse geeignet zu sein.

Versuchsreihe II.

Ich wendete bei diesen Versuchen das Verhältniss von einem Theil Chlorcalcium auf drei Theile Alkohol an, und digerirte am Rückflusskühler durch 24—36 Stunden bei einer dem Siedepunkte des betreffenden Alkohols naheliegenden Temperatur.

Der Kolben wurde dann mittelst eines doppelt gebohrten Pfropfens einerseits mit dem in ein Chlorcalciumrohr mündenden Kühler, anderseits mit einem gläsernen Heberrohr in Verbindung gesetzt, welches mit seinem längeren Schenkel bis nahe an den Boden des Kolbens eingesenkt war, und mit dem kürzeren Schenkel durch ein T-Rohr gehend in den oberen Theil des Filtrirapparates mündete.

Letzterer bestand aus zwei auf einander gut aufgeschliffenen Trichtern, die noch durch ein Kautschukband fest aufeinander gepresst wurden. Der kurz abgesprengte Hals des oberen Trichters war mit dem erwähnten T-Rohre, welches seitlich mit einem Chlorcalciumrohre versehen war, luftdicht verbunden, während der untere Trichter von einem Ölbadtrichter umgeben war, und mit seinem Halse in die eine Bohrung eines doppelt gebohrten Pfropfens eingepasst war, der ein Pulverglas verschloss. In die zweite Bohrung war das obere Ende eines Kühlers eingefügt, der

mit seinem unteren Ende in einen Kolben mündete, welcher mit einer Schwefelsäurewaschflasche und weiterhin mit einer Wasserluftpumpe in Verbindung stand. In dem unteren Trichter des Filtrirapparates war ein doppeltes Filter eingelegt, welches durch einen fein siebartig durchlöcherten Platinconus vor dem Durchreissen geschützt war.

Waren nun alle Theile des Apparates miteinander luftdicht verbunden, so wurde das obenerwähnte an dem T-Rohr angebrachte Chlorcalciumrohr an seinem ausgezogenen Ende zugeschmolzen, der untere Trichter durch Heizen des Ölbadtrichters bis zur entsprechenden Temperatur gebracht, und nun die Luftpumpe in Action gesetzt. Dadurch wurde die heisse Lösung mittelst des Hebers aus dem Kolben in den Trichter gezogen; wenn das Filter voll war, wurde die Spitze des Chlorcalciumrohres abgebrochen, und dadurch der Luft Zutritt in den Trichter gestattet. War dann die dickliche Lösung durchfiltrirt, so wurde das Chlorcalciumrohr neuerdings zugeschmolzen, und der Trichter abermals mit Flüssigkeit aus dem Kolben gefüllt.

Das Filtrat wurde durch gelindes Erwärmen in dem Pulverglase selbst, in welchem es sich ansammelte, weiter concentrirt bis Krystallausscheidung eintrat; dann wurde das Pulverglas rasch verschlossen und im Exsiccator aufbewahrt. Nach 12—14 Stunden hatten sich die Krystalle stets reichlich ausgeschieden. In dieser Weise wurden Verbindungen von Chlorcalcium mit Äthylalkohol, mit Isobutylalkohol und mit Gährungsamylalkohol dargestellt, die dann in ähnlicher Weise, wie bei Versuchsreihe I angegeben, mit dem dazu gehörigen Alkohol gewaschen und auf der Thonplatte über Chlorcalcium abgesaugt wurden. Die Mutterlauge der Isobutylalkoholverbindung war verhältnissmässig dünnflüssig.

Äthylalkoholverbindung.

Dieselbe bestand aus prismatischen, durchscheinenden, mattglänzenden Krystallgruppen, die sich fettig anfühlten und an der Luft rasch zerflossen. Von dieser Verbindung wurde eine grössere Partie dargestellt, deren Hauptmasse durch viertägiges Liegen auf der Thonplatte über Chlorcalcium getrocknet, hierauf in ein gut schliessendes Pulverglas und in den Exsiccator gebracht wurde.

Die Analysen dieses Theiles der Partie gaben folgendes Resultat:

0·4955 Grm. Krystalle lieferten 0·2709 Grm. $CaSO_4$.

0·3204 Grm. lieferten 0·1738 Grm. $CaSO_4$.

0·5232 Grm. derselben Substanz gaben 0·6025 Grm. AgCl.

0·4723 Grm. gaben 0·5423 Grm. AgCl.

0·529 Grm. derselben Substanz lieferten 0·3435 Grm. Wasser und 0·552 Grm. Kohlensäure.

0·5414 Grm. dieser Krystalle lieferten 0·3557 Grm. Wasser und 0·5753 Grm. Kohlensäure.

Ein kleiner Theil der obigen Partie wurde in sehr dünner Schichte auf eine Thonplatte aufgetragen und schon nach neunzehnstündigem Liegen auf derselben analysirt:

0·597 Grm. Krystalle lieferten 0·3188 Grm. $CaSO_4$.

0·1864 Grm. derselben Substanz gaben 0·21 Grm. AgCl.

0·8647 Grm. derselben Krystalle lieferten 0·573 Grm. Wasser und 0·9301 Grm. Kohlensäure.

Übersichtlich zusammengestellt kommen auf 100 Theile der Verbindung:

	Berechnet für $CaCl_2 + 3C_2H_6O$	Gefunden nach 4tägigem Liegen		Gefunden nach 19stündigem Liegen
Ca ..	16·06	16·09	15·95	15·70
Cl...	28·51	28·44	28·40	27·86
H...	7·22	7·21	7·30	7·36
C...	28·91	28·46	28·98	29·34
O...	19·30	—	—	—
	100·00			

Isobutylalkoholverbindung.

Dieselbe stellte weisslich durchscheinende, fettig glänzende Krystallprismen oder Krystallblättchen dar, die nach dreitägigem Liegen auf der Thonplatte über frisch geschmolzenem Chlorcalcium analysirt wurden:

0·3039 Grm. Krystalle lieferten 0·1235 Grm. $CaSO_4$.

0·4109 Grm. lieferten 0·1665 Grm. $CaSO_4$.

0·1658 Grm. derselben Substanz gaben 0·1425 Grm. AgCl.

0·1977 Grm. gaben 0·1690 Grm. AgCl.

0·4185 Grm. dieser Krystalle lieferten 0·3427 Grm. Wasser und 0·6583 Grm. Kohlensäure.

0·4873 Grm. lieferten 0·7686 Grm. Kohlensäure.

Stellt man nun die gefundenen Percentzahlen mit den für die Formel $CaCl_2 + 3C_4H_{10}O$ berechneten zusammen, so hat man:

	Berechnet	Gefunden	
Ca....	12·012	11·95	11·91
Cl	21·32	21·26	21·14
H.....	9·009	9·098	—
C.....	43·243	42·89	43·014
O	14·416	—	—
	100·000		

Gährungsamylalkoholverbindung.

Johnson gibt an, eine solche Verbindung erhalten zu haben, hat jedoch keine Analyse derselben ausgeführt. Ich erhielt sie in Form von wenig compacten Krystallgruppen vorwiegend Büscheln von länglichen, nadelförmigen Krystallen, welche von einer sehr zähflüssigen Mutterlauge umgeben waren. Die Thonplatte, auf der die gewaschenen Krystalle ausgebreitet wurden, lag diesmal über Schwefelsäure statt über Chlorcalcium.

Die Krystalle wurden nach fünftägigem Liegen analysirt, und nach weiterem achttägigem Liegen nochmals der Analyse unterworfen, um eine etwaige Veränderung zu constatiren.

Die Analysen gaben folgendes Resultat:

Nach fünftägigem Liegen über Schwefelsäure auf der Thonplatte:

0·345 Grm. Krystalle lieferten 0·1215 Grm. $CaSO_4$.

0·6737 Grm. lieferten 0·2389 Grm. $CaSO_4$.

0·4702 Grm. derselben Substanz gaben 0·3501 Grm. AgCl.

0·5455 Grm. gaben 0·4035 Grm. AgCl.

0·3402 Grm. derselben Krystalle lieferten 0·3105 Grm. Wasser und 0·6020 Grm. Kohlensäure.

0·2951 Grm. lieferten 0·2641 Grm. Wasser und 0·521 Grm. Kohlensäure.

Nach dreizehntägigem Liegen über Schwefelsäure auf der Thonplatte:

0·6271 Grm. Krystalle lieferten 0·2375 Grm. $CaSO_4$.

0·3943 Grm. lieferten 0·341 Grm. Wasser und 0·681 Grm. Kohlensäure.

Vergleicht man die erhaltenen Zahlen mit den für die Formel $CaCl_2 + 3C_5H_{12}O$ berechneten, so ergibt sich auch hier zur Evidenz, dass der dargestellten Verbindung die obige Formel zukommt.

	Berechnet	Gefunden nach 5tägigem Liegen		Gefunden nach 13tägigem Liegen
Ca..	10·66	10·35	10·42	11·13
Cl...	18·93	18·29	18·41	—
H...	9·6	10·13	9·94	9·32
C...	48·0	48·25	48·14	47·10
O...	12·81	—	—	—
	100·00			

Wie man aus der Zusammenstellung ersieht, ist durch die dreizehntägige Aufbewahrung über Schwefelsäure bereits theilweise Zersetzung eingetreten.

Aus den vorstehenden Resultaten ergibt sich, wie ich glaube, mit Sicherheit, dass die beschriebenen krystallinischen Verbindungen den Formeln

$$CaCl_2 + 3C_2H_6O$$
$$CaCl_2 + 3C_4H_{10}O$$
$$CaCl_2 + 3C_5H_{12}O$$

entsprechen.

Ob aus diesen Verbindungen etwa durch Feuchtigkeitszutritt bestimmte, zugleich Wasser und Alkohol enthaltende Verbindungen entstehen können, muss ich dahingestellt sein lassen. Mit den Resultaten von Graham, Kane und Chodnew stimmen die meinigen allerdings nicht überein; indess muss bemerkt werden, dass die genannten Forscher, die von ihnen erhaltenen Verbindungen durch Auspressen zwischen Filtrirpapier von der Mutterlauge befreiten, eine Methode, die nur schwer zu genauen Resultaten führen kann. Auch haben sich Graham und Kane damit begnügt, durch Glühen der ausgepressten Verbindung den Chlorcalciumgehalt zu bestimmen. Sie mussten daher, wenn ihr Product Feuchtigkeit angezogen hatte, zu wenig Chlorcalcium finden.

Übrigens habe ich die von Kane beschriebene Methylalkoholverbindung des Chlorcalciums nicht untersucht. Was Chodnew's Analyse des Chlorcalciumalkoholates, dem er die Formel $CaCl_2 + 4C_2H_6O$ beilegt, anbelangt, so bin ich vorläufig nicht in der Lage, die Ursache der Abweichung seiner Analyse von der meinigen zu erklären.

Zum Schlusse sei mir gestattet, meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Professor A. Lieben, der mir den Impuls zu dieser Arbeit gegeben, und ausserdem mir seinen gütigen Rath und freundlichen Beistand stets in zuvorkommendster Weise zu Theil werden liess, meinen innigsten Dank auszusprechen.

VIII. SITZUNG VOM 17. MÄRZ 1881.

Das w. M. Herr Hofrath Ritter v. Brücke übermittelt die Jahrgänge 1879 und 1880 der von dem ausländischen c. M. Herrn Prof. Karl Ludwig herausgegebenen „Arbeiten aus der physiologischen Anstalt zu Leipzig".

Das c. M. Herr Prof. Dr. August Toepler übersendet eine Abhandlung des Herrn Dr. F. Streintz, Assistenten des physikalischen Laboratoriums am königl. sächs. Polytechnikum in Dresden: „Über die durch Entladung von Leydener Flaschen hervorgerufene Zersetzung des Wassers an Platinelektroden".

Das c. M. Herr Prof. J. Wiesner übersendet eine von Herrn Prof. E. Ráthay in Klosterneuburg ausgeführte Arbeit, welche den Titel führt: „Über die Hexenbesen des Kirschbaumes und über *Exoascus Wiesneri* n. sp."

Das c. M. Herr Prof. L. Boltzmann in Graz übersendet eine Abhandlung, betitelt: „Entwicklung einiger zur Bestimmung der Diamagnetisirungszahl nützlicher Formeln". I und II.

Ferner übersendet Herr Prof. Boltzmann eine im physikalischen Institut der Universität in Graz von dem Assistenten dieses Institutes Herrn Dr. Ign. Klemenčič ausgeführte Arbeit: „Zur Bestimmung des Verhältnisses zwischen der elektromagnetischen und mechanischen Einheit der Stromintensität".

Die Herren Prof. Dr. Edm. Reitlinger und Dr. Fr. Wächter in Wien übersenden eine gemeinsam verfasste Abhandlung: „Über Disgregation der Elektroden durch positive Elektricität und die Erklärung der Lichtenberg'schen Figuren".

Der Secretär legt eine von Herrn Regierungsrath Prof. Dr. Gust. A. V. Peschka an der technischen Hochschule in Brünn

eingesendete Abhandlung vor, betitelt: „Normalenfläche einer Developpablen längs ihres Durchschnittes mit einer krummen Fläche".

Ferner legt der Secretär ein versiegeltes Schreiben von den Herren Prof. Dr. P. Weselsky und Dr. R. Benedikt in Wien vor, welches laut Aufschrift die Beschreibung technisch zu verwerthender Farbstoffe enthält.

Das w. M. Herr Hofrath Petzval überreicht eine Abhandlung des Herrn Prof. Lorenz Zmurko an der Universität zu Lemberg, betitelt: „Beitrag zur Theorie der Auflösung von Gleichungen mit Bezugnahme auf die Hilfsmittel der algebraischen und geometrischen Operationslehre".

Das w. M. Herr Hofrath Ritter v. Hauer überreicht eine Mittheilung aus dem geologischen Institute der Universität zu Prag: „Die Flora des tertiären Diatomaceenschiefers von Sulloditz im böhmischen Mittelgebirge" von Herrn J. Wentzel.

Der Secretär Herr Hofrath J. Stefan überreicht eine Abhandlung: „Über das Gleichgewicht eines festen elastischen Körpers von ungleichförmiger oder veränderlicher Temperatur."

Das w. M. Herr Prof. Ad. Lieben überreicht eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit: „Über die Oxydation von Borneolacetat" von Herrn Hugo Schrötter.

Herr Prof. Dr. Ernst v. Fleischl in Wien überreicht eine Abhandlung, betitelt: „Physiologisch-optische Notizen", in welcher einige Versuche beschrieben werden.

Herr Dr. J. Puluj, Privatdocent an der Wiener Universität, überreicht die dritte Abhandlung über „Strahlende Elektrodenmaterie".

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Accademia R. dei Lincei: Atti. Anno CCLXXVIII. 1880—81. Serie terza. Transunti. Vol. V. Fascicolo 5° & 6°. Roma, 1881; 4°.

— pontificia de' Nuovi Lincei: Atti. Anno XXXIII. Sessione VI[a] del 25 Maggio 1880. Roma, 1880; 4°.

Akademie der Wissenschaften, königl. Preussische zu Berlin Monatsbericht, November 1880. Berlin 1881; 8°.

Akademija umiejętności w Krakowie: Sprawozdanie Komisyi fyzyjograficznéj w roku 1879. Tom cztérnasty. W Krakowie, 1880; 8⁰.

— — Rozprawy i sprawozdania z posiedzen wydzialu matematiczno-przyrodniczego. Tom VII. W Krakowie, 1880; 8⁰.

— — Zbiór wiadomości do Antropologii krakowéj. Tom IV. Krakow, 1880; 8⁰.

— — Rocznik. Rok 1879. W Krakowie, 1880; 8⁰.

Apotheker-Verein, allgem.-österr.: Zeitschrift nebst Anzeigen-Blatt. XIX. Jahrgang. Nr. 8. Wien, 1881; 8⁰.

Archivio per le scienze mediche. Volume IV, fascicolo 4⁰. Torino e Roma 1881; 8⁰.

Bibliothèque universelle: Archives des sciences physiques et naturelles. 3ᵉ Période. Tome V. Nr. 2. Genève, Lausanne, Paris, 1881; 8⁰.

Chemiker-Zeitung: Central-Organ. Jahrgang V. Nr. 10. Cöthen, 1881; 4⁰.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome XCII, Nr. 9. Paris, 1881; 4⁰.

Gesellschaft, deutsche für Natur- und Völkerkunde Ostasiens: Mittheilungen. 22. Heft. December 1880. Yokohama; 4⁰.

— naturforschende in Emden: LXV. Jahresbericht 1879—80. Emden, 1880; 8⁰.

— k. k. geographische, in Wien: Mittheilungen. Band XXIV (neue Folge XIV), Nr. 2. Wien, 1881; 4⁰.

— österreichische, zur Förderung der chemischen Industrie: Berichte. II. Jahrgang. Nr. IV. Prag, 1881; 8⁰:

Giessen, Universität: Akademische Schriften pro 1879—80. 9 Stücke; 4⁰ u. 8⁰.

Journal, the American of Science. 3. series. Vol. XXI. (Whole number, CXXI). Nrs. 122 & 123. New Haven, 1881; 8⁰.

Landwirthschafts-Gesellschaft, k. k. in Wien: Verhandlungen und Mittheilungen. Jahrgang 1881. 1. Heft. Wien, 1881; 8⁰.

Ludwig, C.: Arbeiten aus der physiologischen Anstalt zu Leipzig. Jahrgang 1879—80. Leipzig, 1880; 8⁰.

Museo civico di storia naturale di Genova: Annali. Volume XV. Genova, 1880; 8⁰.

Museum of Comparative Zoology at Harvard College: Bulletin. Vol. VIII. Nrs. 3. Cambridge, 1881; 8°.

Nature. Vol. XXIII. No. 593. London, 1881; 8°.

Osservatorio del R. Collegio Carlo Alberto in Moncalieri: Bullettino meteorologico. Anno XV. 1879—80. Nr. 8 & 9, Luglio & Agosto 1880. Torino; 4°

Pexidr, Gustav: Beitrag zur Kenntniss der durch das Erdbeben vom 9. November 1880 hervorgebrachten Erscheinungen der „Sandschlammauswürfe" auf den Erdspalten bei Resnik und Drenje in der Nähe von Agram. Agram, 1880; 8°.

Regel, E.: Descriptiones plantarum novarum et minus cognitarum. Fasciculus VII. Petropoli, 1879; 8°.

Reichsforstverein, österr.: Österr. Monatsschrift für Forstwesen. XXXI. Band. Jahrgang 1881. Februar- und März-Heft. Wien; 8°.

Società, degli spettroscopisti italiani: Memorie. Dispensa 10ª & 11ª. Roma, 1881; 4°.

— J. R. agraria di Gorizia: Atti e memorie. Anno XIX. N. S. Nr. 10—11 & 12. Gorizia, 1880; 8°.

Société des ingénieurs civils: Mémoires et compte rendu des travaux 5ᵉ série, 34ᵉ année, 1ᵉʳ cahier. Paris, 1881; 8°.

Society, the Linnean of New South Wales: Proceedings. Vol. IV, part the fourth. — Vol. V, parts the first & second. Sidney, 1880; 8°.

— the royal microscopical: Journal. Ser. 2. Vol. I. part 1. London and Edinburgh, 1881; 8°.

— the royal astronomical: Monthly notices, annual report of the Council. Vol. XLI. Nr. 4. February 1881. London; 8°.

Sommerbrodt, Julius Dr.: Die reflectorischen Beziehungen zwischen Lunge, Herz, und Gefässen. Berlin, 1881; 8°.

Université de Bruxelles: Annales. Faculté de Médecine. Tome I. 1880. Bruxelles, 1880; 8°.

Wiener Medizinische Wochenschrift. XXXI. Jahrgang. Nr. 11. Wien, 1881; 4°.

Über das Gleichgewicht eines festen elastischen Körpers von ungleichförmiger oder veränderlicher Temperatur.

Von dem w. M. J. Stefan.

Die Gleichungen des Gleichgewichtes eines festen elastischen Körpers, welcher nicht in allen Theilen dieselbe Temperatur hat oder dessen Temperatur sich verändert, sind von Duhamel und F. Neumann entwickelt worden; von ersterem in dem Mémoire sur le calcul des actions moléculaires développées par les changements de température dans les corps solides (Mémoires présentés à l'académie royale des sciences. Tome V. Paris 1838), von letzterem in der Abhandlung: Die Gesetze der Doppelbrechung des Lichtes in comprimirten oder ungleichförmig erwärmten unkrystallinischen Körpern. (Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften zu Berlin für 1842.)

Beide Untersuchungen gehen von der Annahme aus, dass die einzelnen Theilchen eines festen Körpers mit anziehenden und abstossenden Kräften auf einander wirken. Diese Kräfte sind abhängig von der Distanz der wirkenden Theilchen, die letzteren, nämlich die abstossenden, aber noch ausserdem von der Temperatur des Körpers. Wird letztere erhöht, so erhalten die abstossenden Kräfte einen Zuwachs, der Körper dehnt sich aus und es tritt ein neuer Gleichgewichtszustand ein, in welchem die durch die Dilatation des Körpers geweckte Elasticität der vermehrten Abstossung das Gleichgewicht hält.

In der gewöhnlichen Elasticitätstheorie, welche sich nur mit Körpern von gleichförmiger und constanter Temperatur beschäftigt, werden die Wirkungen der eigentlichen Molecularkräfte von denen der Wärme nicht abgesondert, sondern nur die Resul-

tanten derselben betrachtet. In der neuen Theorie werden diese zwei Actionen von einander geschieden. Die in Betracht zu ziehende Wirkung der Wärme vergleicht Neumann mit einem hydrostatischen Drucke, welcher in isotropen Körpern nach allen Richtungen hin in gleicher Stärke ausgeübt wird und ich will in Folgendem diese Wirkung auch immer Wärmedruck nennen. In einem gleichförmig erwärmten und von äusseren Kräften nicht angegriffenen Körper steht dieser Druck im Gleichgewichte mit den elastischen Spannungen. Wird die Temperatur eines Theiles des Körpers erhöht, so steigt in demselben der Wärmedruck, und der erwärmte Theil übt auf die umliegenden Theile des Körpers diesen Überdruck wirklich aus, wenn er gehindert ist, sich auszudehnen, wenn also nicht Elasticitätskräfte auftreten können, welche eine dem Zuwachse des Wärmedruckes gleiche, aber entgegengesetzte Spannung erzeugen.

Die absolute Grösse, welche dieser Druck in einem Körper bei einer bestimmten Temperatur besitzt, kann nicht angegeben, aus der Theorie nicht berechnet werden. Zur Lösung der vorgelegten Aufgabe ist jedoch die Kenntniss des absoluten Werthes dieses Druckes und der gleichwerthigen inneren Spannungen nicht erforderlich, es genügt, zu bestimmen, wie sich diese Grössen bei dem Übergange des Körpers aus einem Zustande in einen anderen verändern.

Es ist also nothwendig, irgend einen Zustand des Körpers als den normalen zu betrachten. Am einfachsten ist es, als solchen einen Zustand zu wählen, in welchem der Körper gleichförmig erwärmt und von der Einwirkung äusserer Kräfte frei ist. In diesem Zustande halten sich ein bestimmter Wärmedruck mit bestimmten Spannungen das Gleichgewicht. Wird der Körper aus diesem Zustande in einen anderen gebracht, sei es durch eine Änderung der Temperatur oder durch äussere Kräfte oder durch beide Wirkungen zugleich, so treten Verschiebungen der einzelnen Theile des Körpers ein und bringen Veränderungen in den bestehenden Spannungen hervor. Diese neu hinzugekommenen Spannungen müssen nun ihrerseits wieder Gleichgewicht halten den Zuwächsen des Wärmedruckes und den äusseren Kräften, wenn der neue Zustand des Körpers ebenfalls ein Zustand des Gleichgewichtes sein soll.

Die Berechnung der neu hinzugekommenen Spannungen aus den Verschiebungen geschieht nach denselben Formeln wie in der gewöhnlichen Elasticitätstheorie, mögen diese Verschiebungen in Folge der Erwärmung oder in Folge äusserer Kraftwirkungen eingetreten sein. Die Beziehungen zwischen den Spannungen und den Deformationen sind also in beiden Theorien wenigstens der Form nach dieselben. Hingegen sind die Gleichungen des Gleichgewichtes in den beiden Theorien verschieden.

Die drei Gleichungen, welche die Bedingungen des Gleichgewichtes zwischen den drei Normal- und den drei Tangentialspannungen, so wie den äusseren Kräften, welche auf ein Element des Körpers wirken, darstellen, erhalten jede ein ergänzendes Glied, nämlich die bewegende Kraft, welche aus dem Wärmedrucke resultirt. In gleicher Weise erhalten auch die Bedingungsgleichungen für die Oberfläche des Körpers, insoferne in denselben Normalspannungen vorkommen, eine dem Wärmedrucke entsprechende Ergänzung.

Die Grösse dieses Druckes in einem Punkte des Körpers wird der daselbst eingetretenen Erhöhung der Temperatur proportional gesetzt. Der Factor, mit welchem die Temperaturerhöhung multiplicirt werden muss, um den Wärmedruck zu geben, wird so bestimmt, dass für einen Körper, dessen Temperatur in allen Theilen um denselben Betrag erhöht wurde, die Gleichungen des Gleichgewichtes jene Dilatationen liefern, welche der angenommenen Temperaturerhöhung und dem thermischen Ausdehnungscoëfficienten des Körpers entsprechen.

Duhamel und Neumann haben diese Gleichungen auf mehrere specielle Fälle angewendet. Duhamel behandelte das Gleichgewicht einer Kugelschale und eines hohlen Kreiscylinders, beide Fälle unter der Voraussetzung, dass die Temperatur in jedem Punkte nur von einer einzigen Variablen, von seiner Distanz vom Mittelpunkte, beziehungsweise von der Axe abhängig sei. Den Fall der Kugel und Kugelschale hat auch Neumann unter derselben speciellen Voraussetzung berechnet. Seine übrigen Untersuchungen beziehen sich auf eine dünne, kreisförmige Platte, in welcher die Temperatur eine Function des Radius, auf einen Ring, in welchem die Temperatur längs des Bogens variirt, ferner auf zwei Streifen aus verschiedenen Stoffen,

welche so zusammengelöthet sind, dass sie bei einer bestimmten Temperatur gerade sind und endlich auf eine dünne rechtwinklige Platte, in welcher die Temperatur eine Function der Höhe ist.

In einer Abhandlung: „Untersuchungen über die Elasticität fester, isotroper Körper unter Berücksichtigung der Wärme" (Monatsberichte der Berliner Akademie, Januar 1873) hat Borchardt das Problem einer dünnen Platte und einer Kugel wieder aufgenommen und eine allgemeine Lösung desselben für eine beliebige Vertheilung der Temperatur gegeben.

Es ist zu bemerken, dass die in Rede stehenden Gleichungen und die daran geknüpften Untersuchungen wenig Beachtung gefunden haben. Die Elasticitätstheorie ist in der neueren Zeit in mehreren Werken, zum Theil sehr ausführlich, behandelt worden; es ist mir nicht bekannt, dass in eines derselben diese schon ihrer mannigfachen Anwendungen wegen wichtige Ergänzung der Theorie aufgenommen wäre.

Allerdings passen die von Duhamel und Neumann geführten Rechnungen über die Wirkungen der Molecularkräfte und ihre Veränderungen durch die Wärme nicht zu der gegenwärtig üblichen Methode, die Elasticitätslehre zu behandeln. Man hätte jedoch die Bemerkung Neumann's, dass die Wärmewirkung einem hydrostatischen Drucke analog ist, benützen können, um diese Wirkung unmittelbar in die Gleichungen einzustellen.

Es gibt jedoch noch eine andere Methode, den Einfluss, welchen eine ungleichförmige oder veränderliche Temperatur auf das Gleichgewicht eines elastischen Körpers nimmt, in Rechnung zu ziehen, eine Methode, welche von jeder Betrachtung über die Wechselbeziehungen von Elasticität und Wärme frei in viel einfacherer Weise zu dem gewünschten Resultate führt. Diese Methode will ich nun auseinandersetzen.

Entwicklung der allgemeinen Gleichungen des Gleichgewichtes.

Im Sinne der gewöhnlichen Elasticitätstheorie ist jeder Körper, welcher gleichförmig erwärmt und von äusseren Kräften nicht angegriffen ist, als ein solcher zu betrachten, in welchem keine Spannungen vorhanden sind, oder wenn man will, keine Spannungen, deren Betrachtung in das Gebiet der Elasticitäts-

theorie gehört. Unter äusseren Kräften sind dabei sowohl solche verstanden, welche auf die einzelnen Massentheilchen des Körpers wirken, wie z. B. die Schwere, als auch solche, die als Züge oder Drücke an der Oberfläche ihre Angriffspunkte haben. Welche Temperatur der Körper besitzt, ist gleichgiltig, er bleibt auch frei von Spannungen, wenn seine Temperatur in allen Theilen um denselben Betrag erhöht oder erniedrigt wird.

Diese Definition des spannungsfreien Zustandes eines Körpers kann man auch auf seine einzelnen Theile, auf seine geometrischen Elemente anwenden und bei der Entwicklung der Theorie von dem folgenden Satze oder Principe ausgehen:

Ein Element eines festen elastischen Körpers ist als frei von jeder Spannung zu betrachten, wenn es aus dem Körper herausgeschnitten ohne Veränderung der Temperatur und ohne Hinzuthun äusserer Kräfte sein Volumen und seine Gestalt beibehält.

Irgend ein Zustand des Körpers, in welchem er frei von allen Spannungen ist, werde als der normale Zustand angenommen. Wird der Körper nunmehr unter den Einfluss äusserer Kräfte gebracht und wird seine Temperatur im Ganzen oder in den einzelnen Theilen beliebig geändert, so treten im Körper Verschiebungen ein, welche theils Dehnungen oder Verkürzungen, theils Gleitungen einzelner Theile über einander und das gleichzeitige Auftreten von Spannungen zur Folge haben. Es entsteht nun die Aufgabe, die Spannungen aus den eingetretenen Deformationen zu berechnen.

Die Anwendung des oben aufgestellten Satzes liefert für diese Berechnung folgende Regel:

Die in jedem Elemente des Körpers vorhandenen Dilatationen sind zu vermindern um jene, welche das Element im freien Zustande in Folge der Temperaturveränderung erhielte. Aus den so verminderten Dilatationen und den übrigen noch vorhandenen Formänderungen sind die Spannungen so zu berechnen, als wäre die Temperatur des Körpers unverändert geblieben.

Hiemit ist die Aufgabe, den Einfluss der Temperaturänderung auf das Gleichgewicht elastischer Körper zu bestimmen,

allgemein gelöst, insofern alle weiteren Rechnungen nach den in der gewöhnlichen Elasticitätstheorie entwickelten Formeln zu geschehen haben. Um den Inhalt des obigen Satzes näher zu erläutern, mögen noch folgende Ausführungen hier eingeschaltet werden.

Bezieht man den Körper auf ein beliebiges rechtwinkliges Coordinatensystem und sind u, v, w die Componenten der Verschiebung, welche ein Punkt, dessen Coordinaten im normalen Zustande des Körpers x, y, z waren, erfahren hat, so sind die Dehnungen nach den drei Axen durch die Quotienten

$$\frac{du}{dx}, \quad \frac{dv}{dy}, \quad \frac{dw}{dz},$$

die Gleitungen durch die Ausdrücke

$$\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}, \quad \frac{dw}{dx}+\frac{du}{dz}, \quad \frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}$$

bestimmt. Führt man noch

$$\theta = \frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}$$

ein, worin θ die Volumsdilatation bedeutet, so kann man, die von Lamé eingeführten Bezeichnungen gebrauchend, die drei Normalspannungen N_1, N_2, N_3 und die drei Tangentialspannungen T_1, T_2, T_3 ausdrücken durch die Formeln

$$\begin{aligned} N_1 &= \lambda\theta + 2\mu\frac{du}{dx}, & T_1 &= \mu\left(\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}\right) \\ N_2 &= \lambda\theta + 2\mu\frac{dv}{dy}, & T_2 &= \mu\left(\frac{dw}{dx}+\frac{du}{dz}\right) \\ N_3 &= \lambda\theta + 2\mu\frac{dw}{dz}, & T_3 &= \mu\left(\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}\right). \end{aligned} \tag{1}$$

Diese Formeln gelten für den Fall, dass die Deformation des Körpers bei constanter Temperatur ausgeführt wurde. Ist aber die Überführung des Körpers aus dem normalen in den neuen Zustand zugleich mit Temperaturänderungen verbunden, so sind die Spannungen N_1, N_2, N_3 nach dem oben aufgestellten Satze anders zu rechnen. Hat die Temperatur im Punkte x, y, z

einen Zuwachs um s Grade erfahren, und ist α der lineare thermische Ausdehnungscoëfficient des Körpers, so ist αs die lineare Dilatation, welche ein um den Punkt x, y, z construirtes Element des Körpers nach jeder Richtung, also auch nach der Richtung jeder der Coordinatenaxen erfahren würde, wenn es frei wäre, d. h. nicht im Zusammenhange mit den übrigen Theilen des Körpers stünde. Sind die im Elemente vorhandenen Dilatationen $\frac{du}{dx}, \frac{dv}{dy}, \frac{dw}{dz}$ unter einander gleich und auch gleich mit αs, so sind nach dem angenommenen Principe in dem Elemente keine Spannungen vorhanden. Sind die Dilatationen $\frac{du}{dx}, \frac{dv}{dy}, \frac{dw}{dz}$ von αs verschieden, dann steht das Element unter dem Einflusse von Spannungen, deren Werthe man findet, wenn man in den obigen Formeln $\frac{du}{dx}, \frac{dv}{dy}, \frac{dw}{dz}$ und θ durch

$$\frac{du}{dx} - \alpha s, \quad \frac{dv}{dy} - \alpha s, \quad \frac{dw}{dz} - \alpha s, \quad \theta - 3\alpha s$$

ersetzt. Die neuen Ausdrücke für die Spannungen werden demnach

$$\begin{aligned} N_1 &= \lambda\theta + 2\mu \frac{du}{dx} - (3\lambda + 2\mu)\alpha s \\ N_2 &= \lambda\theta + 2\mu \frac{dv}{dy} - (3\lambda + 2\mu)\alpha s \\ N_3 &= \lambda\theta + 2\mu \frac{dw}{dz} - (3\lambda + 2\mu)\alpha s \end{aligned} \qquad 2)$$

und diese Formeln gelten sowohl für das Innere des Körpers, als auch für die Oberfläche.

Die Ausdrücke für die Tangentialspannungen T_1, T_2, T_3 bleiben unverändert. Es ist vielleicht nicht überflüssig, dies näher zu begründen.

Es wird in der Elasticitätstheorie nachgewiesen, dass es in jedem Punkt des Körpers, wie auch die Deformation desselben beschaffen sein mag, drei auf einander senkrechte Richtungen gibt von der Beschaffenheit, dass in einem parallelepipedischen Elemente, dessen Seiten diesen Richtungen parallel gehen, nur Dehnungen

nach diesen Richtungen vorhanden sind und keine Gleitungen. Diese Dehnungen werden die Hauptdilatationen genannt. Durch die Grösse und Richtung dieser Hauptdilatationen sind auch die Dehnungen und Gleitungen in einem anders orientirten parallelepipedischen Elemente bestimmt. Es ist aber zu bemerken, dass die Gleitungen in dem letzteren durch die Differenzen der Hauptdilatationen bestimmt sind, also Gleitungen überhaupt nicht vorkommen, wenn alle drei Hauptdilatationen unter einander gleich sind. Werden nun die vorhandenen Hauptdilatationen um drei gleiche Grössen vermehrt oder vermindert, so heben sich diese Grössen aus den Formeln für die Gleitungen weg, und die Formeln für die Tangentialspannungen werden durch die vorgenommene Änderung der Dilatationen nicht berührt.

Sind X_0, Y_0, Z_0 die auf die Masseneinheit des Körpers wirkenden äusseren Kräfte, ρ die Dichte des Körpers, so sind die Gleichungen des Gleichgewichtes folgende:

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dx}+\frac{dT_3}{dy}+\frac{dT_2}{dz}+\rho X_0&=0\\ \frac{dT_3}{dx}+\frac{dN_2}{dy}+\frac{dT_1}{dz}+\rho Y_0&=0\\ \frac{dT_2}{dx}+\frac{dT_1}{dy}+\frac{dN_3}{dz}+\rho Z_0&=0. \end{aligned} \qquad 3)$$

Diese gelten, mag die Deformation des Körpers bei constanter Temperatur ($s=0$) ausgeführt worden oder mit Temperaturänderungen verbunden gewesen sein.

Ebenso behalten die Bedingungen für die Oberfläche in beiden Fällen dieselbe Gestalt. Wirkt z. B. auf ein Element der Oberfläche, dessen Normale durch die Richtungscosinus m, n, p bestimmt ist ein Zug, welcher nach den drei Axen die Componenten A, B, C gibt, so ist

$$\begin{aligned} N_1m+T_3n+T_2p&=A\\ T_3m+N_2n+T_1p&=B\\ T_2m+T_1n+N_3p&=C. \end{aligned} \qquad 4)$$

Man kann die Gleichungen 3) und 4) auch durch solche ersetzen, welche die Verschiebungen enthalten, indem man für

N_1, N_2, N_3 die durch die Gleichungen 2), für T_1, T_2, T_3 die durch die Gleichungen 1) gegebenen Werthe einführt.

Die von Duhamel und Neumann aufgestellten Gleichungen des Gleichgewichtes unterscheiden sich von den Gleichungen 3) und 4), wie schon im Eingange hervorgehoben wurde, darin, dass jede von ihnen noch ein dem Wärmedrucke entsprechendes Glied enthält. Wird dieser Druck durch Ks, unter K eine Constante verstanden, dargestellt, so tritt an Stelle der ersten der Gleichungen 3) die folgende:

$$\frac{dN_1}{dx} + \frac{dT_3}{dy} + \frac{dT_2}{dz} - K\frac{ds}{dx} + \rho X_0 = 0, \tag{5}$$

und in analoger Weise werden die zweite und dritte der Gleichungen 3) verändert.

Ebenso ist in den Oberflächenbedingungen auszudrücken, dass die Spannungen N_1, N_2, ... nicht blos den Zügen A, B, C, sondern zugleich dem Wärmedrucke das Gleichgewicht halten. Da letzterer normal zur Oberfläche wirkt, so kommt

$$N_1 m + T_3 n + T_2 p = A + mKs \tag{6}$$

an die Stelle der ersten, und zwei analoge kommen an die Stelle der beiden anderen der Gleichungen 4).

Die Spannungen N_1, N_2, ... müssen aber nach dieser Theorie immer durch die Formeln 1) ausgedrückt werden, mag die Deformation bei constanter oder veränderlicher Temperatur ausgeführt worden sein.

Nach Einführung der Verschiebungen fallen jedoch die Unterschiede zwischen den Gleichungen 3) und 5) und ebenso zwischen den Gleichungen 4) und 6) weg, sobald

$$K = (3\lambda + 2\mu)\alpha$$

gesetzt wird. Dass für K dieser Werth angenommen werden muss, ergibt sich aber aus der Betrachtung des speciellen Falles, in welchem ein rechtwinkliges Parallelepiped aus seinem normalen Zustande ($s = 0$) in einen zweiten durch gleichförmige Erwärmung auf s Grade mit Ausschluss äusserer Einwirkungen gebracht wird.

Legt man die Coordinatenaxen den Seiten des Prismas parallel, den Anfangspunkt in eine Ecke und denkt sich diese fix, so

sind die Verschiebungen u, v, w gegeben durch

$$u = \alpha s x, \quad v = \alpha s y, \quad w = \alpha s z,$$

die Spannungen durch

$$N_1 = N_2 = N_3 = (3\lambda + 2\mu)\alpha s,$$
$$T_1 = T_2 = T_3 = 0$$

und die Componenten der auf die Oberfläche wirkenden Züge durch

$$A = B = C = 0.$$

Aus diesen Gleichungen folgt der oben angegebene Werth von K.

Spannung in einem Prisma von unveränderlicher Länge.

Die Axe des Prismas sei die Axe der x, der Querschnitt desselben ein Rechteck, dessen Seiten den Axen y und z parallel sind. Das Prisma wird bei der Temperatur Null zwischen zwei feste Ebenen, welche seine Endquerschnitte berühren, gebracht. Es wird vorausgesetzt, dass dadurch in dem Prisma keine Spannung entsteht und dass auch auf die Seitenflächen desselben keine Züge oder Drücke wirken.

Es werde nun die Temperatur des Prismas auf s Grade gebracht. Da sich die einzelnen Punkte nur nach den Richtungen von y und z verschieben können, so ist $u = 0$, v ist nur abhängig von y, w nur von z. Die Tangentialspannungen sind in diesem Falle alle gleich Null. Wenn von äusseren Kräften abgesehen wird, so folgt aus den Gleichungen 3), dass N_1, N_2, N_3 constant sein müssen. Da N_2 und N_3 an der Oberfläche Null sind, so sind sie es auch im Inneren.

Die zweite und dritte der Gleichungen 2) können nun zur Bestimmung von $\frac{dv}{dy}$ und $\frac{dw}{dz}$ benützt werden. Diese beiden Dilatationen sind gleich. Da $\frac{du}{dx} = 0$, so ist $\theta = 2\frac{dv}{dy}$ und man erhält zur Bestimmung dieser Dilatation

$$0 = 2(\lambda + \mu)\frac{dv}{dy} - (3\lambda + 2\mu)\alpha s,$$

also:

$$\frac{dv}{dy} = \frac{3\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}\alpha s = \alpha s + \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\alpha s,$$

für N_1 erhält man nunmehr aus der ersten der Gleichungen 2)

$$N_1 = -\frac{(3\lambda+2\mu)\mu}{\lambda+\mu}\alpha s,$$

N_1 ist negativ, bedeutet also einen Druck, welcher Druck zugleich von dem Prisma gegen die beiden festen Wände ausgeübt wird.

Man kann diesen einfachen Fall auch in directer Weise behandeln und ich will dabei die in der Experimentalphysik gebräuchlichen Bezeichnungen anwenden.

Wirken auf die Flächen eines Prismas normale Züge N_1, N_2, N_3, so erfährt das Prisma die Dehnungen δ_1, δ_2, δ_3. Die erste Dehnung setzt sich zusammen aus einem der Wirkung von N_1 entsprechenden Theile, welcher gleich ist dem Quotienten aus N_1 und dem Elasticitätscoëfficienten; ferner aus zwei negativen Theilen, entsprechend den Quercontractionen, welche mit den Dehnungen nach den beiden anderen Richtungen verbunden sind. Ist β der Factor, welcher das Verhältniss der Quercontraction zur Verlängerung darstellt, so hat man für δ_1 den Ausdruck

$$E\delta_1 = N_1 - \beta N_2 - \beta N_3.$$

Diese Formel, und zwei analoge für δ_2 und δ_3 gelten für ein Prisma von unveränderlicher Temperatur. Wird aber zugleich die Temperatur um s Grade erhöht, so sind die Gleichungen in der folgenden Form zu schreiben

$$E(\delta_1 - \alpha s) = N_1 - \beta N_2 - \beta N_3$$
$$E(\delta_2 - \alpha s) = N_2 - \beta N_3 - \beta N_1$$
$$E(\delta_3 - \alpha s) = N_3 - \beta N_1 - \beta N_2.$$

Sind $N_2 = N_3 = 0$, ist ferner $\delta_1 = 0$, so gibt die erste Gleichung

$$N_1 = -E\alpha s$$

und aus der zweiten und dritten folgt

$$\delta_2 = \delta_3 = \alpha s + \beta\alpha s.$$

Diese Resultate stimmen mit den früheren überein, denn zwischen E und β und den Coëfficienten von Lamé bestehen die Gleichungen

$$E = \frac{(3\lambda+2\mu)\mu}{\lambda+\mu}, \quad \beta = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}.$$

Sind die Spannungen $N_2 = N_3 = 0$, hingegen die Bedingung $\delta_1 = 0$ nicht gegeben, so wird die Spannung N_1 ausgedrückt durch

$$N_1 = E(\delta_1 - \alpha s).$$

Diese Formel ist auch schon von Duhamel als Ausdruck für die Spannung in einem elastischen Stabe gebraucht worden, und zwar in dem Mémoire sur le mouvement des différents points d'une barre cylindrique, dont la température varie. (Journal de l'école polytechnique. Tome XXI. 1856.) Er leitet sie dort durch die folgende Betrachtung ab, welche übrigens schon von Lambert zur Bestimmung der Kraft, mit welcher die Wärme einen Stab ausdehnt, angewendet wurde. Erhält ein Stab zuerst bei 0° durch einen Zug $E\delta_1$ eine Dehnung δ_1 und wird dann seine Temperatur auf s Grade erhöht, so wächst die Dehnung um αs. Diese kann durch einen Druck $E\alpha s$ wieder aufgehoben werden, geschieht dies, so ist dann im Stabe nur mehr die Spannung $E\delta_1 - E\alpha s$.

Gleichgewicht einer Kugelschale, in welcher die Temperatur concentrisch vertheilt ist.

Dieser Fall ist, wie schon oben angegeben wurde, bereits von Duhamel und Neumann behandelt worden, die neuerliche Aufnahme desselben kann ich also nur durch die verschiedene Art der Betrachtung rechtfertigen. Ich will dabei nicht die einem rechtwinkligen Coordinatensysteme entsprechenden Gleichungen anwenden, sondern die Aufgabe directe lösen.

Von Kräften, welche auf die einzelnen Massentheilchen wirken, will ich absehen, von den Zügen oder Drücken, welche auf die beiden Oberflächen wirken, nehme ich an, dass dieselben normal zu diesen Flächen und in allen Theilen einer Fläche gleich sind.

Um ein Element der Kugelschale zu erhalten, beschreibe ich mit den Radien r und $r' = r+dr$ zwei Kugelflächen und

die zwischen denselben enthaltene unendlich dünne Schale schneide ich durch eine, den Mittelpunkt der Kugel enthaltende Ebene in zwei Hälften. Die an den drei Grenzflächen jeder dieser Hälften angreifenden Spannungen müssen im Gleichgewichte stehen. Dass die Kräfte nach jeder zur Schnittebene parallelen Richtung sich gegenseitig aufheben, ist von selbst klar. Man hat also nur die Bedingung für das Gleichgewicht der Kräfte, welche zu jener Ebene senkrecht wirken, zu suchen. Die Normalspannung auf der inneren Fläche sei R, auf der äusseren R'. Senkrecht zur Halbirungsebene geben diese in Summe die Kraft $\pi r'^2 R' - \pi r^2 R$. Die Spannung auf der dritten ringförmigen Grenzfläche sei Q, so liefert diese in Summe die Kraft $2\pi r(r'-r)Q$,

Die Bedingung des Gleichgewichtes ist sonach

$$\pi r'^2 R' - \pi r^2 R = 2\pi r(r'-r)Q$$

oder

$$\frac{d(r^2 R)}{dr} = 2rQ$$

oder auch

$$r\frac{dR}{dr} + 2R - 2Q = 0. \tag{A}$$

Die Verschiebungen der Punkte fallen alle in die Richtungen der Radien und sind ebenfalls nur von diesen abhängig. Bezeichnet man die Verschiebung eines Punktes mit U, so ist die Dehnung in der Richtung des Radius $\frac{dU}{dr}$, die Dehnung in einer zum Radius senkrechten Richtung ist $\frac{U}{r}$.

Zwischen diesen Dehnungen und den Spannungen bestehen, wenn es sich um den Fall einer Schale von gleichförmiger und constant bleibender Temperatur handelt, die Gleichungen

$$\frac{dU}{dr} = \frac{R - 2\beta Q}{E}, \quad \frac{U}{r} = \frac{Q(1-\beta) - \beta R}{E},$$

worin E wieder den Elasticitätscoëfficienten in seiner gewöhnlichen Bedeutung, und β den Coëfficienten der Quercontraction darstellt.

Ist aber bei den Verschiebungen zugleich eine Temperaturerhöhung betheiligt, dann sind diese zwei Gleichungen zu ersetzen durch

$$\frac{dU}{dr} - \alpha s = \frac{R - 2\beta Q}{E}$$
$$\frac{U}{r} - \alpha s = \frac{Q(1-\beta) - \beta R}{E}. \tag{B}$$

Nach der gewöhnlichen Art, derlei Aufgaben zu behandeln, hätte man aus diesen Gleichungen R und Q zu bestimmen, die Werthe in (A) einzusetzen und die resultirende Gleichung nach U aufzulösen. Der gefundene Werth von U ist wieder in R einzuführen und aus den für die beiden Oberflächen gegebenen Werthen von R sind die Constanten der Integration zu bestimmen. Man kann aber auch anders verfahren. Man kann aus (B) eine zweite Relation zwischen Q und R ableiten, und diese in Verbindung mit (A) zur Bestimmung von Q und R verwenden.

Multiplicirt man die zweite der Gleichungen (B) mit r und differenzirt sie sodann nach r, so erhält man einen zweiten Ausdruck für $\frac{dU}{dr}$. Dieser dem ersten gleich gesetzt, gibt die Gleichung

$$(1-\beta)\frac{d}{dr}(rQ) - \beta\frac{d}{dr}(rR) + E\alpha r\frac{ds}{dr} = R - 2\beta Q.$$

Führt man aus (A) den Werth von $\frac{d}{dr}(rR)$ ein, so ergibt sich die Relation

$$\frac{d}{dr}(rQ) - R + \frac{E\alpha}{1-\beta} r\frac{ds}{dr} = 0.$$

Wird zur Abkürzung

$$\frac{E\alpha}{1-\beta} = a \tag{C}$$

gesetzt, so hat man nunmehr die zweite Beziehung zwischen den beiden Spannungen in der Form

$$\frac{d(rQ)}{dr} - R + ar\frac{ds}{dr} = 0. \tag{D}$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit 2 und addirt sie sodann zu (A), so erhält man

$$r\frac{dR}{dr}+2r\frac{dQ}{dr}+2ar\frac{ds}{dr}=0$$

und daraus

$$R+2Q=-2as+C, \tag{E}$$

worin C eine Constante der Integration bedeutet.

Die Gleichung (D) von der Gleichung (A) subtrahirt, gibt

$$r\frac{dR}{dr}+3R-r\frac{dQ}{dr}-3Q=ar\frac{ds}{dr},$$

welche Gleichung nach Multiplication mit r^2 auch in der Form

$$\frac{d}{dr}(r^3R-r^3Q)=ar^3\frac{ds}{dr}$$

geschrieben werden kann, und integrirt

$$r^3(R-Q)=a\int r^3\frac{ds}{dr}dr+C'$$

gibt, worin C' eine zweite Integrationsconstante bedeutet. Diese Gleichung kann noch anders geschrieben werden. Es ist

$$\int r^3\frac{ds}{dr}dr=r^3s-3\int r^2sdr$$

und sonach erhält man

$$R-Q=as-\frac{3a}{r^3}\int r^2sdr+\frac{C'}{r^3}. \tag{F}$$

Aus den Gleichungen (E) und (F) erhält man

$$R=-\frac{2a}{r^3}\int r^2sdr+\frac{C}{3}+\frac{2C'}{3r^3} \tag{G}$$

$$Q=-as+\frac{a}{r^3}\int r^2sdr+\frac{C}{3}-\frac{C'}{3r^3}. \tag{H}$$

Sind r_1 der innere, r_2 der äussere Radius der Schale, R_1 die Spannung auf der inneren, R_2 die auf der äusseren Kugelfläche,

so folgen die Constanten C und C' aus den zwei Gleichungen

$$R_1 = -\frac{2a}{r_1^3}\int^{r_1} r^2 s dr + \frac{C}{3} + \frac{2C'}{3r_1^3}$$

$$R_2 = -\frac{2a}{r_2^3}\int^{r_2} r^2 s dr + \frac{C}{3} + \frac{2C'}{3r_2^3}.$$

Darin bedeuten die den Integralzeichen beigesetzten Zeichen r_1 und r_2, dass in dem unbestimmten Integrale des Ausdruckes $r^2 s dr$ die Variable r nach ausgeführter Integration durch r_1, beziehungsweise r_2 zu ersetzen ist. Die Werthe von C und C' sind folgende:

$$C = \frac{3(R_2 r_2^3 - R_1 r_1^3)}{r_2^3 - r_1^3} + \frac{6a}{r_2^3 - r_1^3}\int_{r_1}^{r_2} r^2 s dr$$

$$C' = \frac{3r_1^3 r_2^3 (R_1 - R_2)}{2(r_2^3 - r_1^3)} + \frac{3ar_2^3}{r_2^3 - r_1^3}\int^{r_1} r^2 s dr + \frac{3ar_1^3}{r_2^3 - r_1^3}\int^{r_2} r^2 s dr.$$

Damit sind die Spannungen Q und R vollständig bestimmt und zugleich auch die Verschiebungen, da die zweite der Gleichungen (B) unmittelbar U liefert.

Setzt man $s = 0$, so geben die Formeln die Spannungen und Verschiebungen, welche den äusseren Zugkräften allein entsprechen. Setzt man $R_1 = R_2 = 0$, so geben die Formeln die Spannungen und Verschiebungen, welche in der von äusseren Kräften freien Kugelschale durch die ungleichförmige Vertheilung der Temperatur hervorgerufen würden. Die Summe der beiden partikulären Auflösungen gibt die allgemeine.

Ich will noch für den Fall, dass $R_1 = R_2 = 0$, die Formeln für R und Q hieher stellen. Es ist

$$R = \frac{2a}{r_2^3 - r_1^3}\left[\int_{r_1}^{r_2} r^2 s dr - \frac{r_2^3}{r^3}\int_{r_1}^{r} r^2 s dr - \frac{r_1^3}{r^3}\int_{r}^{r_2} r^2 s dr\right]$$

$$Q = -as + \frac{a}{r_2^3 - r_1^3}\left[2\int_{r_1}^{r_2} r^2 s dr + \frac{r_2^3}{r^3}\int_{r_1}^{r} r^2 s dr + \frac{r_1^3}{r^3}\int_{r}^{r_2} r^2 s dr\right].$$

Für $r = r_1$ und $r = r_2$ sei $s = s_1$ und $s = s_2$, ferner $Q = Q_1$ und $Q = Q_2$, so ist

$$Q_1 = -as_1 + \frac{3a}{r_2^3 - r_1^3} \int_{r_1}^{r_2} r^2 s dr$$

$$Q_2 = -as_2 + \frac{3a}{r_2^3 - r_1^3} \int_{r_1}^{r_2} r^2 s dr.$$

Die Änderungen der Radien der beiden Oberflächen seien U_1 und U_2. Man findet dieselben aus der zweiten der Gleichungen (B), wenn man darin für Q die Werthe Q_1 und Q_2 und zugleich $R = 0$ einsetzt. Es ergibt sich, wenn man für a wieder seinen Werth aus der Gleichung (C) einführt,

$$\frac{U_1}{r_1} = \frac{U_2}{r_2} = \frac{3\alpha}{r_2^3 - r_1^3} \int_{r_1}^{r_2} r^2 s dr.$$

Der Factor von α in dieser Formel bedeutet nichts Anderes, als die mittlere Temperatur der Kugelschale. Es ist dies sofort zu ersehen, wenn man den Zähler und Nenner desselben mit $\frac{4\pi}{3}$ multiplicirt. Wird also einer gleichförmig erwärmten Kugelschale Wärme concentrisch zugeführt oder derselben Wärme in gleicher Weise entzogen, so ändern sich der innere und der äussere Radius der Schale so, als ob die ganze Kugelschale gleichförmig auf eine höhere oder tiefere, und zwar auf die jeweilige mittlere Temperatur gebracht worden wäre. Insofern die specifische Wärme als von der Temperatur unabhängig angenommen werden kann, kann auch die Änderung des inneren oder äusseren Radius als Mass für die Wärmemenge benützt werden, welche der Hohlkugel zugeführt oder entzogen wird.

Auf diese merkwürdige, schon von Duhamel gefundene Eigenschaft einer Kugelschale könnte eine Methode zur Bestimmung des Wärmeleitungsvermögens gegründet werden.

Gleichgewicht einer Kugelschale, in welcher die Temperatur in besonderer Art von zwei Variablen abhängig ist.

Die beiden Variablen, von welchen die Temperatur s eines Punktes der Kugelschale abhängig ist, sollen der Radius r des Punktes sein und der Winkel φ, den r mit einer Äquatorebene

bildet. Die Temperatur ist dann um die Axe der Kugel symmetrisch vertheilt. Die Art der Vertheilung soll durch die specielle Formel

$$s = a + b \sin^2 \varphi$$

gegeben sein, worin a und b Functionen von r bedeuten.

Die Gleichungen des Gleichgewichtes einer elastischen Kugelschale, in welcher die Verschiebungen nur von den zwei Variablen r und φ abhängig sind, nehme ich aus den Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides. Sie sind

$$\begin{aligned} (\lambda+2\mu) r^2 \cos\varphi \frac{d\theta}{dr} + \mu \frac{d\gamma}{d\varphi} &= 0 \\ (\lambda+2\mu) \cos\varphi \frac{d\theta}{d\varphi} - \mu \frac{d\gamma}{dr} &= 0. \end{aligned} \tag{a}$$

Darin bedeutet θ die Volumsdilatation. Bezeichnet U die Verschiebung in der Richtung des Radius, V die Verschiebung in der Richtung des Meridians, so ist θ gegeben durch

$$\theta = \frac{dU}{dr} + \frac{2U}{r} + \frac{1}{r}\frac{dV}{d\varphi} - \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\frac{V}{r}, \tag{b}$$

γ ist bestimmt durch die Gleichung:

$$\gamma = \cos\varphi \left(\frac{dU}{d\varphi} - r\frac{dV}{dr} - V\right). \tag{c}$$

Die Gleichungen (a) gelten für $s=0$. Ist s von Null verschieden, so treten an Stelle dieser Gleichungen die folgenden:

$$(\lambda+2\mu) r^2 \cos\varphi \frac{d\theta}{dr} + \mu \frac{d\gamma}{d\varphi} - (3\lambda+2\mu)\alpha r^2 \cos\varphi \frac{ds}{dr} = 0$$

$$(\lambda+2\mu) \cos\varphi \frac{d\theta}{d\varphi} - \mu \frac{d\gamma}{dr} - (3\lambda+2\mu)\alpha \cos\varphi \frac{ds}{d\varphi} = 0.$$

Setzt man

$$(3\lambda+2\mu)\alpha s = (\lambda+2\mu)(l + m \sin^2\varphi) \tag{d}$$

$$\theta = \eta + l + m \sin^2\varphi \tag{e}$$

so nehmen die beiden Gleichungen die Form

$$(\lambda+2\mu)\, r^2 \cos\varphi \frac{d\eta}{dr} + \mu \frac{d\gamma}{d\varphi} = 0$$

$$(\lambda+2\mu) \cos\varphi \frac{d\eta}{d\varphi} - \mu \frac{d\gamma}{dr} = 0$$

an. Man kann ihnen genügen durch die besonderen Lösungen

$$\eta = L + M \sin^2\varphi, \quad \gamma = N \cos^2\varphi \sin\varphi, \tag{f}$$

L, M, N sind Functionen von r und müssen folgende Gleichungen erfüllen:

$$r^2 \frac{dL}{dr} + \frac{\mu}{\lambda+2\mu} N = 0$$

$$r^2 \frac{dM}{dr} - \frac{3\mu}{\lambda+2\mu} N = 0 \tag{g}$$

$$2M - \frac{\mu}{\lambda+2\mu} \frac{dN}{dr} = 0.$$

Aus den zwei letzten kann man N eliminiren und erhält zur Bestimmung von M die Gleichung:

$$r^2 \frac{d^2 M}{dr^2} + 2r \frac{dM}{dr} - 6M = 0,$$

woraus sich

$$M = Ar^2 + \frac{B}{r^3} \tag{h}$$

ergibt. A und B bedeuten die zwei Constanten der Integration. Die zweite der Gleichungen gibt, wenn noch der Kürze wegen

$$\frac{\mu}{\lambda+2\mu} = k \tag{i}$$

gesetzt wird,

$$kN = \frac{2Ar^3}{3} - \frac{B}{r^2}. \tag{k}$$

Aus der ersten der Gleichungen (g) folgt nunmehr

$$L = C - \frac{Ar^2}{3} - \frac{B}{3r^3}, \tag{l}$$

worin C eine neue Integrationsconstante bedeutet. Aus (h) und (l) folgt noch die Beziehung:

$$3L+M=3C. \qquad (m)$$

Für die Verschiebungen U und V nehme ich folgende Formeln an

$$U=G+H\sin^2\varphi, \quad V=J\sin\varphi\cos\varphi. \qquad (n)$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichungen (b) und (c), so erhält man

$$\theta=\frac{dG}{dr}+\frac{2G}{r}+\frac{J}{r}+\left(\frac{dH}{dr}+\frac{2H}{r}-\frac{3J}{r}\right)\sin^2\varphi$$

$$\gamma=(2H-r\frac{dJ}{dr}-J)\cos^2\varphi\sin\varphi.$$

Die Vergleichung dieser Ausdrücke mit den Gleichungen (e) und (f) liefert zur Bestimmung von G, H, J die drei Gleichungen

$$r\frac{dG}{dr}+2G+J=Lr+lr$$

$$r\frac{dH}{dr}+2H-3J=Mr+mr \qquad (o)$$

$$2H-r\frac{dJ}{dr}-J=N.$$

Multiplicirt man die letzte dieser Gleichungen mit der Zahl q und addirt sie zur zweiten, so erhält man

$$r\frac{dH}{dr}+(2+2q)H-qr\frac{dJ}{dr}-(3+q)J=Mr+mr+Nq.$$

Wählt man q so, dass

$$\frac{3+q}{q}=2+2q$$

wird, was für $q=+1$ und $q=-\frac{3}{2}$ der Fall ist, so hat man die zwei Gleichungen

$$r\frac{dH}{dr}+4H-(r\frac{dJ}{dr}+4J)=Mr+mr+N$$

$$r\frac{dH}{dr}-H+\frac{3}{2}\left(r\frac{dJ}{dr}-J\right)=Mr+mr-\frac{3N}{2}.$$

Multiplicirt man die erste mit r^3 und die zweite mit $\frac{2}{r^2}$, so verwandeln sie sich in

$$\frac{d}{dr}(r^4H - r^4J) = Mr^4 + mr^4 + Nr^3$$

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{2H}{r} + \frac{3J}{r}\right) = \frac{2M}{r} + \frac{2m}{r} - \frac{3N}{r^2}$$

und geben

$$\left.\begin{aligned} H - J &= \frac{E}{r^4} + \frac{1}{r^4}\int\left(M + m + \frac{N}{r}\right)r^4dr \\ 2H + 3J &= Fr + r\int\left(2M + 2m - \frac{3N}{r}\right)\frac{dr}{r}, \end{aligned}\right\} \qquad (p)$$

worin E, F die Integrationsconstanten sind.

Es ist noch G zu bestimmen. Multiplicirt man die erste der Gleichungen (o) mit $3r^2$, die zweite mit r^2 und addirt sodann beide, so hat man

$$\frac{d}{dr}(3r^2G + r^2H) = (3L + M)r^2 + 3lr^2 + mr^2$$

oder mit Rücksicht auf die Relation (m)

$$\frac{d}{dr}(3r^2G + r^2H) = 3Cr^2 + 3lr^2 + mr^2$$

oder

$$3G + H = Cr + \frac{D}{r^2} + \frac{1}{r^2}\int(3l + m)r^2dr \qquad (q)$$

worin D die Integrationsconstante ist.

Die weitere Aufgabe besteht nun darin, aus den Bedingungen für die beiden Oberflächen die sechs Constanten A, B, C, D, E, F zu bestimmen. Diese Bedingungen sollen folgende sein:

Die innere, sowie die äussere Oberfläche stehen jede unter der Einwirkung eines constanten von φ unabhängigen Zuges oder Druckes, welcher senkrecht gegen die Oberflächen gerichtet ist. Es sind also für jede Oberfläche die Normalspannung constant, die Tangentialspannungen aber gleich Null zu setzen. Bezüglich der letzteren ist zu bemerken, dass die eine derselben, welche nach dem Parallelkreise gerichtet ist, schon durch die Art der speciellen

Aufgabe als der Null gleich gegeben ist, also nur die Bestimmung der andern, welche nach dem Meridian gerichtet ist, eine eigentliche Bedingung bildet.

Der Ausdruck für die Normalspannung in der Richtung des Radius ist für $s = 0$

$$R_1 = \lambda\theta + 2\mu \frac{dU}{dr},$$

in unserem Falle also

$$R_1 = \lambda\theta + 2\mu \frac{dU}{dr} - (3\lambda + 2\mu)\alpha s,$$

oder wenn man von den durch die Gleichungen (d) und (e) eingeführten Bezeichnungen Gebrauch macht

$$R_1 = \lambda\eta + 2\mu\left(\frac{dU}{dr} - l - m\sin^2\varphi\right).$$

Man hat also für jede der beiden Oberflächen eine Gleichung von der Form

$$\lambda\eta + 2\mu\left(\frac{dU}{dr} - l - m\sin^2\varphi\right) = K$$

worin K eine constante, von φ unabhängige Grösse darstellt.

Führt man den Werth von η aus (f) und den Werth von U aus (n) ein, so zerfällt die Gleichung für jede der beiden Oberflächen in die zwei folgenden:

$$\lambda L + 2\mu \frac{dG}{dr} - 2\mu l = K \tag{I.}$$

$$\lambda M + 2\mu \frac{dH}{dr} - 2\mu m = 0. \tag{II.}$$

Der Ausdruck für die nach dem Meridian gerichteten Tangentialspannung ist

$$R_2 = \mu\left(\frac{1}{r}\frac{dU}{d\varphi} + \frac{dV}{dr} - \frac{V}{r}\right).$$

Führt man die Werthe von U und V ein, so erhält man als dritte Bedingungsgleichung für jede der beiden Oberflächen

$$2H + r\frac{dJ}{dr} - J = 0. \tag{III.}$$

Die Aufgabe, aus den durch (I, II, III) repräsentirten sechs Gleichungen die sechs Constanten A, B, C, D, E, F zu bestimmen, wird bedeutend leichter, wenn man diese Gleichungen durch andere aus ihnen abgeleitete ersetzt. Multiplicirt man die Gleichung (I) mit 3 und addirt dieselbe zu (II), so folgt mit Rücksicht auf die Gleichung (m)

$$3\lambda C + 2\mu\left(3\frac{dG}{dr} + \frac{dH}{dr} - 3l - m\right) = 3K.$$

Aus (q) folgt aber

$$3\frac{dG}{dr} + \frac{dH}{dr} - 3l - m = C - \frac{2D}{r^3} - \frac{2}{r^3}\int(3l+m)r^2dr$$

und somit reducirt sich die vorstehende Gleichung auf

$$(3\lambda+2\mu)C - \frac{4\mu}{r^3}\left(D + \int[3l+m]r^2dr\right) = 3K. \qquad \text{(I'.)}$$

Diese enthält nur die Constanten C und D. Schreibt man dieselbe für jede der beiden Oberflächen auf, so kann man aus diesem Paare von Gleichungen unmittelbar C und D bestimmen.

In den Gleichungen (II) und (III) kann man $\frac{dH}{dr}$ und $\frac{dJ}{dr}$ durch ihre Werthe aus den Gleichungen (o) ersetzen. Sie nehmen dann folgende Gestalt an:

$$(\lambda+2\mu)M - \frac{2\mu}{r}(2H - 3J) = 0$$

$$4H - 2J - N = 0.$$

Wenn man diese nach J und H auflöst und die Werthe von M und N aus (h) und (k) einführt, so erhält man

$$H = \frac{Ar^3}{8k} - \frac{B}{2kr^2} \qquad \text{(II'.)}$$

$$J = -\frac{Ar^3}{12k} - \frac{B}{2kr^2}. \qquad \text{(III'.)}$$

Combinirt man H und J zu den Aggregaten $H - J$ und $2H+3J$, so folgt

$$H-J=\frac{5Ar^3}{24k}, \quad 2H+3J=-\frac{5B}{2kr^2}$$

und mit Benützung der Gleichungen (p)

$$E+\int\left(M+m+\frac{N}{r}\right)r^4 dr=\frac{5Ar^7}{24k} \qquad \text{(II.'')}$$

$$F+\int\left(2M+2m-\frac{3N}{r}\right)\frac{dr}{r}=-\frac{5B}{2kr^3}. \qquad \text{(III.'')}$$

Schreibt man die erste dieser Gleichungen für jede der beiden Oberflächen auf und subtrahirt diese beiden Gleichungen, so fällt E aus und in derselben Weise kann man F eliminiren. Die beiden Gleichungen

$$\int_{r_1}^{r_2}\left(M+m+\frac{N}{r}\right)r^4 dr=\frac{5A(r_2^7-r_1^7)}{24k}$$

$$\int_{r_1}^{r_2}\left(2M+2m-\frac{3N}{r}\right)\frac{dr}{r}=-\frac{5B}{2k}\left(\frac{1}{r_2^3}-\frac{1}{r_1^3}\right)$$

enthalten nur mehr die Constanten A und B und zwar explicit und auch in den Integralen von M und N. Setzt man die Werthe von M und N aus (h) und (k) ein, führt die Integration aus, so lassen sich die beiden vorstehenden Gleichungen reduciren auf

$$A\,\frac{19-24k}{168k}(r_2^7-r_1^7)+B\,\frac{1-k}{2k}(r_2^2-r_1^2)=\int_{r_1}^{r_2} mr^4 dr$$

$$A\,\frac{1-k}{k}(r_2^2-r_1^2)+B\,\frac{11-4k}{6kr_1^3r_2^3}(r_2^3-r_1^3)=2\int_{r_1}^{r_2}\frac{mdr}{r}.$$

Aus diesen Gleichungen findet man die Constanten A und B. Die Constanten E und F folgen dann aus (II''.) und (III''.), die Constanten C und D sind für sich durch (I'.) bestimmt, es ist also die Aufgabe vollständig gelöst.

Ich will noch einige Bemerkungen über den einfacheren Fall, in welchem die Dicke der Kugelschale im Vergleiche zu den Radien eine kleine Grösse ist, anknüpfen. Zugleich will ich noch annehmen, dass a und b also auch l und m von r unab-

hängig sind. Dann geben die zwei Gleichungen für die Constanten A und B die Werthe

$$\frac{Ar_2^2}{k} = \frac{168m}{113-148k}, \quad \frac{B}{kr_2^3} = -\frac{20m}{113-148k}.$$

Aus den Gleichungen (II'.) und (III'.) kann man nun unmittelbar die Werthe von H und J für die äussere Oberfläche bestimmen. Man erhält

$$\frac{H_2}{r_2} = \frac{31m}{113-148k}, \quad \frac{J_2}{r_2} = -\frac{4m}{113-148k}.$$

und wenn man für m und k ihre Werthe einsetzt,

$$\frac{H_2}{r_2} = 31\alpha b\,\frac{3\lambda+2\mu}{113\lambda+78\mu}, \quad \frac{J_2}{r^2} = -4\alpha b\,\frac{3\lambda+2\mu}{113\lambda+78\mu}.$$

Um die Verschiebungen in der äusseren Oberfläche vollständig zu haben, muss man noch G_2 bestimmen. Dies folgt aus der Gleichung (q), es ist

$$3G_2 + H_2 = Cr_2 + \frac{1}{r_2^2}\left(D + \int^{r_2}(3l+m)\,r^2dr\right).$$

Wenn man die Gleichung (I') mit r^3 multiplicirt und dann für jede der beiden Oberflächen ansetzt, so gibt die Differenz der so entstehenden Gleichungen

$$(3\lambda+2\mu)(r_2^3-r_1^3)\,C = 4\mu\int_{r_1}^{r_2}(3l+m)r^2dr + 3K_2r_2^3 - 3K_1r_1^3.$$

Nimmt man $K_1 = K_2 = 0$ an, so erhält man

$$C = \frac{4\mu(3l+m)}{3(3\lambda+2\mu)} = \frac{4\mu(3\alpha a+\alpha b)}{3(\lambda+2\mu)}.$$

Ferner gibt die für die äussere Oberfläche geltende Gleichung (I'.)

$$\frac{3\lambda+2\mu}{4\mu}\,C = \frac{1}{r_2^3}\left(D + \int^{r_2}(3l+m)\,r^2dr\right).$$

Es lässt sich also $3G_2+H_2$ durch die Constante C allein ausdrücken. Es ist

$$\frac{3G_2+H_2}{r_2}=\frac{3(\lambda+2\mu)C}{4\mu}=3\alpha a+\alpha b$$

und nach Substitution des oben für H_2 gefundenen Werthes folgt

$$\frac{G_2}{r_2}=\alpha a+\frac{4\alpha b}{3}\cdot\frac{5\lambda+4\mu}{113\lambda+78\mu}.$$

Die vollständigen Ausdrücke für die Verschiebungen in der äusseren Oberfläche sind demnach

$$\frac{U_2}{r_2}=\alpha a+\frac{4\alpha b}{3}\cdot\frac{5\lambda+4\mu}{113\lambda+78\mu}+31\alpha b\frac{3\lambda+2\mu}{113\lambda+78\mu}\sin^2\varphi$$

$$\frac{V_2}{r_2}=-4\alpha b\frac{3\lambda+2\mu}{113\lambda+78\mu}\sin\varphi\cos\varphi.$$

Nimmt man an, dass die Kugelschale in ihrem ursprünglichen Zustande eine höhere Temperatur hatte und dann abgekühlt wurde, jedoch an den Polen mehr als am Äquator, dann sind a und b negativ. Die Contraction gegen den Mittelpunkt wächst mit dem Quadrate des Sinus der geographischen Breite. Da die Zahlen 113 und 78 nahe wie 3 zu 2 sich verhalten, so ist der Factor von $\sin^2\varphi$ in $\frac{U_2}{r_2}$, sowie auch der Factor von $\sin\varphi\cos\varphi$ in $\frac{V_2}{r_2}$ von den speciellen Werthen von λ und μ nur in sehr geringem Masse abhängig. Man kann also auch $\lambda=\mu$ setzen.

Die aus der ungleichen Contraction erfolgende Abplattung ist dann für jeden Grad Temperaturdifferenz zwischen Äquator und Pol gegeben durch

$$\frac{155}{191}\alpha=0\cdot 81\,\alpha.$$

Ausser der radialen Contraction tritt noch, weil V_2 positiv wird, eine Verschiebung gegen die Pole hin ein, welche für $\varphi=45^\circ$ ihren höchsten Werth erhält. Dieser beträgt für jeden Grad Temperaturdifferenz

$$\frac{10}{191}\alpha r_2.$$

Ich will noch die Ausdrücke hieher setzen, welche sich für die Normalspannungen in der Richtung des Meridians und in der Richtung des Parallels ergeben. Für erstere findet man

$$-\alpha b \cdot \frac{8\mu(3\lambda+2\mu)}{3(113\lambda+78\mu)},$$

für letztere

$$+\alpha b \frac{8\mu(3\lambda+2\mu)}{3(113\lambda+78\mu)}(2-3\sin^2\varphi).$$

Die Normalspannung in der Richtung des Meridians ist auf der ganzen Oberfläche gleich. Für einen negativen Werth von b ist sie positiv, also einem Zuge gleich. Die Spannung in der Richtung des Parallelkreises ist von φ abhängig, sie wechselt bei $\varphi = 54°44'$ ihr Zeichen. Sie ist für negative b negativ in geringeren, positiv in höheren Breiten, in ersteren einem Drucke, in letzteren einem Zuge gleich.

Entwicklung einiger zur Bestimmung der Diamagnetisirungszahl nützlichen Formeln.

Von dem c. M. Ludwig Boltzmann in Graz.

(Mit 1 Holzschnitte.)

I. Herausstossende Kraft einer Spirale mit vielen Windungslagen.

Nach den in meiner Abhandlung: „Über die auf Diamagnete wirkenden Kräfte [1] angegebenen Methoden hat Herr Professor Ettingshausen neuerdings eine Reihe von Versuchen angestellt, welche die Bestimmung des numerischen Werthes der Diamagnetisirungszahl namentlich für Wismuth zum Zwecke haben. Es schien dabei die Berücksichtigung einiger Umstände von Wichtigkeit, welche ich in der angeführten Abhandlung unberücksichtigt gelassen hatte und ich will daher die diesbezüglichen Formeln hier nachtragen.

Bei der in §. 2 auseinandergesetzten Berechnung der herausstossenden Kraft einer Spirale auf einen coaxialen, diamagnetischen Cylinder wurde eine Spirale von einer einzigen Windungslage vorausgesetzt. In der Praxis empfiehlt es sich jedoch, eine Spirale mit vielen Windungslagen über einander anzuwenden.

Seien im Ganzen ν Windungslagen übereinander jede von Nl Windungen Der Radius der innersten Lage sei β, der der äussersten b, $b-\beta=\delta$ ist also gewissermassen die Spiralendicke, $\frac{\nu}{\delta}$ die Zahl der Windungen auf die Dickeneinheit. i sei wieder die Stromintensität. Will man die in der citirten Abhandlung entwickelten Formeln ohne Weiteres auf diesen Fall anwenden, so

[1] Diese Sitzungsberichte, Bd. LXXX, October 1879.

wäre es am einfachsten alle Ströme der verschiedenen Lagen in der mittleren Lage concentrirt zu denken, d. h. νi statt i, $\frac{b+\beta}{2}$ statt b in jenen Formeln zu setzen. Eine grössere Genauigkeit bekommt man, wenn man sich alle Ströme zuerst in der innersten, dann nächstfolgenden Lage u. s. w. concentrirt denkt, für jeden dieser Fälle die Wirkung auf den diamagnetischen Cylinder sucht, und zum Schlusse aus allen diesen Wirkungen das Mittel nimmt. Dieses wäre

$$\bar{\xi} = \frac{\nu^2}{b-\beta}\int_\beta^b \xi\, db \qquad 23)$$

wobei ξ aus den Formeln 18), 19) und 20) der citirten Abhandlung zu entnehmen ist. Nimmt man dabei $\frac{\rho^2}{b^2+m^2}$ und $\frac{b^2}{l^2}$ als sehr klein an und vernachlässigt Glieder, in denen das grösste Glied mit einem Quadrate oder einem Producte zweier dieser Grössen multiplicirt ist, so wird

$$\bar{\xi} = \frac{8\pi^3 k N^2 \nu^2 i^2 \rho^2 m}{\delta}\Big\{\log\frac{b+\sqrt{b^2+m^2}}{\beta+\sqrt{\beta^2+m^2}} +$$

$$+\frac{\rho^2}{8m^2}\left(\frac{b^3}{\sqrt{b^2+m^2}^3} - \frac{\beta^3}{\sqrt{\beta^2+m^2}^3}\right) - \frac{l(b^3-\beta^3)}{3(l^2-m^2)^2} \qquad 24)$$

$$-\frac{l^2+m^2}{4(l^2-m^2)^2}\left[b\sqrt{b^2+m^2} - \beta\sqrt{\beta^2+m^2} - m^2\log\frac{b+\sqrt{b^2+m^2}}{\beta+\sqrt{\beta^2+m^2}}\right]$$

Dagegen wäre es ganz unerlaubt, die Wirkungen, welche die verschiedenen Windungslagen auf den diamagnetischen Cylinder ausüben, einfach zu addiren (superponiren), da sich die Wirkungen zweier Ströme auf einen diamagnetischen Körper niemals superponiren. So ist diese Wirkung nicht i, sondern i^2 proportional und auch hier würde man durch einfache Addition eine Proportionalität mit ν, nicht mit ν^2 erhalten.

Nach dem Gesagten wird die Nothwendigkeit der exacten Berechnung der Wirkung einer viellagigen Spirale einleuchten, um daraus beurtheilen zu können, in wie weit der Gebrauch der Formel 24) gestattet ist.

Man sieht sofort, dass sich die Werthe von X, Z daher auch $\varphi(p)$, $\psi(p)$ für die verschiedenen Lagen einfach superponiren. Bezeichnet man also die elektromagnetischen Kräfte, welche jetzt an die Stelle von X, Z treten, mit X_g Z_g, so ist

$$X_g = \varphi_g(p_2) - \varphi_g(p_1),\ Z_g = \psi_g(p_2) - \psi_g(p_1)$$

wobei

$$\varphi_g = \frac{\nu}{\delta}\int_\beta^b \varphi(p)\,db,\ \psi_g = \frac{\nu}{\delta}\int_\beta^b \psi(p)\,db$$

Gemäss der Integralformeln

$$\int\frac{db}{\sqrt{p^2+b^2}} =$$

$$= log_g(b+\sqrt{p^2+b^2}),\ \int\frac{b^2\,db}{\sqrt{p^2+b^2}^3} = log_g(b+\sqrt{p^2+p^2}) - \frac{b}{\sqrt{p^2+b^2}}$$

$$\int\frac{b^2\,db}{\sqrt{p^2+b^2}^5} = \frac{b^3}{3p^2\sqrt{p^2+b^2}^3},\ \int\frac{b^2\,db}{\sqrt{p^2+b^2}^7} = \frac{b^3(5p^2+2b^2)}{15p^4\sqrt{p^2+b^2}^5}$$

wird

$$\varphi_g = -\frac{\pi Nia\nu}{\delta}\left\{\log\frac{b+\sqrt{p^2+b^2}}{\beta+\sqrt{p^2+\beta^2}} -\right.$$

$$\left. -\frac{b}{\sqrt{p^2+b^2}} + \frac{\beta}{\sqrt{p^2+\beta^2}} - \frac{a^2}{2p^2}\left(\frac{b^3}{\sqrt{p^2+b^2}^3} - \frac{\beta^3}{\sqrt{p^2+\beta^2}^3}\right)\right\}$$

$$\psi_g = \frac{2\pi Ni\nu p}{\delta}\left\{\log\frac{b+\sqrt{p^2+\beta^2}}{\beta+\sqrt{p^2+\beta^2}} +\right.$$

$$+\frac{a^2}{4p^2}\left(\frac{b^3}{\sqrt{p^2+b^2}^3} - \frac{\beta^3}{\sqrt{p^2+b^2}^3}\right) -$$

$$\left. -\frac{a^4}{16p^4}\left[\frac{b^3(5p^2+2b^2)}{\sqrt{p^2+b^2}^5} - \frac{\beta^3(5p^2+2\beta^2)}{\sqrt{p^2+b^2}^5}\right]\right\}$$

Setzen wir daher

$$\varepsilon_i = \log \frac{b + \sqrt{p_i^2 + b^2}}{\beta + \sqrt{p_i^2 + \beta^2}}, \quad \zeta_i = \frac{b}{\sqrt{p_i^2 + b^2}} - \frac{\beta}{\sqrt{p_i^2 + \beta^2}}$$

$$\eta_i = \frac{b^3}{p_i^2 \sqrt{p_i^2 + b^2}^3} - \frac{\beta^3}{p_i^2 \sqrt{p_i^2 + \beta^2}^3}, \tag{25}$$

$$\vartheta_i = \frac{b^3 (5 p_i^2 + 2 b^2)}{p_i^4 \sqrt{p_i^2 + b^2}^5} - \frac{\beta^3 (5 p_i^2 + 2 \beta^2)}{p_i^4 \sqrt{p_i^2 + \beta^2}^5}$$

wobei i den Werth 1 oder 2 hat, so wird

$$X_g = -\frac{\pi N i a \nu}{\delta} \left\{ \varepsilon_2 - \varepsilon_1 - \zeta_2 + \zeta_1 - \frac{a^2}{2} (\eta_2 - \eta_1) \right\}$$

$$Z_g = \frac{\pi N i \nu}{\delta} \Big\{ 2 (p_2 \varepsilon_2 - p_1 \varepsilon_1) +$$

$$+ \frac{a^2}{2} (p_2 \eta_2 - p_1 \eta_1) - \frac{a^4}{8} (p_2 \vartheta_2 - p_1 \vartheta_1) \Big\}$$

Vernachlässigen wir in Hinkunft die Quadrate und Producte von $\frac{\varrho^2}{b^2 + m^2}$ und $\frac{b^2}{l^2}$, so fallen die Glieder mit a^4 weg und es wird

$$R_g^2 = \frac{\pi^2 N^2 \nu^2 i^2}{\delta^2} \Big\{ 4 (p_2 \varepsilon_2 - p_1 \varepsilon_1)^2 +$$

$$+ a^2 \left[2 (p_2 \varepsilon_2 - p_1 \varepsilon_1)(p_2 \eta_2 - p_1 \eta_1) + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - \zeta_2 - \zeta_1)^2 \right] \Big\}$$

daher

$$f_1(p_1, p_2) = k \int_0^\varphi \pi a \, da \, R_g^2 = \frac{\pi^3 k N^2 \nu^2 i^2 \varrho^2}{\delta^2} \Big\{ 2 (p_2 \varepsilon_2 - p_1 \varepsilon_1)^2 +$$

$$+ \varrho^2 \left[\frac{1}{2} (p_2 \varepsilon_2 - p_1 \varepsilon_1)(p_2 \eta_2 - p_1 \eta_1) + \frac{1}{4} (\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - \zeta_2 + \zeta_1)^2 \right] \Big\}$$

Setzt man nun $p_1 = -m$, $p_2 = l - m$ so wird

$$\log(b + \sqrt{p_2^2 + b^2}) = \log(l-m) + \frac{b}{l-m} - \frac{b^3}{6(l-m)^3}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{b-\beta}{l-m} - \frac{b^3-\beta^3}{6(l-m)^3} = \frac{\delta}{l-m} - \frac{\delta(b^2+b\beta+\beta^2)}{6(l-m)^3}$$

Bezeichnet man ferner durch die Indices m und n die Ausdrücke, welche aus 25) entstehen, wenn daselbst $p_i = m$ oder $p_i = n$ gesetzt wird, so ist:

$$\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = -\varepsilon_m + \frac{\delta}{l-m} - \frac{(b^3-\beta^3)}{6(l-m)^3}$$

$$p_2\varepsilon_2 - p_1\varepsilon_1 = \delta + m\varepsilon_m - \frac{(b^3-\beta^3)}{6(l-m)^2}$$

und wenn wir in den mit ρ^4 multiplicirten Gliedern auch $\frac{b^2}{l^2}$ vernachlässigen

$$\zeta_2 - \zeta_1 = \frac{\delta}{l-m} - \zeta_m,\ p_2\eta_2 - p_1\eta_1 = m\eta_m$$

Wir finden somit

$$f_9(-m, l-m) = \frac{\pi^3 k N^2 \nu^2 i^2 \varphi^2}{\delta^2}\Big\{2\delta^2 + 4\delta m\varepsilon_m +$$

$$+ 2m^2\varepsilon_m^2 - \frac{2(\delta+m\varepsilon_m)(b^3-\beta^3)}{3(l-m)^2} + \rho^2\Big[\frac{\delta m \eta_m}{2} +$$

$$+ \frac{m^2\eta_m\varepsilon_m}{2} + \frac{\varepsilon_m\zeta_m}{4} - \frac{\delta(\varepsilon_m+\zeta_m)}{4(l-m)}\Big]$$

Es ist daher die Gesammtkraft, welche die Spirale auf den diamagnetischen Cylinder ausübt:

$$\zeta_g = f_g(-m, l-m) - f_g(n, l+n) =$$

$$= \frac{\pi^3 k N^2 \nu^2 i^2 \rho^2}{\delta^2} \Big\{ 4\delta(m\varepsilon_m + n\varepsilon_n) +$$

$$+ 2(m^2\varepsilon_m^2 - n^2\varepsilon_n^2) - \frac{2(\delta + m\varepsilon_m)(b^3 - \beta^3)}{3(l-m)^2} + \qquad 26)$$

$$+ \frac{2(\delta - n\varepsilon_n)(b^3 - \beta^3)}{3(l+n)^2} + \rho^2 \Big[\frac{\delta}{2}(m\eta_m + n\eta_n) +$$

$$+ \frac{m^2\eta_m\varepsilon_m - n^2\eta_n\varepsilon_n}{2} + \frac{\varepsilon_m\zeta_m - \varepsilon_n\zeta_n}{4} -$$

$$- \frac{\delta}{4}\left(\frac{\varepsilon_m + \zeta_m}{l-m} - \frac{\varepsilon_n + \zeta_n}{l+n}\right)\Big]\Big\}$$

wobei ε_m, ζ_m, η_m die Werthe sind, welche aus ε_i, ζ_i, η_i in Gleichung 25) entstehen, wenn man $p_i = m$ setzt, ε_n, ζ_n, η_n wenn man $p_i = n$ setzt. Für $m = n$ wird

$$\zeta_g = \frac{\pi^3 k N^2 \nu^2 i^2 \rho^2{}_m}{\delta} \Big\{ 8\varepsilon_m - \frac{4}{3}\,\frac{\varepsilon_m(l^2 + m^2)(b^3 - \beta^3)}{3(l^2 - m^2)^2 \delta} -$$

$$- \frac{8\,l(b^3 - \beta^3)}{3(l^2 - m^2)^2} + \rho^2\eta_m \Big\} \qquad 27)$$

Wie man sieht, ist nur das erste Correctionsglied und dieses nur um einen geringen Betrag von dem entsprechenden Gliede des Ausdruckes 24) verschieden.

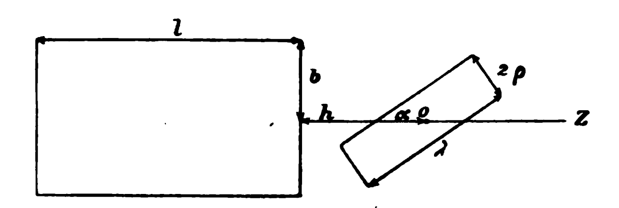
II. Drehungsmoment einer Spirale auf einen nahe ihrem Ende befindlichen und nahe conaxialen Cylinder.

Am Schlusse des §. 4 habe ich das Drehungsmoment zweier entgegengesetzt gewickelter Spiralen auf einen Cylinder berechnet, dessen Mittelpunkt in der Mitte zwischen beiden Spiralen liegt. Es ist dies der Fall, in dem die drehende Wirkung eine

ganz besonders grosse ist. Allein ich habe dabei die Annahme gemacht, dass die Entfernung des Cylindermittelpunktes von der nächsten Windungslage gross gegenüber den Dimensionen, also auch der Länge des Cylinders sei.

Diese Annahme lässt sich praktisch nicht realisiren, ohne dass die Wirkung wieder unmessbar klein wird. Lässt man aber diese Annahmen fallen, so werden die Formeln ausserordentlich unbequem und weitläufig, selbst wenn man annimmt, dass der Neigungswinkel α der Cylinderaxe gegen die Axe der Spirale sehr klein ist, so dass die algebraische und numerische Bewältigung des Problems einen ganz unverhältnissmässigen Aufwand von Zeit und Mühe kosten würde.

Ich will daher hier noch den Fall der Rechnung unterziehen, dass nur eine Stromspirale wirksam ist. Die Bezeichnungen sind dieselben, wie in meiner bereits mehrfach citirten Abhandlung und sind überdies durch nebenstehende Durchschnittsfigur versinnlicht.



$\frac{\rho^2}{b^2}, \frac{b^2}{l^2}$ und α^2 sollen als sehr klein vorausgesetzt werden, und Glieder, welche von der Ordnung des Grössten multiplicirt mit irgend einer dieser Grössen sind, vernachlässigt werden. Auch soll angenommen werden, dass man ohne erheblichen Fehler statt der den verschiedenen Windungslagen entsprechenden Werthe von b deren Mittelwerth setzen kann.

Dann findet man die Werthe von X und Z aus den Formeln der citirten Abhandlung, welche unmittelbar der Formel 15) vorhergehen, indem man $p_1 = h + z$, $p_2 = \infty$ setzt, was liefert:

$$X = \frac{\pi N i a b^2}{\sqrt{b^2 + (h+z)^2}^3},$$

$$Z = -2\pi N i \left\{ \frac{h+z}{\sqrt{b^2+(h+z)^2}} - 1 + \frac{3a^2 b^2 (h+z)}{4\sqrt{b^2+(h+z)^2}^5} \right\}$$

$$X^2 = 4\pi^2 N^2 i^2 \left\{ \frac{a^2 b^4}{4 w^3} \right\}$$

$$Z^2 = 4\pi^2 N^2 i^2 \left\{ 2 - \frac{2(h+z)}{\sqrt{w}} - \frac{3a^2 b^2 (h+z)}{2\sqrt{n^5}} - \right.$$

$$\left. - \frac{b^2}{w} + \frac{3a^2 b^2 (h+z)^2}{2w^3} \right\}$$

wobei $w = b^2 + (h+z)^2$.

Nun ist in unserem Falle

$$a^2 = \rho^2 + 2u\rho^\alpha \cos\vartheta, \quad z = u - \rho\alpha\cos\vartheta$$

Bezeichnet man daher mit Θ_0 und Θ_1 Glieder, welche unverändert bleiben, wenn $\cos\vartheta$ sein Zeichen ändert, so ist mit Vernachlässigung der Glieder, welche ρ^3 oder α^3 enthalten

$$X^2 = \Theta_0 + 4\pi^2 N^2 i^2 \frac{u\rho b^4 \alpha \cos\vartheta}{2w^3}$$

$$Z^2 = \Theta_1 + 4\pi^2 N^2 i^2 \left\{ \frac{2b^2 \rho\alpha\cos\vartheta}{\sqrt{w^3}} - \frac{3b_2 u\rho\alpha(h+u)\cos\vartheta}{\sqrt{w^5}} - \right.$$

$$\left. - \frac{2b^2(h+u)\rho\alpha\cos\vartheta}{w^2} + \frac{3b^2(h+u)^2 u\rho\alpha\cos\vartheta}{w^3} \right\}$$

daher

$$R^2 = X^2 + Z^2 = \Theta_0 + \Theta_1 + 4\pi^2 N^2 i^2 b^2 \rho\alpha\cos\vartheta \left\{ \frac{2}{\sqrt{w^3}} - \frac{3u(h+u)}{\sqrt{w^5}} - \right.$$

$$\left. - \frac{2(h+u)}{w^2} + \frac{3(h+u)^2 u}{w^3} + \frac{b^2 u}{2w^3} \right\}$$

Dieser Ausdruck mit $\rho d\vartheta du . u \delta\alpha \cos\vartheta$ multiplicirt und bezüglich ϑ von Null bis 2π, bezüglich u von $-\frac{\lambda}{2}$ bis $+\frac{\lambda}{2}$ integrirt, liefert $\delta \int R^2 dv$. Es ist also, weil hiebei Θ_0 und Θ_1 wegfallen,

$$\delta \int R^2 dv = 4\pi^3 N^2 i^2 b^2 \rho^2 \alpha\delta\alpha \int_{-\frac{\lambda}{2}}^{+\frac{\lambda}{2}} \left\{ \frac{2u\,du}{\sqrt{w^3}} - \frac{3u^2(h+u)}{\sqrt{w^5}} - \right.$$

$$\left. - \frac{2(h+u)u\,du}{w^2} + \frac{3(h+u)^2 u^2 du}{w^3} + \frac{b^2 u^2 du}{2w^3} \right\}$$

Nun ist

$$\int \frac{2u\,du}{\sqrt{w^3}} = - \frac{2b^2 + 2h(h+u)}{b^2 \sqrt{w}},$$

$$\int \frac{3u^2(h+u)}{\sqrt{w^5}} = - \frac{3}{\sqrt{w}} - \frac{h^2 - b^2}{\sqrt{w^3}} - \frac{2h(h+u)^3}{b^2 \sqrt{w^3}}$$

$$g = \int du \left\{ - \frac{2(h+u)u}{w^2} + \frac{3(h+u)^2 u^2}{w^3} + \frac{b^2 u^2}{2w^3} \right\} =$$

$$\int du \left\{ - \frac{2hu}{w^2} + \frac{2(h+u)^2 u^2 - 3b^2 u^2}{2w^3} \right\} =$$

$$\int du \left\{ - \frac{2h(h+u)}{w^2} + \frac{2h^2}{w^2} + \frac{u^2}{w^2} - \frac{5b^2 u^2}{2w^3} \right\} =$$

daher wegen $u^2 = (h+u)^2 + b^2 - 2h(h+u) + h^2 - b^2$

$$g = \frac{h}{w} + \int du \left\{ \frac{4h^2 - 5b^2}{2w^2} + \frac{u^2}{w^2} - \frac{5b^2(h^2 - b^2)}{2w^3} + \frac{5b^2 h(h+u)}{w^3} \right\} =$$

$$= \frac{h}{w} + \int du \left\{ \frac{6h^2 - 7b^2}{2w^2} + \frac{1}{w} - \frac{2h(h+u)}{w^2} - \right.$$

$$- \frac{5(h^2-b^2)b^2}{2w^3} + \frac{5b^2h(h+u)}{w^3} \Big\} =$$

$$= \frac{2h}{w} - \frac{5b^2h}{4w^2} + \int \frac{du}{w} + \frac{(6h^2-7b^2)}{2} \int \frac{du}{w^2} - \frac{5}{2}(h^2-b^2)b^2 \int \frac{du}{w^3}$$

Wegen

$$\int \frac{du}{w^3} = \frac{h+u}{4b^2w^2} + \frac{3}{4b^2} \int \frac{du}{w^2}$$

ist

$$g = \frac{2h}{w} - \frac{5b^2h}{4w^2} - \frac{5(h^2-b^2)(h+u)}{8w^2} + \int \frac{du}{w} + \frac{9h^2-13b^2}{8} \int \frac{du}{w^2}$$

und dies reducirt sich wegen

$$\int \frac{du}{w^2} = \frac{h+u}{2b^2w} + \frac{1}{2b^2} \int \frac{du}{w}$$

und

$$\int \frac{du}{w} = \frac{1}{b} \operatorname{arctg} \frac{h+u}{b}$$

auf

$$g = \frac{2h}{w} + \frac{(9h^2-13b^2)(h+u)}{16b^2w} - \frac{5b^2h}{4w^2} - \frac{5(h^2-b^2)(h+u)}{8w^2} +$$

$$+ \frac{3(3h^2+b^2)}{16b^3} \operatorname{arctg} \frac{h+u}{b}$$

Fasst man alles zusammen, so erhält man für das Drehungsmoment, welches den Winkel α zu vergrössern, also die Axe des diamagnetischen Cylinders senkrecht der Spiralenaxe zu stellen strebt, den Werth

$$M = -\frac{k\delta \int R^2 dv}{2\delta\alpha} = -2\pi^3 k N^2 i^2 \rho^2 \alpha b^2 \Big| \frac{b^2-2h(h+u)}{b^2\sqrt{w}} -$$

$$- \frac{b^2-h^2}{\sqrt{w^3}} + \frac{2h(h+u)^3}{b^2\sqrt{w^3}} + \frac{2h}{w} + \frac{(9h^2-13b^2)(h+u)}{16b^2w} \qquad 28)$$

$$-\frac{5b^2h}{4w^2}-\frac{5(h^2-b^2)(h+u)}{8w^2}+$$

$$+\frac{3(3h^2+b^2)}{16b^3}\operatorname{arctg}\frac{h+u}{b}\Bigg|_{u=-\frac{\lambda}{2}}^{u=+\frac{\lambda}{2}}$$

wobei $w=b^2+(h+u)^2$. Diese Formel vereinfacht sich bedeutend für $h=0$. Setzt man dann $\omega=b^2+\frac{\lambda^2}{4}$, so ist

$$M=-2\pi^3kN^2i^2\rho^2b^2\alpha\left\{\frac{3}{8b}\operatorname{arctg}\frac{\lambda}{2b}+\frac{5b^2\lambda}{8\omega^2}-\frac{13\lambda}{16\omega}\right\}=$$

$$=\pi^3kN^2i^2\rho^2b^2\alpha\left\{\frac{(13\lambda^2+12b^2)\lambda}{2(4b^2+\lambda^2)^2}-\frac{3}{4b}\operatorname{arctg}\frac{\lambda}{2b}\right\} \tag{29}$$

Wenn λ klein gegenüber b ist, so wird

$$M=+\frac{\pi^3kN^2i^2\rho^2\lambda^3\alpha}{4b^2}.$$

Die Kraft strebt daher den Winkel α zu vergrössern. Ist dagegen λ gross gegen b (aber natürlich noch immer klein gegen l), so wird

$$M=-\pi^3kN^2i^2\rho^2b^2\alpha\left(\frac{3\pi}{8b}-\frac{8}{\lambda}\right)$$

Der diamagnetische Cylinder stellt sich also dann axial. Ich muss hier noch bemerken, dass sich in meiner bereits citirten ersten Abhandlung ein Fehler in den Vorzeichen eingeschlichen hat. Der letzte Ausdruck für $\delta\int R^2dv$ auf Seite 711, der Ausdruck auf Seite 712 für dieselbe Grösse und der Ausdruck auf Seite 713 für M sollen positives Vorzeichen haben. Der Wortlaut der aus den Vorzeichen gezogenen Consequenzen ist richtig, aber dessen Motivirung falsch, indem ein positives Moment den Winkel α zu vergrössern, ein negatives zu verkleinern strebt.

Die Formel für M auf Seite 27 lautet für eine Spirale von vielen Windungslagen

$$M = \frac{\pi^3}{2\delta^2} N^2 \nu^2 i^2 \rho^2 \lambda^3 k \sin 2\alpha \left[\log \frac{b + \sqrt{b^2 + h^2}}{\beta + \sqrt{\beta^2 + h^2}} - \right.$$

$$\left. - \frac{b}{\sqrt{b^2 + h^2}} + \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + h^2}}\right]^2 \left(1 - \frac{9\rho^2}{2\lambda^2}\right)$$

Die Bedeutungen der Buchstaben sind hier dieselben wie im 1. Abschnitte dieser Abhandlung. λ ist die ganze Länge des diamagnetischen Cylinders, $2h$ die Distanz der Endflächen der beiden wirkenden Spulen.

Über die Bestimmung des Reibungs- und Gleitungscoëfficienten aus ebenen Bewegungen einer Flüssigkeit.

Von **Max Margules.**

(Vorgelegt in der Sitzung am 10. März 1881.)

Die Messungen des Reibungscoëfficienten des Wassers sind nach verschiedenen Methoden bewerkstelligt worden und haben zu nicht genügend übereinstimmenden Werthen geführt. Das grössere Vertrauen können wohl die Resultate beanspruchen, welche aus Versuchen über die Strömung des Wassers durch capillare Röhren gewonnen worden sind. Hier ist mindestens die mathematische Theorie der Versuche klar, wenngleich noch die physikalische Erklärung unvollständig ist, namentlich in Beziehung auf die unendlich grosse äussere Reibung. Besteht eine solche zwischen der Glaswand und dem Wasser, so folgt daraus nicht, dass eine continuirliche Änderung der Geschwindigkeit im ganzen Querschnitte bis zum Nullwerthe an der Wand stattfindet; die äusserste Schichte der Flüssigkeit muss wohl ruhen, aber sie selbst könnte vielleicht für die übrige Flüssigkeit wieder eine Wand bilden, an welcher Gleitung statthat?

Torsionsschwingungen in widerstehenden Mitteln sind untersucht worden zu dem Zwecke, um aus der Abnahme der Schwingungsamplituden den Reibungscoëfficienten der Flüssigkeit zu berechnen. Solche Versuche sind zuerst angestellt worden mit einer Hohlkugel, in welche die zu untersuchende Flüssigkeit eingefüllt war (Helmholtz und Piotrowski), und mit Scheiben, welche in der Flüssigkeit schwingen (O. E. Meyer). Die nach diesen Methoden gefundenen Werthe des Reibungscoëfficienten des Wassers weichen sehr beträchtlich von einander ab. Die exacte Berechnung der Versuche scheint fast unmöglich zu sein; der Einfluss der Vernachlässigungen, welche man sich gestatten musste, lässt sich nicht einmal näherungsweise angeben. Man hat immer nur eine Componente der Geschwindigkeit berücksichtigt;

die Rechnung wurde nämlich so geführt, als würde jedes Flüssigkeitstheilchen in einem Kreisbogen schwingen. Dies konnte man nur annehmen, ohne schon mit den Bewegungsgleichungen der Flüssigkeit in Widerspruch zu gerathen, nachdem man die letzteren in einer unvollständigen Form zu Grunde gelegt hatte, mit Hinweglassung der Glieder zweiten Grades; ein Verfahren, durch nichts gerechtfertigt, als durch das Bestreben, Rechnungen noch durchzuführen, da, wo die vollständigen Differentialgleichungen der Bewegung jede Hoffnung auf erfolgreiche Integration ausschliessen. Es lässt sich leicht zeigen, dass in den genannten Fällen die Bahnen der Flüssigkeitstheilchen nicht Kreisbögen sein können. Sollen nämlich die Flüssigkeitstheilchen sich in conaxialen kreisförmigen Bahnen bewegen, so muss zu gleicher Zeit die Geschwindigkeit in allen Punkten eines axialen Cylinders gleich gross sein.

In Wirklichkeit bewegt sich das Wasser über der schwingenden Scheibe in zickzackförmigen Bahnen. Ein Theilchen, das sich ursprünglich in der Nähe der Axe befand, entfernt sich von derselben, indem es zugleich hinabsteigt und den Schwingungen der Scheibe mit einer von seiner jeweiligen Lage abhängigen Phasendifferenz folgt. Das Hinabsteigen ist dadurch hervorgerufen, dass die von der Scheibe zunächst in Rotation gesetzte Flüssigkeit von der Axe gegen den Rand hin treibt. Jenseits des Randes steigt das Wasser auf, indem es auch an den Schwingungen theilnimmt. Befindet sich in der Nähe der schwingenden eine feste Scheibe, so fliesst an der letzteren die Flüssigkeit ein, an der ersten ab. Die kinetische Energie der ganzen Flüssigkeitsbewegung wird aus der Bewegung der Scheibe hergeholt und hat die Verringerung dieser schwingenden Bewegung zur Folge. Wenn man nun die Rechnung so führt, als bestände nur eine rotirende Schwingung der Flüssigkeit, nicht auch die radiale und verticale Bewegung, welchen Fehler begeht man hiebei? Wahrscheinlich einen verhältnissmässig um so geringern, wird gesagt, je langsamer die Bewegung der Scheibe ist; doch ist nicht bewiesen, dass in den Versuchen der Effect jener Vernachlässigung in den Grenzen der Beobachtungsfehler liegt. Ähnliches gilt von der Kugel.

Noch viel verwickelter sind die Verhältnisse bei den Versuchen über die Reibung der Gase, da auch auf die Veränderungen der Dichte Rücksicht zu nehmen ist. Maxwell hat wohl darauf hingewiesen, dass die Lufttheilchen in seinem Apparate Bahnen beschreiben, welche sehr schwer in die Rechnung einzuführen wären; er hat aber nur eine Correction wegen des Einflusses des Scheibenrandes angebracht; der Einfluss der Centrifugalkraft und der periodischen Verdichtungen ist in seiner Rechnung nicht berücksichtigt. Ich kann nicht versichern, dass dieser Umstand von grosser Bedeutung ist in Bezug auf die von Maxwell und von mehreren Physikern nach seiner Methode erhaltenen Resultate. Aber misslich ist es immerhin, dass man bei diesen so wichtigen Messungen über die Fehlergrenzen ganz im Unklaren bleibt.

Es lässt sich vollständig berechnen die Bewegung der Flüssigkeit in einem Cylinder, welcher um seine Axe Rotationsschwingungen ausführt, deren Amplituden in geometrischer Progression abnehmen. Man kann also auch umgekehrt aus dem Decrement auf die Reibung schliessen. Ich theile die Rechnung unten mit. Es dürfte jedoch in praktischer Beziehung die Ausführung derartiger Versuche keinen bedeutenden Vortheil bieten vor den bisher angewandten Schwingungsmethoden. Bei allen diesen ist nämlich der Zusammenhang zwischen dem Reibungscoëfficienten und den Daten der Beobachtung ein so verwickelter, dass leicht bei der schliesslichen numerischen Berechnung ebensoviel vernachlässigt werden kann, als durch eine exactere analytische Behandlung gewonnen worden ist.

Ich bringe für die Messung der Reibungs- und Gleitungscoëfficienten eine — wenigstens theoretisch — sehr einfache Methode in Vorschlag. Man messe direct das Drehungsmoment, welches die Flüssigkeit in einem cylindrischen Gefässe ausübt, auf einen conaxialen Cylinder, wenn dieser mit constanter Geschwindigkeit in ihr um seine Axe rotirt. Dieses Moment ist dem Reibungscoëfficienten proportional und auch vom Gleitungscoëfficienten abhängig; es ist der Drehungsgeschwindigkeit proportional, ferner der Höhe des Cylinders und, wenn das Gefäss sehr weit ist, auch dem Querschnitte des Cylinders. Es erhält einen um so grössern Werth, je enger das Gefäss ist. Der Ein-

fluss des Bodens und der Oberfläche auf den Werth des Drehungsmomentes lässt sich leicht eliminiren. Das Moment fällt noch für Wasser sehr klein aus: Für einen Cylinder von 20 Mm. und ein Gefäss von 21 Mm. Halbmesser ist bei einer Umdrehung in der Secunde das Drehungsmoment auf 100 Mm. Höhe gleich demjenigen, welches die Schwerkraft eines Gewichtes von 36 Mgr. ausübt an einem Arm von 20 Mm. Länge. Da es viele Flüssigkeiten gibt, deren Reibungscoëfficient mehrere hundert Male grösser ist, als der des Wassers, so dürfte sich besonders für diese die vorgeschlagene Methode empfehlen. Solche Versuche hätten auch das Verdienst, als Prüfungsmittel zu dienen für die Theorie der Flüssigkeitsbewegung. Gibt es doch ausser dem Poiseuille'schen keinen einzigen Versuch, welcher zu den vollständigen Bewegungsgleichungen der Flüssigkeiten in Beziehung gesetzt wäre!

Sind u, v, w die Geschwindigkeitscomponenten einer incompressiblen Flüssigkeit zur Zeit t an der Stelle $(x\,y\,z)$ eines rechtwinkligen Coordinatensystems, setzt man

$$u = \omega\frac{x}{\rho} - \varphi\frac{y}{\rho}, \quad v = \omega\frac{y}{\rho} + \varphi\frac{x}{\rho}$$

und transformirt die Bewegungsgleichungen in das cylindrische Coordinatensystem z, ρ, ϑ $\left[\rho^2 = x^2 + y^2,\ \vartheta = \arctan\frac{y}{x}\right]$, indem man voraussetzt, dass w, ω, φ von ϑ unabhängig sind, so erhält man:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial t} + \omega\frac{\partial w}{\partial \rho} + w\frac{\partial w}{\partial z} - \varkappa\left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial w}{\partial \rho}\right)$$

$$(1)\quad \frac{\partial \Pi}{\partial \rho} = \frac{\partial \omega}{\partial t} + \omega\frac{\partial \omega}{\partial \rho} + w\frac{\partial \omega}{\partial z} - \frac{\varphi^2}{\rho} - \varkappa\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \omega}{\partial \rho} - \frac{\omega}{\rho^2}\right)$$

$$0 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \Pi}{\partial \vartheta} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \omega\frac{\partial \varphi}{\partial \rho} + w\frac{\partial \varphi}{\partial \rho} + \frac{\omega\varphi}{\rho} - \varkappa\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \varphi}{\partial \rho} - \frac{\varphi}{\rho^2}\right).$$

Bezeichnet V das Kräftepotential (auch von ϑ unabhängi vorausgesetzt), p den Druck mit Ausschluss des von der Reibun herrührenden Theiles, μ die Dichte, k den Reibungscoëfficiente so ist zur Abkürzung gesetzt:

$$\Pi = V - \frac{p}{\mu}, \quad \varkappa = \frac{k}{\mu}.$$

[Soll nun unter den Geschwindigkeitscomponenten nur von Null verschieden sein, so folgt:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \rho} = -\frac{\varphi^2}{\rho},$$

demnach:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0.$$

Dies ist der analytische Ausdruck des Satzes, welcher übe Bewegungen in conaxialen kreisförmigen Bahnen oben angeführ worden ist.]

Die Continuitätsgleichung geht bei Anwendung der einge führten Zeichen und Annahmen über in:

$$(2) \qquad \frac{\partial(\rho\omega)}{\partial \rho} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0.$$

Bewegung der Flüssigkeit in einem rotirend schwingenden Cylinder

Ein fester hohler Cylinder sei in eine schwingende Rotations bewegung um seine Axe — die z-Axe — versetzt. Die Geschwin digkeit der inneren Wand sei dargestellt durch:

$$(3) \qquad \Phi = H . e^{-\frac{\Delta}{T}t} \cos\left(\frac{2\pi}{T} t - \varepsilon\right).$$

T ist die Schwingungsdauer, Δ das logarithmische Decre ment der Schwingungen; beide sollen constant sein, ebenso H und ε. — Zu bestimmen ist die Bewegung der Flüssigkeit im Innern des Cylinders. Man kann zunächst $w = 0$ setzen; aus (2) folgt auch $\omega = 0$; ferner ist $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$. Zu integriren bleibt nur die dritte der Gleichungen (1), welche übergeht in:

$$(4) \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \varphi}{\partial \rho} - \frac{\varphi}{\rho^2} - \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0.$$

Man nehme ein particuläres Integral an in der Form:

$$\varphi = e^{\alpha x t} . F(\rho),$$

dann ist zu suchen das Integral der Gleichung:

$$\frac{d^2 F}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dF}{d\rho} - \left(\alpha + \frac{1}{\rho^2}\right) F = 0,$$

oder der Gleichung:

$$\frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dF}{dr} + \left(1 - \frac{1}{r^2}\right) F = 0,$$

wenn man setzt $r = \sqrt{-\alpha} . \rho$. Das vollständige Integral dieser Differentialgleichung ist:

$$F = CJ^1(r) + DY^1(r),$$

wo J^1 und Y^1 die sogenannten Bessel'schen Functionen erster und zweiter Art von der Ordnung 1 sind. Da Y^1 unendlich gross wird für $\rho = 0$, so muss in unserem Falle $D = 0$ genommen werden.*

$$F(\rho) = CJ^1(\sqrt{-\alpha}\,\rho).$$

$$(5) \quad \varphi = Ce^{\alpha x t} J^1(\sqrt{-\alpha}\,\rho) = \frac{Ce^{\alpha x t}}{\pi} . \int_0^\pi \sin(\sqrt{-\alpha}\,\rho \sin\omega) \sin\omega\, d\omega.$$

Nun setze man:

$$\alpha = -a - bi = -m^2 e^{2\lambda i}, \quad \sqrt{-\alpha} = a' + b'i = me^{\lambda i}, \quad [i = \sqrt{-1}, \; \cos\lambda > 0],$$

so folgt unter Anwendung der Reihenformel für J^1

$$CJ^1(\sqrt{-\alpha}\,\rho) = C\frac{m\rho e^{\lambda i}}{2}\left[1 - \frac{m^2\rho^2}{2.4}e^{2\lambda i} + \frac{m^4\rho^4}{2.4.4.6}e^{4\lambda i} - ..\right]$$
$$= C'(M + iN),$$

* Wenn man die Rechnung führen wollte für die Schwingung eines Cylinders in einem conaxialen cylindrischen Gefässe, so müsste man Y_1 beibehalten und das Verhältniss der Constanten C, D (in den reellen Theilen) der Grenzbedingung gemäss wählen. Diese Rechnung würde nur viel länger ausfallen, als die oben geführte.

wo eingeführt ist:

$$C' = C m e^{\lambda i}$$

$$M = \frac{\rho}{2}\left[1 - \frac{m^2\rho^2}{2.4}\cos 2\lambda + \frac{m^4\rho^4}{2.4.4.6}\cos 4\lambda - \right.$$
$$\left. - \frac{m^6\rho^6}{2.4.6.4.6.8}\cos 6\lambda + \ldots\right]$$

$$N = \frac{\rho}{2}\left[\quad - \frac{m^2\rho^2}{2.4}\sin 2\lambda + \frac{m^4\rho^4}{2.4.4.6}\sin 4\lambda - \right.$$
$$\left. - \frac{m^6\rho^6}{2.4.6.4.6.8}\sin 6\lambda + \ldots\right]$$

oder in Integralform:

$$M = \frac{1}{2\pi m}\int_0^\pi [e^{b'\rho\sin\omega}\sin(a'\rho\sin\omega + \lambda)$$
$$+ e^{-b'\rho\sin\omega}\sin(a'\rho\sin\omega - \lambda)]\sin\omega\, d\omega$$

$$N = \frac{1}{2\pi m}\int_0^\pi [e^{b'\rho\sin\omega}\cos(a'\rho\sin\omega + \lambda)$$
$$+ e^{-b'\rho\sin\omega}.\sin(a'\rho\sin\omega - \lambda)]\sin\omega\, d\omega.$$

Man hat also aus (5):

$$\varphi = C'(M + iN)\, e^{-a\varkappa t}\cos(b\varkappa t - i\sin b\varkappa t).$$

Nimmt man die willkürliche Constante C' reell, so ist der reelle Theil der Lösung, welcher für sich ein Integral der Gleichung (4) darstellt:

$$\text{(I)} \qquad \varphi = C' e^{-a\varkappa t}(M\cos b\varkappa t + N\sin b\varkappa t).$$

Um die Beziehung zwischen diesem Ausdrucke von φ und der vorausgesetzten Form von Φ herzustellen, muss man die Grenzbedingung für die Cylinderwand einführen. — Auf ein Flächenstück 1 innerhalb der Flüssigkeit, welches zur x-Axe senkrecht ist und auf der Seite der positiven x liegt, wirkt in der Richtung y der Druck:

$$-k\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = -k\left(\frac{\varphi}{\rho} - \frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\right)\frac{y^2 - x^2}{\rho^2},$$

und zwar auf die positive, d. i. auf die der z-Axe zugewandte Seite der Fläche. Der Seitendruck auf ein Flächenstück $1 \perp \rho$ in

der Richtung des wachsenden ϑ wird daraus erhalten, indem man $y=0$, $x=\rho$ setzt; sein Betrag ist:

$$k\left(\frac{\varphi}{\rho}-\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\right)=k\sigma.$$

Ein Flächenstück 1 der äussersten Grenzschicht $[\rho=\rho_0]$ der continuirlich bewegten Flüssigkeit, wird der gebräuchlichen Annahme gemäss auf der positiven Seite afficirt von dem Seitendruck $k\sigma_0$, auf der negativen von dem gleichgerichteten Druck:

$$K(\Phi-\varphi_0),$$

wobei man K als Coëfficienten der äusseren Reibung bezeichnet. φ_0 und σ_0 sind die Werthe von φ und σ für $\rho=\rho_0$.

Die Grenzbedingung ist danach:

$$K(\Phi-\varphi_0)+k\sigma_0=0,$$

oder wenn man den Gleitungscoëfficienten $\frac{k}{K}=k'$ einführt,

$$(6) \qquad \Phi=\varphi_0-k'\sigma_0$$

Geht man bei Berechnung des σ von (5) aus, so hat man:

$$\sigma=\frac{\varphi}{\rho}-\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}=Ce^{\alpha x t}\sqrt{-\alpha}\left(\frac{J^1\sqrt{-\alpha}\,\rho}{\sqrt{-\alpha}\,\rho}-\frac{\partial J^1(\sqrt{-\alpha}\,\rho)}{\partial(\sqrt{-\alpha}\,\rho)}\right)=$$
$$=C\sqrt{-\alpha}\,e^{\alpha x t}J^2(\sqrt{-\alpha}\,\rho),[1]$$

$$(7) \quad \sigma=C'e^{\alpha x t}J^2(\sqrt{-\alpha}\,\rho)=C'e^{\alpha x t}.\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\cos(\sqrt{-\alpha}\,\rho\sin\omega)\cos 2\omega\,d\omega$$

$$J^2(m\rho e^{\lambda i})=\frac{m^2\rho^2e^{2\lambda i}}{2.4}\left[1-\frac{m^2\rho^2}{2.6}e^{2\lambda i}+\frac{m^4\rho^4}{2.4.6\,8}e^{4\lambda i}-\ldots\right]=P+iQ,$$

woraus:

---

[1] Setzt man $\varphi=e^{\alpha x t}.F(\rho)$, so hat man zur Bestimmung von F Bessel'sche Functionen von der Ordnung 1, für den entsprechenden Factor in σ Bessel'sche Functionen von der Ordnung 2 und für denjenigen in $2\zeta=\frac{\varphi}{\rho}+\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}$ solche von der Ordnung Null. ζ ist die Wirbelgeschwindigkeit der Flüssigkeitstheilchen.

$$P = \frac{m^2 \rho^2}{2.4} \cos 2\lambda - \frac{m^4 \rho^4}{2.2.4.6} \cos 4\lambda + \frac{m^6 \rho^6}{2.4.2.4.6.8} \cos 6\lambda - ..$$

$$Q = \frac{m^2 \rho^2}{2.4} \sin 2\lambda - \frac{m^4 \rho^4}{2.2.4.6} \sin 4\lambda + \frac{m^6 \rho^6}{2.4.2.4.6.8} \sin 6\lambda - ..$$

oder in Integralform:

$$P = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^\pi (e^{b'\rho \sin\omega} + e^{-b'\rho \sin\omega}) \cos(a' \rho \sin\omega) \cos 2\omega \, d\omega$$

$$Q = -\frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^\pi (e^{b'\rho \sin\omega} - e^{-b'\rho \sin\omega}) \sin(a' \rho \sin\omega) \sin 2\omega \, d\omega.$$

Man hat also:

$$\sigma = C''(P + iQ) e^{-a\varkappa t} (\cos b\varkappa t - i \sin b\varkappa t).$$

Der reelle Theil der rechten Seite dieser Gleichung gibt jenes σ, welches dem Ausdrucke (I) von φ entspricht:

(II) $$\sigma = C'' e^{-a\varkappa t} (P \cos b\varkappa t + Q \sin b\varkappa t).$$

Die Grenzbedingung ist nun:

(III) $$\Phi = C'' e^{-a\varkappa t} \{(M_0 - k' P_0) \cos b\varkappa t + (N_0 - k' Q) \sin b\varkappa t\},$$

worin M_0 den Werth von M für $\rho = \rho_0$ bezeichnet u. s. f.

In dem ursprünglich vorausgesetzten Werthe von Φ (3) kann man ε als unbestimmt ansehen, da es von der Wahl des Anfangspunktes der Zeit abhängt. Um nun (III) mit jenem Ausdrucke in Uebereinstimmung zu bringen, setze man:

$$\frac{2\pi}{b\varkappa} = T, \quad 2\pi \frac{a}{b} = a\varkappa T = \Delta,$$

$$C''(M_0 - k' P_0) = H \cos\varepsilon, \quad C''(N_0 - k' Q_0) = H \sin\varepsilon.$$

Man hat ferner:

$$m^2 = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{1}{\varkappa T} \sqrt{\Delta^2 + 4\pi^2}, \quad \operatorname{tang} 2\lambda = \frac{b}{a} = \frac{2\pi}{\Delta} = \delta,$$

$$\cos 2\lambda = \frac{1}{\sqrt{1 + \delta^2}}, \quad \sin 2\lambda = \frac{\delta}{\sqrt{1 + \delta^2}}.$$

Bei Ausführung von Versuchen könnte man nicht unmittelbar von den entwickelten Formeln Gebrauch machen, weil ja, wenn man es mit einem begrenzten Cylinder zu thun hat, nur in einem gewissen mittleren Theile desselben die Bewegung der Flüssigkeit durch Gleichung (I) dargestellt ist. Um den Einfluss der übrigen Flüssigkeit, sowie der Luft und der inneren Reibung in der Aufhängevorrichtung ausser Rechnung zu setzen, kann man etwa das folgende Verfahren einschlagen:

Sei E der Ablenkungswinkel des Cylinders, $\mathfrak{T}$ sein Trägheitsmoment, $-G.E$ das Moment der Kraft, welches ihn in die Ruhelage zieht, Z_1 das Moment der Kräfte, welche aus der Reibung an der Wand und in der Aufhängevorrichtung entspringen, so ist die Bewegungsgleichung für den Cylinder

$$\mathfrak{T}\frac{d^2E}{dt^2} - G.E + Z_1 = 0.$$

G ist constant und positiv vorausgesetzt, Z_1 von solcher Form, dass $\rho_0 \frac{dE}{dt} = \Phi$ der Gleichung (3) genügen könne. Man verändere nun das Trägheitsmoment in $\mathfrak{T}'$, die Constante, welche die Richtkraft bestimmt, in C und vermehre die Höhe der Flüssigkeit im Cylinder um h; man wähle diese drei Grössen so, dass $\mathfrak{T}$ und Δ unverändert bleiben. In der neuen Bewegungsgleichung

$$\mathfrak{T}'\frac{d^2E}{dt^2} - G'E + Z_1 + Z = 0$$

hat E dann dieselbe Bedeutung, wie in der oberen. Subtrahirt man die letztere und setzt $\mathfrak{T}' - \mathfrak{T} = \tau$, $G' - G = \gamma$, so folgt:

$$\tau\frac{d^2E}{dt^2} - \gamma E + Z = 0. \tag{8}$$

Darin ist Z das Drehungsmoment der Reibungskräfte, welches von der hinzugefügten Flüssigkeitsäule herrührt,[1] also nach (II):

$$Z = 2\pi h \rho_0^2 k C'' e^{-a\varkappa t}(P_0 \cos b\varkappa t + Q_0 \sin b\varkappa t).$$

---

[1] Genauer: Dieses Drehungsmoment weniger das Moment, welches vorhin die Luft ausübte an der von der neuen Flüssigkeit occupirten Stelle.

Wenn man zur Abkürzung setzt:

$$M_0 - k' P_0 = \rho_0 R, \quad N_0 - k' Q_0 = \rho_0 S,$$

so hat man aus (III):

$$E = \frac{C'' e^{-a x t}}{x m^4} \{-(aR + bS) \cos b x t + (bR - aS) \sin b x t\} + \text{Const.}$$

$$\frac{d^2 E}{d t^2} = C'' x e^{-a x t} \{(-aR + bS) \cos b x t + (bR + aS) \sin b x t\}.$$

Die Coëfficienten von $\cos b x t$ und $\sin b x t$ in diesen Reihen-Ausdrücken sind, da $a = m^2 \cos 2\lambda$, $b = m^2 \sin 2\lambda$ leicht in eine verhältnissmässig einfache Form zu bringen und nach den cos und sin der Vielfachen von 2λ zu ordnen.

Die Gleichung (8), welche für jedes t gilt, zerfällt in zwei andere, welche zur Bestimmung von k und k' durch τ, γ, T, Δ dienen können. Die Gleichungen sind transcendent, da ja k (durch m) in den Reihen M, N, P, Q erscheint. Diese Reihen convergiren sehr rasch; wie viele Glieder zur numerischen Berechnung der Reibungscoëfficienten heranzuziehen wären, das müsste in jedem einzelnen Falle nach dem beiläufig zu erwartenden Werthe von k beurtheilt werden.

Eine sehr einfache ebene Flüssigkeitsbewegung.

Ein Cylinder hänge vertical an einer verticalen Axe, welche gleichförmig rotirt. Er tauche in ein conaxiales cylindrisches Gefäss, welches die zu untersuchende Flüssigkeit enthält. In Folge der Reibung der Flüssigkeit wird die relative Lage des Cylinders zur Axe während der Rotation eine andere sein als im Zustande der Ruhe. Man kann nun mittelst einer einfachen Vorrichtung das Drehungsmoment messen, welches einen ebenso grossen Verdrehungswinkel bewirkt; dadurch misst man den Widerstand, welchen die Flüssigkeit der Rotation des Cylinders entgegensetzt. Die letztere Bewegung wird als stationäre angenommen. [Etwaige Schwingungen des Cylinders um die Rotationsaxe werden in einer sehr zähen Flüssigkeit rasch gedämpft; in einer minder zähen auch, wenn das Gefäss genügend eng ist.] Es wird also die Bewegung der Flüssigkeit zwischen den beiden

Cylinderflächen stationär werden. Sie wird bestimmt durch die Gleichungen (1), worin wieder $w = 0$ zu setzen ist und infolge der Gleichung (2) auch $\omega = 0$, wenn es nur für einen endlichen Werth von ρ Null wird; das ist aber an den Grenzen der Fall. Da nun auch $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$, so hat man zur Bestimmung von φ die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 \varphi}{d \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d \varphi}{d \rho} - \frac{\varphi}{\rho^2} = 0,$$

deren vollständiges Integral ist:

$$\varphi = \frac{C}{\rho} + C' \rho. \tag{9}$$

Die Integrationsconstanten C, C' bestimmen sich durch die Grenzbedingungen. An der inneren Grenzfläche $[\rho = \rho_1]$ wird auf die der z-Axe [Rotationsaxe] zugewandte Seite eines Flächenstücks $1 \perp \rho$ der Seitendruck $K_1 (\Phi_1 - \varphi_1)$ ausgeübt in der Richtung des wachsenden ϑ; der Seitendruck der Flüssigkeit auf die andere Seite derselben Fläche ist $k \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)_{\substack{y=0 \\ x=\rho_1}} = -k \sigma_1$. — An der äusseren Grenzfläche sind die entsprechenden Druckkräfte $-k \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)_{\substack{y=0 \\ x=\rho_2}} = k \sigma_2$ und $K_2 (\Phi_2 - \varphi_2)$.

Die Grenzbedingungen sind sonach:

$$\begin{aligned} K_1 (\Phi_1 - \varphi_1) - k \sigma_1 &= 0, \\ K_2 (\Phi_2 - \varphi_2) + k \sigma_2 &= 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Darin bezeichnen Φ_1, Φ_2 die Geschwindigkeiten der die Flüssigkeit begrenzenden Cylinder, φ_1, φ_2, σ_1, σ_2 die Werthe von φ und σ an denselben; K_1, K_2 die Coëfficienten der äusseren Reibung an beiden Flächen und k den Coëfficienten der inneren Reibung. Man hat:

$$\sigma = \frac{\varphi}{\rho} - \frac{d \varphi}{d \rho} = 2 \frac{C}{\rho^2}. \tag{11}$$

Setzt man die Werthe aus (9, 11) in (10) ein, so sind die Constanten C, C' bestimmt durch die Gleichungen:

$$C\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{k}{K_1}\frac{2}{\rho_1^2}\right) + C'\rho_1 = \Phi_1,$$
$$C\left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{k}{K_2}\frac{2}{\rho_2^2}\right) + C'\rho_2 = \Phi_2.$$

Ist das Gefäss in Ruhe, $\Phi_2 = 0$, führt man statt der Geschwindigkeit des Cylinders die Winkelgeschwindigkeit $\frac{1}{\rho_1}\Phi_1 = f_1$ ein, sind ferner die Gleitungscoëfficiententen an beiden Wänden gleich gross:

$$\frac{k}{K_1} = \frac{k}{K_2} = k',$$

so folgt:

$$C = \frac{\rho_1^3\rho_2^3}{\rho_1\rho_2(\rho_2^2 - \rho_1^2) + 2k'(\rho_1^3 + \rho_2^3)} \cdot f_1. \tag{12}$$

Das von der Flüssigkeit auf die Höhe h des Cylinders ausgeübte Drehungsmoment ist das Product aus dem Seitendruck $-k\sigma_1 . 2\pi\rho_1 h$ in den Halbmesser ρ_1:

$$Z = -4\pi h C k. \tag{13}$$

In Wirklichkeit wird man es nicht mit einem Cylinder zu thun haben, an dessen ganzer Fläche der Ausdruck (11) für σ gilt. Man muss zunächst den Cylinder bis zu einer Höhe h' eintauchen; er wird um einen Winkel ε' gegen die Axe verdreht bei der Winkelgeschwindigkeit f_1; das entsprechende Drehungsmoment ist Z'. Dann erhöhe man die Flüssigkeit im Gefässe, der Cylinder tauche ein bis zur Höhe $h'' = h' + h$; Torsionswinkel ε'', Drehungsmoment Z''. Die Differenz $Z'' - Z'$ ist das Z der Formel (12). Ob man h' gross genug gewählt hat, kann man dadurch untersuchen, dass man auch h'' variirt und prüft, ob bei gleicher Winkelgeschwindigkeit $Z'' - Z'$ proportional ist der Differenz $h'' - h'$.

Will man k und k' bestimmen, so muss man den Versuch mit zwei Gefässen von verschiedener Weite, doch von derselben Sub-

stanz, wie die des Cylinders anstellen. Man findet den Reibungs- und Gleitungscoëfficienten aus zwei Gleichungen von der Form:

$$Z = \frac{a k}{b + c k'}, \quad \mathfrak{Z} = \frac{\mathfrak{a} k}{\mathfrak{b} + \mathfrak{c} k'}.$$

Wenn $k' = 0$, so hat man:

$$(14) \qquad Z = 4 \pi h \frac{\rho_2^2}{\rho_2^2 - \rho_1^2} \rho_1^2 f_1 k.$$

In sehr weitem Gefässe ist dann das Drehungsmoment auch proportional dem Querschnitte des Cylinders. Bei engen Gefässen ist der Factor $\frac{\rho_2^2}{\rho_2^2 - \rho_1^2}$ von grossem Einflusse auf den Werth von Z. Man muss also, wenn man Gefässe anwenden will, die nur wenig weiter sind als der rotirende Cylinder — dies ist nothwendig, wenn k sehr klein ist und Z messbar sein soll — Mittel haben, um ρ_2 genau zu messen.

Es sei noch bemerkt, dass man den rotirenden Cylinder auch hohl, ohne Boden, nehmen kann, ohne an dem Ausdrucke des Drehungsmomentes etwas zu ändern. Im Innern ist nämlich nach (9) C nothwendig Null; die Flüssigkeit rotirt mit dem Cylinder und übt keinen Seitendruck auf denselben: $\sigma = 0$.

Obwohl es sich hier um eine stationäre Flüssigkeitsbewegung handelt, die Formeln also gleicherweise für incompressible Flüssigkeiten, wie für Gase gelten, so dürfte die Methode auf letztere doch nicht leicht anzuwenden sein. Das Drehungsmoment fällt selbst für Wasser sehr klein aus. Legt man den aus dem Poiseuille'schen Versuche erhaltenen Werth des Reibungscoëfficienten zu Grunde, d. i. für Wasser von 10° C. bei $k' = 0$

$$k = 1 \cdot 3088 \frac{\text{mgr}}{\text{mm} \cdot \text{sec}},$$

nimmt man $\rho_1 = 20$ Mm., $\rho_2 = 21$ Mm., $h = 100$ Mm., $f_1 = 1 \frac{1}{\text{sec}}$, so folgt:

$$Z = 7076200 \frac{\text{mgr} \cdot (\text{mm})^2}{(\text{sec})^2}.$$

Das Drehungsmoment, welches 1 Mgr. vertical hängend an einem Arm von 20 Mm. ausüben kann, ist:

$$D = 20 \times 9808 \frac{\text{mgr.} (\text{mm})^2}{(\text{sec})^2},$$

demnach $Z = 36\,D$.

Z wird doppelt so gross, wenn man $\rho_2 = 20 \cdot 5$ Mm. nimmt und zehnmal so gross, wenn $\rho_2 = 20 \cdot 1$ Mm.; dagegen vermindert es sich um die Hälfte, wenn $\rho_2 = 22$ Mm. Bei grösserer Zunahme der Distanz $\rho_2 - \rho_1$ üben kleine Differenzen im Werthe von ρ_2 einen immer kleineren Einfluss auf den Werth des Drehungsmomentes.

Lässt man denselben Cylinder mit gleicher Geschwindigkeit rotiren in einem Gefässe, dessen Radius $20 \cdot 01$ Mm. beträgt, und ist der Zwischenraum mit Luft gefüllt (nach Maxwell bei 18° C. $k = 0 \cdot 02$ in denselben Maassen wie oben), so beträgt das Drehungsmoment auf 100 Mm. Höhe 51 D, wenn keine Gleitung statthat.

Der Ausdruck (12) für das Drehungsmoment bleibt (das Vorzeichen auf der rechten Seite der Gleichung ausgenommen) auch für andere Versuchsanordnungen bestehen; z. B. wenn man das Gefäss mit derselben Winkelgeschwindigkeit dreht, wie vorhin den Cylinder, diesen aber an einer Vorrichtung herabhängen lässt, welche die Verdrehung zu messen gestattet; oder auch, wenn das Gefäss an einem tordirbaren Aufhängeapparat angebracht ist, während der Cylinder mit der Axe fest verbunden gleichförmig rotirt; Z ist in diesem Falle das Drehungsmoment der Flüssigkeit auf die Höhe h der Gefässwand.

Zur Bestimmung des Verhältnisses zwischen der elektromagnetischen und mechanischen Einheit der Stromintensität.

Von Dr. Ignaz Klemenčič,
Assistenten am physikalischen Institute der Universität Graz.

(Mit 1 Holzschnitt.)

Trotz der zahlreichen und sorgfältigen Versuche, welche bereits zur Bestimmung des Verhältnisses zwischen der elektromagnetischen und mechanischen Einheit der Stromintensität gemacht wurden, stehen die erhaltenen Resultate doch nicht in jener Übereinstimmung, dass nicht eine neue zu diesem Zwecke dienende Methode willkommen sein dürfte.

Eine solche Methode hat mir Herr Director Boltzmann angegeben und mich mit der experimentellen Durchführung derselben betraut, wofür ich ihm zu besonderem Danke verpflichtet bin.

Boltzmann's Methode besteht in Folgendem:

Ladet man einen Condensator durch eine galvanische Batterie und entladet ihn hierauf durch ein Galvanometer, so weicht die Nadel des letzteren momentan aus; die Ausweichung kann jedoch zu einer dauernden gemacht werden, wenn man die Ladung und Entladung des Condensators rasch hintereinander wiederholt.

Nehmen wir an, es geschehe dies $n$mal in der Secunde mit einem Condensator von der Capacität k und einer Batterie von der elektromotorischen Kraft E, so gelten die Gleichungen

$$Q = nEk = C\alpha,$$

wenn wir ein Spiegelgalvanometer voraussetzen und α dessen Ausschlag, C dessen Reductionsfactor, endlich Q die vom Condensator gelieferte Elektricitätsmenge bedeutet.

Fassen wir gleich einen Platten-Luftcondensator ins Auge, so haben wir für dessen Capacität einen angenähert richtigen

Werth durch die Formel

$$k = \frac{f}{4\pi\delta}$$

gegeben. Darin bezeichnet δ die Distanz der beiden Platten und f die Fläche der einen von beiden. Wir bekommen also die Gleichung

$$C\alpha = \frac{nEf}{4\pi\delta}. \qquad 1)$$

Schickt man nun, nachdem der Ausschlag α gemessen worden, den constanten Strom der zur Ladung des Condensators verwendeten Batterie durch das Galvanometer; jedoch, um einen ablesbaren Ausschlag zu bekommen, durch eine Galvanometerrolle von bedeutend grösserem Reductionsfactor C', so gelten die Gleichungen

$$i = C'\varphi = \frac{E}{W}, \qquad 2)$$

worin i die Stromstärke und W den gesammten Widerstand der Kette, Leitung und des Galvanometers bezeichnet.

Substituiren wir aus der letzten Gleichung den Werth für E in die erste, so bekommen wir

$$C\alpha = \frac{nC'\varphi Wf}{4\pi\delta}$$

und daraus den Widerstand

$$W = \frac{C\alpha 4\pi\delta}{C'\varphi nf}$$

nach mechanischem Masse.

Bezeichnen wir noch $\frac{C'}{C}$ mit V und setzen für f den Werth $r^2\pi$, wie er für unseren Fall galt, wobei r den Radius der Condensatorplatte bezeichnet, so folgt

$$W_{\text{mech.}} = \frac{4\alpha\delta}{\varphi' n r^2 V}.$$

Diese Formel zeigt, dass bei der in Rede stehenden Methode zur Bestimmung von $W_{\text{mech.}}$ blos Längen- und Zeitmessungen

nicht aber Messungen von Kräften, Massen und Trägheitsmomenten nothwendig sind. Dass letztere bei der Ermittlung von $W_{\text{mech.}}$ vermieden werden können, geht ja schon aus den Dimensionen dieser Grösse hervor.

Nun besteht bekanntlich die Relation:

$$W_{\text{mech.}} = \frac{W_{\text{magn.}}}{v^2},$$

wobei v das Verhältniss zwischen der mechanischen und elektromagnetischen Einheit der Stromintensität bezeichnet.

Es folgt also:

$$\frac{W_{\text{magn.}}}{v^2} = \frac{4\alpha\delta}{\varphi n r^2 V}$$

und

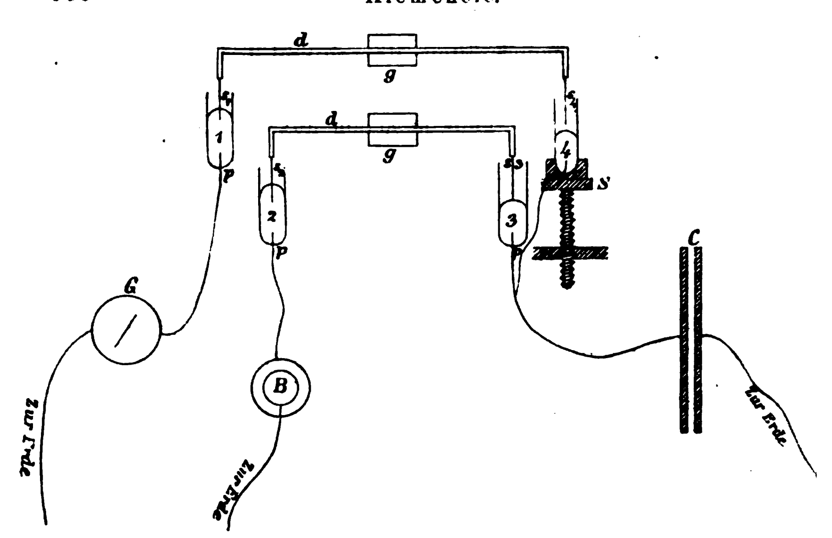
$$v = \sqrt{\frac{W_{\text{magn.}} \varphi n r^2 V}{4\alpha\delta}} \qquad 3)$$

Da die Gleichung 3) nicht vollkommen richtig ist, weil im Ausdrucke für die Capacität des Condensators der Einfluss des Plattenrandes nicht berücksichtigt ist, so können die hier mitgetheilten Resultate noch nicht als definitive angesehen werden; es wurde daher auch von einer Controlle der Längeneinheit, der Siemens'schen Widerstandseinheit und der absoluten Schwingungszahl der Stimmgabel vorläufig abgesehen und ich erlaube mir, die unten folgenden Messungen nur als einen Beweis der Brauchbarkeit dieser Methode anzuführen. [1]

Von dem Einflusse des Randes könnte man sich durch Anwendung eines Kugelcondensators unabhängig machen. Dieser Einfluss liesse sich auch durch zwei Beobachtungen an einem Schleifcondensator oder in noch einfacherer Weise durch Beobachtungen mit zwei Kohlrausch'schen Condensatoren eliminiren, wobei beim zweiten Condensator die Platten eine andere als die kreisförmige Gestalt haben müssten, so dass sie denselben Flächeninhalt, aber einen grösseren Umfang hätten als die kreisförmigen.

---

[1] Eine ähnliche Methode hat Branly (Compt. rend. T. 75, 1873) angewendet, um die Elektricitätsmenge, welche ein Daniell'sches El. liefert, in elektrostatischem Masse zu messen.



An die Zinken einer Stimmgabel *gg* waren ⊓förmig gebogene, an den Enden mit angelötheten Platinspitzen $s_1 s_2 s_3 s_4$ versehene Drähte *dd* befestigt. Die Platinspitzen tauchten in Glasnäpfchen 1, 2, 3, 4, die mit Quecksilber gefüllt waren, von dem aus eingeschmolzene Platindrähte *p* die weitere Leitung vermittelten. Die Näpfchen 1 und 2 waren so hoch mit Quecksilber gefüllt, dass die Platinspitzen s_1 und s_2 selbst bei den stärksten Excursionen der Stimmgabel nicht ganz aus demselben kamen In 3 berührte das Quecksilber bei ruhender Stimmgabel nahezu die Platinspitze und bei 4 konnte das Näpfchen durch's Drehen am Schraubenkopfe *S* nach Belieben gehoben oder gesenkt werden, wodurch offenbar bei schwingender Stimmgabel eine verschiedene Dauer des Contactes zwischen Quecksilber und Platinspitze zu erreichen war

Der eine Pol der Ladungsbatterie *B* wurde mit 2 verbunden der andere zur Erde abgeleitet. Von 1 ging eine Leitung zum Spiegelgalvanometer und durch dessen Drahtrolle *G* zur Erde. Näpfchen 3 und 4 standen sowohl unter sich als auch mit der einen Platte des Condensators *C* in Verbindung, dessen andere mit der Erde leitend verbunden war. Schwingt die Stimmgabel, so führen ihre Zinken entgegengesetzte Bewegungen aus, und es musste daher bei der früher beschriebenen Anordnung abwechselnd die Leitung Batterie-Condensator und Condensator-Galvanometer hergestellt

werden; vorausgesetzt, dass die beiden Spitzen s_3 und s_4 nie gleichzeitig ins Quecksilber tauchten, wodurch eine directe Verbindung zwischen Batterie und Galvanometer eintrat und die Nadel des letzteren mit Heftigkeit umgeworfen wurde. Durch's Einstellen mit Hilfe der Schraube S war ein solcher Fall leicht zu vermeiden.

Als Ladungsbatterie stand gewöhnlich eine Anzahl Daniell'scher Elemente in Verwendung.

Der Condensator wurde durch die feindrahtigste Rolle (15000 Wind. und 4700 S. E. W.) eines Meyerstein'schen Galvanometers entladen. Die Galvanometernadel war schwach astasirt, hatte eine Schwingungsdauer von 14·7 Sec. und war ziemlich stark gedämpft (Brigg. log. Decr. bei offener Leitung = 0·244), jedoch bei weitem nicht aperiodisch, wie dies im Interesse einer rascheren und genaueren Beobachtung gewesen wäre. Um auch den constanten Strom der Ladungsbatterie mit diesem Galvanometer messen zu können, war über die feindrahtige Rolle, die wir mit A bezeichnen wollen, ein dünner Kupferdraht in 500 Windungen gewickelt; diese letzteren sollen B heissen. Parallel zu diesen in einer Entfernung von 18 Ctm. von der Magnetnadel war eine zweite Rolle mit zwei Lagen von Windungen C und D und in einer Entfernung von 51 Ctm. eine dritte Rolle E aufgestellt. C hatte 460, D 27 und E 80 Windungen.

Der in Verwendung gestandene Condensator ist nach Art des von Kohlrausch angegebenen, auch in Wüllner's Lehrbuch, IV. Bd., beschriebenen angefertigt. Um eine möglichst sichere Parallelführung der beweglichen Condensatorplatte zu erreichen, ist die Schlittenführung nicht central, sondern seitlich angebracht, während die andere Seite einen Fuss besitzt, der auf einem ebenen Stahlblech aufliegt. Um ein Kräftepaar, welches den beweglichen Theil zu neigen sucht, zu vermeiden, hat die zur Regulirung der Plattendistanz dienende Schraube eine Bohrung, durch welche die den verschiebbaren Theil ziehende Schnur läuft. Zur Hintanhaltung einer allmäligen Verstärkung der Condensatorladung sind Halbleiter in der Construction nicht angewendet worden. Der Schraubenkopf ist in hundert Theile getheilt, von denen man noch Zehntel schätzen kann. Der Werth eines solchen Trommeltheilstriches wurde mit Hilfe eines an den beweg-

lichen Theil befestigten Mikrometers (1 Wiener Linie in 60 Theile getheilt) und eines Mikroskopes bestimmt. Der Radius r der Platte = 90 Mm. Die Schwingungszahl der Stimmgabel ermittelte ich mittelst einer zweiten durch stroboskopische Beobachtung.

Bevor ich die zur Berechnung von v nothwendigen Messungen anführe, sei es mir erlaubt, einige Beobachtungen mitzutheilen, welche darthun sollen: 1. dass die durch's Galvanometer abfliessende Elektricitätsmenge wirklich proportional ist dem Potentialwerthe, bis zu welchem der Condensator geladen wurde und 2. dass die zur Ladung und Entladung des Condensators verfügbare, immerhin kurze Zeit, während welcher nämlich die eine der Platinspitzen s_3 oder s_4 ins Quecksilber taucht, genügt, um die beiden Vorgänge zu gänzlichem Ablaufe gelangen zu lassen.

Tabelle 1.

Anzahl der Elemente	Doppelausschlag der Galvanometernadel in Scalentheilen	
3	210·2	
1		70·4
1		71·4
1		67·8
3	209·8	
	Mittel = 210	; Summe = 209·6
6	396·5	
3		201·4
3		197·3
6	399	
	Mittel = 397·7	; Summe = 398·7
9	601·5	
3		198·7
3		199·6
3		200·3
9	598·2	
	Mittel = 599·8	; Summe = 598·3

Tab. 1 gibt auf den ersten Punkt bezügliche Daten indem sie eine Beobachtungsreihe enthält, bei welcher der Condensator durch eine verschiedene Anzahl von Daniell'schen Elementen geladen worden ist. Die Übereinstimmung ist vollkommen befriedigend.

Die Entfernung der Scala vom Spiegel war während der ganzen Untersuchung = 2350 Mm.

Es sei schon hier bemerkt, dass die in Scalentheilen angegebenen Ausschläge der Galvanometernadel, überall, wo es nothwendig war, auf eine der Tangente proportionale Grösse reducirt worden sind.

Zu dem bei 2 erwähnten Zwecke, veränderte ich durch's Drehen am Schraubenkopfe S den Abstand zwischen dem Quecksilberniveau und der Platinspitze s_4 und dadurch die Dauer τ des Contactes zwischen beiden bei schwingender Stimmgabel. Diese Dauer kann nach der Formel

$$y = a \sin \frac{\pi t}{T}$$

gerechnet werden, wenn man die Gesammtexcursion der Stimmgabel $2a$, deren Schwingungsdauer T und die Entfernung y der Quecksilberoberfläche von der Ruhestellung der Platinspitze kennt. Darnach sind die in Tab. 2 und 3 angeführten τ berechnet, in welchen ferner l die Länge des tiefsten Eintauchens der Platinspitze und ν die Anzahl der Schraubenumdrehungen bedeutet, um welche das Näpfchen gesenkt worden ist, wenn bei o das Quecksilber gerade bis zur Ruhestellung der Platinspitze reichte. Höhe eines Schraubenganges = 0·9 Mm., T = 0·00793.

Tabelle 2.

9 Daniell'sche El. Ladung $2a$ = 9·7 Mm.

ν	l	τ	α
0	4·85	0·00793	601·0
1	3·95	0·0070	601·8
2	3·05	0·0060	600·6
3	2·15	0·0050	600·2
4	1·25	0·0037	599·8
5	0·35	0·0019	600·5

Tabelle 3.

9 Daniell'sche El. Ladung $2a = 9$ Mm.

ν	l	τ	x
0	4·5	0·00793	604·7
1	3·6	0·0069	604·8
2	2·7	0·0059	604·8
3	1·8	0·0047	604·9
4	0·9	0·033	604·9

Der Abstand der Condensatorplatten war in beiden Fällen gleich 0·3 Mm. Die Differenz des Ausschlages in den beiden Tabellen erklärt sich dadurch, dass sich dieselben auf Beobachtungsreihen beziehen, die an verschiedenen Tagen angestellt wurden und daher weder die elektromotorische Kraft der Daniell'schen Elemente noch der Reductionsfactor des Galvanometers in beiden Fällen den gleichen Werth hatten.

Die Beobachtung der zur Berechnung des Verhältnisses r nothwendigen Grössen machte zunächst einen Vergleich der verschiedenen Galvanometerrollen A, B, C, D, E erforderlich. Zu diesem Behufe schickte ich einen constanten Strom durch je zwei bezüglich ihrer Wirksamkeit auf die Magnetnadel benachbarte Rolle, einmal in gleichem, und dann in entgegengesetztem Sinne. Aus den beiden, am Galvanometer beobachteten Ausschlägen lässt sich das Verhältniss der Reductionsfactoren rechnen. Für die Rollen A, B und C benützte ich einen Thermostrom; für die übrigen einen Daniell mit Einschaltung eines entsprechenden Widerstandes in die Leitung. Dieser Theil der Messungen war ziemlich bedeutenden Beobachtungsfehlern ausgesetzt, da die Ruhelage immer erst aus Umkehrpunkten bestimmt werden musste, und die beiden Ausschläge daher nicht genügend rasch hintereinander beobachtet werden konnten. Durch Anwendung eines aperiodisch schwingenden Galvanometers dürfte sich dieser Übelstand beseitigen lassen.

Nun wurde der Strom der zur Ladung des Condensators verwendeten Batterie durch eine der Rolle C oder E geschickt und φ abgelesen. Vorher noch bestimmte man den Widerstand der Zuleitungsdrähte und der entsprechenden Galvanometerrolle

mit Hilfe eines Differential-Galvanometers und eines Siemen'schen Stöpseletalons. Der innere Widerstand eines Daniell'schen Elementes ergab sich aus früheren Messungen zu 0·16 S. E. Hierauf ermittelte ich die Schwingungszahl der bereits einige Zeit in Gang befindlichen Stimmgabel mittelst einer zweiten auf stroboskopischem Wege, wobei ich mich begnügte, die an der Hilfsgabel von König angegebene Zahl als richtig anzunehmen.

Nach Herstellung der in Fig. 1) angegebenen Verbindung wurde der Condensator bei verschiedenen Distanzen der Platten geladen und der Ausschlag am Galvanometer gemessen.

Ich begann bei kleinen Distanzen, stieg zu grösseren, machte eine Messung bei sehr grosser Entfernung der Platten und kehrte wieder in entgegengesetzter Richtung zur kleinsten Distanz zurück.

Aus den beiden, bei gleichem δ abgelesenen Ausschlägen wurde das Mittel genommen und davon die bei sehr grossem δ gemachte Ablesung abgezogen. Es sammelt sich nämlich auch ohne Condensator an der mit der Batterie verbundenen Platte und an den Zuleitungsdrähten eine gewisse Elektricitätsmenge an, welche durch die condensirende Wirkung der in der Nähe befindlichen und nicht zu entfernenden Leiter eine Grösse erreicht, die sich am Galvanometer sehr gut beobachten lässt. Diese Elektricitätsmenge muss aber in Abzug gebracht werden, wenn man blos die durch den Condensator gebundene, dem δ verkehrt proportionale Menge haben will. Hierauf wurde wieder die Schwingungszahl der Stimmgabel, der Widerstand der Leitung und die Stromstärke der Batterie bestimmt.

Aus der Condensator-Beobachtungsreihe kann man nach der Formel $\alpha = \frac{M}{\delta}$ einen Mittelwerth für M bestimmen und statt $\alpha\delta$ in Formel 3) einsetzen — δ wäre in dem Falle die wirkliche Distanz der Platten; dieselbe ist aber nicht gerade durch die an der Trommel vorgenommene Drehung gegeben, da die Ausgangsstellung $\delta = 0$ nicht ganz genau bekannt war.

Die Beobachtungen werden daher besser durch die Formel

$$\alpha = \frac{M}{N + \delta}$$

gegeben, wo M und N constant und δ die durch die Drehung der Trommel ertheilte Längsverschiebung ist.

Schreibt man die Formel

$$\alpha = \frac{1}{\frac{N}{M} + \frac{1}{M}\delta} = \frac{1}{A + B\delta}; \text{ wo } A = \frac{N}{M} \text{ und } B = \frac{1}{M}$$

und rechnet nach dieser Formel die Constanten, so ist jetzt statt $\alpha\delta$ der reciproke Werth von B einzuführen, und wir haben schliesslich

$$r = \sqrt{\left(\frac{W_{\text{magn.}}\varphi n r^2 VB}{4}\right)}.$$

Ich lasse hier einige Messungen folgen:

I.

$$\frac{A}{B} = 36 \cdot 73; \quad \frac{B}{C} = 36 \cdot 81; \quad \frac{C}{D} = 20 \cdot 43; \quad \frac{D}{E} = 6 \cdot 58.$$

$$\frac{A}{E} = V = 181700$$

Schwingungszahl der Stimmgabel = 126·16; n = 63·08.

3 Daniell'sche Elemente geschlossen durch E; φ = 123·2.

$W_{\text{magn.}} - 112 \times 0 \cdot 955 \times 10^{10}$.

Condensator-Beobachtungsreihe.

δ Mm.	α	B	Mittel B
0·298	109·7	0·3062	0·03033
0·596	54·5		
1·000	32·7	0·3005	
1·505	21·9		

$W_{\text{magn.}}$ = früher.

3 Daniell'sche Elemente geschlossen durch E; φ = 122·0.

6 " " " " " φ = 246·1.

$W_{\text{magn.}} = 112 \cdot 6 \times 0 \cdot 955 \times 10^{10}$.

Condensator-Beobachtungsreihe.

δ Mm.	α	B	Mittel B
0·298	236·1		
0·596	113·4	0·01519	
1·000	67·2	0·01482	0·01502
1·505	44·3	0·01506	
2·012	33·5		
3·018	22·1		

Wmagn. wie vorher.

6 Daniell'sche Elemente geschlossen durch E; $\varphi = 245 \cdot 6$.
Schwingungszahl der Stimmgabel $= 126 \cdot 16$, $n = 63 \cdot 08$.

$$\frac{A}{B} = 36 \cdot 06;\ \frac{B}{C} = 36 \cdot 97;\ \frac{C}{D} = 20 \cdot 58;\ \frac{D}{E} = 6 \cdot 62;$$

$$\frac{A}{E} = V = 181600.$$

Daraus folgt:

$$v = 30 \cdot 38 \times 10^{10}\ \text{(3 Dan.)}$$
$$v = 30 \cdot 34 \times 10^{10}.\ \text{(6 Dan.)}$$

II.

$$\frac{A}{B} = 35 \cdot 70;\ \frac{B}{C} = 37 \cdot 16;\ \frac{C}{D} = 20 \cdot 51;\ \frac{D}{E} = 6 \cdot 59;$$

$$\frac{A}{E} = V = 179400.$$

$$n = 63 \cdot 08.$$

3 Daniell'sche Elemente geschlossen durch E; $\varphi = 120 \cdot 0$.
Wmagn. $= 112 \cdot 1 \times 0 \cdot 955 \times 10^{10}$.

Condensator-Beobachtungsreihe.

δ Mm.	α	B	Mittel B
0·298	100·7	0·3172	
0·596	49·9		0·03148
1·000	31·1	0·3124	
1·505	20·6		

$W_{\text{magn.}}$ wie vorher.

$$\varphi = 118 \cdot 4.$$

9 Daniell'sche Elemente geschlossen durch E; $\varphi = 348 \cdot 2$.

$$W_{\text{magn.}} = 113 \cdot 05 \times 0 \cdot 955 \times 10^{10}.$$

Condensator-Beobachtungsreihe.

δ Mm.	α	B	Mittel B
0·298	293·8		
0·596	148·6	0·01058	
1·000	90·9		0·01045
1·505	61·8	0·01019	
2·012	47·3	0·01059	
3·018	30·9		

$W_{\text{magn.}}$ wie vorher.

$$\varphi = 346 \cdot 8.$$
$$n = 63 \cdot 08.$$

$$\frac{A}{B} = 35{\cdot}92;\quad \frac{B}{C} = 36{\cdot}94;\quad \frac{C}{D} = 20{\cdot}45;\quad \frac{D}{E} = 6 \cdot 62.$$

$$\frac{A}{E} = V = 179600.$$

Daraus folgt:

$$r = 30 \cdot 34 \times 10^{10} \text{ (3 Dan.)}$$
$$r = 29 \cdot 98 \times 10^{10}. \text{ (9 Dan.)}$$

Bei den zwei nachfolgenden Beobachtungsreihen wurde der Strom der Ladungsbatterie durch die Galvanometerrolle C geschickt, dafür aber durch Einschaltung eines Widerstandes (Siemen'scher Stöpseletalon, 10000 S. E. regulirt bei 20° C.) entsprechend geschwächt. Die Angaben des Stöpseletalons erfuhren bezüglich der Temperatur eine Correction. Widerstand der Leitungsdrähte und der Galvanometerrolle in diesem Falle gleich 25·0 S. E.

III.

$$\frac{A}{B} = 36{\cdot}06; \quad \frac{B}{C} = 37{\cdot}41. \quad \frac{A}{C} = V = 1349.$$

$$n = 63 \cdot 08.$$

3 Daniell'sche Elemente; $\varphi = 176 \cdot 3$.

$W_{\text{magn.}} = 9995 \cdot 5 \times 0 \cdot 955 \times 10^{10}$.

Condensator-Beobachtungsreihe.

δ Mm.	α	B	Mittel B
0·296	89·7		
0·596	48·3	0·03226	0·03274
1·000	29·6	0·03323	
1·505	19·6		

$$\varphi = 176 \cdot 4.$$

6 Daniell'sche Elemente $\varphi = 354 \cdot 8$.

$W_{\text{magn.}} = 9996 \times 0 \cdot 955 \times 10^{10}$,

Condensator-Beobachtungsreihe.

δ Mm.	α	B	Mittel B
0·296	178·9		
0·596	96·7	0·01608	
1·000	59·1	0·01619	0·01607
1·505	40·0	0·01593	
2·012	30·05		
3·018	20·4		

$$\varphi = 350 \cdot 5.$$

$$n = 63 \cdot 08.$$

$$\frac{A}{B} = 35{\cdot}74; \quad \frac{B}{C} = 37{\cdot}21. \quad \frac{A}{C} = V = 1329.$$

Daraus folgt:

$$v = 30\cdot70 \times 10^{10} \text{ (3 Dan.)}$$
$$v = 30\cdot41 \times 10^{10}. \text{ (6 Dan.)}$$

IV.

$$\frac{A}{B} = 36\cdot15; \quad \frac{B}{C} = 37\cdot25. \quad \frac{A}{C} = V = 1346\cdot6.$$

$$n = 63\cdot08.$$

3 Daniell'sche Elemente $\varphi = 185\cdot9$.

$W_{magn.} = 9999 \times 0\cdot955 \times 10^{10}$.

Condensator-Beobachtungsreihe.

δ Mm.	α	B	Mittel B
0·298	98·3	0·0311	0·0311
0·596	51·8		
1·000	31·25	0·0311	
1·505	21·0		

$$\varphi = 184\cdot6.$$

6 Daniell'sche Elemente $\varphi = 361\cdot7$.

$W_{magn.} = 9997 \times 0\cdot955 \times 10^{10}$.

Condensator-Beobachtungsreihe.

δ Mm.	α	B	Mittel B
0·298	189·5	0·01582	0·01578
0·596	99·5		
1·000	60·7	0·01585	
1·505	41·0		
2·012	30·8	0·01568	
3·018	20·8		

$$\varphi = 358 \cdot 5.$$
$$n = 63 \cdot 08.$$

$$\frac{A}{B} = 36{\cdot}04; \quad \frac{B}{C} = 36{\cdot}77. \quad \frac{A}{C} = V = 1332 \cdot 9.$$

Daraus folgt:

$$v = 30 \cdot 68 \times 10^{10} \text{ (3 Dan.)}$$
$$v = 30 \cdot 48 \times 10^{10}. \text{ (6 Dan.)}$$

Es soll nun eine Zusammenstellung der für v erhaltenen Werthe folgen, wobei ich den Factor 10^{10} nur dem Mittelwerthe beisetze.

	9 Dan.	6 Dan.	3 Dan.
$v =$	29·98	30·34	30·38
		30·41	30·34
		30·48	30·70
			30·68

$$\text{Mittel } v = 30 \cdot 41 \times 10^{10} \frac{\text{Mm.}}{\text{Sec.}}$$

Dieser Werth liegt zwischen dem Maxwell'schen 28·798 und dem Weber'schen 31·07. Eine Berücksichtigung des Randeinflusses beim Condensator würde ihn dem ersteren nähern.

Über die durch Entladung von Leydener Flaschen hervorgerufene Zersetzung des Wassers an Platinelektroden.

Von Dr. F. Streintz,
Assistenten des physikalischen Laboratoriums am königl. sächs. Polytechnicum in Dresden.

(Ausgeführt im physik. Laboratorium des k. s. Polytechnicums in Dresden.)

(Mit 1 Tafel.)

Es ist eine bekannte, zuerst von Paets van Troostwyck, beobachtete Erscheinung, dass eine Leydener Flasche, deren Belegungen mit in Wasser tauchenden Drähten verbunden werden[1] Zersetzung des Wassers durch Entwicklung von Knallgas an beiden Elektroden hervorrufe. Riess[2] ist der Ansicht, dass diese Zersetzung keine elektrische sein könne, und sucht die Ursache derselben in der durch den Entladungsstrom an den Elektroden entwickelten Hitze, nachdem Grove[3] den Nachweis geliefert hatte, dass glühendes Platin Wasser zu zersetzen im Stande sei.

Es war daher von Interesse, die durch Entladungsströme von Leydener Flaschen entstehende Wasserzersetzung etwas eingehender zu untersuchen. Dazu erschien es vor Allem erforderlich, die Entladung durch Einschaltung eines sehr grossen Widerstandes derart zu modificiren, dass das Potentialgefälle in der Zersetzungszelle verhältnissmässig klein wurde und eine Lichterscheinung in derselben nicht auftreten konnte.

Die entladenen Elektricitätsmengen wurden galvanometrisch, die elektromotorische Kraft der Zersetzung am Elektrometer gemessen.

---

[1] Paets van Troostwyck: Man sehe Riess, Reibungselektricität II, §. 591.

[2] Riess, l. c. II, §. 593.

[3] Grove, Pogg. Ann. 71. Bd.

Um die störenden Einflüsse, welche die elektrostatisch geladenen Apparate durch Influenz auf die Quadranten des Elektrometers ausübten, zu beseitigen, wurden einerseits Elektricitätsquelle und Leydener Flaschen in möglichst grosser Entfernung vom Elektrometer aufgestellt, andererseits aber befanden sich alle übrigen elektrostatisch geladenen Theile der Leitung eingeschlossen in anderen mit der Erde verbundenen Leitern.

Zudem musste dafür gesorgt werden, dass die Quadranten des Elektrometers nur möglichst kurze Zeit isolirt, sondern entweder mit der Zelle oder mit der Erde verbunden waren.

Diesen Bedingungen genügte die im Folgenden beschriebene Einrichtung, deren Angabe ich im Wesentlichen dem Herrn Hofrathe Professor Toepler zu verdanken habe.

§. 1. Anordnung der Versuche.

Die Elektroden (*ee*, Figur 1) einer Toepler'schen Influenzmaschine mit zwei rotirenden Scheiben waren zunächst mit einer Umschaltevorrichtung *C* verbunden. Diese bestand aus vier quadratisch auf eine Glasplatte aufgesetzten Siegellacksäulen, auf welche mit Quecksilber gefüllte Glasnäpfchen aufgekittet waren. Durch Kupferbügel konnten letztere zu zweien combinirt werden. Zwei Näpfchen führten zu den Elektroden der Maschine, das dritte stand metallisch mit der Erde (der Gas- und Wasserleitung des Hauses), das vierte endlich mit der inneren Belegung einer Leydener Batterie (*L*) von 18 Flaschen[1], die in Gruppen zu drei verwendet werden konnten, in Verbindung.

Die äussere Belegung der Batterie war zur Erde abgeleitet; von der inneren Belegung führte ein Leitungsdraht, der in einem weiten, ungefähr 2 M. langen Metallrohre (*R*) steckte und durch in der Mitte durchbohrte Scheibchen aus Hartgummi von demselben isolirt war, zu der ersten Kugel eines Funkenmikrometers (*M*). Die Kugeln desselben hatten einen Durchmesser von 40 Mm. Neben dem Mikrometer stand ein mit destillirtem Wasser gefülltes U-förmiges Glasrohr (*W*), dessen Öffnungen mit durchbohrten

[1] Die Flaschen hatten bei einer Höhe von 39 Cm., einem Durchmesser von 12·5 Cm. und bei einer Glasstärke von 4·5 Mm. eine mit Stanniol belegte Oberfläche = 0·124 □M.

Kautschukpfropfen verschlossen waren; durch die Durchbohrungen gingen Kupferdrähte, die in die Flüssigkeit tauchten, und von denen der eine zur Veränderung des Widerstandes tiefer oder weniger tief eingesenkt werden konnte. Die Kupferdrähte waren einerseits mit der zweiten Kugel des Funkenmikrometers, andererseits mit der Zersetzungszelle (*P*) verbunden. Von der Zelle ging eine Drahtleitung auf Siegellacksäulen zum Galvanometer (*G*), von da zur Erde.

Funkenmikrometer und Glasrohr standen in einem gleichfalls zur Erde abgeleiteten Kasten aus Zinkblech, sorgfältig von demselben isolirt. Der Kasten besass eine seitliche Thür und war mit drei Öffnungen, zwei an gegenüber liegenden Seitenwänden, deren eine zur Aufnahme des Metallrohres diente und deren andere mit einem durchbohrten Hartgummischeibchen bedeckt war, durch welches der zur Zersetzungszelle führende Draht ging, versehen. Die dritte Öffnung *O*, befand sich am Deckel des Kastens, auf welchem eine starke Eisenschiene aufgelöthet war, an die zwei von kurzen Messingfüssen getragene Säulen aus gut isolirendem Glase eingekittet waren. Eine davon (*h*), 16 Cm. hoch, stand aufrecht und trug eine oben mit einer galvanischen Klemme versehene Messinghülse, die mit einem Quecksilbernäpfchen (*q*) und einem Messinghaken (*m*) im Contacte stand. Die andere Glassäule (*h'*) von 22 Ctm. Höhe, war durch ein Charnier um eine Axe der Schiene drehbar und trug gleichfalls eine mit Klemme und Metallhaken versehene Hülse.

Um dieselbe Axe drehbar war ein Messingbügel (*b*), der in fester Verbindung mit der Säule *h'* direct auf die Schiene gelöthet war und auf den Haken *m* aufgelegt werden konnte.

Die Klemme der festen Säule wurde über eine zum Vergleiche mit einem Daniell-Elemente dienliche, der oben beschriebenen analoge Umschaltevorrichtung *C'* durch einen auf Siegellackstangen ruhenden Draht mit einem Quadrantenpaare des Elektrometers (*E*) verbunden, während das andere Quadrantenpaar dauernd zur Erde abgeleitet war. Die Klemme der drehbaren Säule hingegen stand mit der isolirten Elektrode der Zelle im Contacte.

Die Function dieser Vorrichtung ergibt sich folgendermassen: Steht die Säule *h'* aufrecht, so hängt der Messingbügel *b* auf dem Haken *m*. Beide Quadrantenpaare des Elektrometers sind somit

zur Erde abgeleitet. Hat der Entladungsstrom seinen Weg durch Mikrometer, Glasrohr, Zelle und Galvanometer vollendet, so wird der Bügel zur Seite gezogen und auf die erste Kugel des Mikrometers niedergelassen. Dadurch wird der Rückstand der Batterie entladen, gleichzeitig aber taucht der Haken der drehbaren Säule in das Quecksilbernäpfchen (q) und verbindet die isolirte Elektrode der Zelle mit dem nunmehr isolirten Quadrantenpaare des Elektrometers.

Diese letztere Stellung ist die in Figur 1 angegebene.

Um noch die Zersetzungszelle in sich schliessen, d. h. beide Elektroden zur Erde ableiten zu können, war ein Draht an den Deckel des Kastens gelöthet, welcher mit seinem Ende d in das Quecksilbernäpfchen getaucht werden konnte.

Über den Widerstand des mit destillirtem Wasser erfüllten Rohres W bemerke ich, dass derselbe nur innerhalb sehr enger Grenzen verändert werden durfte, um einerseits, wie schon eingangs erwähnt, das Auftreten einer Lichterscheinung in der Zelle sicher zu verhüten, andererseits aber Partialentladungen der Batterie hintanzuhalten.

Die Beobachtungen wurden von mir allein ausgeführt. Um dies zu ermöglichen, liess ich die Influenzmaschine mit Hilfe eines kleinen Wassermotors in Function setzen.

Die Ablesungen am Galvanometer sowohl, als am Elektrometer geschahen mit Fernrohr und Scale.

Das Galvanometer, durch einen die Richtkraft des Erdmagnetismus verstärkenden Magneten „stasirt", hatte einen nach magnetischem Masse gemessenen Reductionsfactor $C = 0 \cdot 01918$ Mm. $^{1/2}$ Mgr. $^{1/2}$ Sec^{-1}, eine Schwingungsdauer t von $3 \cdot 02''$ und ein Dämpfungsverhältniss $k = 1 \cdot 0312$. Die entladenen Elektricitätsmengen wurden nach der Formel $Q = C\frac{t}{\pi}\alpha\sqrt{k}$, worin α den durch den Entladungsstoss erfolgten, auf den Winkel von 57°3 als Einheit bezogenen Ausschlag der Magnetnadel bedeutet, berechnet und sind somit auf magnetisches Mass bezogen.

Das Elektrometer, ein vorzügliches, nach Mascart von Carpentier in Paris, dem Nachfolger Ruhmkorff's verfertigtes Instrument, musste erst zur subjectiven Beobachtung durch Anhängen eines leichten Planspiegelchens von 1 Cm. Seite und 0·5 Mm.

Dicke an die Rückseite des dem Instrumente ursprünglich bei-
gegebenen Convexspiegels eingerichtet werden.

Das Carpentier'sche Elektrometer ist seiner grösseren
Einfachheit und Präcision wegen den von White in Glasgow con-
struirten Thomson'schen Quadrantenelektrometern weitaus vor-
zuziehen. Für die vorliegende Untersuchung kam noch ein be-
sonders werthvoller Vorzug des französischen Instrumentes vor dem
erwähnten englischen zur Geltung, der darin liegt, dass vollstän-
dige Proportionalität zwischen dem ersten und dem dauernden Aus-
schlage, den eine constante elektromotorische Kraft hervorruft, be-
steht. Allerdings muss zur Erfüllung dieser Bedingung die di
Ladung der Nadel vermittelnde Schwefelsäure von Zeit zu Zei
(10—12 Tagen) erneuert werden, da das Innere des Instrumente
nicht genügend vor dem Eindringen von Staub geschützt ist.

Geladen wurde die Nadel mit einem Pole einer kräftige
Zamboni'schen Säule (der andere Pol war zur Erde geleitet)
so dass ein Daniell-Element auf der in einem Abstande von 1·8 M
aufgestellten Scale einen ersten Ausschlag von 250 Theilstriche
einen dauernden von 210 nach beiden Seiten durchschnittlic
hervorrief. Ich habe die am Elektrometer gefundenen Werth
der Übersichtlichkeit halber auf die elektromotorische Kraft de
Daniell-Elementes als Einheit reducirt. Der Vergleich mit de
Daniell-Elemente erfolgte möglichst oft, obgleich die Veränderun
gen, welche die Ladung der Nadel im Laufe eines Tages erlit
nur geringfügige waren.

Da ich von meinem Platze aus die Thätigkeit des Motor
nicht sistiren konnte, so musste ich dem Messingbügel *b* erst di
in der Figur gezeichnete Lage geben. Zudem tauchte der Drah
d in das Quecksilbernäpfchen. Nun wurden die Ruhelagen beide
Instrumente notirt. Für den Versuch wurde *b* gehoben und an *a*
gehängt, der Draht *d* aber, der bisher das Elektrometer zur Erd
abgeleitet hatte, aus dem Näpfchen herausgeschleudert. Hatte de
Entladungsstrom die Rolle des Galvanometers durchlaufen, s
wurde Bügel *b* und Glassäule *h'* niedergelassen und die Ablen
kung des Elektrometerspiegels beobachtet.

Es war leicht, die Ablenkungen beider Instrumente unmitte
bar nach einander zu beobachten, da das Elektrometer eine vi
grössere Schwingungsdauer (11·2″) als das Galvanometer besas

und während längerer Zeit seine Ruhelage unverändert beibehielt. Als Elektrolyten wendete ich zu allen Versuchen mit Schwefelsäure versetztes Wasser im Volumverhältnisse 1:100 an.

Die Elektroden bestanden aus Platin und wurden für jede Versuchsreihe in einer Gebläseflamme zur Weissgluth gebracht und darauf erst in concentrirter Salpetersäure und Wasser, dann in der als Elektrolyt dienenden Flüssigkeit ausgekocht. Elektroden von besonders kleiner Oberfläche stellte ich dadurch her, dass ich Drähte sorgfältig in Glas einschmolz — ich hatte mich früher davon überzeugt, dass das Glas auf die Zersetzungserscheinungen keinen Einfluss ausübe — und mit einer sehr feinen Eisenfeile so lange zuschliff, bis nur mehr der Querschnitt des Drahtes frei war. Die so erhaltenen Elektroden wurden, um sie vor etwaigen durch die Feile entstandenen metallischen Verunreinigungen zu befreien, zuerst längere Zeit in verdünnte Salpetersäure gelegt und dann erst in der oben angegebenen Weise behandelt.

Die Oberflächen dieser kleinen Elektroden wurden unter der Voraussetzung, dass die Drähte kreisförmigen Querschnitt besitzen, aus den unter dem Mikroskope an verschiedenen Stellen gemessenen Durchmessern der Drähte berechnet.

§. 2. Die elektromotorische Kraft der Zersetzung.

Meine Bemühungen waren zunächst darnach gerichtet, einen Zusammenhang zwischen den entladenen Elektricitätsmengen und der durch dieselben erzeugten elektromotorischen Kraft der Zersetzung zu ermitteln. Zu diesem Zwecke entlud ich Elektricitätsmengen von $35 \cdot 10^{-6}$ Mm.$^{1/2}$ Mgr.$^{1/2}$ angefangen bis zu $3500 \cdot 10^{-6}$ aufwärts, indem ich zuerst bei unveränderter Schlagweite die Flaschenzahl der Batterie von 3 bis auf 18 vermehrte, dann aber unter Anwendung der ganzen Batterie die Schlagweite von 0·1—3·2 Mm. vergrösserte. Es ergab sich, dass die elektromotorische Kraft der Zersetzung, welche letztere sich in Bezug auf ihre Richtung zum Entladungsstrome analog verhält, wie die galvanische Polarisation zum polarisirenden Strome, im Allgemeinen mit der entladenen Elektricitätsmenge wächst, dies aber in so unzuverlässiger Weise, dass ich mir einen Schluss auf eine Beziehung beider Grössen nicht gestatten konnte. Bei ungeänderter Menge der Elektricität schien die Spannung keinen Einfluss zu haben.

Bei diesen Versuchen beobachtete ich jedoch, dass die u
mittelbar nach der Batterieentladung gemessene elektromotorisc
Kraft der Zersetzungszelle wesentlich davon abhing, ob die Zel
schon vorher zu Entladungen gedient hatte, wobei selbstverstän
lich zwischen den einzelnen Beobachtungen die Zelle jedesm
absichtlich so lange in sich geschlossen wurde, bis das Elekt
meter keine Potentialdifferenz mehr anzeigte, die vorausgegange
Zersetzung also scheinbar vollständig vernichtet war. (Die z
Vernichtung der Potentialdifferenz nothwendige Zeit war v
schieden und betrug für Platten etwa fünf Minuten, für klei
Elektroden bis zu 40 Minuten.)

Der nächstfolgende Batterieschlag entwickelte zumeist ei
grössere elektromotorische Kraft der Zersetzung als der vorh
gehende, vorausgesetzt, dass beide in der Richtung übere
stimmten. So war bei Platten ein fortwährendes Ansteigen
geringe Schwankungen abgerechnet — der jedesmal entwick
ten elektromotorischen Kraft zu bemerken, bei Wollaston'sch
(Spitzen-) Elektroden erreichte die Zersetzung nach wenigen E
ladungen einen Maximalwerth, um dann in der Höhe desselb
hin- und herzuschwanken, bei Elektroden kleinster Oberfläche, d
ich im Folgenden immer „Querschnittselektroden" nennen wer
war jedoch schon mit dem ersten oder zweiten Endladungsstr
ein Maximum der Zersetzung erreicht.

Wird aber bei einer solchen Beobachtungsreihe, nachd
schon eine Anzahl gleichgerichteten Batterieentladungen vora
gegangen, die Richtung dieser letzteren umgekehrt, so erfolgt ei
plötzliche Verringerung der elektromotorischen Kraft, welc
meistens sehr beträchtlich ist.

In den nachfolgenden Tabellen führe ich einige Zahlenbele
für die erwähnten Erscheinungen an. Die erste Vertikalcolon
enthält die Ordnungszahl der Entladungen, die zweite, dritte u
die weiteren Kolonnen, geben die den Entladungen entsprechend
Werthe für die elektromotorische Kraft der Zersetzung an. In d
ersten Horizontalreihe endlich befinden sich die Angaben üb
die jeder Colonne entsprechenden Grenzwerthe der entladen
Elektricitätsmengen Q, die Anzahl der verwendeten Leyden
Flaschen n und den Abstand der Kugeln des Funkenmik
meters m angeführt.

Umkehrungen in der Richtung der Entladungsströme sind in den Tabellen durch den Werthen für die elektromotorische Kraft vorgesetzten Sternchen (*) ersichtlich gemacht.

1. Platten. Oberfläche = 500 □Mm.

	10^6 Q = 423—465	473—480	1893—2008	2300—2423
	$n=3$ $m=2\cdot0$ Mm.	$n=3$ $m=2\cdot2$ Mm.	$n=15$ $m=2\cdot0$ Mm.	$n=18$ $m=2\cdot0$ Mm.
1	+0 115	+0·132	+0·185	+0·180
2	+0·129	+0·147	+0·193	+0·189
3	+0·137	+0·158	+0·200	+0·198
4	+0·151	+0 163	+0·210	+0·203
5	+0·148	+0·165	+0·212	+0·204
6	+0·154	+0·168	+0·218	+0·210
7	+0·151	+0·168	+0·222	+0·216
8	+0·157	+0·171	+0·231	+0·209
9	+0.145	+0·177	+0·235	+0·217
10	+0·154	+0·173	+0·231	+0·221
17	+0·178	+0·182	—	+0·245
18	—	* —0 167	* —0·220	* —0·193

2. Drähte. Oberfläche = 1·70 □Mm.

	10^6 Q = 1182—1577
	$n=9$ $m=2\cdot6$ Mm.
1	+0·602
2	+0·615
3	+0·616
4	+0·670
5	+0·700
6	+0·714
7	+0·778
8	+0·771
9	+0·762
10	* —0·520
11	—0·524
12	—0·536
13	—0·584

3. Wollaston'sche Elektroden. Oberfläche = 0·35 □Mm.

	$10^6 Q$ = 1334—1348	3155—3220
	n = 9 m = 2·3 Mm.	n = 18 m = 2·6 Mm.
1	+1·184	+1·271
2	+1·324	+1·293
3	+1·380	+1·321
4	+1·397	+1·340
5	+1·421	+1·351
6	+1·438	+1·366
7	+1·430	+1·355
8	+1·432	+1·360

4. Querschnitts-Elektroden. Oberfläche = 0·0065 □Mm.

	$10^6 Q$ = 1434—1535	2323—2366
	n = 9 m = 3·0 Mm.	n = 18 m = 2·0 Mm.
1	+1·352	+1·353
2	+1·310	+1·349
3	+1·326	+1·341
4	+1·334	+1·343
5	* —1·168	* —1·240
6	—1·122	—1·230
7	—1·122	—1·200
8	* +1·076	* +1·145
9	+1·084	+1·132
10	+1·075	+1·135
11	+1·080	—

Ausser den bereits oben angeführten Ergebnissen liefern die Zahlenwerthe noch das weitere Resultat, dass die elektromotorische Kraft der Zersetzung ganz wesentlich von der Oberfläche der Elektroden abhängig ist, indem sie mit der Verkleinerung der Oberfläche zunimmt.

§. 3. Der zeitliche Verlauf der elektromotorischen Kraft der Zersetzungszelle nach der Entladung.

Schon die ersten Versuche hatten mich belehrt, dass die durch Leydener Flaschen hervorgerufene elektromotorische Kraft der Zersetzung eine ausserordentlich rasche Abnahme mit der Zeit erleide. Wurde nämlich die isolirte Elektrode der Zelle durch den Metallhaken der drehbaren Säule h' dauernd mit dem Elektrometer verbunden, so nahm der Elektrometerspiegel, nachdem der erste Ausschlag erfolgt war, nicht etwa wie dies bei einer constanten elektromotorischen Kraft der Fall ist, eine bestimmte, dauernde Ablenkung an, sondern er war in fortwährendem, zuerst schnellerem, bald aber verlangsamtem Wandern gegen die ursprüngliche Ruhelage begriffen.

In der Erwartung, dass diese Abnahme der Zersetzung vielleicht besseren Aufschluss über die Natur der untersuchten Erscheinungen geben könne, als dies bei den Bestimmungen der unmittelbar nach der Entladung beobachteten elektromotorischen Kraft der Fall war, habe ich derselben meine besondere Aufmerksamkeit gewidmet.

Die experimentelle Ausführung hiezu ergab sich in einfacher Weise: War der durch den Entladungsstrom verursachte Ausschlag am Galvanometer erfolgt, so wurde das Spiel der Influenzmaschine sistirt, die erste Ablenkung des Elektrometers beobachtet, und die Verbindung zwischen Elektrometer und Zelle durch Heben des Metallbügels b und Anhängen desselben an m aufgehoben. Das dadurch zur Erde abgeleitete Elektrometer nahm nun nach einigen Schwingungen seine ursprüngliche, nur in seltenen Fällen eine von derselben verschobene Ruhelage ein.

In bestimmten Intervallen — meist wählte ich dazu zwei Minuten — wurde dann die Verbindung zwischen der stets isolirten Elektrode und dem Elektrometer wieder hergestellt und die zwischen den Elektroden noch vorhandene Potentialdifferenz am ersten Ausschlage des Elektrometerspiegels gemessen.

Ich untersuchte so den Verlauf der Zersetzung an Querschnittselektroden von 0·51, 0·17 und 0·0065 □Mm. Oberfläche

Auch für den Verlauf der Zersetzung stellte es sich heraus, dass derselbe beeinflusst wird von der Anzahl der durch die Zelle

geleiteten Entladungsströme, wenn sich auch letztere unter einander gleichen.

Die folgende Tabelle gibt den Verlauf der elektromotorischen Kraft der Zersetzung an einem und demselben Paare während der Dauer aller Versuche in dieselbe Flüssigkeit tauchenden Querschnittselektroden von 0·0065 □Mm. an, wie er nach 12 positiv gerichteten Entladungen von gleicher Intensität — so weit dies bei Anwendung des Funkenmikrometers möglich war — gefunden wurde.

Die Tabelle enthält in der ersten Horizontalreihe die Ordnungszahl der Entladungen in römischen Ziffern angeführt, darunter die entsprechenden, nur wenig differirenden Werthe für Q.

Die erste Verticalcolonne gibt die in Minuten ausgedrückte Zeit seit dem Durchgange des zersetzenden Entladungsstromes an. die weiteren Colonnen enthalten die zu den betreffenden Zeiten und Entladungen gehörigen Angaben über die elektromotorische Kraft, wobei die elektromotorische Kraft des Daniell-Elementes $D = 1000$ gesetzt wurde.

Der Abstand der Kugeln des Funkenmikrometers betrug 1·8 Mm., die Batterie bestand aus 18 Flaschen.

Die Beobachtungen wurden an vier auf einander folgenden Tagen ausgeführt. Ich habe dies an der Tabelle durch Doppellinien ersichtlich gemacht. (Siehe Tabelle, pag. 629.)

Wenn man die Tabelle überblickt, so bemerkt man, dass die Abnahme der Zersetzung um so langsamer von Statten geht, je mehr Entladungsströme die Zelle bereits passirt haben. Eine Ausnahme davon machen nur diejenigen Beobachtungsreihen, welche von den nächstvorhergehenden durch die Dauer einer Nacht (doppelte Verticallinie) getrennt sind. Doch schon die folgende, an demselben Tage ausgeführte Beobachtungsreihe erhebt sich über alle vorausgehenden, so dass eine steigende Tendenz im Verlaufe der Zersetzung nicht zu verkennen ist.

Würde man sich den Verlauf der Zersetzung durch Curven mit den Zeiten als Abscissen, den jeweiligen Potentialdifferenzen als Ordinaten darstellen, so könnte man sich überzeugen, dass die Curven sich mehr und mehr einander nähern und endlich nahe zusammenfallen.

Zeit	I $10^6 Q =$ 1792	II 1803	III 1851	IV 1820	V 1803	VI 1780	VII 1894	VIII 1905	IX 1880	X 1870	XI 1783	XII 1792	galvan. polaris. 1877	1854
0'	−1035	−972	−1059	−1045	−1050	−1072	−1130	−1145	−1080	−1058	−1047	−1049	−1347	−1386
2'	−115	35	126	171	235	278	296	241	302	300	318	326	665	650
4'	−31	21	108	146	204	248	264	216	270	260	280	288	423	404
6'	+4	23	98	136	194	231	245	203	253	242	264	269	379	379
8'	+17	12	94	130	187	219	233	194	238	230	248	253	357	360
10'	+24	10	91	125	175	209	222	188	228	219	242	242	340	346
12'	+27	10	89	121	171	203	212	180	218	211	229	232	326	339
14'	+29	10	86	118	167	197	206	176	211	205	221	223	—	328
16'	+29	10	84	115	163	191	200	172	204	194	210	212	309	318
18'	+29	10	82	112	158	185	192	165	198	188	202	205	301	311
20'	+28	9	78	109	154	180	186	160	191	181	194	200	293	306
22'	+29	8	78	107	148	174	182	156	183	177	189	192	288	293
24'	+29	8	76	105	144	170	180	153	178	172	182	188	283	287
26'	+29	8	75	101	142	165	172	148	173	167	177	182	280	276

Ich ging von der Annahme aus, dass ein einzelner Entladungsstrom noch nicht im Stande ist, an den Elektroden einen gewissen, im Folgenden weiter erklärten Grenzzustand herzustellen und glaubte, denselben erreichen zu können, wenn ich vorher die Elektroden galvanisch polarisirte. Zu diesem Zwecke stellte ich mir neue Elektroden von ebenfalls 0·0065 □Mm. Oberfläche her und verband dieselben längere Zeit mit den Polen einer Säule von drei Daniell-Elementen. Darauf wurde die Zelle mehrere Tage in sich geschlossen belassen, bis der Polarisationsstrom vollkommen vernichtet war. Nun wurde nach Erneuerung der elektrolytischen Flüssigkeit ein Entladungsstrom von derselben Richtung, wie vorher die des galvanischen Stromes gewesen, durch die Zelle geleitet.

So entstanden die beiden letzten Reihen der Tabelle, die mit den Worten „galvanisch polarisirt“ überschrieben sind. Der Verlauf der Zersetzung ist in diesen beiden Reihen nahezu identisch, liegt aber bedeutend höher als der nach dem zwölften Entladungsstrom beobachtete.

Die Entladungsströme waren, wie ich schon bemerkt habe positiv gerichtet. Es musste also bei der gegebenen Anordnung und dem erwähnten analogen Verhalten zur galvanischen Polarisation die isolirte Elektrode sich elektronegativ verhalten gegen die zur Erde abgeleitete Elektrode, d. h. bei in sich geschlossener Zelle wäre die Richtung des Zersetzungsstromes in der Flüssigkeit von der abgeleiteten zur isolirten Elektrode gerichtet.

Eine auffallende Umkehrung in der Ladung der Elektroden tritt beim ersten Entladungsstrome ein. Schon nach sechs Minuten zeigt sich die isolirte Elektrode elektropositiv gegen die zur Erde abgeleitete.

Diese entgegengesetzte Potentialdifferenz ist in raschem Wachsen begriffen und nimmt bald einen constanten Werth an. Ich habe die Beobachtungsreihen viel weiter geführt, als ich in der Tabelle angegeben habe und nach mehreren Stunden noch das Elektrometer negativ geladen gefunden. Wenn auch die Zelle stundenlang in sich geschlossen blieb, so stellte sich doch nach längerem Öffnen derselben allmälig negative Ladung des Elektrometers wieder her.

Auch die zweite Beobachtungsreihe zeigte nach Verlauf einer Stunde eine Umkehrung in der Ladung, die, zwar viel geringer als die bei der ersten Reihe wahrgenommene, doch noch am nächsten Tage bemerkbar war; sie ist in der Tabelle nicht angegeben.

Die weiteren Entladungen, die an galvanisch polarisirten Elektroden inbegriffen, liessen eine Umkehrung nicht zu Stande kommen. Wurde nunmehr die Zelle abgeleitet, so war nach einiger Zeit die Spannungsdifferenz an den Elektroden für die Folge verschwunden.

Ich habe ähnliche Beobachtungsreihen an grösseren Querschnittselektroden von 0·17 und 0·51 □Mm. Fläche durchgeführt. Dieselben boten kein wesentlich neues Resultat. Auch hier wird der Verlauf der Zersetzung durch die Zahl der Entladungen verlangsamt. Das Ansteigen der einzelnen Beobachtungsreihen bis zur Annäherung an einen Grenzzustand dauert aber um so länger, je grösser die Oberfläche der Elektroden ist. So wurde bei den Elektroden von 0·17 □Mm. eine Annäherung der Verlaufscurven vom 16. bis zum 20. Entladungsstrome bemerkt, bei den Elektroden von 0·51 □Mm. Fläche hingegen gelang es nicht, diese Erscheinung zu beobachten. Galvanisch polarisirt verhielten sich auch die Querschnittselektroden von grösserer Oberfläche in Bezug auf den Verlauf und die Nichtumkehr der Zersetzung wie die Elektroden von 0·0065 □Mm. Fläche.

Was die mit der Zeit eintretende Umkehrung der elektromotorischen Kraft der Zersetzungszelle anbelangt, so zeigten Elektroden von 0·17 □Mm. Oberfläche nach dem vierten, Elektroden von 0·51 □Mm., hingegen nach dem zehnten Entladungsstrome noch einen Übergang in die entgegengesetzte Ladung an. Im letzteren Falle wuchs sogar nach den ersten Entladungen die nach gleichen Zeiten beobachtete entgegengesetzte Potentialdifferenz, erreichte nach dem 13. Entladungsstrome einen constanten Maximalwerth (0·083 D), um erst nach weiteren Entladungen abzunehmen und endlich zu verschwinden.

Platten, auf den Verlauf der Zersetzung geprüft, boten wenig Bemerkenswerthes. Die schon anfänglich geringe elektromotorische Kraft sank schon nach zwei Minuten auf ein Minimum herab. Auch hier trat aber erst nach einer Reihe von Entladungen Tendenz zur Umkehrung in der Ladung der Elektroden ein.

Obgleich aus nahe liegenden Gründen das mit der Zelle verbundene, mit destillirtem Wasser gefüllte Glasrohr *W* keinen Einfluss auf die obigen Beobachtungen ausüben durfte, so habe ich mich doch auch experimentell davon überzeugt, indem ich bei einer besonderen Versuchsreihe vor den Beobachtungen am Elektrometer die leitende Verbindung zwischen *P* und *W* aufhob.

§. 4. Untersuchung eines speciellen Falles der galvanischen Polarisation. Schlussbemerkungen.

In einer Abhandlung „Über die Natur der galvanischen Polarisation" untersuchte Herr von Beetz[1] die elektromotorische Kraft der einseitigen Polarisation Pt | H + Pt, indem er am Elektrometer die Potentialdifferenz zwischen reinem und elektrolytisch mit Wasserstoff bedecktem Platin bestimmte. Es zeigte sich zwischen den beiden Platindrähten eine anfängliche Potentialdifferenz von 0·50 D, welche nach 10 Minuten auf 0·82 D gestiegen war, um auf dieser Höhe längere Zeit hindurch constant zu bleiben. Nach einer halben Stunde erfuhr die Potentialdifferenz eine Abnahme, welche Herr von Beetz der Diffusion des Wasserstoffes zum anderen Drahte zuschrieb.

Es ist nun bemerkenswerth, dass, wenn man nach der Beetz'schen Methode die einseitige Polarisation an einer Elektrode untersucht, welche von einem nur kurze Zeit dauernden galvanischen Strom durchflossen und dann sich selbst überlassen wurde, diese Elektrode im Laufe der Zeit einer ungeladenen gegenüber ihr anfangs elektropositives Verhalten in das entgegengesetzte verwandelt. Ich habe diese Erscheinung auf folgende Weise beobachtet:

In eine Platte (*P*, Fig. 2) aus Hartgummi waren vier Löcher eingegraben, von denen drei (*a*, *b*, *c*) mit Quecksilber gefüllt wurden. Durch einen Doppelbügel, der aus zwei halbkreisförmigen Kupferdrähten bestand, welche an ihrer Kreuzungsstelle durch einen mit einer Handhabe aus Elfenbein versehenen Messingring zusammengehalten war, konnte das Näpfchen *a* entweder mit *b* oder mit *c* verbunden werden. Von *b* führte ein Draht zu dem Zinkpole einer aus drei Daniell-Elementen bestehenden Kette, *c* war

[1] v. Beetz, Wied. Ann. Bd. 10, pag. 360.

mit der Erde verbunden, *a* endlich mit einer Elektrode der Polarisationsgefässe, welche durch einen Glasheber unter einander in Communication, mit dem bei den früheren Zersetzungsversuchen angewendeten Elektrolyten gefüllt waren. Ausser der mit *a* verbundenen tauchte noch in dasselbe Gefäss eine zweite Elektrode, welche mit der Glassäule *h'* (vergl. Fig. 1) im Contacte stand. Im zweiten Gefässe befand sich nur eine Elektrode, die zum Kupferpole der Kette führte.[1]

Vor dem Versuche hatte der Doppelbügel die Stellung, dass er *a* mit *c* verband. Die galvanische Kette war mithin offen. Durch Verbindung der Säule *h'* mit *h* (Fig. 1) konnte am Elektrometer constatirt werden, ob zwischen der isolirten und der in demselben Gefässe befindlichen abgeleiteten Elektrode eine zufällige Potentialdifferenz herrsche oder nicht. Meist trat, trotz vorangegangener sorgfältiger Behandlung der Elektroden, der erstere Fall ein.

Nun wurde die Verbindung zwischen Elektrometer und Elektrode wieder aufgehoben, der Doppelbügel rasch um- und wieder zurückgelegt und darauf die Glassäule *h'* abermals niedergelassen. Durch das Zurücklegen des Doppelbügels wurde die durch den kurz dauernden galvanischen Strom mit Wasserstoff bedeckte Elektrode zur Erde abgeleitet, durch das Niederlegen der Glassäule *h'* die gasfreie Elektrode mit dem Quadrantenpaare des Elektrometers verbunden, mithin zeigte das Elektrometer die Potentialdifferenz zwischen reinem und mit Wasserstoff bedecktem Platin an.

Auf ganz dieselbe Weise wie im vorigen Paragraph der Verlauf der Zersetzung, wurde jetzt die zwischen den beiden Elektroden vorhandene Potentialdifferenz von zwei zu zwei Minuten untersucht. Es ergab sich dabei folgendes Resultat: (Siehe pag. 634.)

In der Tabelle bedeuten V_0 die ursprünglich zwischen den Elektroden herrschenden zufälligen Potentialdifferenzen (für $D = 1$), die übrigen Zahlen geben die Potentialdifferenzen zwischen Pt | H + Pt, wie sie unmittelbar nach dem Durchfliessen des

---

[1] In Fig. 2 ist der besseren Übersichtlichkeit zuliebe die gasfreie Elektrode als zwischen den beiden mit Gasen bedeckten Elektroden befindlich angegeben, während sie sich thatsächlich seitlich von denselben befand.

polarisirenden Stromes, ferner nach 2, 4 und mehreren Minuten vorhanden waren.

Zeit	Querschnittselektroden Oberfläche = 0·0065□Mm. V_0 = —0·004 V:	Wollaston's Elektroden Oberfläche = 0·5□Mm. V_0 = +0·006 V:
0′	—0·793	—0·790
2′	—0·027	—0·053
4′	+0·034	—0·018
6′	+0·038	—0·008
8′	+0·040	+0·019
10′	+0·041	+0·039
12′	+0·044	+0·046
14′	+0·045	+0·050
16′	+0·044	+0·051

Den auffallenden Übergang in das entgegengesetzte elektromotorische Verhalten, der bei den Querschnittselektroden schon nach 4 Minuten eintrat und dann ziemlich constant blieb, erkläre ich mir damit, dass nach dieser Zeit der bisher die Elektrode bedeckende Wasserstoff vollständig in dieselbe eingedrungen (occludirt) ist, und sich nunmehr die Elektrode elektronegativ gegen reines Platin verhält. Ist der Wasserstoff noch nicht eingedrungen oder wird die Elektrode durch lange andauernden Stromschluss mit freiem Wasserstoff für immer bedeckt, wie dies bei den Versuchen des Herrn von Beetz der Fall war, so verhält sich die Elektrode der ungeladenen gegenüber elektropositiv. Eine mit Wasserstoff in vollständig occludirtem Zustande versehene Elektrode müsste, verbunden mit einer gasfreien, einen dem Polarisationsstrome des Voltameters entgegengesetzten Strom liefern.

In der That liess sich diese Erscheinung mit Hilfe eines sehr empfindlichen Galvanometers nach Thomson bestätigen.

Es war übrigens gar nicht nöthig, die Elektroden für diese Untersuchung so klein zu wählen; ich überzeugte mich, dass auch Platten von 500 □Mm. Fläche eine Umkehrung in der Ladung erfuhren. Hier ist es sogar wegen der Grösse der Oberflächen vortheilhafter, wenn der polarisirende Strom so lange geschlossen bleibt, bis das Maximum der einseitigen Polarisation, das ich in

guter Übereinstimmung mit Herrn von Beetz[1] zu 0·845 D. gefunden habe, gerade erreicht ist. Es erscheint auch vollkommen einleuchtend, dass eine Platinplatte, welche eine grössere Menge Wasserstoff occludirt enthält, sich gegen eine reine energischer verhalten wird, als eine Platinplatte, die weniger occludirten Wasserstoff besitzt.

Die beschriebene Anordnung des Versuches zum Nachweise des elektronegativen Verhaltens von HPt[2] zu Pt ist nicht vollständig einwurfsfrei. Die allmälig eintretende Umladung könnte bei den elektromotorischen Messungen auch einer Diffusion von Wasserstoff an die bisher gasfreie Elektrode, bei den galvanometrischen Beobachtungen überdies noch der Bildung eines aus der einseitigen Polarisation entwickelten secundären Polarisationsstromes zugeschrieben werden.

Zur Beseitigung dieser möglichen Einwände nahm ich daher den Versuch in etwas modificirter Anordnung vor.

Die Elektroden (Fig. 3) befinden sieh, fünf an Zahl, in drei durch Glasheber unter einander communicirenden Gefässen. Die mit Wasserstoff zu bedeckende Elektrode wird hier mit dem Elektrometer verbunden und kann ihr elektromotorisches Verhalten gegen drei gasfreie Elektroden (1, 2, 3), die durch eine isolirt aufgestellte Umschaltevorrichtung der Reihe nach zur Erde abzuleiten sind, untersucht werden.

Die Anordnung bedarf, um sie auch galvanometrischen Beobachtungen dienstbar zu machen, nur einer kleinen Abänderung.

Die so gewonnenen Resultate zeigten sich in qualitativer Übereinstimmung mit den oben mitgetheilten, wie aus der folgenden Tabelle hervorgeht. (Siehe pag. 636.)

Die anfängliche Potentialdifferenz Pt | H + Pt = − 0·832 D geht bald in eine entgegengesetzte über. Die Grösse der Potentialdifferenz Pt | HPt berechnet sich zu ungefähr + 0·07 D, wenn man bei den letzten Versuchen die anfänglichen zufälligen Potentialdifferenzen mit in Rücksicht zieht.

---

[1] v. Beetz, l. c. pag. 368.

[2] Um den Unterschied zwischen Platin, welches mit freiem Wasserstoff bedeckt ist, und solchem, welches nur occludirten Wasserstoff enthält, in der Formel zu charakterisiren, habe ich die Bezeichnungen H + Pt und HPt gewählt.

Zeit	Drähte. Zufällige Potentialdifferenzen $V_1 = -0 \cdot 013$ $V_2 = +0 \cdot 030$ $V_3 = 0$ V:	Bezeichnung der zur Erde abgeleiteten Elektrode
0′	+0·832	1
1′	+0·176	"
2′	+0·065	"
3′	−0·032	"
4′	−0.043	2
5′	−0·047	"
6′	−0·044	"
7′	−0·068	3
8′	−0·070	"
9′	−0·067	"
10′	−0·070	1
11′	−0·042	2
12′	−0·058	3

Zwischen Platin und Wasserstoff würde also nach meinen Versuchen ein ähnliches Verhalten bestehen, wie mutatis mutandis zwischen Zink und Quecksilber.

Die in der elektrischen Spannungsreihe weit abstehenden Metalle Zink und Quecksilber geben in dem amalgamirten Zink eine nicht zwischen den Metallen befindliche, sondern oberhalb derselben stehende Legierung.

Der in der Chemie als der unter allen Körpern am energischesten elektropositiv geltende Wasserstoff verändert, wie ich aus meinen Versuchen schliesse, das elektronegative Platin zu einem noch elektronegativeren Metalle.[1]

---

[1] Die Veränderung, welche Platin durch Wasserstoff erfährt, scheint eine sehr dauernde zu sein. Ich habe einige Male Gelegenheit gehabt, mich zu überzeugen, dass eine elektrolytisch mit Wasserstoff versehene Platinelektrode zur Weissgluth gebracht und dann in Salpetersäure ausgekocht sich noch immer elektronegativ gegen eine reine Platinelektrode verhielt.

Mit Bezug auf den zuletzt beschriebenen Versuch muss ich bemerken, dass der mit der O-Elektrode verbundene Cu-Pol der Kette auf das Phänomen nicht einwirkte; es war gleichgiltig, ob die Verbindung zwischen Cu und O während der Beobachtungen belassen wurde oder nicht.

Bevor ich daran gehe, eine Ansicht über die Natur der Zersetzungserscheinungen durch Batterieentladungen auszusprechen, habe ich noch eine Frage aus dem Gebiete der galvanischen Polarisation zu beantworten.

Kehrt eine Zelle, deren eine Elektrode durch eine sehr kurze Zeit dauernden galvanischen Strome mit Wasserstoff, die andern mit Sauerstoff beladen wurde, ihre Ladung um?

Es gelang mir nicht, diese Frage bejahend zu beantworten. Die Potentialdifferenz war zwar auch hier zuerst in sehr rascher Abnahme begriffen, erreichte aber nach zwei Stunden einen mit der ursprünglichen Polarisation gleich gerichteten Grenzwerth, welcher selbst nach 24 Stunden noch nicht verändert war. Es blieb also offenbar an der einen Elektrode noch so viel Sauerstoff erhalten, um die entgegengerichtete Tendenz des HPt zu überwiegen.

Ich behalte mir vor, die hier mitgetheilten Erscheinungen auch in anderer Richtung näher zu untersuchen.

Um endlich auf die durch Entladung von Leydener Flaschen hervorgerufene Wasserzersetzung zurückzukommen, so glaube ich dieselbe als Product einer Polarisation und einer sich daran schliessenden Dissociation des Wassers durch Entwicklung von Knallgas an beiden Elektroden auffassen zu können. Ob diese Dissociation in einer durch den Entladungsstrom bewirkten Erwärmung der Elektroden ihren Grund hat, muss ich dahingestellt lassen, doch scheint mir eine solche Annahme nach dem eingangs erwähnten Versuche von Grove nicht ungerechtfertigt.

Figur 4 gibt ein Schema dieser Vorstellung. Die Elektroden sind durch schraffirte Kreise dargestellt, jede davon ist von zwei concentrischen Kreisen, welche die Gassphären andeuten sollen, umgeben. Die eine Elektrode enthält in ihrer unmittelbaren Umgebung Wasserstoff, die andere Sauerstoff, beide aber enthalten in einem weiteren Umkreise Knallgas.

Die Richtung des Zersetzungsstromes wird sich also anfänglich gerade so verhalten, als wenn kein Knallgas vorhanden wäre.

Nun dringt der Wasserstoff der Polarisation in das Platin der einen Elektrode ein und zieht ausserdem noch den Wasserstoff der Dissociation mit sich.

Die Elektrode erhält somit occludirten Wasserstoff und bl
nur von Sauerstoff bedeckt, die andere Elektrode hingegen w
durch den umgebenden Sauerstoff von dem Eindringen des
sociirten Wasserstoffes bewahrt; das Knallgas derselben w
somit allmälig in die Flüssigkeit diffundiren.

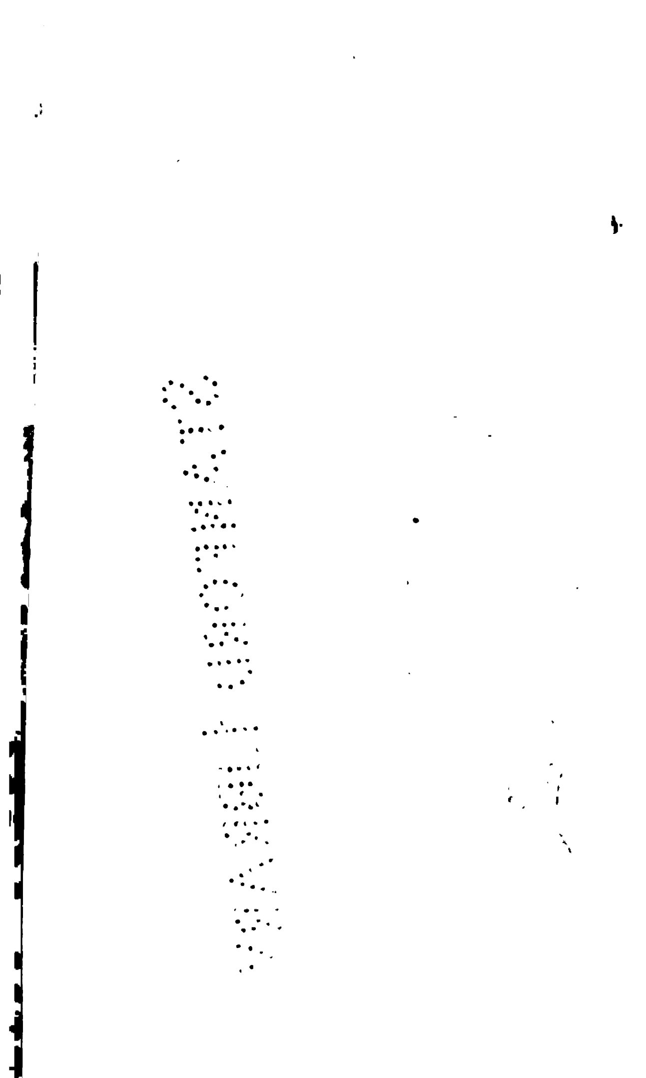
Figur 5 stellt diesen Endzustand dar. Das elektrische
halten des Elektrodenpaares wird wegen der Eigenschaft des
eine Umkehrung erfahren haben. Sind die Elektroden von au
ordentlicher Kleinheit, so ist ein Entladungsschlag schon
Stande, eine Elektrode vollständig mit Wasserstoff zu sätt
Der durch weitere Entladungen ausgeschiedene Wasserstoff
dann nicht mehr in die Elektrode eindringen, sondern die
nur dauernd umgeben können. Damit ist eben die Möglich
einer Umkehrung ausgeschlossen.

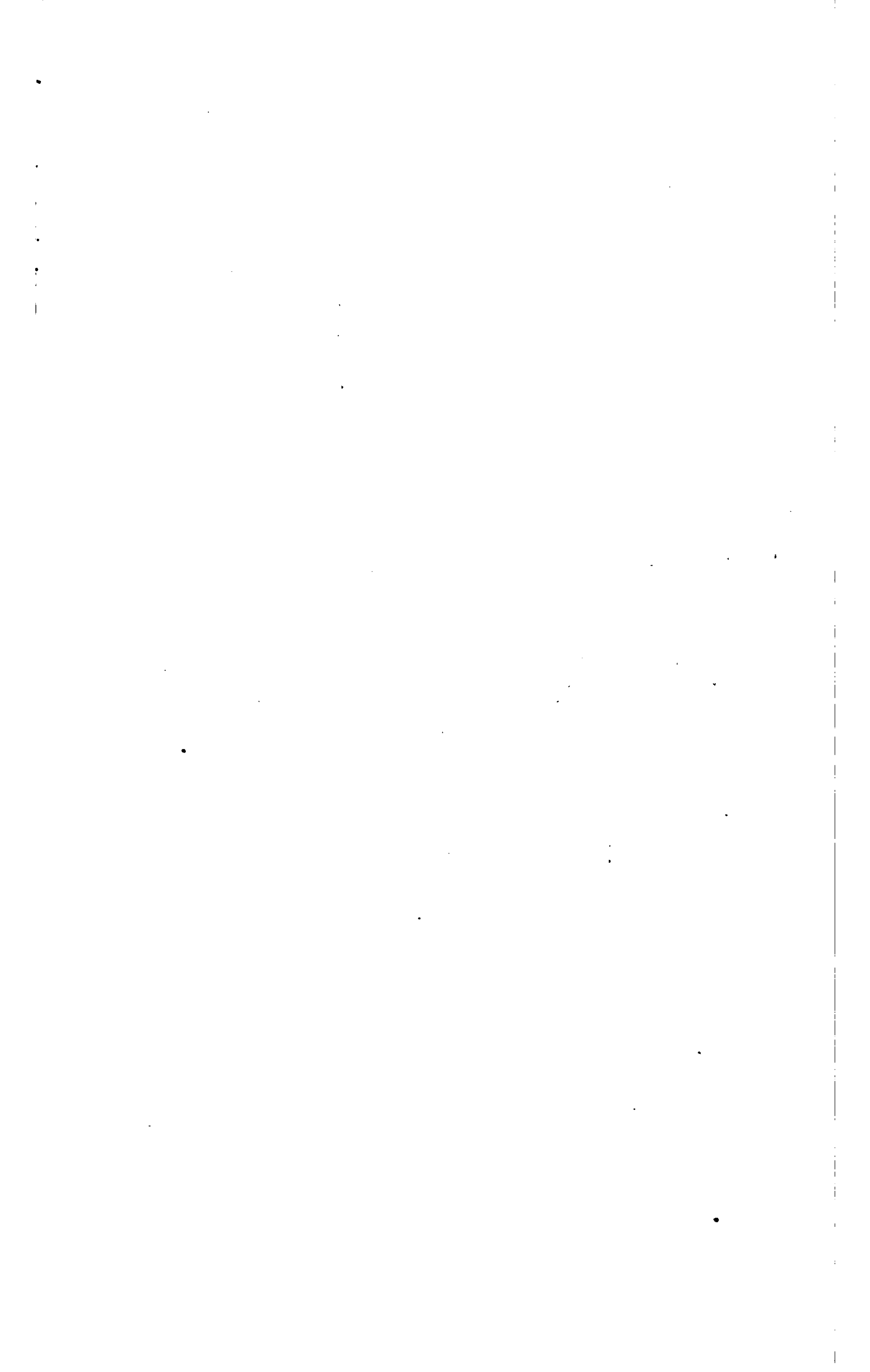
Je grösser die Oberfläche der Elektrode beschaffen ist,
mehr Entladungen wird es bedürfen, bis der Sättigungszu
erreicht ist. In der That hat sich dies aus den Versuchen erg

---

Die vorliegende Untersuchung war der Akademie
überreicht, als ich auf eine wichtige Untersuchung des
H. Helmholtz[1] aufmerksam wurde, nach welcher die in
besprochene Erscheinung vielleicht auf die Bildung von el
schen Grenzschichten zurückzuführen wäre. Auf welche
sich die verwickelten Zersetzungserscheinungen an der Ley
Flasche unter Zugrundelegung der Helmholtz'schen Th
werden erklären lassen, vermag ich vorläufig nicht anzugeb

[1] Helmholtz, Wied. Ann. Bd. 11. 737 ff.





Über die Einwirkung der salpetrigen Säure auf Pyrogallussäureäther.

Von **P. Weselsky** und **R. Benedikt.**

(Aus dem Laboratorium für analytische Chemie an der technischen Hochschule in Wien.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 10. März 1881.)

Wir haben in einer Mittheilung über Resorcinfarbstoffe angekündigt, dass wir uns mit der systematischen Prüfung der Einwirkung von salpetriger Säure auf Phenoläther beschäftigen und haben nun zuerst die Untersuchung der Pyrogallussäureäther zu Ende gebracht. Unsere Erwartung, den beschriebenen Resorcinfarbstoffen ähnliche Producte zu erhalten, hat sich nicht bestätigt; wir erhielten bloss einige schön krystallisirende Nitroproducte und einen einzigen Farbstoff, welcher jedoch stickstofffrei ist.

Zur Trennung der Pyrogallussäureäthyläther haben wir einen andern Weg eingeschlagen als Hofmann, nach dessen Vorschrift[1] Pyrogallussäuremono- und -diäthyläther durch Behandlung mit unzureichenden Mengen Natronlauge zu scheiden wären. Dieses Verfahren ist sehr umständlich, zudem ist die alkalische Lösung des Monoäthers sehr luftempfindlich und schwärzt sich fast so rasch wie alkalische Pyrogallussäurelösung.

Wir haben die Beobachtung gemacht, dass die Trennung der Aether um so leichter gelingt, je weniger fremde Bestandtheile dem Gemische beigemengt sind und uns daher bemüht, die bei der Einwirkung von äthylschwefelsaurem Kali auf Pyrogallussäure nebenbei entstehenden humösen und harzartigen Producte vorerst zu entfernen.

Zu diesem Behufe versetzten wir den Flascheninhalt mit überschüssiger verdünnter Schwefelsäure und schüttelten nach

[1] Berl. Ber. XI. 797.

Zusatz von viel Wasser mit Äther aus. Der Äther wurde abdestillirt und der Rückstand mit Wasserdampf abgetrieben, so lange noch reichliche Oeltropfen übergingen.

Das farblose Destillat enthält den gesammten Triäthyläther, viel Diäthyl- und sehr wenig Monoäthyläther. Man sammelt das Uebergegangene am besten durch Ausschütteln mit Äther, vertreibt den letzteren und destillirt den Rückstand ab, jedoch ohne zu fractioniren (A).

In der Retorte finden sich nach dem Abtreiben mit Wasserdampf zwei Schichten. Eine gelbe, wässerige, welche viel Pyrogallussäureäther gelöst enthält und ein schweres, braunes Oel. Man schüttelt den ganzen Retorteninhalt mit Äther aus und erhält nach dem Abdestilliren des letzteren einen zähen Rückstand, welcher sehr viel Diäthyläther, die Hauptmenge des Monoäthyläthers und verharzte Substanzen enthält. Man extrahirt ihn so oft mit siedendem Benzol, als er noch viel Lösliches abgibt und trennt so den grösseren Theil des Äthergemisches von dem Harze. Dann erst unterwirft man den pechartigen Rückstand der trockenen Destillation, wobei er noch eine ansehnliche Menge Pyrogallussäureäther gibt (B).

Die Benzolauszüge werden vereinigt, man kocht das Lösungsmittel ab und destillirt den öligen Rückstand (C).

Die Trennung des Mono- und Diäthyläthers gelingt sehr schwer, so lange sie noch ein flüssiges Gemenge darstellen. Nach mehrtägigem Stehen setzen aber alle drei Fractionen (A, B und C) reichliche Krystallmengen ab, welche ausschliesslich aus Mono und Diäthyläther bestehen, jedoch keinen Triäthyläther erhalten. Man trennt die Krystallisationen von den öligen Mutterlaugen durch Absaugen und vereinigt sie zur weiteren Behandlung. Die Mutterlaugen von B und C enthalten nur Mono- und Diäthyläther, sie können ebenfalls vereinigt werden und geben bei längerem Stehen oder endlich bei der neuerlichen Destillation stets neue feste Ausscheidungen, welche mit den früher erhaltenen vereinigt werden.

Die Mutterlaugen von A werden hingegen gesondert behandelt, weil sie den Triäthyläther enthalten. Man gewinnt ihn genau nach der Vorschrift Hofmann's durch Ausschütteln mi

Kalilauge, Destillation des Ungelösten und Krystallisiren aus verdünntem Alkohol in einer Kältemischung.

Die Kalilauge nimmt dabei wieder Mono- und Diäthyläther auf. Man entzieht ihr das Gelöste nach dem Ansäuern mit Schwefelsäure mit Äther, verjagt den letzteren, destillirt den Rückstand und vereinigt das Übergegangene mit B und C.

Zur Trennung des Mono- und Diäthyläthers benützt man ihre ausserordentlich verschiedene Löslichkeit in Benzol und sehr verdünntem Alkohol.

Der Pyrogallussäuremonoäthyläther ist in kaltem Benzol sehr schwer löslich, wird dagegen von verdünntem Alkohol leicht aufgenommen.

Der Diäthyläther ist sehr leicht löslich in kaltem Benzol, schwer löslich in verdünntem kalten Alkohol.

Man digerirt das Gemenge der beiden Körper mit kaltem Benzol, saugt den Rückstand ab und krystallisirt ihn aus heissem Benzol um. Er stellt reinen Monoäthyläther dar.

Aus dem Auszug wird das Benzol vertrieben und der Rückstand aus sehr verdünntem Alkohol umkrystallisirt. Man erhält lange feine, rein weisse Nadeln des Diäthyläthers. Die Mutterlaugen enthalten noch etwas Monoäther. Man gewinnt ihn durch Ausschütteln mit Äther und Umkrystallisiren aus Benzol.

Pyrogallussäuremonoäthyläther. Aus dem Pyrogallussäuremonoäthyläther konnten wir nur Ein gut charakterisirtes Reactionsproduct gewinnen, einen mit Wasserdämpfen nicht flüchtigen Mononitropyrogallussäuremonoäthyläther.

Zu seiner Gewinnung wurde die ätherische Flüssigkeit, in welcher der Monoäthyläther in bekannter Weise mit dem Weselsky'schen Reagens behandelt worden war, erst durch Waschen mit Wasser von der Salpetersäure befreit und dann mit Kalilösung ausgeschüttelt. Die kalische Flüssigkeit wurde mit Schwefelsäure übersättigt, dann mit Äther behandelt und das Extrahirte wiederholt mit Wasser ausgekocht. Die Auszüge gaben beim Erkalten reichliche Ausscheidungen dunkler Krystalle,

welche durch Umkrystallisiren und Kochen mit Thierkohle gereinigt wurden.

Sie stellen ein Hydrat des Nitroäthers von der Formel $C_6H_2 \cdot NO_2(OH)_2 \cdot OC_2H_5 + H_2O$ dar, wie sich aus den folgenden Analysen ergibt.

Der Wasserverlust bei 100° C. betrug:

	Gefunden	Berechnet für $C_8H_9NO_5 + H_2O$
H_2O	8·55	8·29

Für die getrocknete Substanz wurde gefunden:

	Gefunden	Berechnet für $C_8H_9NO_5$
C	48·11	48·24
H	4·62	4·52
N	7.77	7·04
O	—	40·20

Dieser Körper besteht aus gelben Blättern vom schönsten Goldglanz oder aus flachen Nadeln, die dann neben goldglänzenden Flächen auch solche mit stahlblauem Reflexe zeigen.

Sie verlieren schon beim Stehen über Schwefelsäure ihr Krystallwasser, werden matt und nehmen eine rehbraune Farbe an. Der Schmelzpunkt der entwässerten Substanz liegt bei 139°.

Der Nitropyrogallussäuremonoäthyläther ist bei vorsichtigem Erwärmen destillirbar, er löst sich in Alkalien mit schön rother Farbe auf.

Pyrogallussäurediäthyläther. Eine ätherische, mit dem Weselsky'schen Reagens versetzte Lösung des Diäthyläthers scheidet nach mehrstündigem Stehen lange, biegsame, dunkle Nadeln aus. Man filtrirt sie ab und wäscht sie mit entwässertem Äther. Die Mutterlauge enthält ein mit Wasserdämpfen schwer flüchtiges Nitroproduct, welches wie gewöhnlich durch Ausschütteln mit Kalilauge, Ansäuern und neuerliche Extraction mit Äther gewonnen und schliesslich durch Umkrystallisiren aus ganz verdünntem Alkohol unter Zusatz von Thierkohle gereinigt wird.

Äthylcedriret. Die erst erwähnten Nadeln haben unmittelbar nach dem Waschen mit Äther eine schöne Purpurfarbe ohne

metallischen Reflex. Beim Liegen an der Luft werden sie dunkel und nehmen einen stahlblauen Schein an. In diesem Zustande sind sie ziemlich haltbar und lassen sich unter der Luftpumpe trocknen.

Die Analyse ergab folgende Zahlen:

	Gefunden		Berechnet für $C_{20}H_{25}NO_9$
C	56·63	56·73	56·74
H	6·25	6·29	5·91
N	3·72	—	3·31
O	—	—	34·04

Die erst erhaltenen lichten Nadeln sind wahrscheinlich ein Hydrat dieses Körpers.

Er wird durch Wasser sehr rasch zersetzt. Besonders schön verläuft die Reaction, wenn er frisch bereitet, also noch wasserhaltig ist. Dann lösen sich die purpurfarbigen Nadeln sofort zu einer tiefbraunen Lösung auf, die sich im nächsten Augenblicke unter Ausscheidung eines krystallinischen Niederschlages entfärbt. Man kann leicht nachweisen, dass die Flüssigkeit jetzt viel freie Salpetersäure enthält.

Den Niederschlag krystallisirt man aus Weingeist um, beim Erkalten scheiden sich braunrothe Nadeln mit grünem Reflex aus, welche alle Eigenschaften des Hofmann'schen Äthylcedriretes besitzen. In dieser Form ist es wasserhaltig, es wird beim Trocknen oder Umkrystallisiren aus starkem Alkohol lebhaft scharlachroth mit lichtblauem Reflex.

Die oben beschriebenen Krystalle von der empirischen Formel

$$C_{20}H_{25}NO_9$$

sind offenbar eine Salpetersäureverbindung des Äthylcedriretes:

$$C_{20}H_{24}O_6 + HNO_3$$

die schon durch Wasser gespalten wird.

Das Verhalten des freien Äthylcedriretes gegen Salpetersäure bestätigt diese Ansicht. Concentrirte Salpetersäure löst es

nämlich nicht auf, ertheilt ihm aber die Farbe und den blauen Glanz der Salpetersäureverbindung.

Mononitropyrogallussäurediäthyläther. Der aus den Mutterlaugen des salpetersauren Äthylcedriretes gewonnene Nitrodiäthyläther bildet fast weisse Nadeln, welche bei 123° schmelzen und sich in Laugen mit gelber Farbe lösen.

	Gefunden	Berechnet für $C_6H_2.NO_2.(OC_2H_5)_2.OH$
C	52·15	52·86
H	5·79	5·73
N	6·96	6·17
O	—	35·24

Dieses Nitroproduct ist destillirbar, verflüchtigt sich aber sehr langsam mit Wasserdämpfen.

Pyrogallussäuretriäthyläther. Von der Einwirkung der salpetrigen Säure auf den Triäthyläther hatten wir keine bemerkenswerthen Resultate zu erwarten; da wir aber im Besitze einer grösseren Menge des Äthers waren, so haben wir durch directes Nitriren zwei Derivate desselben hergestellt.

Der Dinitropyrogallussäuretriäthyläther wird erhalten, wenn man eine Lösung des Äthers in Eisessig mit Salpetersäure versetzt, die man auch mit Eisessig verdünnt hat und einige Zeit stehen lässt. Dann giesst man die rothe Flüssigkeit in Wasser ein und krystallisirt den Niederschlag aus Alkohol um.

Hellgelbe, glänzende Nadeln, die bei 73° schmelzen.

	Gefunden	Berechnet für $C_6H(NO_2)_2(OC_2H_5)_3$
N	9·84	9.33

Beim Übergiessen des Triäthyläthers oder seines Dinitroderivates mit concentrirter Salpetersäure tritt eine sehr stürmische Reaction ein. Giesst man nach dem Aufhören der Gasentwicklung in Wasser ein, so scheidet sich eine geringe Menge

des Trinitropyrogallussäuretriäthyläthers aus, der grössere Theil der Substanz ist total zerstört worden. Man krystallisirt den Niederschlag aus Weingeist um und erhält dann schwach gelbe Nadeln, die ungefähr bei 93° schmelzen. Ihr Stickstoffgehalt betrug:

	Gefunden	Berechnet für $C_6(NO_2)_3(OC_2H_5)_3$
N	11·80	12·17

Die Schlüsse, welche sich aus der Überführbarkeit des Pyrogallussäurediäthyläthers in Äthylcedriret, also in ein Diphenylderivat ergeben, werden wir an anderer Stelle ziehen.

Über eine neue Azobenzoldisulfosäure.

Von Prof. **J. V. Janovsky,**

an der höheren Staatsgewerbeschule in Reichenberg.

(Vorgelegt in der Sitzung am 10. März 1881.)

Durch directe Einwirkung von Pyroschwefelsäure auf Azobenzol wurde bislang nur eine Sulfosäure gewonnen, die bekannte Griess'sche Monosulfosäure (P. Griess Lieb. Annal. Bd. 131), deren Stellung noch nicht mit Sicherheit festgestellt ist. — Ausser der Monosulfosäure des Azobenzols wurden später noch Disulfosäuren und Tetrasulfosäuren dargestellt, welche aber nicht durch directe Einwirkung von Schwefelsäure, sondern durch Reduction der Sulfonitrobenzole, beziehungsweise Bisulfonitrobenzole erhalten wurden. Es ist klar, dass auf letzterem Wege nur symmetrische Säuren resultiren, welche in beiden Benzolkernen der Azoverbindung je eine Sulfogruppe (in drei möglichen Stellungen) oder je zwei Sulfogruppen enthalten.

Es sei hier bemerkt, dass bezüglich der Nomenclatur der letzten Verbindungen durch Limpricht, Claus u. m. a. irrthümliche Missverständnisse entstanden sind, da die genannten Forscher (wie auch schon Heumann, Berl. Ber. 1880 — 2023 richtig bemerkt) die Substitutionsproducte, die zwei Sulfogruppen enthalten: Mono-, und jene, die vier enthalten: Disulfosäuren nennen, vom halbirten Kern ausgehend. Da nun aber wirklich eine Monosulfosäure, das heisst, eine Säure, die im Molekül eine Sulfogruppe enthält, existirt, so ist es logischer, die Nomenclatur nach der absoluten Anzahl der Sulfogruppen zu wählen.

Die Stellungsfrage der Substitutionsproducte der Azoverbindungen ist immerhin complicirt, da ja von Monosubstitutionsproducten des niedrigsten Gliedes drei Isomere existiren können, von denen bislang nur eines dargestellt ist. Von Disubstitutionsproducten können offenbar zwölf Isomere existiren. Dabei ist

vorerst zu unterscheiden, ob die beiden substituirenden Gruppen (oder Atome) in einem Kern oder in zwei Kernen auftreten. Die Substitutionsproducte der Sulfogruppe der ersten Art wurden noch nicht meines Wissens nach beobachtet. Es sind aber dieselben möglich, und zwar:

1. Derivate, die die Sulfogruppen in der Orthostellung haben. Also, wenn wir den Ort des Stickstoffs mit 1 bezeichnen —: Derivate, die die Sulfogruppen in $2_1 3$ — und $3_1 4$ enthalten, diese Derivate geben bei vollständigem Abbau der Azoverbindungen zu Kohlenwasserstoffen — Orthobisulfobenzole;
2. Derivate, deren Sulfogruppen in der Stellung: $(n=1)$ — $2_1 6_1$ — $3_1 5_1$ und $2_1 4_1$ sich befinden — dieselben geben Metabisulfobenzol;
3. endlich Derivate, deren Sulfogruppen in der Parastellung stehen, von denen ist nur eins denkbar $(n=1)$ — $2_1 5_1$.

Also im ganzen sechs Isomere.

Die Sulfosäuren, welche die Sulfogruppen in zwei Kernen, und zwar symmetrisch enthalten, wurden in den letzten Jahren von Limpricht, Mahrenholtz,[1] Moser und Claus,[2] Lahr,[3] H. v. Reiche, O. Jordan u. m. a. dargestellt und untersucht.

Die Stellung derselben ist durch die Synthese gegeben und wurde diese Säure entweder durch Reduction der Nitrosulfoderivate oder durch Oxydation der Amidosulfoderivate gewonnen.

Von diesen Säuren sind drei Isomere möglich — endlich sind noch Isomere denkbar, die die Sulfogruppen in zwei Kernen asymmetrisch enthalten (3).

Die von mir und meinem Assistenten, Herrn O. Weigl, begonnene Arbeit hat den Zweck, einmal die Stellungsfrage der Azobenzolsulfosäuren zu erledigen, wie auch hauptsächlich die directen Substitutionsproducte der Azoverbindungen, die ja mit Ausnahme der Nitroverbindung und einer Bromverbindung fast gar nicht studirt sind, synthetisch zu gewinnen. Vor Allem war es

---

[1] Berl. Ber. 1878, p. 1046.
[2] Ebendaselbst, p. 762.
[3] Ebendaselbst, 1880.

mir darum zu thun, die Sulfosäuren darzustellen, welche mehrere Sulfogruppen in einem Kern enthalten.

Durch Behandlung von Azobenzol (ein Theil) mit Pyroschwefelsäure (sechs Theile) bei 135° C. erhält man nach dem Verdünnen mit 4 Vol. Wasser, Krystalle, welche nach mehrmaliger Krystallisation tafelförmig, orangegelb, goldglänzend sind; dieselben sind die von P. Griess beschriebene Monosulfosäure des Azobenzols. Die Identität wurde durch Analysen festgestellt. Den Schmelzpunkt der Säure (mit 3 Krystallwasser) bestimmten wir zu 127° C. Die Ausbeute betrug: 75% der theoretischen. Die Löslichkeit im Wasser von 10° C. ist 1 : 17 Theile Wasser. Die Formel der Säure

$$C_6H_5N = NC_6H_4SO_3H + 3aq.$$

Wenn man das Filtrat von der Monosulfosäure im Wasserbade einengt, dann über Schwefelsäure im Vacuo stehen lässt, so krystallisirt eine zweite Säure in orangerothen, leicht zerfliesslichen Nadeln heraus, die aus wenig Wasser umkrystallisirt rein zu erhalten sind und getrocknet einen Schmelzpunkt von 169° C. besitzen.

Leichter und mit besserer Ausbeute erhält man die Säure, wenn man krystallisirte Pyroschwefelsäure (krystallisirte Säure, wie sie von Stark in Handel gebracht wird) anwendet. Beim Erhitzen mit fünf Theilen derselben auf 150° C. entsteht keine Monosulfosäure, wenn man ca. 30—40 Minuten behandelt. Verdünnt man die Reactionsmasse vorsichtig mit 2—3 Vol. Wasser, so krystallisirt bei längerem Stehen im Vacuo die oben erwähnte Säure heraus, welche abgenutscht und aus Wasser über Schwefelsäure umkrystallisirt, leicht rein erhalten wird.

Die Säure krystallisirt bei langsamem Verdunsten in büschelförmig gruppirten Nadeln, die rhombisch sind und eine Combination von $\infty P \infty$, $\infty \bar{P} \infty$ und $\breve{P} \infty$ darstellen; bei rascherem Krystallisiren erhält man eine strahlige, dunkelorangerothe Masse, die mit intensiver rothgelber Farbe in Wasser löslich ist. Bei längerem Lagern über Schwefelsäure verliert dieselbe Krystallwasser und zerfliesst dann an der Luft nicht mehr.

Die Analyse der bei 120° C. getrockneten Säure ergab:

		Gefunden	Berechnet
0.1546 Subst.	0.0671 SO_3	46.69%	46.78%

Der Wassergehalt hängt von der Krystallisation ab, die frische Säure ergab als Mittel 9.821 Wasser, während die auf 2 Mol. Krystallwasser berechnete 9.527 geben müsste. Im Vacuo getrocknet, hält die Säure noch 6.416% Wasser zurück. (1 Mol. Wasser erfordert 5.00%.) Der Schmelzpunkt getrockneter Säure ist 169° C.

Die Formel ergibt sich zu

$$C_{12}H_8N_2.(SO_3H)^2 + 2aq.$$

Die Salze dieser Disulfosäure des Azobenzols sind charakteristisch, das Kaliumsalz durch Behandlung der freien Säure mit Kaliumhydroxyd oder Carbonat erhalten, fällt bei nicht zu verdünnter Lösung als krystallinisches Pulver, nach einmaliger Krystallisation aus heissem Wasser erhält man büschelförmige orange Krystalle, die brillanten Glanz besitzen. Auch andere Kaliumsalze fällen die Säure nach längerem Stehen. Die Krystalle sind rhombische Prismen mit einer Pyramide (flach).

Die Analyse der Kaliumverbindung ergab:

Krystallwasser 11.23 berechnet 11.42.

Subst. bei 150° getrocknet:

Kalium 18.24 berechnet 18.65.

Das Kaliumsalz besitzt demnach die Formel:

$$C_{12}H_8(SO_3Ka)^2N_2 + 3aq.$$

Das Silbersalz erhält man als orangerothen Niederschlag durch doppelten Umsatz, wie auch durch Fällung der freien Säure mit Silbernitrat oder Acetat. — In kochendem Wasser ist das Silbersalz löslich und krystallisirt in mikroskopischen Nadeln ohne Krystallwasser.

Die Analyse des getrockneten Salzes ergab:

38.63% Ag statt 38.77.

Das Baryumsalz ist orangegelb, selbst in siedendem Wasser schwer löslich — es krystallisirt nach dem Abkühlen in mikroskopischen kleinen Warzen, die ein strahliges Gefüge besitzen und lebhaft polarisiren.

Leichter löslich ist das Kalk- und Bleisalz der Säure.

Vergleichen wir die Reactionen der Säure mit denen der aus Nitrosulfobenzolen dargestellten symmetrischen Säuren, so finden wir, dass die von uns dargestellte Säure keiner entspricht — eine

vorläufige Untersuchung macht aber auch die assymmetrische Vertheilung derselben in zwei Kernen unwahrscheinlich. Wahrscheinlich ist, dass beide Sulfogruppen in einem Benzolkern sich befinden. Mit der Lösung der Frage sind wir eben beschäftigt.

Bei der Gewinnung der oben beschriebenen Disulfosäure erhält man im Filtrate bei freiwilligem Verdunsten Krystalle einer Sulfosäure, die im Wasser viel schwerer löslich ist — wahrscheinlich ein Isomer der oben beschriebenen.

Erhitzt man Azobenzol mit krystallisirter Pyroschwefelsäure auf 210°, so tritt plötzlich ein Aufwallen unter theilweiser Verkohlung ein, die Temperatur steigt plötzlich auf 235° C. (bei circa 5 Grm. Azobenzol und 25 Grm. Säure) unter Entbindung von Schwefeldioxyd. Wird die Reactionsmasse mit Wasser ausgekocht, so krystallisirt beim Erkalten eine Substanz, die in monoklinen, brillantglänzenden, wasserhellen Krystallen anschiesst; dieselbe verwittert leicht an der Luft (Wasser 9·87%) und gibt bei der Analyse 48.22% SO_3, woraus sich der Schwefelgehalt von 19·29 berechnet.

Derselbe, wie ihr Verhalten, deuten auf eine Sulfisäure des Azobenzols. Die Mutterlauge dieser Substanz liefert pyramidenförmige Krystalle, welche wegen Mangel an Substanz noch nicht untersucht werden konnten.

Schliesslich sei erwähnt, dass wir die Einwirkung der Phenole, beziehungsweise ihrer Metallderivate auf Azosulfosäuren (Mono und Di) studirt haben und das nach unseren vorläufigen Versuchen hervorgeht, dass die Sulfogruppe mit aromatischen Oxylresten ersetzbar ist; über diese Producte, wie auch über weitere directe Substitutionsproducte des Azobenzols und der Azotoluole behalte ich mir vor, in einer nächsten Arbeit zu berichten.

Über die Oxydation von Essigsäure-Borneoläther.

Von **Hugo Schrötter.**

(Aus dem Laboratorium des Professors A. Lieben.)

Nach der so ziemlich allgemein angenommenen Ansicht wird durch Einwirkung von Oxydationsmitteln wie Salpetersäure und anderer, auf den Campher, die in ihm vorgebildete ringförmige Bindung an der Stelle, wo der Sauerstoff sich befindet, gesprengt, und es entstehen die bekannten Oxydationsproducte wie Camphersäure etc., in denen eine offene Kette angenommen wird. Durch Schützung des Sauerstoffes mittelst einer angelagerten Acetylgruppe und durch stark oxydirende Agentien hoffte ich zu Oxydationsproducten zu gelangen, in denen die ringförmige Bindung noch erhalten ist, und nur die etwaigen Seitenketten, die ja noch immer von den meisten Chemikern angenommen werden, angegriffen würden, hoffte also, falls dem Campher wirklich ein aromatischer Hydrokern zu Grunde liegt, endlich zu Oxycarbonsäuren des Benzols zu gelangen.

Da es bis jetzt noch nicht gelingen konnte einen Acetylcampher zu erhalten, und auch die Bildung eines solchen der eigenthümlichen Sauerstoffstellung halber wahrscheinlich gar nicht möglich ist, das Borneol hingegen, dem sonst eine gleiche Constitution zukömmt, leicht Äther bildet, entschloss ich mich, zu meinen Versuchen den Essigsäure-Borneoläther zu verwenden.

Das Borneol stellte ich nach der von Baubigny[1] angegebenen und von Kachler[2] genau detaillirten und verbesserten Methode dar. Wenn man alle Vorsichtsmassregeln einhält, und auch noch das sich gleich nach der Zersetzung mit Wasser aus-

[1] Zeitschrift für Chemie 1868; 647.
[2] Sitzber. d. kais. Akad. d. Wiss. 1878; Juliheft.

scheidende Borneol entfernt, welche Operation nur einen ganz kleinen Verlust verursacht, erhält man eine gute Ausbeute eines vollkommen campherfreien bei 199—200° schmelzenden Borneols, woraus nun der Essigäther dargestellt wurde.

Der Essigsäure-Borneoläther wurde zuerst von Baubigny[1] durch Einwirkung von Essigsäure auf ein Gemenge von Campher- und Borneolnatrium, und neuerer Zeit von Montgolfier[2] durch Behandeln von Borneol mit Essigsäureanhydrid dargestellt, und als eine dicke Flüssigkeit mit angenehmem Geruche und einem Siedepunkte von 219°—221° beschrieben. Ich versuchte die Darstellung mittelst Acetylchlorid mit gutem Erfolge, und halte auch desshalb diese Methode für die Bereitung in Grösserem für die rascheste und zweckmässigste.

Ich ging dabei folgendermassen vor. Die berechnete Menge Acetylchlorid wurde aus einem Tropftrichter auf das, in einem mit Rückflusskühler verbundenen Kölbchen befindliche trockene Borneol tropfen gelassen. Die Einwirkung geht ohne Wärmezufuhr unter lebhafter Salzsäureentwicklung ziemlich heftig vor sich; schliesslich wurde am Wasserbade bis zum Aufhören der Salzsäureentwicklung erwärmt und der gebildete Äther rectificirt. Hiebei ergab sich, dass das Acetylchlorid auf zweierlei Weise auf das Borneol einwirkt; einestheils und zwar in bedeutend grösserer Menge bildet es den Äther, andertheils wirkt es aber auch wasserentziehend und bildet so den von den Herren Kachler und Spitzer[3] entdeckten ungesättigten Kohlenwasserstoff $C_{10}H_{19}$ das Camphen. Bei dem Rectificiren theilte sich daher das gebildete Product in drei Fractionen. Die erste bestand aus Essigsäure, die zweite bei 160—180° siedende, wurde bald vollkommen fest, die dritte endlich war der gesuchte Äther. Die zweite Fraction wurde nun abgepresst, umsublimirt und roch schwach campherartig, verflüchtigte sich sehr leicht an der Luft, zeigte einen Schmelzpunkt von 58° wie auch überhaupt alle Eigenschaften des Camphens, dem wahrscheinlich etwas Borneol beigemengt war, wesshalb der Schmelzpunkt erhöht wurde. Reines Camphen

---

1 Zeitschrift für Chemie, 1866; 408 und 1868: 298.

2 Ann. Chim. Phys. [5] 14, 5.

3 Sitzber. d. kais. Akad. d. Wiss., 1879; Juliheft.

schmilzt bei 51°—52°. Auf die nähere Untersuchung der Reaction und aller sich bildenden Producte liess ich mich nicht ein, da ich dadurch theils von dem mir gestellten Ziele zu weit mich entfernt hätte, theils in das Arbeitsgebiet oben genannter Herren gerathen wäre, und will hier nur noch die mittlere Ausbeute an Äther anführen: 160 Grm. Borneol und 80 Grm. Acetylchlorid lieferten 170 Grm. reinen Essigsäure-Borneoläther von Siedepunkt 219—221. Die Oxydationsversuche selbst wurden folgendermassen ausgeführt. 10—15 Grm. reiner Äther wurden in der vierfachen Menge Eisessig gelöst, in einem mit Rückflusskühler verbundenen Kolben im Ölbade erwärmt und dazu aus einem Tropftrichter, die berechnete Menge krystallisirter Chromsäure, in einer der vorigen gleichen Menge Eisessig suspendirt, hinzutropfen gelassen. Da sich nicht die ganze Chromsäure in der Menge Eisessig löste, wurde der Rest durch die aus dem Kölbchen hinaufstreichenden Dämpfe in Lösung gebracht. Die Einwirkung ging immer erst bei einer Temperatur von 120°—140° vor sich, und war stets mit einer bedeutenden Kohlensäureentwicklung verbunden.

Da ein Versuch mit dem Mengenverhältnisse von zwei Molekülen Chromsäure auf ein Molekül Äther, also von drei wirksamen O auf das Molekül, und einer mit 12 wirksamen O auf das Molekül keine fassbaren Producte lieferte, indem im ersten Falle 80% des angewendeten Äthers unverändert blieben, der Rest aber verbrannt wurde, im zweiten Falle aber alles unter Bildung von einer sehr geringen Menge eines Gemisches mehrerer Fettsäuern zerstört wurde, will ich mich gleich zur Beschreibung der Producte wenden, die bei einem nach dem Mengenverhältnisse, von 4 Chromsäure oder 6 wirksamen O auf das Molekül Äther angestellten Oxydationsversuche resultirten.

Nachdem die Oxydation gemäss den oben angegebenen Bedingungen zu Ende geführt war, wurde die grüne Eisessiglösung in viel Wasser gegossen, wobei sich an der Oberfläche ein Öl abschied, und die ganze Flüssigkeitsmenge mit Äther gut ausgeschüttelt. Die getrennte ätherische Lösung wurde nun mit einer concentrirten Sodalösung so lange geschüttelt, als noch ein Aufschäumen bemerkbar war, dann mit Wasser gewaschen, getrocknet, und der Äther am Wasserbade abdestillirt. Die mit

Schwefelsäure angesäuerte Sodalösung gab an Äther nur ein geringe Menge einer syrupösen Säure ab, die nach langem Stehe über Kalk theilweise erstarrte, fettsäureähnlich roch und wahr scheinlich aus einem Gemenge mehrerer Säuren bestand. Da sic auch nur sehr geringe Mengen gebildet hatten, musste die Unter- suchung unterbleiben. Das nach dem Abdestilliren des Äther restirende Öl ging von 200°—270° über, und theilte sich, durc längere Zeit der fractionirten Destillation unterworfen, in dre Hauptfractionen. Die erste von 200°—215° übergehende be- stand aus Campher, die zweite von Siedepunkt 218—225° au unverändertem Äther, die dritte endlich ging bei 260°—275° über, erstarrte nach einiger Zeit grösstentheils zu einer weisse deutlich krystallinischen Masse, die zwischen Papier gepress bei 60° schmolz und fruchtähnlich roch.

Da nun mein Hauptaugenmerk auf die Darstellung diese Productes gerichtet war, will ich gleich jetzt die mittlere Aus- beute constatiren. 80 Grm. Acetborneol lieferten 10 Grm Campher, 40 Grm. unveränderten Äther und 10 Grm. des neue Productes; wenn man nun die dem Campher und dem neue Oxydationsproducte entsprechenden Mengen Äthers in Abzu bringt, wurden noch immer 20 Grm. verbrannt, während 40 Grm unverändert blieben. Die von dem krystallinischen Product ab- gesaugte Mutterlauge theilte sich nach öfterem Destilliren imme wieder in mehrere Fractionen, von denen die höchste wiede theilweise erstarrte, bis endlich nur eine sehr geringe Meng Mutterlauge zurückblieb. Die Krystalle zwischen Filtrirpapie gut abgepresst, zeigten sich als ein weisser zusammenhaftende Körper, der nicht in Wasser aber leicht in Alkohol und Äthe löslich war, und sich daraus in deutlichen prismatischen Krystalle ausschied; analysirt lieferte er auf die Formel $C_{12}H_{18}O_3$ gu stimmende Zahlen:

	Gefunden			Berechnet für $C_{12}H_{18}O_3$
C	68·67	und	68·71	68·56
H	8·33		8·39	8·56

Der Körper zeigte einen Siedepunkt bei 273·5 (corr.) und ging innerhalb drei Graden über, zeigte aber hierbei eine kleine

Zersetzung, aus welchem Grunde das Destillat auch nicht vollkommen fest wurde; scharf abgepresst schmolz es nun bei 69°. Die Bestimmung der Dampfdichte nach der von V. Meyer angegebenen Methode durch Luftverdrängung lieferte mir wegen theilweiser Zersetzung immer zu niedere Zahlen. Eine unter vermindertem Drucke im Metallbade nach einem modificirten Dumas'schen Verfahren, das von Habermann angegeben, von Sommaruga verallgemeinert und verbessert wurde, ausgeführte Bestimmung gab 6·88; berechnet 7·2.

Da die Vermuthung nahe lag, dass dieses Product noch die Acetylgruppe enthalte, wurde es durch längere Zeit mit concentrirter wässeriger Kalilauge am Rückflusskühler gekocht. Das anfangs geschmolzene Product wurde langsam fest und ging während des Siedens grösstentheils in Lösung, während sich die Lauge dunkel färbte; nach dem Abfiltriren löste sich der Rest beim Nachwaschen mit heissem Wasser. Beim Ansäuern färbte sich die kalische Lösung milchig und wurde hierauf mit Äther oftmals ausgeschüttelt. Nach dem Abdunsten des Äthers hinterblieb ein gelblicher, krystallinischer, schwach vanilleähnlich riechender Körper, der leicht sublimirte, nach einmaligem Sublimiren rein weiss war, bei 248°—249° unter theilweiser Zersetzung schmolz, sich in Wasser schwierig, leicht in Alkohol und Äther löste. Analysirt gab er auf die Formel $C_{10}H_{16}O_2$ gut stimmende Zahlen

	Gefunden	Berechnet für $C_{10}H_{16}O_2$
C	71·41	71·43
H	9·31	9·52

Er ist also aus dem ersteren durch Abspaltung der Acetylgruppe entstanden anzusehen, nach der Gleichung $C_{12}H_{18}O_3 - C_2H_2O = C_{10}H_{16}O_2$. Die Essigsäure wurde durch die Analyse des Silbersalzes (erhalten durch das Absättigen des Destillates der ausgeschüttelten Flüssigkeit mit feuchtem Silberoxyd) nachgewiesen.

Zur näheren Charakterisirung dieses Körpers wurden folgende Versuche angestellt. Das unverseifte Product wurde mit Essigsäureanhydrid sowohl am Rückflusskühler als auch im zu-

geschmolzenen Rohre auf 150° durch 6 Stunden erhitzt, wurd aber dabei nicht verändert. Das verseifte Product wurde mi Natriumamalgam sowohl in alkalischer, wie auch in sauere Lösung zusammengebracht, veränderte sich hierbei aber nicht Ferner wurde es mit einem bedeutenden Überschusse von Fünf fachchlorphosphor zusammengebracht. Gleich beim Hinzufüge war eine Einwirkung unter Salzsäureentwicklung sichtbar, au welchem Grunde stets mit Wasser gekühlt wurde, und die ganz Reaction in der Kälte verlief. Nach mehrtägigem Stehen war di ganze Masse weich und zum Theil flüssig; sie wurde nun in einen Schälchen über Wasser zerfliessen gelassen und dann unter Ver meidung jeder Erwärmung mit viel Wasser zersetzt. Da sich nu ein nicht erstarrendes an den Wänden haftendes Öl abschied wurde die ganze Flüssigkeitsmenge mit Äther ausgeschüttelt derselbe gut mit Wasser gewaschen, getrocknet, und über Paraffi und Schwefelsäure im Vacuum abdunsten gelassen. Das Chlorid stellte nun eine dunkelgefärbte dickflüssige Masse dar, die nich erstarrte, und desshalb ohne andere Reinigung analysirt werden musste. Der Chlorgehalt (bestimmt nach Carius) weist darau hin, dass sich ein Bichlorid $C_{10}H_{14}Cl_2$ (wahrscheinlich durch ClH-abspaltung aus einem Trichlorid $C_{10}H_{15}Cl_3$ dessen Bildung zu erwarten war) gebildet hat. $Cl = 33 \cdot 7\%$ gefunden, $Cl = 34 \cdot 6\%$ berechnet für $C_{10}H_{14}Cl_2$. Die ziemlich grosse Differenz ist leicht dadurch erklärlich, dass das Chlorid nicht besonders gereinigt werden konnte.

Schliesslich wurde der Körper noch mit Salpetersäure oxydirt, wobei dieselben Bedingungen wie bei der Oxydation des Camphers zu Camphersäure eingehalten wurden. Er wird von der Salpetersäure ziemlich leicht angegriffen; beim Abdestilliren der überschüssigen Säure, scheidet sich in schönen, oft verzweigten federförmigen Krystallen eine in kaltem Wasser schwer, in heissem leicht lösliche Säure ab, deren Eigenschaften genau mit denen, der von Wreden[1] und später von Kachler[2] dargestellten Camphansäure oder Oxycamphersäureanhydrid $C_{10}H_{14}O_4$ übereinstimmten. Sie gab wie diese ein schwerlösliches Bleisalz, das

[1] Ann. Chem. Pharm. 163; 333.
[2] Ann. Chem. Pharm. 162: 264.

Cadmiumsalz krystallisirte ebenfalls mit drei Molekülen Wasser, auch die Cadmiumbestimmung stimmte recht gut, sie zeigte dieselbe Krystallform und endlich auch genau denselben Schmilzpunkt (mit einer mir von Herrn Dr. Kachler gütigst überlassenen Probe obiger Säure verglichen) von 206°. Eine Analyse konnte ich leider wegen der geringen Mengen nicht ausführen.

Die Bildungsweisen wie die Reactionen dieser von mir gefundenen neuen Oxydationsproducte, gestatten mir, wie ich glaube den Schluss, dass dieselben noch als richtige Campherderivate aufzufassen sind, die durch Ersetzung von 2 H durch ein O vom Borneol deriviren. Wie nun die Campherderivate überhaupt die Neigung besitzen durch Oxydation in Campher überzugehen, in welchen der Sauerstoff eine ganz eigenthümliche Stellung hat, so glaube ich, dass auch in diesem Falle der neu eingetretene Sauerstoff eine dem Camphersauerstoff analoge Bindung besitzt, wofür hauptsächlich der Umstand spricht, dass ich nur einen Monacetyläther erhalten konnte, während, wenn beide Sauerstoffe als Hydroxylsauerstoffe enthalten wären, doch ein Diacetyläther hätte entstehen müssen. Auch der ganze Verlauf der Oxydation scheint für diese Ansicht zu sprechen, denn einestheils wird der Körper ziemlich schwer angegriffen, anderntheils einmal angegriffen, zerfällt er sehr leicht vollkommen; wie ja auch der Campher durch Chromsäure nicht zu Camphersäure oxydirt wird, sondern ein Gemenge kohlenstoffärmerer Säuren bildet. Nach dem oben Gesagten findet vielleicht auch die grosse Differenz in den Schmelzpunkten zwischen dem neuen Producte, das man vielleicht als einen Oxyisocampher bezeichnen könnte, und den isomeren Oxycamphern ihre Erklärung, von welchen mir ein von Weeler mit dem Schmelzpunkt 137°, ein von Schiff[1] mit dem Schmelzpunkt 155° und ein von Kachler und Spitzer[2] wenig untersuchter mit dem Schmelzpunkt 60° dargestellter bekannt sind, bei denen allen der ursprüngliche Camphersauerstoff erhalten ist, was eben bei meinem Product nicht zutrifft.

Wenn man nun die Resultate obiger Untersuchung zusammenfasst, so sieht man, dass die Reaction eigentlich ganz

---

[1] Berl. Ber. 13; 1404.

[2] Ann. Chem. Pharm. 200; 358.

anders verläuft als nach der, über die Constitution des Campher grösstentheils herrschenden Ansicht vorauszusehen gewesen wäre ja dass die Resultate sogar ziemlich schwierig damit in Einklang zu bringen sind. Da ich aber noch andere Oxydationsmittel au Essigsäure-Borneoläther einwirken zu lassen und dadurch die obigen Versuche zu vervollständigen beabsichtige, will ich mich mit der Anführung obiger Thatsachen begnügen und hoffe später aus den gewonnenen Resultaten sichere Schlüsse auf die Constitution des Kernes ziehen zu können, möchte mir aber durch diese Mittheilung obigen Gegenstand reservirt wissen.

Das Problem der vier Punkte im Sinne der neueren Geometrie.

Von **Wilh. Binder,**

Professor an der n. ö. Landes-Oberreal- und Maschinenschule zu Wr.-Neustadt.

(Mit 1 Tafel.)

1. Die wichtige Rolle, welche das vorgelegte Problem in der praktischen Geometrie (Geodäsie, Navigation etc.) spielt, ist Ursache, dass seit Willebrord Snellius und Pothenot, welch' letzterer im Jahre 1692 in den Memoires de l'Acad. roy. de sciences eine Auflösung zuerst bekannt machte, unter Anderem die bedeutendsten Mathematiker sich mit der Lösung dieses an und für sich elementaren Problems befassten und dadurch Anlass zu interessanten wissenschaftlichen Erörterungen genommen haben.

Seit 25 Jahren jedoch, als Herr Prof. Dr. Anton Winckler in den Sitzungsb. d. kais. Akad. d. Wissensch.[1] eine indirecte Methode für das Stationiren mit dem Messtische mittheilte, sind unseres Wissens keine neuen Auflösungen dieses berühmten Problems veröffentlicht worden, welche eine praktische Anwendung erfahren hätten. Es dürfte übrigens die Winckler'sche Methode in Betreff der Einfachheit und Sicherheit des zu erzielenden Resultates für den geübten Geometer von keiner der bekannten indirecten Methoden erreicht werden.

Von den directen Methoden der Orientirung des Messtisches aus drei Punkten ist zumeist diejenige von Bohnenberger-Bessel im Gebrauche. Dieselbe leidet aber, je nach der gegebenen Situation, an Übelständen, deren Beseitigung entweder umständlich oder unmöglich ist.

---

[1] XV. Bd., II. Heft der natur-wissensch. Classe, Jahrg. 1855.

Die vorliegende Abhandlung hat den Zweck, eine Auflösungsmethode des Pothenot'schen Problems als Messtischoperation zu zeigen,[1] bei welcher Methode die bekannten Übelstände des Bohnenberger - Bessel'schen Verfahrens zum grössten Theile vermieden werden.

2. Die Aufgabe des Stationirens oder Rückwärtseinschneidens ist gewöhnlich so gestellt, dass (Fig. 1) man aus der bekannten Position dreier Punkte A^*, B^*, C^* in der Natur, sowie derjenigen ihrer entsprechenden, auf dem Messtischblatte gegebenen Punkte A, B, C die Lage eines vierten Punktes D auf dem Tischblatte so ermitteln soll, dass derselbe jenem Punkte D^* in der Natur entspricht, über welchen man sich mit dem Messtische aufgestellt hat. Hierbei ist vorausgesetzt, dass die Lage des Punktes D, als gemeinsamer Scheitel jener Visurwinkel μ, ν, welche den Seiten AB, BC im Vierecke ($ABCD$) gegenüberliegen, gegeben ist, und dass die Ecken des Viereckes ($ABCD$) nicht auf einem Kreise liegen.

Bekanntlich gründet sich das Rückwärtseinschneiden nach Bohnenberger-Bessel auf die Lösung des Problems der vier Punkte von Tobias Mayer. Statt nun, wie dort, die den Seiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ gegenüberliegenden $\sphericalangle \mu$, ν mit ihren Scheiteln nach C und A an die Seite $AC = g$ zu übertragen, wollen wir diese Winkel so übertragen, dass dieselben allerdings die Gerade g als gemeinsamen Schenkel besitzen, die beiden anderen Schenkel der übertragenen $\sphericalangle \mu'$, ν' jedoch den Punkt B gemeinsam enthalten, und übrigens ihren Seiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, wie ursprünglich, gegenüberliegend verbleiben.

Dieses Übertragen der $\sphericalangle \mu$, ν nach μ', ν' auf dem Messtischblatte kann ähnlich, wie nach Bohnenberger-Bessel, durch Desorientirungen des Tisches ausgeführt werden, indem die Gerade g einmal nach dem Signale A^* und das andere Mal nach dem Signale C^* orientirt wird, in beiden Fällen, aber abweichend von dem Verfahren Bohnenberger-Bessel, die Rayons auf dem Tischblatte durch den Punkt B gezogen werden.

---

[1] Deren Grundzüge der Verfasser in einem in der Classensitzung der kais. Akad. d. Wiss. am 4. Nov. 1880 gehaltenen Vortrage auseinanderzusetzen Gelegenheit hatte.

Unter dieser Voraussetzung erscheint nach einem bekannten Elementarsatze der Scheitel A_1 des übertragenen $\sphericalangle \mu'$ auf einem Kreise $k^{(1)}$, welcher Kreis die Punkte A, B, und der Scheitel C_1 des übertragenen $\sphericalangle \nu'$ auf einem Kreise $k^{(2)}$, welcher die Punkte B, C enthält.

3. Die gedachten Kreise $k^{(1)}$, $k^{(2)}$, auf deren graphische Bestimmung wir jedoch a priori verzichten können, betrachten wir als Individuen eines Kreisbüschels K mit einer reellen gemeinschaftlichen Sekante o, welche demnach den Punkt B und den zu suchenden Punkt D des Problems enthält.

Dieser Kreisbüschel K wird von der Transversalen g in einem involutorischen Punktensysteme getroffen, von welchem wir zwei Paare conjugirter Punkte AA_1, CC_1 kennen, und dessen Centralpunkt O offenbar ein Bestimmungselement der Sekante $BD = o$ bildet.

Für die Ausmittlung des Centralpunktes O verwenden wir die folgende von J. Steiner[1] angegebene Linear-Construction (Fig. 2).

Man ziehe nach dem zu O conjugirten Punkte O_∞ der Geraden g eine beliebige Gerade[2] g' ($\parallel g$), wähle auf derselben willkürlich zwei Hilfspunkte M, N und verbinde dieselben mit den Punkten der Paare AA_1, CC_1; sodann suche man die Schnitte

$$(\overline{MA}, \overline{NC}) = P; \ (\overline{MC_1}, \overline{NA_1}) = Q$$

und ferners den Schnitt

$$(PQ, AC) = O.$$

Mit der Auffindung des Centralpunktes O ist die Sekante $BO = o$ des Kreisbüschels K ihrer Richtung und Lage nach unzweifelhaft bestimmt, und somit wäre dadurch für die Messtischpraxis, indem diese Gerade o als Orientirungslinie zur Ermittlung des in ihr liegenden Punktes D mittelst Seitwärtsabschneiden auf bekannte Weise benützt werden kann, das vorliegende Problem als gelöst zu betrachten.

---

[1] Vergl. Dr. H. Schröter, Theorie der Kegelschnitte, pag. 66.

[2] Das Ziehen einer solchen Geraden wird einfach mit der Parallelkante des Diopter- oder des Libellenlineals vorgenommen.

So weit würde sich das bis jetzt eingehaltene Verfahren in der Erzielung des Resultates von demjenigen Bohnenberger-Bessel nicht wesentlich unterscheiden, ausgenommen des Vortheiles, dass der nach unserem Verfahren gefundene „Hilfspunkt O“ immer auf der Fläche des Tischblattes erhalten wird.

4. Versuchen wir, die oben angeführte Steiner'sche Construction allgemeiner zu gestalten, so lässt sich dieselbe folgend präcisiren (Fig. 2):

„Legt man durch die Hilfspunkte M, N als Centra zwei Strahlensysteme, welche dem auf der Geraden g erhaltenen Punktensysteme perspectivisch sind; wählt man ein beliebiges Paar nicht conjugirter Elemente des einen Strahlensystems und sucht im anderen Systeme dasjenige Paar, dessen Elemente den perspectivisch entsprechenden Elementen des ersteren Paares conjugirt sind; ermittelt man ferner zwischen diesem Strahlenquadrupel die Schnitte jener Strahlenpaare, in welchen jedem der eine Strahl dem einen, der andere Strahl dem andern Systeme angehören und zwar derartig, dass sich immer ein Strahl mit demjenigen schneidet, welcher dem perspectivisch entsprechenden Strahle des ersteren nicht conjugirt ist; so erhält man für je ein Strahlenquadrupel ein Paar Schnittpunkte PQ, etc., deren Verbindungslinien identisch durch den Centralpunkt O des auf g befindlichen Punktensystemes gehen.“

Der Nachweis für die Richtigkeit dieser Construction ist dadurch gegeben, dass die veränderlichen Punktenpaare PQ, etc. mit dem fixen Punktenpaare MN jedesmal ein Viereck bilden, dessen je drei Gegenseitenpaare von der Geraden g identisch, in sechs Punkten einer Involution getroffen werden.

Indem das auf g befindliche Punktensystem sich aus zwei Paaren AA_1, CC_1 von conjugirten Punkten constituirt, ergibt sich für unsere Aufgabe, dass wir den Centralpunkt O nach demselben Principe auf vierfachem Wege zu ermitteln im Stande sind, wie dieses aus der Fig. 2 ersehen werden kann.

5. Die Verbindungslinien des Punktes B mit den Elementen der involutorischen Punktenreihe in g constituiren ein Strahlensystem, für welches, wenn man dessen einzelne Elemente

analog den in ihnen liegenden Punkten der Reihe g mit den gleichen kleinen Buchstaben anschreibt, die Relation gilt:

$$\frac{\sin(ao)\sin(ao_\infty)}{\sin(ac)\sin(ac_1)} = \frac{\sin(a_1 o)\sin(a_1 o_\infty)}{\sin(a_1 c)\sin(a_1 c_1)}.$$

Mit Hilfe dieses in B entstehenden Strahlensystems sind wir aber im Stande, die Orientirungslinie o ($= \overline{BD}$) ihrer Lage nach unmittelbar zu construiren; denn nehmen wir die fixen Constructionspunkte (M, N) als Durchschnittspunkte zwischen der willkürlich gewählten Geraden g'($\|g$) mit einem beliebigen der vier möglichen Paare nicht conjugirter Elemente des Strahlensystems B an, so coincidirt für jeden der vier Constructionsfälle der eine der veränderlichen Viereckspunkte PQ, etc. mit dem Centrum B, während der andere dieser Punkte in jedem Falle sich sofort als ein Bestimmungselement der Orientirungslinie o erhalten lässt.

Nach dieser Argumentation im Zusammenhange mit unserer obigen Verallgemeinerung der Steiner'schen Construction (4) finden wir demnach für jede beliebig gewählte Transversale g'($\|g$) ein Quadrupel von Bestimmungspunkten (Q^1, Q^2, Q^3, Q^4) der Orientirungslinie o, wie dies in Fig. 3 ersichtlich wird.

6. Anmerkung. Erwägen wir die zuletzt gemachten Untersuchungen unserer speciellen Aufgabe nochmals, so deduciren wir für das Allgemeine eine vereinfachte Linear-Construction, soferne es sich um die Auffindung eines zu einem gegebenen Elemente conjugirten Elementes in einem involutorischen Punkten- oder Strahlensysteme handeln wird.

Ist nämlich z. B. in einem durch zwei Paare conjugirter Elemente aa_1, bb_1 bestimmten Strahlensysteme C (Fig. 4) ein Strahl d gegeben, dessen conjugirter Strahl d_1 gesucht werden soll, so ziehe man aus einem beliebigen Punkte D des Strahles d ein Paar beliebiger Transversalen g, g'; dieselben werden bekanntlich von dem Strahlensysteme C in perspectivisch entsprechenden Punktensystemen getroffen, so dass in entsprechender Bezeichnung der Elemente die Gleichheit der Doppelverhältnisse symbolisch sich ausdrückt:

$$(ABA_1B_1) = (A'B'A'_1B'_1).$$

Man wähle nun auf der Transversalen g (oder g') eines der vier möglichen Paare von nicht conjugirten Punkten und verbinde diese beiden Punkte mit den betreffenden Punkten der Transversalen g' (oder g) nach folgendem Gesetze:

„Zu jedem der gewählten Punkte suche man auf g' (oder g) den perspectivisch entsprechenden Punkt und verbinde den dazu conjugirten Punkt mit dem anderen gewählten Punkte; der Schnitt der hiedurch erhaltenen beiden Verbindungslinien gibt einen Bestimmungspunkt Q des gesuchten Strahles d_1."

So erhält man beispielsweise für das gewählte Punktenpaar A, B:

$$(\overline{AB'_1}, \overline{BA'_1}) = Q.$$

Die Richtigkeit dieser Construction rechtfertigt sich wieder, wenn man die Geradenpaare g, g'; $\overline{AB'_1}$, $\overline{BA'_1}$ als Seiten eines vollständigen Vierseits ansieht, dessen drei Paare Gegenecken AA'_1; BB'_1; DQ mit dem sonst beliebigen Punkt C als Centrum zu einer Involution von sechs Strahlen verbunden sind.

Wird also der gefundene Punkt Q mit dem Centrum C ververbunden, so stellt diese Verbindungslinie den gesuchten zu d conjugirten Strahl d_1 vor.

Ist andererseits auf einer Geraden g ein Punktensystem durch Angabe zweier Paare conjugirter Punkte AA_1, BB_1 bestimmt, und soll zu einem beliebigen Punkte D dieses Systems der ihm conjugirte Punkt D_1 ermittelt werden, so lege man durch die gegebenen Punkte ein beliebiges Strahlensystem C und führe die Construction mit Hilfe einer aus D beliebig gezogenen Transversalen g' auf den vorigen Fall zurück, wodurch sich im Durchschnitte des gefundenen Strahles d_1 mit der Geraden g der fragliche Punkt D_1 ergibt.[1]

7. Kehren wir nach dieser Abschweifung wieder zu unserem vorgelegten Probleme zurück. Indem wir die bis nun erzielten Resultate resumiren, lassen sich dieselben für die Lösung des Pothenot'schen Problems nach unserer Methode dahin aussprechen:

---

[1] Verschiedene Fälle in der Annahme der gestellten Aufgaben sind aus den Fig. 4, 5, 6 zu entnehmen.

„Wir sind unter allen Verhältnissen im Stande, an jedem gewünschten Orte eine ganz beliebige Anzahl von sogenannten Hilfs- oder Bestimmungspunkten der Orientirungslinie des Problems directe und nur mit dem Lineale zu erzeugen, welche Vielseitigkeit anderen bis jetzt bekannten directen Auflösungsmethoden des Problems der vier Punkte nicht zukommt."

Strenge genommen unterscheidet sich unsere Methode von derjenigen Bohnenberger-Bessel, welche ja hauptsächlich in Vergleich kommt, nur durch ein Mehr von drei Constructionslinien, wie dies übersichtlich die Fig. 7 demonstrirt; dafür sind aber die Vortheile unseres Verfahrens, soferne es sich um die Erzielung eines directen Resultates handelt, so wesentliche, dass es unschwer fallen dürfte, welche von beiden Methoden in der Praxis vorzuziehen sein dürfte.

Lange Zeit war man darüber im Zweifel, ob nicht die Excentricität oder auch die Parallaxe des Messtisches, insbesondere in Folge der mitunter nöthigen grösseren Desorientirungen des Messtisches nach der Bohnenberger-Bessel'schen und also auch nach unserer Methode, auf die Genauigkeit des graphischen Resultates von Einfluss seien; doch haben andere Autoren,[1] sowie auch unsere eigene praktische Erfahrung diesen Einwand als nichtig erwiesen.

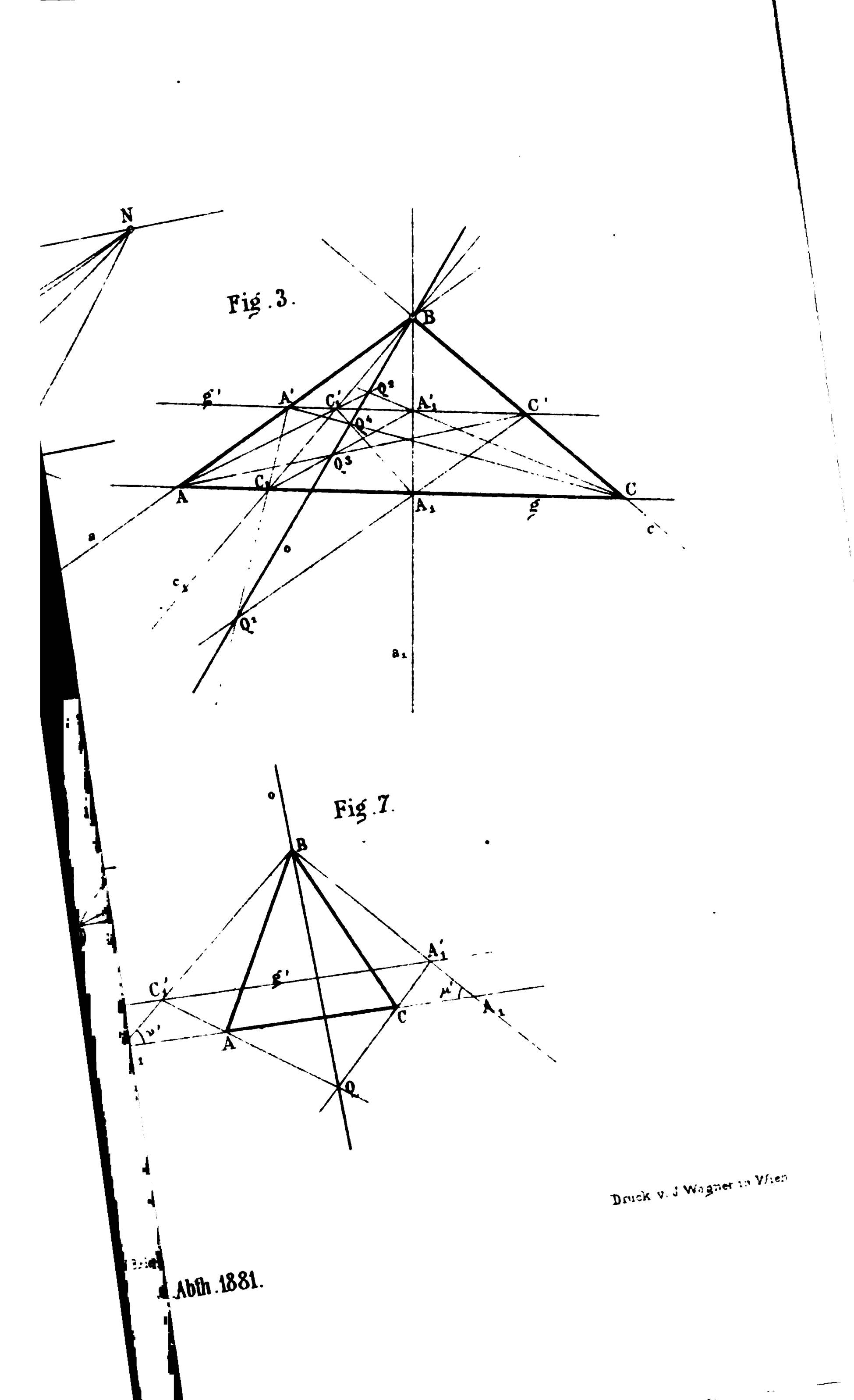
Nichtsdestoweniger leidet jede directe Methode des Stationirens an dem Nachtheile, dass bei Ausserachtlassung der graphischen Präcision, oder auch zuweilen in Folge von unvermeidlichen Fehlerquellen, welche in den Unvollkommenheiten des Tischapparates beruhen, sich statt des gewünschten Problempunktes ein sogenanntes Fehlerdreieck ergibt. Nach unserer Methode kann ein solches Fehlerdreieck offenbar nur minimal ausfallen, und in diesem Falle bleibt in Rücksicht der Zeitersparniss nichts anderes übrig, als eine der indirecten Methoden zur Auffindung des Problempunktes zu benützen.

Hierzu eignet sich, wie schon Eingangs bemerkt wurde, ihrer Einfachheit sowie des Umstandes halber, als dieselbe ihrer

[1] Vergl. hierüber J. Höltschl „D. Pothenot'sche Problem". Weimar 1868.

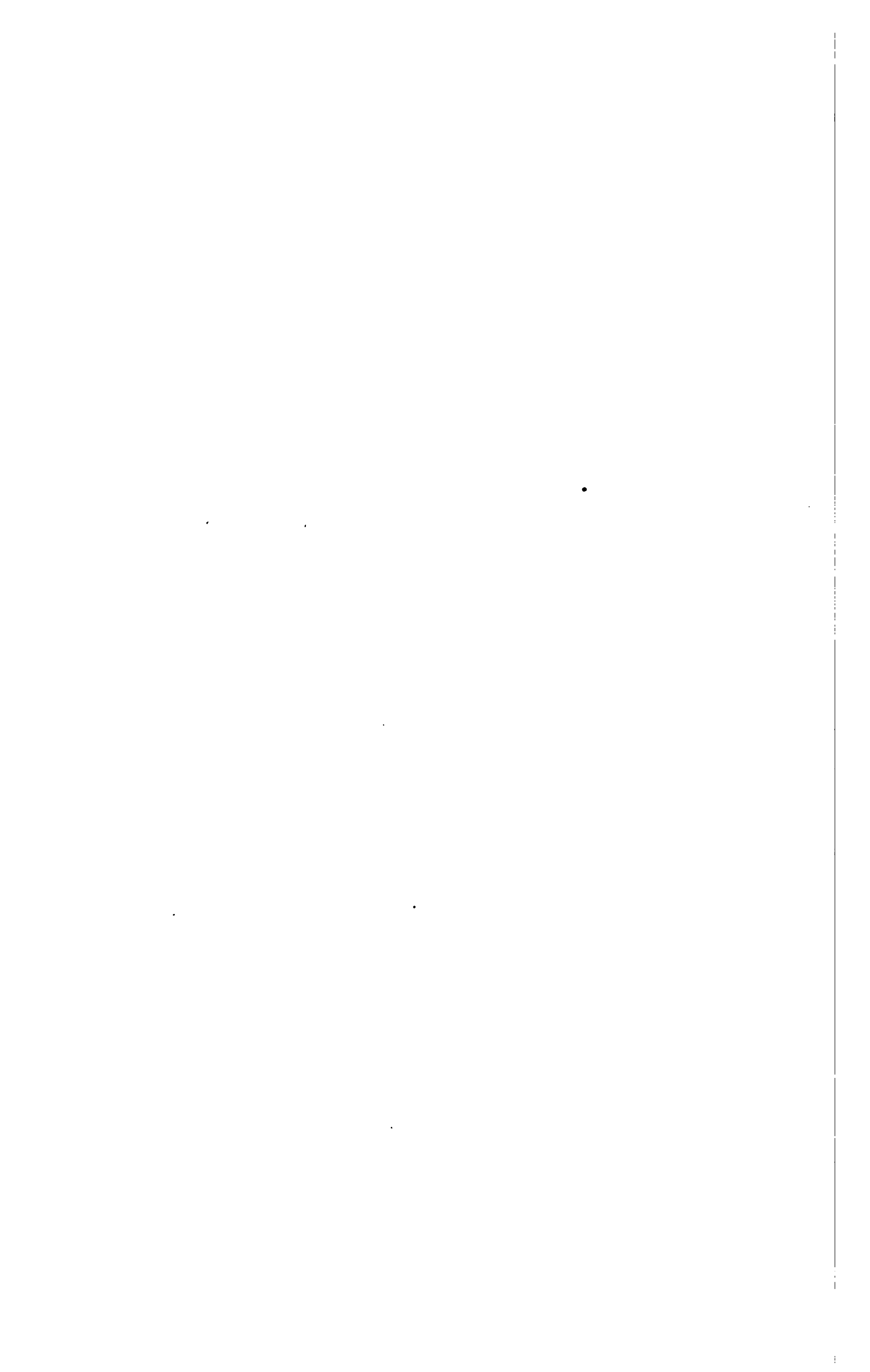
graphischen Durchführbarkeit wegen, der Erzeugung k
Fehlerdreiecke bedarf, keine Methode so verwendbar, als di
Prof. A. Winckler angegebene, indem sie sicherer und sch
zum Ziele führt, als irgend eine der bekannten indirecten Met
des sogenannten Rückwärtseinschneidens.

Zum Schlusse möge es berechtigt erscheinen, wen
darauf hinweisen, dass mit der gegenwärtigen Abhandlun
Pothenot'sche Problem, soweit uns Kenntniss der diesfä
Literatur geworden ist, zum ersten Male vom Standpunkt
synthetischen Geometrie einer Lösung unterzogen wurde, u
gleichzeitig die Fruchtbarkeit dieser Wissenschaft als ein
Beispiel für die Lösung vieler Probleme der graphischen D
plinen vor Augen geführt wird.



Druck v. J. Wagner in Wien

Abth. 1881.



IX. SITZUNG VOM 31. MÄRZ 1881.

Das w. M. Herr Director Dr. Hann überreicht im Namen des Herrn Dr. H. Wild, Directors des physikalischen Central-Observatoriums und Mitgliedes der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in St. Petersburg, dessen Werk: „Die Temperaturverhältnisse des Russischen Reiches."

Das c. M. Herr Prof. L. Pfaundler übersendet eine Abhandlung des Herrn Gymnasialprofessors Dr. F. Hočevar in Innsbruck: „Über einige Versuche mit einer Holtz'schen Influenzmaschine".

Das w. M. Herr Prof. Linnemann übersendet eine im Prager Universitätslaboratorium ausgeführte Arbeit des Herrn Dr. Heinr. Goldschmidt: „Über die Einwirkung von molecularem Silber auf die Kohlenstoffchloride."

Das c. M. Herr Prof. E. Weyr übersendet eine Abhandlung des Herrn Karl Bobek in Prag: „Über metrische Beziehungen, die in einer Congruenz linearer Complexe stattfinden."

Herr Prof. Dr. Rich. Maly in Graz übersendet eine in seinem Laboratorium von dem Assistenten Herrn Rudolf Andreasch ausgeführte Arbeit: „Synthese der methylirten Parabansäuren, der Methylthioparabansäure und des Thiocholestrophans."

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlung vor:

„Ein Beitrag zur Theorie der Maxima und Minima von Functionen", von Herrn F. Haluschka, suppl. Lehrer an der II. deutschen Staatsrealschule in Prag.

Das w. M. Herr Director Dr. Steindachner überreicht eine Abhandlung, welche den Titel führt: „Ornithologische Resultate der Reisen des Dr. Emil Holub in Süd-Afrika, bearbeitet von den Herren Dr. Emil Holub und Custos August v. Pelzeln.

Das w. M. Herr Prof. v. Barth überreicht eine in seinem Laboratorium von Herrn Albert Cobenzl ausgeführte Arbeit: „Beitrag zur Trennung des Wolframs von Antimon, Arsen und Eisen nebst Analyse eines sogenannten Pseudometeoriten."

Das w. M. Herr Hofrath v. Hochstetter überreicht eine Arbeit des Herrn Dr. Aristides Brezina: „Über die Orientirung der Schnittflächen an Eisenmeteoriten mittelst der Widmannstädten'schen Figuren."

Das w. M. Herr Prof. v. Lang überreicht eine Abhandlung: „Über die Dispersion des Aragonits nach arbiträrer Richtung."

Das w. M. Herr Prof. Ad. Lieben überreicht:

1. Eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit: „Untersuchungen über Borneolkohlensäure und Campherkohlensäure", von den Herren J. Kachler und F. V. Spitzer.
2. Eine im Laboratorium der technischen Hochschule des Herrn Prof. Zulkowsky in Brünn ausgeführte Untersuchung: „Über die Sulfochromite" von Herrn Max Gröger.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Académie de Médecine: Bulletin. 2e série, tome X, 45e année. Nos. 10 & 11. Paris, 1881; 8°.

Archiv der Mathematik und Physik. LXVI. Theil, 1. & . Heft. Leipzig, 1880—81; 8°.

Chemiker-Zeitung: Central-Organ. Jahrgang V. Nr. 11 & 12. Cöthen, 1881; 4°.

Comité international des poids et mesures: Procès-verbaux des séances de 1880. Paris, 1881; 8°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Tome XCII, Nos. 10 & 11. Paris, 1881: 4°.

Elektrotechnischer Verein: Elektrotechnische Zeitschrift. II. Jahrgang 1881, Heft III. März Berlin; 8°.

Gesellschaft, Berliner medicinische: Verhandlungen aus dem Gesellschaftsjahre 1879/80. Band XI. Berlin, 1881; 8°.

— k. k., der Ärzte: Medicinische Jahrbücher. Jahrgang 1880. IV. Heft. Wien, 1880; 8°.

— Deutsche chemische: Berichte. XIV. Jahrgang. Nr. 4. Berlin, 1881; 8°.

Gesellschaft. königl. bayer. botan. in Regensburg: Flora. oder allgemeine botanische Zeitung. N. R. XXXVIII. Jahrgang, oder der ganzen Reihe. LXIII. Jahrgang 1880. Regensburg; 8°.

Journal für praktische Chemie. N. F. Band 23. 5. & 6. Heft. Leipzig, 1881; 8°

Mittheilungen aus J. Perthes' geographischer Anstalt, von Dr. A. Petermann. XXVII. Band, 1881. III. Gotha; 4°.

Nature. Vol. XXIII. Nr. 594. London, 1881; 8°.

Santiago de Chile: Anales de la Universidad. 1ª Seccion. Memorias cientificas i literarias. Entrega correspondiente al mes de enero 1878—junio di 1879. Santiago de Chile, 1878/79; 8°.

— — 2ª seccion. Entrega corrrespondiente al mes de enero 1878 — junio de 1879. Santiago de Chile, 1878/79; 8°.

— — Revista médica de Chile. Año VII. Nos 1. i 2., 3. i 4., 5. & 6. Santiago de Chile, 1878; 8°.

— — Sesiones Ordinarias de la Camara de Senadores en 1878. Nr. 4. Sesiones estraordinarias en 1878. Nr. 2. gr. 4°.

— — Sesiones ordinarias de la Camara de Diputados en 1878. Nos. 1 & 2. Sesiones estraordinarias en Mayo de 1878. gr. 4°.

— — Memoria de Relaciones esteriores i de Colonizacion presentada al Congreso nacional de 1879. Santiago, 1879; 8°.

— — Memoria de Guerra i Marina presentada al congreso nacional de 1879. Santiago de Chile, 1879; 8°.

— — Memoria del Ministro de Justicia, Culto e Instruccion publica presentada al congreso nacional de 1879. Santiago, 1879; 8°.

— — Memoria de Ministro del Interior presentada al congreso nacional de 1879. Santiago, 1879; 8°.

— — Memoria del Ministro de Hacienda presentada al congreso nacional de 1879. Santiago, 1879; 8°.

— — Anuario hidrografico de la Marina de Chile. Año V. Santiago, 1879; 8°.

— — Anuario estadistico correspondiente a los años de 1876 i 1877. Tomo XIX. Santiago de Chile, 1878; Folio.

— — Estadistica agricola correspondiente a los años de 1877 i 1878. Santiago de Chile, 1879; Folio.

Santiago de Chile: **Estadistica bibliografica de la Literatura chilena. Tomo segundo. Santiago de Chile, 1879; Folio.**

— — **Cuenta jeneral de las Entradas i Gastos fiscales en 1878.** Santiago de Chile, 1879. gr. 4°.

— — **Jeografia nautica i Derrotero de las costas del Peru. Entrega 1 —3ª.** Santiago, 1879; 8°.

— — **Anuario de la Oficina central meteorolójica. Años quinto i sesto, correspondiente a 1873—74. Santiago, 1879; 8°.**

— — **Mineralojia por Ignacio Domeyko, 3. Edicion. Santiago, 1879; 8°.**

— — **Lei de Presupuestos de los Gastos jenerales de la Administracion publica de Chile para el año de 1879.** Santiago de Chile, 1879; 4°.

— — **Noticias sobre las Provincias del Litoral correspondiente al Departamento de Lima i de la Provincia constitucional del Callao.** Santiago, 1879; 8°.

— — Noticias de los Departamentos de Tacna, Moquegua i Arequipa i algo sobre la Hoya del lago Titicaca. Santiago de Chile, 1879; 8°

— — Noticias del Departamento litoral de Tarapacá i sus Recursos. Santiago, 1879; 8°.

— — Lei de Contribucion sobre los Haberes i Decreto reglamentando su ejecucion. Santiago, 1879; 8°.

— — Proyecto de Codigo rural par la republica de Chile. Santiago, 1878; 8°.

— — Tarifa de Avalúos que deberá rejir en las Aduanas de la Republica de Chile desde el 11 de enero del año 1879. Valparaiso, 1878 4°

Society the American geographical: **Bulletin. 1880. Nr. 2. New York 1880; 8°.**

Vereeniging, koninklijke natuurkundige: **Natuurkundig Tijdschrift voor Nederlandsch-Indië: Deel XXXIX. Zevende serie. Deel IX. Batavia s'Gravenhage, 1880: 8°.**

Verein. militär-wissenschaftlicher in Wien: **Organ. XXII. Band 2. u. 3. Heft. Wien, 1881; 8°.**

— naturwissenschaftlicher von Neu-Vorpommern und Rügen in Greifswald: **Mittheilungen. XII. Jahrgang. Berlin, 1880 8°.**

Über die Dispersion des Aragonits nach arbiträrer Richtung.

Von dem w. M. **Viktor v. Lang.**

I.

Ich habe vor einiger Zeit[1] ein horizontales Goniometer mit zwei concentrischen Axen beschrieben: die innere trägt Nonius und Prismentisch, die äussere Kreis und Fernrohr. Die Collimatorspalte ist fest mit dem Massif des Instrumentes verbunden. Unter anderen Vortheilen, die dieses Goniometer bietet, ist auch der, dass man damit leicht den Lichtstrahl senkrecht auf die erste Prismenfläche einfallen lassen kann. Ist nämlich R die Ablesung bei Beobachtung des von der ersten Prismenfläche reflectirten Bildes, S aber die Ablesung bei directer Anvisirung der Spalte, so braucht man das Prisma nur, um den Winkel $90° + \frac{1}{2}(R-S)$ zu drehen, um die gesuchte Stellung zu erhalten. Bei dieser Stellung wird der Lichtstrahl an der ersten Prismenfläche nicht gebrochen und seine farbigen Bestandtheile haben auch im Prisma alle eine gemeinsame Wellennormale.

Dies gestattet die Dispersion des Lichtes nach einer beliebigen Richtung eines doppelbrechenden Krystalles zu untersuchen. Ich habe einen derartigen Versuch an einem Aragonitprisma ausgeführt, dessen eine Seite senkrecht zum Prisma (110) von 63° 50' ist, während die andere Seite in der Zone (110·001) gegen die erste um beiläufig 30° geneigt ist. Letztere Fläche wurde nun zur Einfallsfläche gemacht, und Sonnenlicht senkrecht darauf fallen gelassen. Das Licht durchsetzt dann den Aragonit in einer

[1] Phil. Mag. Ser. 5, v. 7 (1879), pag. 136.

ganz allgemeinen Richtung und gibt beim Austritte aus demselben natürlich zwei Spectren, deren Dispersionsverhältnisse eben studirt werden sollten.

Eine Schwierigkeit bestand in der Politur der Flächen des Prisma. Von dem einen Optiker erhielt ich zwar das Prisma sehr schön polirt aber mit convexen Flächen, der andere schlief wohl die Flächen eben, konnte sie aber nur höchst mangelhaft poliren. Zuletzt macht ich mich selbst daran, das Prisma mit Hilfe einer äusserst schwach matten Glastafel in den gewünschten Zustand zu bringen. Im Ganzen ging dies auch ziemlich gut, nur würde die Herstellung der höchsten Politur noch längere Ausdauer erfordert haben. Die Folge war, dass ich die Linie *H* nicht mehr mit Sicherheit beobachten konnte und mich auf die Bestimmung der Linien *a*—*G* beschränken musste.

II.

Bestimmung des brechenden Winkels. Da im gegenwärtigen Falle der Prismenwinkel von der Temperatur abhängig ist, so wurden zuerst Bestimmungen desselben bei verschiedenen Temperaturen unternommen, um spätere Beobachtungen auf dieselbe Temperatur reduciren zu können. Die späteren Beobachtungen wurden jedoch erst angestellt, nachdem das Prisma von neuem geschliffen worden war, wodurch sich sein Winkel um ein Geringes änderte. Diese Änderung ist jedoch auf die kleine Temperaturcorrection ohne Einfluss und die gefundene Correction kann ohne weiters auf die Beobachtungen des definitiven Winkels angewandt werden.

Folgendes sind die Mittel aus je drei Beobachtungen:

Datum	*t*	*A* beobachtet
1881 I. 8	15·4° C.	30° 35′ 27″
9	17·6	46
10	18·7	56
11	20·2	36 10.

Werden diese Beobachtungen als lineare Function der Temperatur mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate berechnet, so findet man

$$A = 30^\circ\ 33'\ 8'' + 9''.t$$

und hieraus

t	A berechnet	Beob. Rechn.
15·4° C.	30° 35′ 26·6″	—0·4″
17·6	46·4	+0·4
18·7	56·3	+0·3
20·2	9·8	—0·2.

Die Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung ist also ganz befriedigend.

Zur Bestimmung des definitiven brechenden Winkels wurden folgende Beobachtungen angestellt, welche nach der vorhergehenden Formel auf die Temperatur von 17·5° C. reducirt wurden:

Datum	t	A	17·5° C.
1881 II. 15	17·1° C.	30° 28′ 57″	30° 28′ 61′
15	17·1	46	50
17	16·8	57	63
17	16·7	57	64
21	19·0	29 13	59·5
21	17·7	28 59	57
21	17·0	54	49·5
		Mittel...	30° 28′ 58″.

Nahezu denselben Mittelwerth erhält man aber auch, wenn man aus den unreducirten Beobachtungen für t und A das Mittel nimmt, wie wir dies bei Bestimmung der Ablenkung zu thun gezwungen sind.

III.

Bestimmung der Ablenkung. Die Bestimmung der Ablenkung für die verschiedenen Fraunhofer'schen Linien wurde in zwei Theile getheilt. Zuerst wurden nur die Unterschiede der Ablenkungen gegen die Linie D bestimmt, und dann erst der absolute Werth der Ablenkung für diese Linie ermittelt. Da das Prisma doch nicht ganz vollkommen war, so war es nämlich bei Beobachtung des Spectrum wünschenswerth, das Beobachtungsfernrohr ganz wenig zu verstellen um die grösste Schärfe der Linien zu erzielen. Nachdem aber das Fernrohr etwas verstellt war, konnte es nicht mehr zur Bestimmung des absoluten Werthes

der Ablenkung dienen. Dieser konnte aber mit unverstelltem Fernrohre und mit Hilfe der Natriumflamme unabhängig von der Sonne zu beliebiger Zeit ermittelt werden.

Bei den nachfolgenden Beobachtungen über die Disposition wurde also die erste Prismenseite nach angegebener Methode senkrecht zum einfallenden Lichtstrahle gestellt. Die folgenden Zahlen sind Mittel aus je zwei Beobachtungsreihen, indem das Spectrum einmal von rother Erde her, dann umgekehrt durchgemessen wurde.

Langsamere Welle:

	1881. II. 15	II. 21	II. 23	Mittel
	17·0° C.	17·8	17·7	17·5
a	−21′ 9″	21′ 7″	21′ 3″	−21′ 6″
B	17 11	17 7	17 2	17 7
C	12 26	12 17	12 26	12 23
D	0 0	0 0	0 0	0 0
E	+16 5	15 57	16 4	+16 2
F	20 10	29 56	30 4	30 3
G	57 0	56 56	56 43	56 53.

Schnellere Welle:

	1881. II. 15	II. 21	II. 23	Mittel
	17·1° C.	17·8	17·7	17·5
a	−17′ 33″	17′ 24″	17′ 34″	−17′ 20″
B	14 20	14 18	14 8	14 15
C	10 25	10 11	10 20	10 19
D	0 0	0 0	0 0	0 0
E	+13 13	13 23	13 15	13 17
F	25 3	25 2	24 51	24 59
G	47 2	47 8	46 59	46 3.

Für die absoluten Werthe der Ablenkung der Linie *D* wurde gefunden:

	t	langsamere W.	schnellere W.
1881. II. 17	17·0° C.	28° 1′ 31″	26° 0′ 43″
17	16·8	1 40	1 3
21	19·0	0 33	0 7
21	17·1	1 36	1 7
Mittel	17·5	28° 1′ 20″	26° 0′ 45″

IV.

Berechnung des Brechungsquotienten. Aus den vorhergehenden Beobachtungen erhält man nun für die Ablenkungen Δ der einzelnen Linien und für die daraus folgenden Werthe der Brechungsquotienten n:

Langsamere Welle

	Δ_1	n_1
a	27° 40′ 14″	1·674573
B	44 13	675751
C	48 57	677179
D	28 1 20	680900
E	17 22	685684
F	31 23	689833
G	58 13	697709

Schnellere Welle

	Δ_2	n_2
a	25° 43′ 15″	1·638189
B	46 30	639225
C	50 26	640477
D	26 0 45	643750
E	14 2	647942
F	25 44	651614
G	57 46 48	658177

Es war mir nun im Anschlusse an frühere Rechnungen [1] von Interesse zu sehen, wie weit auch in diesem allgemeinen Falle die Cauchy'sche Dispersionsformel mit Beibehaltung dreier Glieder die Beobachtungen darzustellen im Stande wäre. Zur Berechnung verwandte ich wieder die von Ditscheiner gegebenen Werthe, nur für die Linie a, welche derselbe leider nicht beobachtete, benutzte ich die von van der Willigen gegebene Zahl 0·718957 μ. Die Berechnung der Formel

$$n = a + \frac{b}{\lambda^2} + \frac{c}{\lambda^4}$$

[1] Sitzb. d. Wiener Akad., Bd. LXXXII (1880), S. 174.

mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate ergab nun folgende Werthe der Constante

	langsamere	schnellere Welle
a	1·6617717	1·6265169
b	0·006583450	0·006102143
c	0·00001665230	— 0·00004039780.

Rechnet man mit diesen Constanten die Brechungsquotienten zurück, so erhält man folgende Differenzen zwischen Beobachtung und Rechnung (B—R), wobei dieselben in Einheiten der sechsten Dezimale ausgedrückt sind:

	langsamere	schnellere Welle
a	+ 2·6	+18·0
B	—27·6	—24·7
C	+29·8	+ 7·9
D	+40.5	+ 3·4
E	+ 4·7	—12·4
F	—84·3	+ 8·2
G	+34·6	— 0·6.

Die Uebereinstimmung ist den vorstehenden Zahlen zufolge von derselben Art, wie ich sie bei der Berechnung der Beobachtungen Fraunhofer's am Flintglase Nr. 23 und am destillirten Wasser gefunden habe.

Über Disgregation der Elektroden durch positive Elektricität und die Erklärung der Lichtenberg'schen Figuren.

Von Edmund Reitlinger und Friedrich Wächter.

(Mit 11 Holzschnitten.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 17. März 1881.)

§. 1. In einer von uns im vorigen Jahre ausgeführten Untersuchung über die Ursachen der Entstehung der Priestley'schen Ringe und deren Ablenkung durch den Magnet wurden wir zur Erkenntniss eines Artunterschiedes zwischen positiver und negativer Elektricität geführt, welcher uns geeignet erscheint, auch über die Entstehung und Formverschiedenheit der positiven und negativen Lichtenberg'schen Figuren Aufschluss zu geben. Derselbe bezieht sich auf eine längst bekannte Wirkung der elektrischen Funkenentladung: Die Losreissung von Elektrodentheilchen. Zufolge dieser sind Metallkugeln, zwischen welchen längere Zeit Funken übergegangen sind, mit kleinen Gruben besetzt, aus welchen sichtlich Metall fortgeschleudert worden ist. Durch die Losreissung von festen Metalltheilchen entsteht die „centrale Aufreissungsscheibe“ der elektrischen Ringfiguren, und auch die von uns mit grossem Ruhmkorff und Verstärkungsflasche erhaltenen „Aufstreuungsringe“ rühren von ihr her, wie wir Beides in unserer früheren Abhandlung „über elektrische Ringfiguren etc.“ auseinandergesetzt haben.[1] Dort ist auch mitgetheilt, dass wir für die in Rede stehende Losreissung zwar keine obere, wohl aber eine untere Druckgrenze fanden; wir beobachteten sie von 6 Atm. bis 10 Mm. Quecksilberdruck.

Während aber frühere Forscher die Auflockerung, Zerreissung und Schmelzung in der Mitte der Ringfigur als eine Wirkung des

[1] Sitzb. d. k. Akad. d. Wissensch. LXXXII. Bd., II. Abth., S. 180 u. ff. 1880.

elektrischen Stromes „gleichgiltig von welcher Richtung" ansahe haben wir am angeführten Orte den Nachweis geliefert, dass d Aufreissung in der Mitte der Figur (die Aufreissungsscheibe) ei specielle Wirkung der **positiven** Entladung aus Metall in Lu ist. Dies gilt in gleichem Masse für Losreissungsspuren a Metallplatten, wie auf Metallkugeln. In beiden Fällen gelingt d directe Nachweis, dass die Losreissung von Elektrodentheilch ausschliesslich beim Austritte positiver Elektricität erfolgt, inde man die Alternirung der Entladung berücksichtigt und ihr Einfluss eliminirt.

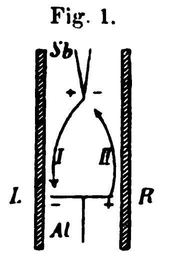
Nennen wir den Vorgang, durch welchen beim Übertritte d elektrischen Stromes aus Metall in Luft oder einen ander Isolator die Elektrodenoberfläche aufgelockert und Theilchen a ihr fortgeschleudert werden, **elektrische Disgregation**, können wir das oben erwähnte Resultat unserer Untersuchunge auch in der Weise aussprechen: Elektrische Disgregation an d Oberfläche von platten- und kugelförmigen Metallelektroden wi stets nur durch den Austritt positiver Elektricität erzeugt.

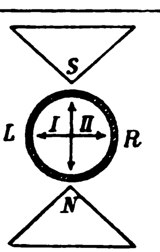
Daran schliesst sich nun die Frage: Wie es sich bei feine Metallspitzen verhält? Hier stösst man bezüglich der directe Beobachtung der elektrischen Disgregation auf Schwierigkeite Betrachtet man die Metallspitze etwa vor dem Durchgange de Funkenstromes, und nach demselben mit dem Mikroskope, s zeigt sich zwar eine nicht unwesentliche Veränderung (eine Ab rundung) der Spitze, ohne dass sich dabei aber entscheiden läss ob dieselbe durch das Abreissen von Theilchen, oder in Folg der Schmelzung durch die Hitze des Funkens bewirkt sei. Ein solche Entscheidung erhielten wir jedoch in folgender Weise Wir stellten zwischen den Polen eines grossen Elektromagnets einer Spitze aus Antimon eine Platte aus Aluminiumblech gegen über und liessen zwischen Platte und Spitze die Funken eines

[1] Der von uns benützte Elektromagnet hat einen Eisenkern von 14 Ctm Durchmesser und 170 Ctm. Länge. Das Gewicht desselben ohne die Halb anker beträgt etwas über 200 Kgr. Der Eisenkern ist mit 928 Windungen aus starkem Kupferdraht in 4 Lagen umwickelt, und wurde bei unseren Versuchen durch den Strom von 16—20 **Bunsen**'schen Elementen von 1□' Zinkfläche magnetisirt. Nur mit Hilfe dieses äusserst kräftigen Magnets vermochten wir eine Ablenkung der abgerissenen Elektrodentheilchen zu bewirken.

grossen Ruhmkorffs überschlagen. Platte und Spitze befanden sich dabei in einer Glasröhre, durch welche trockenes Wasserstoffgas strömte. Der Ruhmkorffapparat wurde durch den Strom dreier grosser Bunsen'scher Elemente inducirt und in den Schliessungskreis desselben eine Leydenerflasche von ein Quadratfuss Belegung eingeschaltet. Die Richtung des elektrischen Funkenstromes wurde senkrecht zur Verbindungslinie der beiden Pole des hufeisenförmigen Magnets gestellt. Da der Magnet, sobald er kräftig genug ist, auf sämmtliche Theile der elektrischen Entladung zwischen Platte und Spitze richtend einwirkt, so gewährt derselbe ein einfaches Mittel zur Entscheidung darüber, ob auch bei Metallspitzen die Losreissung von Elektrodentheilchen ausschliesslich durch den Austritt der positiven Elektricität bewirkt werde oder nicht. In Folge der alternirenden Entladung der Leydenerflasche bildet nämlich sowohl die Antimonspitze, als auch die Aluminiumplatte abwechselnd bald den positiven und bald den negativen Pol. Bezeichnet in nebenstehender schematischer Zeichnung (Fig. 1) *Sb* die Antimonspitze, *Al* die Aluminiumplatte, *N* den Nordpol und *S* den Südpol des Magnets, so wird Folgendes statthaben: In dem Falle, wo die Antimonspitze die positive, die Aluminiumplatte die negative Elektrode bildet, wird der elektrische Funkenstrom äquatorial in der Richtung des Pfeiles I abgelenkt werden; bei der Gegenentladung jedoch in entgegengesetzter Richtung, wie es der Pfeil II andeutet. Durch die Auswahl einer Spitze aus Antimon und einer Platte aus Aluminium lässt sich nun genau constatiren, in welcher Richtung die von der Spitze losgerissenen Metalltheilchen fortgeführt werden, denn in derjenigen Zeit, in welcher von einer Elektrode aus Antimon bereits ganz beträchtliche Quantitäten Metallstaub abgelagert werden, ist bei einer Elektrode aus Aluminium kaum eine Spur abgelagerten Metalles wahrzunehmen; überdies besitzen die Antimontheilchen eine schwarze Farbe, während die Aluminiumtheilchen weiss sind. Es sind nun folgende drei Fälle möglich: 1. Die durch den Austritt

Fig. 1.





der positiven Elektricität losgerissenen Antimontheilchen können nur äquatorial in der Richtung nach *L* abgelenkt werden; die durch den Austritt der negativen Elektricität möglicherweise losgerissenen Antimontheilchen können dagegen entweder 2. axial in der Richtung der beiden nach *N* und *S* zeigenden Pfeile oder 3. äquatorial in der Richtung nach *R* abgelenkt werden, sicherlich aber nicht in gleicher Richtung nach *L*, wie die positiven Theilchen.

Nun ergaben unsere Versuche, dass die losgerissenen Antimontheilchen ausschliesslich nur nach *L* an die Glaswand und die Aluminiumplatte abgelagert wurden, in axialer Richtung und in der Richtung von *R* war keine Spur einer Ablagerung von Theilchen bemerkbar. Wir erachten es demnach für erwiesen, dass auch bei Metallspitzen nur durch positiv elektrische Entladung feste Partikelchen der Elektrode losgerissen und fortgeführt werden.

Mag also die Form der Metallelektrode welche immer sein, so ist der Austritt positiver Elektricität aus ihr und zwar ausschliesslich dieser geeignet, eine elektrische Disgregation ihrer Oberfläche, beziehungsweise die Losreissung fester Theilchen aus derselben zu bewirken. Diese Eigenschaft positiver Entladungen bezeichneten wir in unserer früheren Abhandlung als die Ursache zweier von den vier durch uns unterschiedenen Formelementen elektrischer Ringfiguren: der Aufreissungsscheibe und der Aufstreuungsringe. Aber auch der Erklärung der Lichtenberg'schen Figuren können wir durch dieselbe eine neue und bestimmtere Fassung geben und deren Bildung dem Verständnisse näher bringen.

Der Eine von uns (Reitlinger) hat vor Jahren die Erklärung der Lichtenberg'schen Figuren zum Gegenstande seiner Untersuchungen gemacht.[1] Er führte den Nachweis, dass der elektrische Entladungsvorgang in der Luft zwischen Spitze und Platte als die eigentliche Ursache für die Ausbreitung der Figuren und deren Formverschiedenheit anzusehen sei, und indem er an dem Satze festhielt, dass die Bestäubung mit dem

[1] Sitzb. d. k. Akad. d. Wissensch. XLI. Bd., S. 358 u. ff. XLIII. Bd. S. 1—2. XLIII. Bd., S. 53 u. ff.

Villarsy'schen Gemenge die elektrische Vertheilung auf der Harzplatte sichtbar mache, wobei alle positiven Stellen gelb und alle negativen roth erscheinen, leitete er die Figuren von der Anordnung und Bewegung elektrisirter Theilchen über der Platte ab, welche in den auf der letzteren während der Entladung erzeugten Spannungen ein vermöge der isolirenden Beschaffenheit des Harzes fixirtes Abbild zurückgelassen haben. Um nun hiernach die Formverschiedenheit der positiven (gelben) Strahlenfigur und der negativen (rothen) Scheibenfigur zu erklären, dienten folgende Betrachtungen: Positiv elektrisirten Theilchen, welche sich von der Spitze entfernen, habe man einen Impuls in der Richtung ihrer Elektricitätsübertragung zuzuschreiben; indem sie in solcher Weise schief von der Spitze nach der Platte fahren, streifen sie vermöge Zerlegung ihrer Bewegung noch ein Stück an der Harzfläche, radial vom Fusspunkte der Spitze ausgehend, nach aussen fort; diese Bahnen erzeugen positiv elektrisirte Striche auf dem Harze, welche, durch Bestäubung sichtbar gemacht, die gelbe Strahlenfigur bilden. Dagegen fehle den negativ elektrisirten Theilchen ein solcher Impuls und finde die Ausbreitung der negativen Elektricität unter der Spitze in solcher Gleichförmigkeit rund um dieselbe statt, dass der Schnitt zwischen ihr und der Harzfläche eine Kreisscheibe bilde. Diese wird nachher durch Bestäubung als negative rothe Kreisscheibe sichtbar. Demnach ist die verschiedene Bewegung der elektrisirten Theilchen zwischen Spitze und Platte die Ursache für die Formverschiedenheit der beiderlei Figuren. Was nun schliesslich die nähere Bezeichnung der dabei thätigen elektrisirten Theilchen selbst betrifft, so bot sich wohl am leichtesten die Annahme dar, den Luft- oder Gastheilchen die geschilderte Rolle zuzuschreiben. In der That wurde dieselbe von dem Urheber der eben auseinandergesetzten „Erklärung der Lichtenberg'schen Figuren" ausdrücklich aufgestellt.[1]

In letzter Hinsicht wurden jedoch wir Beide durch unser gemeinsames Studium der elektrischen Ringfiguren auf eine neue Annahme hingewiesen. Hiernach würde man nur bei den negativen runden Scheiben an der Rolle der Luft- oder Gastheilchen

[1] Sitzb. d. k. Akad. d. Wissensch. XLIII. Bd., S. 541.

festhalten, dagegen bezüglich derjenigen elektrisirten Theilchen, welche nach der obigen Erläuterung die positive Strahlenfigur erzeugen, eine neue abweichende Voraussetzung aufstellen, nämlich dieselben seien Theilchen, welche durch die ausschliesslich positive elektrische Disgregation von der Spitze losgerissen und auf die Platte heruntergeschleudert werden. Man wird sich dieselben daher im Allgemeinen als fest, statt als gasförmig vorstellen. Zur Prüfung dieser Annahme dienten uns Versuche mit Lichtenberg'schen Figuren, zu denen uns eine kürzlich von W. Holtz veröffentlichte Abhandlung angeregt hat.

§. 2. In einer Mittheilung über elektrische Figuren auf der Oberfläche von Flüssigkeiten gibt W. Holtz[1] an, er habe neben Leitern aus Metall auch noch solche aus Holz angewandt und so gefunden, dass sich je nach Wahl des Leiters und Wahl der Flüssigkeit (der Ölsorte) die bekannte negative Figur auch mit positiver Elektricität und die bekannte positive Figur auch mit negativer Elektricität (wir sprechen mit Holtz' eigenen Worten) erzeugen lasse. Nach diesen Versuchen sei es ihm nahegelegen, fährt er fort, den Einfluss eines hölzernen Leiters auch bei der Darstellung der wirklichen Lichtenberg'schen Staubfiguren zu erproben und in solcher Weise sei ihm die Darstellung der negativen Figur genau so gut mit positiver, als mit negativer Elektricität gelungen. Er wandte dabei die Holzstange in Dicke eines Stahlfederhalters an und hielt sie bei Zuleitung positiver Elektricität mehr oder weniger hoch über der Harzfläche. Diese Angabe von Holtz fanden wir bei Wiederholung des Versuches mit einer staubfreien Holzstange vollständig bestätigt; je nach der Anwendung positiver und negativer Elektricität bekamen wir gelbe oder rothe Kreisscheiben ohne bemerkbare Formverschiedenheit. Wir glauben jedoch aus der so erhaltenen Kreisscheibe nicht schliessen zu dürfen, dass hier wirklich positive Elektricität eine negative Figur im Sinne einer Umkehrung des Artunterschiedes positiver und negativer Elektricität erzeuge. Eine solche Umkehrung in der vollen Bedeutung des Wortes halten wir überhaupt nicht für möglich. Dasjenige, was hier der Erklärung bedarf, ist nur der Umstand, dass eine und dieselbe

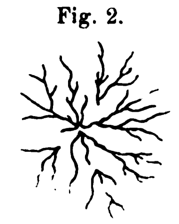
[1] Wiedemann Ann. Bd. 11, p. 717 uff., 1880.

positive Ladung je nach der Wahl des Zuleiters entweder eine Kreisscheibe oder eine Strahlenfigur bewirkt.

Um zur Erkenntniss der Ursache dieser Erscheinung zu gelangen, untersuchten wir zunächst eine Reihe von Elektroden aus den verschiedenartigsten Materialien. Die diesbezüglichen Versuche ergaben folgende Resultate:

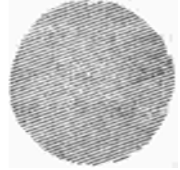
Wählt man die Elektroden aus irgend einem beliebigen Metalle, oder aus Graphit, Stein-, Retorten- und Holzkohle, oder aus Bleiglanz, Grauspiessglanz, Hämatit, Eisenvitriolkrystallen, Kreide, Marmor, Mergel oder aus Quecksilber, concentrirter Schwefelsäure, Kupfervitriollösung, Eisenvitriollösung, Kochsalzlösung und anderen Salzlösungen, destillirtem und Brunnenwasser, wässerigem und absolutem (96%) Alkohol, so erhält man bei Zuleitung positiver Elektricität stets strahlenförmige Figuren, wie Fig. 2 eine solche darstellt.

Fig. 2.



Bei Anwendung von Elektroden aus trockenem Holze, Papier, Hanf, Watte, Wolle, Bergkrystall, krystallisirtem Gyps, krystallisirtem Kochsalze, isländischem Doppelspath, Flussspath und Tropfstein, erhält man dagegen runde scheibenförmige Figuren, wie Fig. 3 zeigt.

Fig. 3.



Gar keine Figuren werden erhalten, wenn man die Zuleitung der Elektricität mittelst Elektroden aus Glas, Harz, Wachs, Talg, Kautschuk, Porzellan, Seide oder Federn versucht. Es werden somit bei Anwendung der besseren Leiter der Elektricität als Elektroden strahlenförmige, positive Figuren erzeugt, bei Halbleitern scheibenförmige, positive Figuren und bei Anwendung von Isolatoren gar keine Figuren.

Das Holz und die übrigen Halbleiter bewirken jedoch nur unter der Bedingung, scheibenförmige, positive Figuren, wenn die Oberfläche derselben vollkommen staubfrei ist. Stäbchen aus Holz, welche durch längeres Liegen im Zimmer mit Staub bedeckt, oder künstlich mit irgend einem Staube eingestäubt wurden, lieferten scheibenförmige Figuren, welche von einer grösseren

oder geringeren Anzahl radialer Strahlen durchzogen waren, wi Fig. 4 dies darstellt.

Benützte man einen Holzstab von der Form eines Feder halters, dessen nach unten, der Harzplatte zugewendete Spitz eingestäubt wurde, in rascher Folge zur Er zeugung von etwa zehn bis zwanzig positive Lichtenberg'schen Figuren, so nahm die Zah der radialen Strahlen inmitten der runde Scheibenfigur sichtlich ab, und schliesslich wenn durch die wiederholte elektrische Ent ladung sämmtlicher Staub von der Oberfläch des Holzstabes fortgetrieben war, erhielt ma wieder vollkommen gleichmässig mit Schwefelstaub bedeckte Scheibenfiguren, wie Fig. 3, ohne jede Beimischung radiale Strahlen. Als wir jedoch die Holzstange an ihrem unteren Ende mit einem feinen Metallstaube, etwa Broncepulver oder feine Eisen- oder Messingfeile bestreuten, so erhielt man genau solche Strahlenfiguren, wie bei Anwendung einer Spitze aus massivem Metalle (Fig. 2) ohne die geringste Spur einer scheibenförmigen Ausbreitung.

Fig. 4.

Diese Thatsache bestätigte unsere oben ausgesprochene Vermuthung, dass die elektrische Disgregation der Elektroden durch elektro-positive Entladung eine einfache Erklärung der Formverschiedenheit der Lichtenberg'schen positiven Strahlenfigur und der negativen Scheibenfigur darbietet. Über die Ursache der Entstehung der positiven Strahlenfigur haben wir uns nämlich auf Grund der vorstehend mitgetheilten Versuche, folgende Anschauung gebildet: Die positive Strahlenfigur entsteht dadurch, dass einzelne positiv elektrisirte Theilchen in festem oder flüssigem Aggregationszustande sich von der Spitze in der Richtung ihrer Elektricitätsübertragung entfernen, schief von der Spitze nach der Harzplatte fahren und auf derselben radial vom Fusspunkte der Spitze fortschleifen. Diese Theilchen erzeugen positiv elektrisirte Striche auf dem Harze, welche, durch Bestäubung sichtbar gemacht, die gelbe Strahlenfigur bilden.

Bestehen die jeweilig angewendeten Elektroden dabei aus schlechter leitendem Materiale, so ist zur Entstehung der strahlenförmigen Figur das Vorhandensein von staubförmigen Partikeln

auf der Oberfläche der Elektroden erforderlich. Fehlen diese Staubpartikel, so erfolgt die Elektricitätsübertragung durch die Gastheilchen zwischen Spitze und Harzplatte und es entstehen gleichförmig mit Schwefelstaub bedeckte scheibenförmige Figuren. Bei Anwendung von guten Elektricitätsleitern ist das Vorhandensein von Staub auf der Oberfläche der Elektroden unwesentlich. Die zur Erzeugung der Strahlenfigur erforderlichen Partikel werden hier in Folge der elektrischen Disgregation durch elektropositive Entladung aus dem Materiale der Elektroden selbst losgerissen, wie wir dies sowohl bei der Bildung der Aufstreuungsringe [1] als auch durch den Eingangs mitgetheilten Versuch nachgewiesen haben.

Die positive Lichtenberg'sche Strahlenfigur und die Aufstreuungsringe auf Metallplatten haben somit die gleiche Entstehungsursache, nur ist zur Bildung deutlich sichtbarer Aufstreuungsringe eine bedeutend grössere Menge losgerissener Elektrodentheilchen erforderlich, als zur Bildung der Lichtenberg'schen positiven Strahlenfigur.

Die vorstehend erörterten Versuche wurden in der Weise ausgeführt, dass die Elektroden in Form von 5 bis 20 Ctm. langen, 2 bis 5 Mm. dicken Stäbchen senkrecht in geringer Distanz über der Harzplatte angebracht waren und deren oberes Ende entweder direct mit dem Conductor der Reibungselektrisirmaschine oder mit der inneren Belegung einer Leydenerflasche oder Leydenerbatterie leitend verbunden wurde.

Zur Untersuchung flüssiger Elektroden wurden die Flüssigkeiten in weitere, am unteren Ende capillar ausgezogene Glasröhren gefüllt, welche zur Vermeidung der Leitung über die feuchte Glasoberfläche an ihrer Aussenseite mit Siegellack überzogen wurden und in deren oberes Ende durch einen Kork ein Zuleitungsdraht bis zur Berührung mit der Flüssigkeit hineingesteckt wurde. Zweckmässiger erwies sich jedoch zum Studium dieser Figuren ein anderes Verfahren. Während nämlich die früheren Figuren auf Harzplatten erzeugt wurden, verwendeten wir bei der zweiten Methode gereinigte, trockene Glastafeln. In der Mitte derselben wurde ein Tropfen der zu untersuchenden

---

[1] Sitzb. d. k. Akad. d. Wissensch. LXXXII. Bd., II. Abth., S. 211.

Flüssigkeit gebracht und von oben her mittelst eines 20 Ctm langen, 5 Mm. dicken, unten zugespitzten Holzstabes der Flüssigkeit Elektricität zugeleitet. Brachte man nun unter den Holzstab einen Tropfen Quecksilber oder concentrirte Schwefelsäure, Kupfervitriollösung, andere Salzlösungen, destillirtes oder Brunnenwasser, wässerigen oder absoluten Alkohol, so entstanden stets rings um den Tropfen herum strahlenförmige positive Figuren, wie Fig. 5 zeigt. Schwefeläther gab mitunter ausser der strahlenförmigen Figur auch Spuren einer ringförmigen, positiven Figur, doch ist es bei der Flüchtigkeit desselben sehr schwierig, deutliche Figuren zu erhalten. Die negativen Figuren stellten sich unter den gleichen Umständen stets als scheibenförmige Figuren dar, wie Fig. 6 veranschaulicht. Bei Anwendung von Benzol, Petroleum, Schwefelkohlenstoff, Terpentinöl und Olivenöl konnten keine Lichtenberg'schen Figuren, weder positive noch negative erhalten werden. Während nämlich die früher genannten besser leitenden Flüssigkeiten bei Zuleitung der Elektricität nur eine geringe Abplattung des Tropfens erkennen liessen, wurden die schlechter leitenden Flüssigkeiten durch die Elektrisirung fast momentan über die ganze Platte ausgebreitet. Dieselben zeigten dabei eine Verästelung der Flüssigkeitsschichte, welche am feinsten gegliedert bei Schwefelkohlenstoff (Fig. 7) war, am wenigsten gegliedert bei Olivenöl (Fig. 8). Noch eines merkwürdigen Umstandes müssen wir gedenken. Verwendet man möglichst gleichmässig ausgebildete Krystalle von Turmalin oder eisenschüssigem Quarz als Elektroden, deren Hauptaxe vertikal zur Harzplatte gestellt ist, so entstehen stets drei Lichtenberg'sche Figuren, in ihrer Lage den drei unteren Pyramidenflächen entsprechend. Diese drei Figuren sind jedoch in der Regel von einander verschieden, so

Fig. 5. Fig. 6.

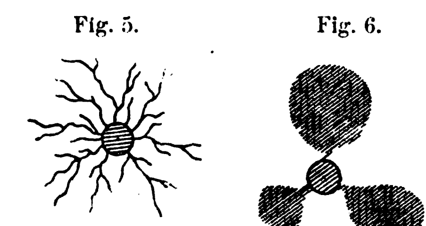


Fig. 7. Fig. 8.

dass man entweder zwei strahlenförmige und eine scheibenförmige Figur (Fig. 9), oder eine strahlenförmige und zwei scheibenförmige Figuren erhält (Fig. 10). Ähnliches zeigen auch andere Krystalle. Reiner, d. h. eisenfreier Bergkrystall und Würfel aus Kochsalz geben gleichzeitig positive und negative, also bei Villarsy'schem Gemenge gelbe und rothe Scheibenfiguren, ebenfalls der Stellung der Krystallflächen gegen die Harzplatte entsprechend. Die Erscheinungen traten jedoch, ohne dass wir die Umstände wissentlich geändert hatten, so wechselnd auf, dass wir keine Gesetzmässigkeit darin erkennen konnten.

Fig. 9.

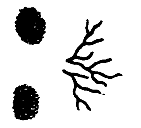
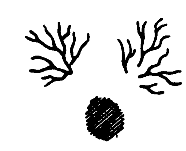


Fig. 10.



Oben sahen wir, dass je nach dem Stoffe, mittelst dessen die Elektricität zugeleitet wird, positive Ladungen eine strahlen- oder scheibenförmige Figur erzeugen. Niemals begegnen wir aber bei negativen Ladungen einer ähnlichen Erscheinung. Es ist dies sehr wichtig und tritt besonders charakteristisch bei den aus positiven und negativen Theilen gemischten Figuren hervor, wie man sie beispielsweise mit dem Ruhmkorff-Apparate erhält. In der Regel beobachtet man hier einen Wechsel zwischen negativen rothen Kreisringen und positiven gelben Strahlenkränzen. Während man aber, unter entsprechenden Umständen, auch positive gelbe Kreisringe erzeugen kann, nimmt man niemals negative rothe Strahlenkränze wahr, ja nicht einmal einen einzelnen rothen Strich, wie wir in gelben Scheibenfiguren häufig dergleichen einzelne gelbe, meistens radial gestellte Striche, gewissermassen Grundelemente einer Strahlenfigur, antreffen.

Wo und wie immer negative Elektricität an die Harzfläche übergeht, hinterlässt sie Spuren kreisförmiger Ausbreitung, während die Übertragung positiver Elektricität je nach den Umständen in radialen Strichen oder auch in kreisförmigen Scheiben und Ringen geschehen kann. Eine Umkehrung des Artunterschiedes Lichtenberg'scher Figuren, mittelst deren negative Elektricität eine Strahlenfigur gäbe, ist bis zum kleinsten Striche

oder Strahle herab unmöglich. Dies ist ein aus allen unseren Versuchen fliessendes allgemeines Resultat.

Um einem leichtmöglichen Irrthume vorzubeugen, dürfen wir aber dasselbe nicht etwa in folgender Weise ausdrücken: Eine rothe, durch Mennigepulver kenntlich gemachte Strahlenfigur sei nicht möglich. Das wäre unrichtig, denn rothe Strahlenfiguren, sogar gemischt mit gelben Scheibenfiguren, können wir allerdings bekommen, nur bedeutet dann Roth positive und Gelb negative Elektricität. Zu diesem Behufe brauchen wir nur das Villarsy'sche Gemenge aus Schwefel und Mennige statt es durch Musselin durchzubeuteln, durch eine kleine Öffnung, z. B. eine ausgezogene Glasröhre, herauszublasen. In diesem Falle werden die Schwefel- und Mennigetheilchen im entgegengesetzten Sinne elektrisirt, als bei der Reibung an Musselin. So lehrte es uns eine gelegentliche Erfahrung. Von derselben ausgehend, haben wir ein Fläschchen mit Villarsy'schem Gemenge gefüllt und dasselbe mit einem ausgezogenen Glasrohre verschlossen. In dieser Form gab es uns die positive Mischfigur eines mittelgrossen Ruhmkorff als gelbe Scheibe mit rothem Strahlenkranze. Versahen wir es nun mit einem Ansatze, der aus einer nach aussen hin von einer mehrfachen Musselinlage bedeckten Röhre bestand, so bekamen wir eine rothe Scheibe mit gelbem Strahlenkranze. In gleicher Weise erhielten wir mit ein- und derselben Ladung einer Leydenerflasche je nach Belieben eine rothe oder gelbe Strahlenfigur und desgleichen auch Scheibenfiguren. Auf diese Art hat man es ganz in der Hand, gelbe oder rothe Strahlenfiguren zu erhalten, nur sind dann letztere nicht minder positiv als erstere.

§. 3. So mannigfaltig die Stoffe auch waren, mit denen wir experimentirten, so lieferten sie uns doch nur dreierlei Staubfiguren: 1. positive strahlenförmige; 2. positive scheibenförmige; 3. negative scheibenförmige. Niemals erzeugt negative Elektricität eine strahlenförmige Figur, ja nicht einmal nur einen einzigen jener radialen Striche, woraus eine solche gebildet ist. Positive Elektricität liefert aber je nach der Wahl des Stoffes, aus dem die zur Zufuhr der Elektricität an die Harzfläche benützte Elektrode hergestellt ist, strahlen- oder scheibenförmige Figuren. Unverkennbar ist hiebei der Einfluss der Leitungsfähigkeit. Die

zehn besten Leiter in jener Reihe, in welcher die Encyclopedia metropolitana[1] die Stoffe nach ihrem Leitungsvermögen geordnet hat: „Die gebräuchlichsten Metalle, gut gebrannte Holzkohle, Graphit, concentrirte Säuren, Kohlenpulver, verdünnte Säuren, Salzlösung, Seewasser, Quellwasser, Regenwasser“ geben insgesammt Strahlenfiguren, während die Halbleiter überwiegend Scheibenfiguren liefern. Diesen Einfluss übt die Leitungsfähigkeit der Elektrode aus, indem sie bestimmend auf die Zeitdauer der Entladung einwirkt. Bezold hat schon bei Metallspitzen gefunden, dass die Entladungsdauer die Form der positiven Figuren beeinflusse; während dieselben aus vielen geradlinigen radialen Strahlen bestehen, wenn die Entladung rasch vor sich geht, zeigen sie eine geringere Zahl unregelmässig verkrümmter und ungleich langer Äste, wenn die Bildung der Figur langsam erfolgt.[2] So lange man jedoch Metallspitzen anwendet, ist die Verlangsamung der Entladung nicht im Stande, die Strahlen gänzlich verschwinden zu machen und an ihrer Stelle eine Scheibe entstehen zu lassen. Dazu ist es nothwendig, die Elektrode selbst aus einem Halbleiter statt aus einem Leiter herzustellen.

Zur Erläuterung des Einflusses, den die Entladungsdauer ausübt, erinnern wir an den Unterschied in den Wirkungen des Öffnungs- und Schliessungsstromes beim Ruhmkorffapparat. Die in Bewegung gesetzte Elektricität ist in beiden Fällen die gleiche Die viel kürzere Zeit aber, während welcher diese Elektricität sich beim Öffnungsstrome diesseits und jenseits der Unterbrechungsstelle ansammelt, gibt ihr in diesem Falle die Kraft, einen Funken mit Schlagweite zu bilden, was wohl kaum jemals ohne Fortführung von Elektrodentheilchen geschieht. Auch in unserem Falle hängt von der Entladungsdauer die Kraft ab, womit die Elektricität die an der Elektrode befindlichen Theilchen loszutrennen und als Träger der Entladung an die Platte zu führen bestrebt ist.

Ausser der Entladungsdauer dürfte noch die Oberflächenbeschaffenheit der Elektrode bestimmend darauf einwirken, ob Strahlenfigur oder Scheibe entsteht. Darauf scheint uns die

---

[1] Encyclopedia metropolitana. Lond. 1830. Electricity 72. Riess, Reibungselektricität Bd. 1, S. 28. Berlin. 1853.

[2] Pogg. Ann. Bd. 144, S. 341.

Strahlenfigur bei einigen Halbleitern hinzudeuten und noch mehr das Ergebniss unserer Versuche mit Holzspitzen, welche nur ganz staubfrei eine reine positive Scheibe, sonst aber eine solche mit einzelnen radialen Strichen und nach vorhergehender Eintauchung in Metallstaub sogar eine vollständig unvermischte Strahlenfigur liefern.

Zur unmittelbaren Erklärung aber, warum je nach den angeführten Umständen Strahlenfigur oder Scheibe sich bildet, bietet sich nur eine einzige natürliche und einfache Annahme dar, die nämlich, es entstehe die positive Strahlenfigur durch Fortschleuderung elektrisirter Stäubchen von der Elektrode zur Platte, die positive Scheibe durch Elektricitätsübertragung mittelst der zwischen Elektrode und Platte befindlichen Luft- oder Gastheilchen. Dadurch werden alle vorgedachten Versuche begreiflich und zu eben so vielen Beweisen der neuen Vorstellung. Bei Metallspitzen und unverzögerter Entladung werden die Stäubchen hinreichend starke und zahlreiche Impulse erhalten, um die Elektricität in vielen geradlinigen, radialen Bahnen an die Platte zu übertragen und eine regelmässige Strahlenfigur zu bilden. Die Verlangsamung der Entladung z. B. durch Einschaltung eines feuchten Leiters zwischen Elektricitätsquelle und Spitze vermindert den Impuls an die Stäubchen, wesshalb dieselben leichter von ihren Bahnen abgedrängt und abgelenkt werden, wodurch sich die von Bezold in diesem Falle beobachteten, verkrümmten und ungleich langen Strahlen erklären. Dass nur die positive Elektricität eine Strahlenfigur bildet, hat zur Ursache, dass auch Partikelchen nur durch positive Elektricität aus der Oberfläche der Elektroden losgerissen werden. Doch wollen wir damit Stäubchen nicht ausschliessen, welche an den Elektroden haften und durch die Elektricität an die Platte, dort strahlenbildend, geführt werden. Bei leitenden Flüssigkeiten sind die elektrisirten Partikelchen, welche über die Platte in radialen Bahnen hinstreifend die Strahlenfigur erzeugen, sehr feine Tröpfchen, meistens von unwahrnehmbarer Kleinheit. Doch bemerkten wir oftmals Feuchtigkeitsspuren in strahlenförmiger Ausbreitung, welche beim Bestäuben mit Villarsy'schem Gemenge gelbe radiale Striche und Strahlenfiguren bildeten. Alle diese Fortführungen von Partikelchen im Sinne der Entladung vom Zuleiter

zur Platte, wodurch auf letzterer Strahlenfiguren erzeugt werden, werden nur durch positive Elektricität bewirkt und schliessen sich darin der elektrischen Disgregation an.

Wenn aber bei der Anwendung von Elektroden aus Halbleitern, statt aus Leitern, eine positive Scheibe an die Stelle der positiven Strahlenfigur tritt, so lässt sich auch dies nach der angenommenen Vorstellung über die Entstehung der letzteren unschwer begreifen. In Folge des verminderten Leitungsvermögens der Elektrode und der dadurch bewirkten Verlangsamung der Entladung fehlt den elektrischen Impulsen die Kraft, Partikelchen von der Elektrode abzutrennen und zu Trägern der Entladung zu machen. Solche Partikelchen sind es aber, welche die einzelnen Strahlen und damit auch die Strahlenfigur erzeugen. Nach ihrem Wegfall bleibt auch für die positive Elektricität nur mehr die Übertragung durch die Luft- oder Gastheilchen übrig, wie sie bei der negativen Elektricität jederzeit und ausschliesslich statt hat. Wenn also bei den Halbleitern: Holz, Wolle, Tropfstein etc. eine scheibenförmige positive Figur entsteht, so ist dies dadurch bedingt, dass die elektrischen Impulse zu schwach sind, um Partikelchen von der Elektrode loszutrennen, aber stark genug, um eine merkbare Quantität Elektricität von der Elektrode an die Platte zu überführen. Bei den Isolatoren fällt auch das Letztere und damit jede Figur weg.

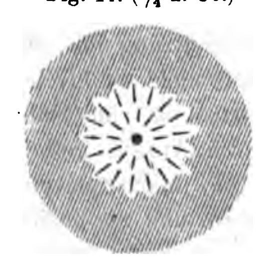
Schon im §. 2 wiesen wir auf die Unterstützung hin, die unsere Vorstellung dadurch erhält, dass bei einer nicht staubfreien Holzstange eine gemischte Figur eigener Art entsteht, eine gelbe Scheibe mit einer grösseren oder geringeren Anzahl gelber, radialer Striche, welche durch eine stärkere Lage Schwefel sichtbar werden, eine Figur, die also zwar ganz und gar positiv ist, aber zum Theile strahlen- und zum Theile scheibenförmig; die Scheiben werden wir von der Gasentladung, die Strahlen von der Entladung durch Staubpartikelchen ableiten.

Zur Bestätigung unserer Vorstellung dienen ferner Beobachtungen an Figuren, welche man unter dem Recipienten der Luftpumpe mittelst eines zuleitenden Metallstabes bei verschiedenen Verdünnungsgraden erzeugt. Hier bekömmt man bei positiver Elektricität zunächst die Strahlenfigur, welche sich mit wachsender Verdünnung immer mehr vergrössert, bekanntlich im

Verhältnisse der Verdünnung; zugleich bemerkt man aber bei der Bestäubung im Centrum, je mehr man verdünnt, umsomehr eine gelbe scheibenförmige Figurenbildung, wohl von der sich mit der Abnahme des Druckes immer mehr entwickelnden Gasentladung herrührend. Endlich gelangt man zu einem Verdünnungsgrade (20—60 Mm. Quecksilberhöhe), bei dem keine Strahlenfigur mehr entsteht, und nun bemerkt man zuweilen einen gelben Kreisring, den man kaum anders als durch Gasentladung erklären kann. Die Bedingungen für die Bildung dieses Ringes vermochten wir bisher nicht genau festzustellen.

Dass Gasentladung auch bei Metallspitzen keine Strahlen zu erzeugen im Stande ist, wird aber noch unmittelbarer durch folgenden Versuch erwiesen. Wir durchbohrten unsere Harzkuchen derart in der Mitte, dass eine kleine Stelle der Metallform blank gelegt wurde. Die Metallform wurde dann mit dem negativen Pole des Ruhmkorffs, die in einer Entfernung von 10—20 Mm. über der durchbohrten Harzplatte befindliche Metallelektrode mit dem positiven Pole verbunden, so dass ein continuirlicher Funkenstrom durch die Mitte des Harzkuchens ging. Der grosse Ruhmkorff wurde dabei durch fünf Bunsen'sche Elemente von einem Quadratfuss Zinkfläche angeregt und entwickelte eine bedeutende Aureole. Bestäubten wir nachher die Platte, so bekamen wir die nebenstehend abgebildete Figur (Fig. 11). Man nimmt an ihr zwei positive Strahlenkränze und einen positiven (gelben) Kreisring wahr. Wir hatten denselben als eine Wirkung der reich entwickelten Aureole erwartet und schreiben ihn daher derselben zu, um so mehr, da der Ring durch Wegblasen der Aureole excentrisch wird. Andererseits werden wir aber die gleichzeitig auftretenden Strahlenkränze, wie überhaupt die sonst bei Metallspitzen so regelmässig erzeugten Strahlenfiguren als eine Wirkung elektrisirter, von der Elektrode zur Platte im Sinne des Entladungsstromes übergeführter Stäubchen betrachten.

Fig. 11. (1/4 n. Gr.)



Sehen kann man allerdings diese Stäubchen auf der Harzplatte nicht. Man bedenke jedoch, welchen Zustand höchst feiner

Vertheilung, der bei den Aufstreuungsringen heruntergeführte Metallstaub besitzt und wie relativ wenige solcher Stäubchen zur reichsten Strahlenfigur genügen. Ebensowenig wird man aber erwarten, den Gewichtsverlust der Spitzen in Folge der Losreissung von Theilchen durch Wägungen nachweisen zu können, nachdem dies schon bei den Aufstreuungsringen Schwierigkeiten bereitet und kein Zweifel obwaltet, dass zur Bildung von Aufstreuungsringen ohne Vergleich grössere Mengen losgerissener Elektrodentheilchen erforderlich sind, als zur Bildung der positiven Lichtenberg'schen Strahlenfigur.

Bekanntlich besitzen die Lichtenberg'schen Figuren die Eigenschaft, dass ihre Bestandtheile, je nachdem sie positiv oder negativ sind, bei der Bestäubung die gelbe oder rothe Farbe annehmen. Indem man also stets nur gelbe Strahlenfiguren und nie rothe bekömmt und selbst der einzelne radiale Strich stets nur gelb und niemals roth ist, wird von den Partikelchen selbst, von den Stäubchen oder Tröpfchen, welche Strahlen erzeugen, bis zum einzelnen Partikelchen herab der Nachweis geliefert, dass ausschliesslich die positive Entladung solche Theilchen von der Elektrode abtrennt und zur Platte führt. Mittelst Analogieschlusses dient dies auch zur Bestätigung des ausschliesslich positiven Charakters der bei den Ringfiguren beobachteten Losreissung und elektrischen Disgregation.

Dagegen ist die elektro-negative Entladung aus Metall oder einem anderen Leiter in Luft weder im Stande eine elektrische Disgregation der Elektrode, noch eine Fortführung von Staubtheilchen zu bewirken und vermag daher auch keine strahlenförmige Staubfigur zu erzeugen. Bei Bildung von Lichtenberg'schen Figuren findet die Entladung von negativer Elektricität ausschliesslich als Gasentladung statt.

Wir glauben somit zur Erklärung der Formverschiedenheit der Lichtenberg'schen Figuren den Satz aussprechen zu können:

Die positive Lichtenberg'sche Strahlenfigur wird durch einzelne von der Elektrode losgerissene oder fortgeführte Staubpartikel erzeugt, die positive, sowie die negative Scheibenfigur werden dagegen durch Gasentladungen hervorgebracht.

NACHSCHRIFT.

Von **Edmund Reitlinger.**

In der im Eingange von §. 2 der vorstehenden Abhandlung citirten Mittheilung hat Herr W. Holtz elektrische Figuren auf Ölen beschrieben und abgebildet. In dieser Beziehung sehe ich mich zu einer Prioritätsreclamation genöthigt. Schon im Jahre 1862 habe ich unter Assistenz des Herrn Luka Zerjau Lichtenberg'sche Figuren auf Ölen dargestellt und eine Mittheilung darüber der von mir und Franz Kraus in den Sitzungsberichten der k. Akademie der Wissenschaften veröffentlichten Abhandlung „über Brande's elektro-chemische Untersuchungen" anmerkungsweise beigefügt (Sitzb. d. k. Akad. d. Wissensch. XLVI. Bd., S. 374). Daselbst heisst es: „Man erhält Lichtenberg'sche Figuren auf Ölen durch Entladung positiver oder negativer Elektricität von einer Spitze gegen die in einer kleinen Entfernung befindliche Oberfläche des Öles. Man bekömmt sodann unter der positiven Spitze eine sternförmige Figur, gebildet durch Wellenberge, welche unter der Spitze zusammenstossen. Unter der negativen Spitze erhält man Wellenzüge, die in concentrischen Kreisen die Spitze umschliessen. Die Wellenrichtungen der ersten und zweiten Figur stehen auf einander senkrecht." Ich glaube nun nicht zu irren, dass vorstehende Schilderung die von Herrn Holtz abgebildeten und beschriebenen beiden Ölfiguren (vergl. Wiedemann Annalen Bd. XI, S. 717), welche Herr Luka Zerjau und ich schon damals beobachtet haben, auch für dritte Personen unverkennbar darstellt. Dagegen ist, so weit mein Wissen reicht, Herr W. Holtz der Erste, welcher sich sowohl bei Ölfiguren als gewöhnlichen Staubfiguren hölzerner Zuleiter bedient hat.

Versuche, welche im Texte der oben citirten Abhandlung mitgetheilt sind (Sitzb. d. k. Akad. d. Wissensch. XLVI. Bd., S. 376—378), geben mir noch zu einer ferneren Prioritätsreclamation Herrn Holtz gegenüber Anlass, zu der ich mich im eigenen und im Interesse des Mitverfassers jener Abhandlung

des Herrn Franz Kraus, gezwungen sehe. Herr Holtz beschreibt in Pogg. Ann. Ergänzungsband VII, 1876, S. 490 u. f. eine Reihe von Versuchen über polar-elektrische Attraction suspendirter Körperchen in isolirenden Flüssigkeiten, von denen er sagt, er müsse sie „soweit seine Ermittlungen reichen", für neu halten. Solche Versuche haben aber ich und mein Mitarbeiter schon 1862 mit Korkfeilicht, Kohlenpulver und Schwefelblume angestellt; während die suspendirten Theilchen der zwei ersten Stoffe sich am negativen Pole ablagerten, thaten dies die Schwefeltheilchen am positiven Pole. Auch wir bedienten uns wie Holtz im Unterschiede zu Quincke weiter offener Gefässe, nur mussten wir uns auf die Reibzeugmaschine beschränken, da uns 1862 die Influenzmaschine noch nicht zu Gebote stand. Der Erfolg ist aber, wie Holtz selbst bemerkt, bei der Anwendung isolirender Flüssigkeiten von diesem Umstande unabhängig. Auch die Figuren zwischen den Polen, welche den magnetischen Curven gleichen, bemerkten wir schon und gebrauchten denselben Vergleich. Wenn aber Herr Holtz das „Ankleben" der Theilchen an den Polen besonders betont, so wollten wir mit dem Ausdrucke „Überzug" der Pole offenbar dieselbe Erscheinung bezeichnen, was um so unverkennbarer ist, als es eine von uns ersonnene Theorie der elektrolytischen Ausscheidung an den Polen war, was uns zu den Experimenten führte, deren Erfolg in der später gefundenen Weise wir im voraus vermuthet hatten. Die Ablagerung der Schwefeltheilchen am positiven und der Kork- oder Kohlentheilchen am negativen Pole, wie sie am angeführten Orte bereits 1862 beschrieben ist, und Jahre später, wenn auch davon unabhängig, von Herrn Holtz beobachtet wurde, betrachte ich als elektrische Fundamentalerscheinung und schreibe ihr für die Erklärung der Elektrolyse eine grundlegende Bedeutung zu; nach meiner Ansicht stellt sie nämlich den elektrischen Vorgang bei der elektrolytischen Ausscheidung dar, losgelöst vom chemischen Processe. Daher lege ich Werth darauf, die Erscheinung schon im Jahre 1862 mit meinem Mitarbeiter aufgesucht und gefunden zu haben.

Strahlende Elektrodenmaterie.

Von Dr. J. Puluj.

III. Abhandlung.

(Mit 6 Holzschnitten.)

(Ausgeführt im physikalischen Cabinete der Wiener Universität.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 17. März 1881.)

Phosphorescenzerscheinungen.

In meiner zweiten Abhandlung[1] habe ich einen Versuch mi einer cylindrischen Glasröhre beschrieben, in welcher ein einseiti mit Kreide überzogenes Glimmerblättchen mit seiner blanke Seite einer schalenförmigen Kathode aus Aluminium zugekeh war und ungefähr im Vereinigungspunkte der Kathodenstrahle stand. Beim Durchgange des Stromes zeigte der Kreideüberzug a der Vereinigungsstelle der Kathodenstrahlen eine sehr lebhaft Phosphorescenz. Der Phosphorescenzfleck änderte seine Stelle wenn die Strahlen mittelst eines Magnets abgelenkt wurden Kathode und Anode waren auf derselben Seite des Glimmer blättchens. Aus diesem Versuche wurde gefolgert, dass die Phos phorescenz auf der Rückseite des Glimmerblättchens durch di Kathodenstrahlen, welche die Vorderseite treffen, verursacht wird

Da der Phosphorescenzfleck keine regelmässige runde Form hatte, so vermuthete ich, dass die Phosphorescenz theilweise auch durch die zerstreuten und von den Wänden reflectirten Elektroden theilchen erzeugt werde. Um diese Erscheinung genauer zu studiren construirte ich einen grösseren Apparat von der Form, wie sie di Zeichnung (Fig. 1, S. 698) zeigt.

Das Glimmerblättchen in der Mitte der Kugel, ungefähr 4 Ctm. lang und 3 Ctm. breit, war an der von der schalenförmigen

[1] Sitzungsberichte der Wiener Akademie Bd. 83, pag. 402.

Elektrode abgewendeten Seite mit Kreide überzogen. Wird zuerst die ebene Elektrode als Kathode verwendet, so wird das Glimmerblättchen von den Strahlen direct getroffen und leuchtet mit einem sehr lebhaften orangefarbigen Phosphorescenzlichte. Nach Unterbrechung des Stromes dauert noch einige Zeit ein schwaches Leuchten der Kreide. Wird aber nachher die schalenförmige Elektrode als Kathode benützt, so zeigt der Kreideüberzug zuerst einen sehr hellen Phosphorescenzfleck, aus dem nach einigen Secunden sich ein Lichtring bildet, der immer grösser und grösser wird. Wenn nach abermaliger Unterbrechung des Stromes dieselbe Kathode benützt wird, so entsteht kein Phosphorescenzfleck mehr, die Erscheinung zeigt sich aber wieder, wenn der Kreideüberzug zuerst direct bestrahlt wird.

Die Erklärung dieser Erscheinung bietet keine Schwierigkeit. Die Kathodenstrahlen, welche die blanke Seite des Blättchens treffen, veranlassen nur indirect das Phosphoresciren der Kreideschichte, indem sie das Blättchen erwärmen. Die Wärme regt die Phosphorescenz von Neuem an, und indem die Wärme von dem Brennpunkte im Glimmerblättchen sich nach allen Richtungen ausbreitet, werden immer grössere Kreise zu leuchten anfangen. Dieses Leuchten in Folge der Erwärmung dauert jedoch nur eine bestimmte Zeit, und es beginnt desshalb das Auslöschen zuerst im Brennpunkte. Der Phosphorescenzfleck bricht auf und bildet einen leuchtenden Ring, der an seiner äusseren Peripherie zu-, und an der inneren abnimmt.

Bei einer hohen Verdünnung und einem starken Inductionsstrome zeigt das Glimmerblättchen, wenn der Phosphorescenzring vollständig auslöscht, einen kleinen, runden und hellen Fleck. Ich vermuthe, dass derselbe dadurch entsteht, dass die zerstreuten Elektrodentheilchen eine äusserst schwache Phosphorescenz erzeugen, welche nur durch eine sehr starke Erwärmung sichtbar gemacht werden kann und daher nur im Brennpunkte erscheint.

Auch unterliegt es keinem Zweifel, dass der grosse unregelmässige Phosphorescenzfleck, der im ersten Apparate zu sehen war, durch die Elektrodentheilchen, welche von der gegenüberliegenden gekrümmten Wandfläche reflectirt oder zerstreut wurden, entstand.

Dieser Apparat zeigt in einer eleganten Weise nicht bloss d
Eigenschaft der selbstleuchtenden Körper, dass sie durch Erwärm
wieder zur Phosphorescenz angeregt werden können, wenn
zuerst durch directe Bestrahlung selbstleuchtend gemacht wurd
nach abermaligem Erwärmen aber dunkel bleiben, sondern au
die Geschwindigkeit demonstriren, mit der die Wärme in irge
einem Blättchen sich fortpflanzt. Bei zweiaxigen Krystallblättch
müsste man ovale Ringe bekommen.

Es soll hier noch ein Versuch über die Phosphorescenz b
schrieben werden, der mit einem Glasgefässe von nebenstehend
Form angestellt wurde.

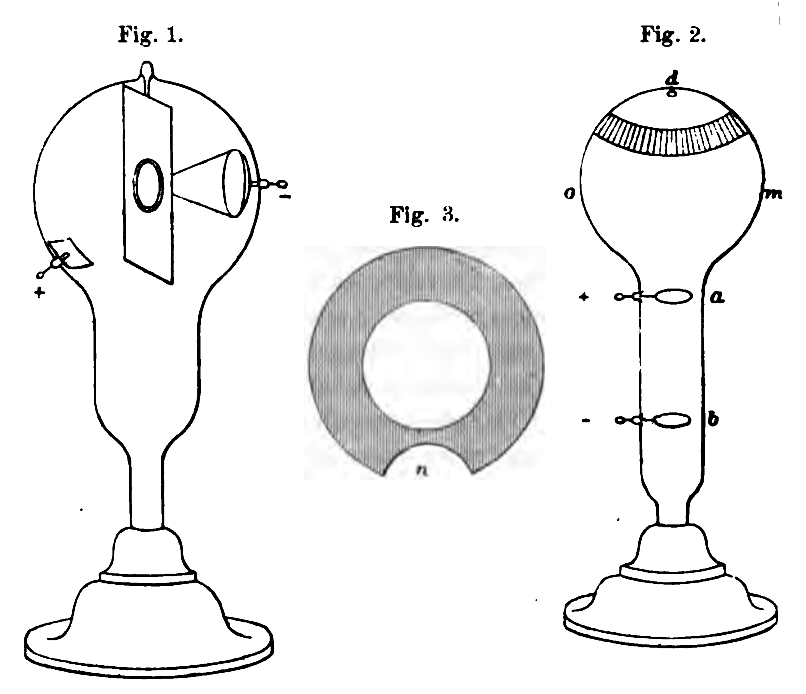


Fig. 1. Fig. 2. Fig. 3.

Bei *d* wurde ein Diamantsplitter mittelst Gummi angeklebt. Die Anode *a* diente gleichzeitig als schattengebender Körper. Die zwischen Anode und Glaswand hindurchgehenden Strahlen erzeugten auf der Kugel einen hell phosphorescirenden Ring, in dessen Mittelpunkte, im Schatten der Anode, auch der Diamantsplitter leuchtete, offenbar in Folge der von den Kathodenstrahlen seitwärts zerstreuten Elektrodentheilchen.

Wurde die Wand bei *m* mit dem Finger berührt, so leuchtete an der berührten Stelle die innere Glaswand mit rothbraunem Phosphorescenzlichte, während die gerade gegenüberliegende Wand bei *o* einen grünen Phosphorescenzfleck zeigte, welcher zweifellos auf die Weise entsteht, dass die berührte Stelle ebenso wie eine Kathode Elektrodentheilchen aussendet, welche die Staubtheilchen an der Berührungsstelle und die gegenüberliegende Wand zur Phosphorescenz bringen. An der Ausgangsstelle phosphoresciren nur die leichter erregbaren Staubtheilchen. Bei der äussersten Verdünnung, wenn die Entladung bereits schwächer geworden ist, sieht man an der berührten Stelle, an der äusseren Wand, rings um den Finger auch eine schwache grüne Phosphorescenz. Diese Erscheinung liefert einen schönen Beweis dafür, dass die Kathodenstrahlen sich gegenseitig kreuzen können.

Bei Berührung der Glaswand in der Nähe der Anode *a* zeigte der Phosphorescenzring an der Kugel eine halbkreisförmige Einbiegung *n*, wie sie aus Fig. 3 zu ersehen ist.

Wurde die Glaswand etwas jenseits der Anode berührt, so zeigten sich zwei, oft auch mehrere ungleiche Einbiegungen, welche nach meiner Ansicht auf die Weise zu erklären sind, dass die die Kathodenstrahlen aussendende Berührungsstelle die Strahlen der Kathode *b* ablenkt. Diese Ablenkung der Kathodenstrahlen durch den Finger oder irgend einen Leiter beobachtet man, wenn auch viel schwächer, wenn man die Glaswand an irgend einer Stelle zwischen *d* und *b* berührt.

Diese Abstossung der Kathodenstrahlen scheint mir verwandt zu sein mit jener, welche Professor Reitlinger und v. Urbanitzky am Büschellichte beobachtet haben.

Bewegungserscheinungen.

Meine Untersuchungen der Bewegungserscheinungen an einem von Crookes construirten elektrischen Radiometer führten zu einem sehr merkwürdigen Resultate, dass bei einer gewissen Verdünnung die beweglichen Kathoden und die losgerissenen Kathodentheilchen sich in derselben Richtung bewegen. Über diese Erscheinung habe ich mir eine gewisse Ansicht gebildet und dieselbe

in meiner ersten Abhandlung ausgesprochen. Um diese Ansicht z
prüfen, habe ich weitere Versuche in dieser Richtung angestell
deren Resultate hier mitgetheilt werden sollen. Zum leichtere
Verständnisse des Nachfolgenden erlaube ich mir zuerst das Wesent
liche von jenen Resultaten vorauszuschicken, zu denen mein
früheren Untersuchungen führten.

Die ebenen Aluminiumblättchen eines vierarmigen auf eine
Spitze beweglichen Flügelrades waren einseitig mit Glimme
belegt. Wurde das Flügelrädchen mit dem negativen Pole eine
Inductionsapparates verbunden, so rotirte dasselbe bei einer Ve
dünnung von ungefähr 0·2 Mm. Quecksilberdruck mit der Glim
merseite vorwärts, während bei einem Drucke von 0·04 Mm.
wenn die Glaswände lebhaft phosphoresciren, die Drehung umge
kehrt nach der Aluminiumseite, also in der Bewegungsrichtung
der losgerissenen Kathodentheilchen, erfolgte.

Wurde im letzten Falle der Strom nach einiger Zeit unter
brochen, so blieb das Rädchen nach mehreren Umdrehungen stehe
und kehrte nachher seine Bewegungsrichtung um.

Für diese Bewegungserscheinungen habe ich folgende Er
klärung gegeben:

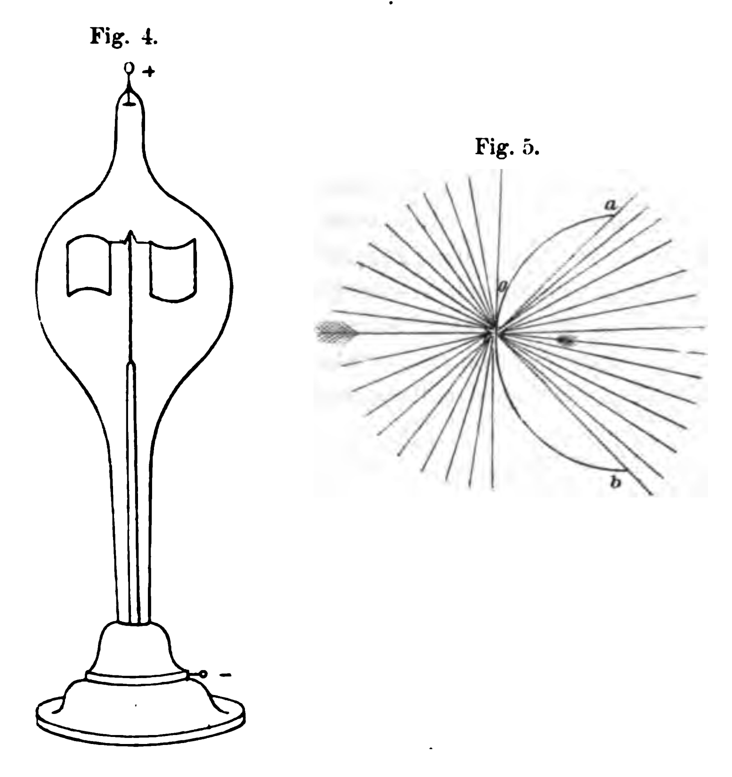
Aus der Thatsache, dass losgerissene Kathodentheilchen und
die beweglichen Kathoden sich nach derselben Richtung be
wegen, folgt zunächst, dass der elektrische Strom für diese
Bewegung keine innere, sondern äussere Kraft ist, welche die
losgerissenen Theilchen und die Flügel ebenso nach derselben
Richtung treibt, wie ein Luftstrom, der durch eine mit bestaubten
Baumwolle gefüllte Röhre geht, sowohl Staubtheilchen als ganze
Ballen Wolle in der Stromrichtung mitführt. Der elektrische Strom,
der ein Ätherstrom sein dürfte, bringt eine doppelte Wirkung in
den beweglichen Flügeln hervor. Erstens: er erwärmt die Aluminiumseiten, und zweitens: er leistet Arbeit, indem er von den
Flügeln einzelne Theilchen losreisst und die Flügel selbst in Bewegung setzt. Diese Bewegung erfolgt nach der Aluminiumseite,
während aus der Reaction der Gastheilchen an der stärker erwärmten Aluminiumseite eine Kraft resultirt, welche das Rädchen
nach der Glimmerseite zu treiben sucht. Diese Reaction findet
hauptsächlich während jedesmaliger Unterbrechung des Stromes
statt.

Die Wärmewirkung und die ihr entgegengesetzte Wirkung des elektrischen Stromes können entweder einander das Gleichgewicht halten, oder sich gegenseitig überwinden. Beim grösseren Drucke überwindet die Wärmewirkung des Stromes. Dreht sich das Rädchen eine Zeit lang nach der Aluminiumseite und wird dann der Strom unterbrochen, so bleibt nur die Wärmewirkung übrig, von welcher das Flügelrädchen umkehrt und nach der Glimmerseite rotirt.

Um diese Ansicht über die Bewegungserscheinungen zu prüfen, habe ich neue elektrische Radiometer construirt. Ein solches stellt die nebenstehende Zeichnung dar, Fig. 4. Das Flügelpaar aus halbcylindrischem Aluminiumbleche ist mittelst eines Messinghütchens an einer Stahlspitze beweglich angebracht, welche letztere mit dem in die Glaswand eingeschmolzenen Platindrahte in Verbindung steht und als Kathode verwendet wird. Die Anode befindet sich oberhalb des Flügelrädchens in einem engen Röhrenstück.

Fig. 4.

Fig. 5.



An diesem Radiometer wurden folgende Bewegungserschei nungen beobachtet:

1. Beim vollen Athmosphärendrucke drehte sich das Flügel paar mit der concaven Seite vorwärts und zwar unabhängi davon, ob man dasselbe als Anode oder Kathode verwendete Wurde das birnförmige Glasgefäss mit der Handfläche umfasst jedoch nicht berührt, so drehte sich das Flügelpaar äussers schnell mit der convexen Seite vorwärts und noch schnelle bei Berührung.

2. Bei einem Drucke von ungefähr 620 Mm. fand die erst Umkehrung der Flügel statt, und sie drehten sich mit der con vexen Seite vorwärts. Die Geschwindigkeit der Bewegung nahı bei weiterer Verdünnung anfangs zu und dann ab, bis di Rotation endlich aufhörte, wenn zwischen dem Metallhütche und der Anode ein Lichtstreifen erschien. Bei ungefähr 390 Mn drehte sich das Rädchen so schnell, dass man die Flügel nich unterscheiden konnte. Die Bewegung war etwas rascher, wen das Flügelpaar als Kathode, und langsamer, wenn es als Anod verwendet wurde. Bei ungefähr 140 Mm. hörte die Bewegung au

3. Bei einem Drucke von ungefähr 0·5 Mm. fand eine zweit Umkehrung statt, wenn das Flügelpaar als Kathode diente, un das vom Glimmlichte umhüllte Rädchen drehte sich mit der con caven Seite vorwärts. Bei weiterer Verdünnung nahm di Geschwindigkeit der Bewegung anfangs zu und dann ab. Bei un gefähr 0·04 Mm. Druck wurde die Bewegung äusserst lebha und bei 0·02 Mm. bedeutend langsamer. Oft konnten die Reibungs widerstände an der Spitze nicht überwunden werden, und musst daher beim Beginn der Bewegung durch schwaches Klopfe nachgeholfen werden.

Bei dieser Verdünnung wurde noch folgender Versuch ange stellt. Ich liess den Strom 30—60 Secunden lang durch da Radiometer sich entladen, bis die Flügel anfingen sich nach de concaven Seite zu bewegen. Wurde nun der Strom unterbrochen so drehte sich der Flügel ziemlich rasch, ungefähr zweimal in einer Secunde, und machte gegen 130 Umdrehungen; dieser Ver such wurde oft mit gleichem Erfolge wiederholt. Bei weiterer Ver dünnung war die Zahl der Umdrehungen nach Unterbrechung des Stromes immer kleiner.

4. Bei einer noch grösseren Verdünnung von ungefähr 0·01 Mm., wenn die Glaswände lebhaft phosphoresziren, findet eine dritte Umkehrung der Bewegungsrichtung statt. Das Flügelpaar dreht sich noch einmal mit der convexen Seite vorwärts. Die Entladungen finden hauptsächlich nur an den Rändern der Aluminiumblättchen statt, und daher erscheinen an den Wänden sehr viele Lichtfiguren, die mit den Flügeln rotiren. Da ausserdem die Entladungen intermittirend erfolgen, so treffen sie während der Bewegung der Flügel verschiedene Stellen der Glaswand, und das Auge sieht sie gleichzeitig, wegen der längeren Dauer des Lichteindruckes. Das Glasgefäss zeigt ein sehr schönes Spiel herumflackender Lichtfiguren. Die Phosphorescenz der Glaswände ist etwas lebhafter und die Rotation der Flügel schneller, wenn in die Zuleitungsdrähte eine Luftstrecke eingeschaltet wird.

Wird bei diesem Verdünnungsgrade das Gefäss oberhalb des Flügelrädchens nahe an dem Ansatzröhrchen mit einem feuchten Finger berührt oder auch nur angehaucht, so verschwindet für einige Zeit die Entladung und die Phosphorescenzerscheinung. Die Entladungen erfolgen offenbar nur an der Aussenseite des Gefässes so lange die Glaswand feucht ist. Das Befeuchten des Gefässes unterhalb des Flugrädchens bringt nicht diese Wirkung hervor.

Ich will an dieser Stelle von allen Bewegungserscheinungen zuerst den dritten Fall erklären, wo das Flugrädchen bei 0·02 Mm. Quecksilberdruck nach Unterbrechung des Inductionsstromes sich nach der concaven Seite dreht. Hier ist offenbar die Wärmewirkung des Stromes allein die Ursache der rotirenden Bewegung.

Wir wollen nun sehen, wie aus einer gleichmässigen Erwärmung eines halbcylindrisch gewickelten Aluminiumblättchens eine Bewegung nach der concaven Seite entstehen kann. In nebenstehender Zeichnung soll *aob* den Querschnitt eines solchen Flügels bedeuten. An dem gleichmässig erwärmten Blättchen werden die von den beiden Seiten heranfliegenden Moleküle mit grösserer Geschwindigkeit zurückprallen und aus ihrer Reaction gegen das Blättchen werden zwei normal gegen dasselbe gerichtete entgegengesetzte Druckkräfte resultiren. Der Einfachheit halber, betrachten wir ein kleines Flächenelement bei *o* am Scheitel des Flügels. An der concaven Seite werden nur jene Moleküle auf das Flächenelement zurückwirken, welche nach allen Richtungen,

die innerhalb der Öffnung *ab* liegen, zurückprallen. Die übrige
Moleküle werden die von dem Flächenelemente erhaltene B
wegungsgrösse irgendwo an der concaven Seite des Blättche
abgeben. Es wird sich, so zu sagen, ein Theil der bewegten Mol
küle an der concaven Seite fangen und gelangt nicht zur Wirkun
Es wird daher die Resultirende sämmtlicher Reactionskräfte a
das Flächenelement an der convexen Seite, wie aus der Zeichnun
zu ersehen ist, grösser sein müssen als an der concaven Seit
und das Blättchen wird daher mit der concaven Seite sich vo
wärts bewegen. Ein derartiges Flugrädchen, dessen Temperat
höher als die der Umgebung ist, bewegt sich somit in derselbe
Richtung, wie unter der Wirkung der Lichtstrahlen, die ja auc
grösstentheils in Wärme der metallischen Flügel verwandelt werde
Die theilweise reflectirten Lichtstrahlen vereinigen sich i
einer Brennlinie und erhöhen daselbst die Temperatur. Das kälte
Gas strömmt über die convexe Seite gegen die Brennlinie un
nimmt den Flügel mit in Folge der Reibung, die bei dieser Ve
dünnung kaum dreimal kleiner ist als beim Athmosphärendruck
Die in Wärme umgewandelten und reflectirten Lichtstrahlen wirke
in demselben Sinne.

Ein bestrahltes oder erwärmtes Rädchen mit concave
Flügeln bewegt sich somit nach der concaven Seite. Wir
dagegen das Glasgefäss erwärmt, etwa auf die Weise, dass ma
dasselbe in eine warme Luft stellt, so geschieht die Bewegun
entgegengesetzt nach der convexen Richtung.

Nach dieser Überlegung stellte ich mir die Frage, ob un
wie sich ein von der Spitze mittelst eines Glashütchens isolirte
gleichgeformtes Flügelpaar bewegen wird. Wäre die obig
Ansicht von der bewegenden Wirkung des Inductionsstrome
richtig, so müsste das Flügelpaar jetzt in Ruhe bleiben, weil di
Entladungen nur aus der Metallspitze ausgehen.

Das Experiment hat jedoch diese Folgerung nicht bestätigt
Das Flügelpaar drehte sich erst bei äusserster Verdünnung, wenn
die Glaswände lebhaft phosphoresciren, mit der convexen
Seite vorwärts. Nach Unterbrechung des Stromes erfolgte eine
Rotation in entgegengesetzter Richtung.

Da bekanntlich das Glas die Inductionsströme noch ziemlich
gut leitet, so war die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, dass auch

die Flügel sich entladen. Ich habe daher ein Flügelpaar aus halbcylindrisch gewickelten Glimmerblättchen construirt und dieselben mittelst eines Glashütchens von der Nadelspitze isolirt. Auch dieses Flugrädchen zeigte bei äusserster Verdünnung eine Bewegung nach der convexen Seite und rotirte in umgekehrter Richtung, wenn der Strom unterbrochen wurde.

Aus diesem Versuche glaube ich mit Sicherheit schliessen zu dürfen, dass die Bewegung des Flügelrädchens durch die Elektrodentheilchen indirect veranlasst wird. Die Theilchen erwärmen die Glaswand und erst die von der Wand in das Innere des Gefässes heftiger zurückprallenden Gastheilchen erzeugen wie in einem gewöhnlichen Radiometer mit halbcylindrischen Flügeln die Bewegung nach der convexen Seite.

Dauert der Versuch längere Zeit, so werden auch die Flügel nach und nach erwärmt und rotiren nach Unterbrechung des Stromes wegen der schnelleren Abkühlung der Glaswand nach der concaven Seite.

Es sei hier noch bemerkt, dass beide Flügelrädchen aus Aluminium und Glimmer, bei ungefähr 400 Mm. Druck ebenfalls nach der convexen Seite rotirten, höchst wahrscheinlich in Folge schwacher Entladungen an den Spitzen der Flügel, sich somit als gewöhnliche Flugrädchen verhielten. Bei anderen Verdünnungen der Luft blieben die Rädchen indifferent, oder ihre Bewegung erfolgte sowohl nach der einen als der anderen Seite.

Es lag die Vermuthung nahe, dass auch im Crookes'schen Radiometer die von mir zuerst beobachtete Bewegung nach der Aluminiumseite, bei äusserster Verdünnung, derselben Ursache, also der Erwärmung der Wand durch die fortgeschleuderten Kathodentheilchen, zuzuschreiben sei.

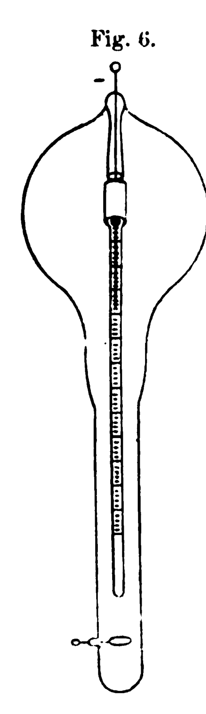
Ich habe zu diesem Behufe ein Flügelpaar aus sehr dünnem Messingbleche und Glimmer construirt und dasselbe mittelst eines Glashütchens von der Spitze isolirt. Bei äusserster Verdünnung drehte sich das Rädchen mehrmals zuerst nach der Metallseite und nachher ziemlich rasch nach der Glimmerseite. Dabei rasselte das Glashüttchen an der Spitze so laut, dass man das Geräusch im nächsten Zimmer bei verschlossener Thür hören konnte. Die springenden Bewegungen des Rädchens erfolgten in der verticalen Richtung, als ob die Spitze dasselbe hinaufschleudern würde.

Dass das Rädchen nicht fortwährend nach der metallischen Seite rotirt, dürfte seinen Grund darin haben, dass die dünnen Blättchen sehr bald die Temperatur der Wände erreichen, da die letzteren nur durch die Strahlen einer dünnen Nadelspitze erwärmt werden. Ist die Temperatur der Wände der Flügel an beiden Seiten gleich, dann findet keine Rotation statt. Nachher erwärmt sich jedoch die metallische Seite stärker als die Glimmerseite und es muss daher die Drehung nach der Glimmerseite erfolgen.

Nach diesen Versuchen scheint mir die Annahme höchst wahrscheinlich zu sein, dass die Bewegung der Flügel nach der Aluminiumseite bei der höchsten Verdünnung eine Folge der durch Kathodenstrahlen erwärmten Glaswände ist, und ich nehme daher keinen Anstand, meine frühere Hypothese von der treibenden Wirkung des elektrischen Stromes zurückzunehmen.

Auch ist nach diesen Versuchen zu erwarten, dass der elektrische Strom bei einer geringeren Verdünnung, wenn das Glimmlicht erscheint, die Kathode stärker erwärmen wird, als bei der höchsten Verdünnung, wenn Phosphorescenzerscheinungen sich zeigen. Im ersten Falle werden sehr wahrscheinlich die losgerissenen Elektrodentheilchen an die Kathode sehr oft anprallen und einen Theil ihrer Bewegung an dieselbe zurückgeben, während im letzteren Falle die meisten Theilchen die Glaswand treffen und diese erwärmen.

Fig. 6.



Um diese Vermuthung zu prüfen, wurde in einem birnförmigen Glasgefässe die Temperatur der Kathode bei verschiedenem Drucke gemessen.

Das cylindrische Gefäss des Thermometers war mit dünnem Aluminiumbleche so eng umschlossen, dass die Entladungen nur nach aussen stattfinden konnten. Das Thermometergefäss war sehr klein und ruhte auf einem Glasröhrchen in der Mitte des Glasgefässes. Der Versuch zeigte, wie ich

vorausgesehen habe, dass die Temperatur der Kathode grösser ist, wenn dieselbe vom Glimmlichte umfluthet wird, als wenn die Glaswände rings um das Thermometergefäss phosphoresciren. Im ersten Falle war die Temperatur 47° C., im letzteren 41° C.

Daraus geht unzweifelhaft hervor, dass die Temperatur der Kathode abnimmt, wenn die Verdünnung zunimmt.

Es wären somit zwei Kräfte, welche die Bewegung der Rädchen bei grosser Verdünnung erzeugen: 1. Die Wärmewirkung an den Flügeln, und 2. die Wärmewirkung der umgebenden Glaswände. Beide Wirkungen sind entgegengesetzt gerichtet; die erste treibt die Flügel in Folge der Reaction der Gastheilchen nach der Glimmerseite, oder concaven Seite, und die letztere wie in einem gewöhnlichen Radiometer nach der metallischen oder convexen Seite.

Geht der Inductionsstrom durch das Radiometer beim Drucke 0·02 Mm., so wird die Reactionswirkung der Gastheilchen an den Flügeln durch die Wärmewirkung an den Glaswänden geschwächt, und die Bewegung des Flugrädchens ist weniger lebhaft, und viel lebhafter, wenn der Strom unterbrochen wird, weil die ganze Wärmewirkung an den Flügeln zur Geltung kommt.

Bei einem bestimmten Verdünnungsgrade können sich beide Wirkungen das Gleichgewicht halten, und die Bewegung beginnt erst nach der Unterbrechung des Stromes.

Bei einer noch höheren Verdünnung als 0·02 Mm., wenn die Glaswände lebhaft phosphoresciren, überwiegt die Wärmewirkung der Glaswände, und die Rotation des Rädchens erfolgt daher nach der convexen, respective nach der metallischen Seite der Flügel.

Die Ursache der Rotation des Rädchens nach der convexen Seite zwischen 140 und 620 Mm. Druck ist darin zu suchen, dass die positive eventuell negative Endladung nur an den Ecken der Flügel in den Gasraum vor sich geht. Die mit statischer positiver oder negativer Electricität geladenen Gastheilchen werden fortgestossen und ihre Rückwirkung treibt die Flügel in entgegengesetzter Richtung, somit nach der convexen Seite. Wie leicht einzusehen ist, verhält sich ein halbcylindrischer Flügel wie ein System von vier nach derselben Seite gekehrten Spitzen. Im

zweiten Flügel sind die Ecken entgegengesetzt gerichtet, und wirken daher mit den ersteren im gleichen Sinne.

Beim vollen Athmosphärendrucke erfolgt die Entladung an den Ecken der Flügel nicht in den Gasraum, sondern an die Glaswand, indem zwischen denselben kleine Funken überspringen. Diese Entladungen scheinen mir die Ursache der Bewegung des Rädchens zu sein, welche nach der concaven Seite der Flügel erfolgt.

Beim Annähern der Handfläche an das Glasgefäss wird jene Entladung verhindert, die Elektricität entladet sich wieder in den Gasraum, und die Rotation erfolgt auch bei diesem Drucke nach der convexen Seite.

Ob die statischen Ladungen der Glaswände nicht in einem oder entgegengesetzten Sinne die Bewegung des Rädchens beeinflussen, konnte bisher nicht ermittelt werden.

Eine genaue Untersuchung der statischen Ladungen der Glasgefässe beabsichtige ich demnächst auszuführen, und möchte hier nur erwähnen, dass bei äusserster Verdünnung die beiden Drahtenden negativ und das ganze Glasgefäss positiv elektrisch sind.

Die in meinen Abhandlungen beschriebenen Glasapparate verfertigt Herr Rob. Goetze in Leipzig, Härtelstrasse 6.

Über einige Versuche mit einer Holtz'schen Influenzmaschine.

Von Dr. **Franz Hočevar,**
k. k. Gymnasiallehrer in Innsbruck.

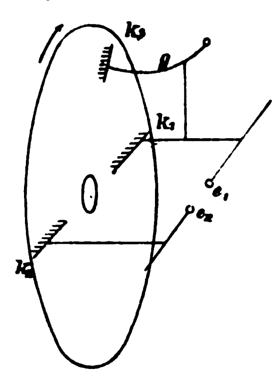
(Mit 2 Holzschnitten.)

Die besondere Einrichtung der mir (im physikalischen Cabinet des Innsbrucker Staatsgymnasiums) zur Verfügung stehenden Influenzmaschine ermöglichte mir einige Beobachtungen, welche in theoretischer Beziehung bemerkenswerth erscheinen. Der Apparat, dessen rotirende Scheibe einen Durchmesser von 48 Ctm. Länge besitzt, ist im Jahre 1869 von Herrn C. Winter geliefert worden und weicht in der Construction von der einfachen Holtz'schen Influenzmaschine erster Art in zwei Punkten ab. Vor Allem ist die feststehende Scheibe durch zwei getrennte und symmetrische Scheibentheile ersetzt, von denen jeder eine Papierbelegung trägt. Die beiden Theile stossen in der verticalen Kante *ab* (Figur 1) zusammmen, lassen sich in den beiden Holzrahmen *cd*, *ef* nach den entsprechenden Seiten hin verschieben und auch ohne Mühe entfernen. Ferner besitzt die Influenzmaschine ausser den beiden an den Enden eines Scheibendurchmessers angebrachten Conductoren (Saugkämmen) k_1, k_2 noch einen dritten Conductor k_3, welcher sich um eine verticale Axe in *g* (Figur 2) drehen, aber auch vollständig herausheben lässt

Figur 1. (Rückansicht.)

und welcher mit k_1 in leitender Verbindung steht. Die den Conductoren k_1, k_2 entsprechenden Belegungen und Elektroden wollen wir mit b_1, b_2, respective e_1, e_2 bezeichnen.

Figur 2. (Vorderansicht.)



Entfernt man von der eben beschriebenen Influenzmaschine die Belegung b_2 durch Herausziehen des Scheibentheiles *abfd* (Figur 1) und beseitigt auch den Conductor k_3, so lässt sich die Influenzmaschine auch noch zur Thätigkeit anregen, indem man die Elektroden e_1, e_2 zur Berührung (oder sehr nahe an einander) bringt und die Belegung b_1 mit Elektricität versieht, während die bewegliche Scheibe, etwa im Sinne des Pfeiles (Figur 2) rotirt. Nach einigen Umdrehungen hört jedoch die Wirksamkeit der Influenzmaschine bereits auf, da die Elektricität des Beleges b_1 namentlich durch die Papierspitze an die Umgebung abgegeben und durch die Thätigkeit der Maschine selbst nicht ersetzt wird.

In dieser Zusammenstellung unterscheidet sich die Influenzmaschine von der gewöhnlichen Reibungs-Elektrisirmaschine nur dadurch, dass die Reibzeuge der letzteren durch die Belegung b_1 auf der einen, und den Conductor k_1 auf der anderen Seite der rotirenden Scheibe ersetzt sind. Um eine durch längere Zeit wirksame Elektricitätsquelle zu gewinnen, ersetzt Bertsch (s. Frick, Die physikalische Technik, p. 443) bei seiner nach demselben Principe construirten Elektromaschine das Papierbeleg durch eine grössere Ebonitplatte ohne Spitze. Denselben Zweck erreicht Carré bei seiner neuen dielektrischen Maschine, und zwar für eine beliebige Dauer dadurch, dass er die durch fortwährende Reibung elektrisirten Theile einer kleinen rotirenden Scheibe auf k_1 influenzirend wirken lässt. Auch Holtz hat in einer seiner ersten Arbeiten über Influenzmaschinen (Ann. d. Physik, Bd. 126, pag. 170) das Princip, auf welchem die eben erwähnten Apparate beruhen, auseinandergesetzt.

Um die eingangs beschriebene Influenzmaschine in eine andauernde Thätigkeit zu versetzen, kann man von den fünf

Bestandtheilen b_1, b_2, k_1, k_2, k_3 drei verschiedene Combinationen beibehalten, die mit A, B, C bezeichnet werden sollen.

Die Combination A erhält man durch Hinweglassung von b_2, so dass sich eine Influenzmaschine mit einem Beleg und drei, entsprechend der Figur 2 verbundenen Conductoren ergibt. Die Erregung erfolgt durch Elektrisirung von b_1 und ist bei jeder Entfernung der Elektroden innerhalb der Schlagweite möglich. Eine solche Art von Influenzmaschinen, welche, verglichen mit den Holtz'schen von sonst gleicher Beschaffenheit, grosse Schlagweiten, jedoch geringe Elektricitätsmengen liefern, ist meines Wissens noch nicht besprochen worden.

Die Combination B erhält man durch Hinweglassung von k_3 und gelangt so zur einfachen Holtz'schen Influenzmaschine erster Art, welche in bekannter Weise erregt wird. Nur soll bemerkt werden, dass eine unmittelbare Berührung der Elektroden nicht unbedingt erforderlich ist, um die Maschine zu laden. Es gelingt dies auch bei einer sehr geringen Distanz der Elektroden, zum Beispiele bis zu 2 oder 3 Millimetern oder durch eine zwischen die Elektroden eingeschaltete Geissler'sche Röhre. Eine ähnliche Bemerkung machte Poggendorff in den Ann. d. Phys. Bd. 150, p. 10.)

Als Combination C bezeichnen wir die Influenzmaschine mit den fünf Bestandtheilen b_1, b_2, k_1, k_2, k_3 und müssen zum Zwecke der Erregung der Belegung b_1 Elektricität zuführen, während die Scheibe, wie wir stets voraussetzen wollen, in der Richtung k_1, k_3, k_2 rotirt und die Elektroden in einer beliebigen Entfernung innerhalb der Schlagweite sich befinden.

Auf den zuletzt erwähnten Umstand hat bereits Riess (Ann. der Physik, Bd. 140, pag. 168) bei der Besprechung einer Influenzmaschine aufmerksam gemacht, welche sich von der auch sonst häufig benützten Combination C nur dadurch unterscheidet, dass die Belegung b_2 bis zum Conductor k_3 reichte. Schwieriger ist die Erregung der Influenzmaschine an der Belegung b_2. Man muss in diesem Falle vor Allem den Conductor k_3 von der rotirenden Scheibe zurückschieben und die Elektroden einander so weit nähern, als es bei der Combination B erforderlich ist. Hat hierauf b_1 auf indirectem Wege eine hinreichende Elektricitätsmenge aufgenommen, so kann man k_3 wieder anlegen und die

Elektroden von einander entfernen. Die Nothwendigkeit dieses Vorgehens ergibt sich aus der Wirkungsweise des überzähligen Conductors k_3 von welcher noch weiter unten die Rede sein wird.

Vergleicht man die Combinationen *A. B. C* in Bezug auf die in gleichen Zeiten gewonnenen Elektricitätsmengen, sowie hinsichtlich der erzielten Schlagweite, so erhält man Resultate, welche sichere Schlüsse auf die Bedeutung des Hilfsconductors k_3 gestatten. *B* und *C* liefern stets gleiche Quantitäten und zwar etwas mehr als das Doppelte davon, was mittelst der Combination *A* erhalten wird, *A* und *C* liefern gleiche Schlagweiten, welche die der Combination *B* entsprechende bedeutend übertreffen. Daraus geht hervor, dass der überzählige Conductor k_3 die zwischen den Elektroden überströmende Elektricitätsmenge nicht vermehrt, hingegen die Schlagweite erheblich vergrössert.

So zum Beispiel erhalte ich unter günstigen Bedingungen (in trockener Luft, bei staubfreier, gut isolirender Oberfläche namentlich der rotirenden Scheibe und ohne Anwendung eines Condensators) mittelst der Combination *A* und *C* die grösste Schlagweite, welche mit Rücksicht auf den Bau der benützten Influenzmaschine noch möglich ist, d. i. 16 Ctm., hingegen mit der Combination *B* nur 4 bis 5 Ctm.

Die Erklärung der Wirkungskreise der Influenzmaschine in der Combination *A*, sowie die Vergrösserung der Schlagweite durch den Conductor k_3 hängt davon ab, von welcher Theorie der Influenzmaschine man ausgeht. Wählen wir jene von Poggendorff (Ann. d. Physik, Bd. 150, pag. 10 bis 13), so werden wir die Influenz auf die Isolatoren als unwesentlich ausser Acht lassen. Die fortwährende Ladung der Belegungen, offenbar der wichtigste Punkt dieser Theorie, kann nun nach Poggendorff auf zweifache Art erfolgen. Entweder ist es die aus einem Conductor, z. B. k_2, durch die Spitzen ausströmende Elektricität, welche in der gegenüber stehenden Belegung b_2 die ungleichnamige Elektricität bindet und die gleichnamige durch die Papierspitze abstösst, oder es wird die Belegung b_2 dadurch geladen, dass die aus dem Conductor k_1 auf die rotirende Scheibe ausgeströmte Elektricität nach nahezu vollendeter halber Umdrehung in den Bereich der zu b_2 gehörigen Papierspitze gelangt

und derselben die ungleichnamige Elektricität entzieht, während die gleichnamige auf der Belegung b_2 verbleibt. Bei der einfachen Holtz'schen Influenzmaschine finden im Allgemeinen die beiden Influenzacte gleichzeitig statt, nur überwiegt der erste während der Ladung, sowie bei der Ent-, respective Umladung, der zweite bei der normalen Thätigkeit der Influenzmaschine. Für die Richtigkeit dieser Erklärung sprechen unter Anderem die Umstände, dass es nothwendig ist, die beiden Elektroden anfänglich zur Berührung oder doch einander sehr nahe zu bringen; dass wenn b_1 positiv geladen wird, gleich darauf b_2 freie positive Elektricität aufweist, deren Ableitung die Ladung der Influenzmaschine in der Regel beschleunigt; dass hingegen zur andauernden Wirksamkeit der Maschine eine Rotation der Scheibe gegen die Papierspitzen erforderlich ist u. s. f.

Bei der Combination A kommt nur die zweite Art der Influenzirung des Papierbeleges in Betracht, wodurch der gesammte Vorgang wesentlich einfacher erscheint. Versieht man nämlich b_1 mit positiver Elektricität, während die Scheibe von k_3 gegen k_1 rotirt, so strömt negative Elektricität aus dem Conductor k_1 auf die Scheibe und die abgestossene positive einerseits zur Elektrode e_1, andererseits durch k_3 ebenfalls auf die Scheibe. Durch die von k_3 kommende Elektricität wird vor Allem die Ladung der Belegung b_1 rasch verstärkt, somit auch die Menge der in k_1 getrennten Elektricitäten vergrössert. Nach einer halben Umdrehung gelangt die negative dem Conductor k_1 entzogene Elektricität zu den Spitzen von k_2, wird, wie man zu sagen pflegt, aufgesogen und zur Elektrode e_2 geführt.

Dieser Vorgang wird immer intensiver, bis sich schliesslich die entgegengesetzten, auf den Elektroden angesammelten Elektricitäten durch die Luft vereinigen. Von da an haben wir zwei geschlossene Stromkreise; denn vorerst strömt positive Elektricität von k_1 über g nach k_3 und von da längs der Scheibe bis k_1, wo sie neutralisirt wird, andererseits bildet der Weg k_1, e_1, e_2, k_2, k_3, k_1 eine Strombahn für theils positive, theils negative Elektricität.

Auf der Seite der Papierbelegung führt die rotirende Scheibe nur negative Elektricität, welche fortwährend aus der Spitze von b_1 strömt. Gegenüber k_2 wirkt dieselbe, wie eine schwach negativ

geladene Belegung; sie schwächt jedoch die Ladung von b_1, da sie demselben positive Elektricität zu entziehen sucht. Daraus erklärt es sich, warum die mit der Combination A in irgend einer Zeit erhaltene Elektricitätsmenge etwas weniger als die Hälfte von der in gleicher Zeit mit den Combinationen B und C gewonnenen beträgt.

Ganz ähnlich gestaltet sich die Wirksamkeit des Conductors k_3 bei der Combination C. Es ist jedoch zu beachten, dass der Scheibensector $k_2 k_3$ in diesem Falle bei positiver Ladung von b_1 auch mit positiver Elektricität belegt ist, da die rotirende Scheibe zwischen b_2 und k_2 nicht nur entladen, sondern auch umgeladen wird. Daher unterliegt k_3 zwei entgegengesetzten Einwirkungen. Die positive Elektricität des Sectors $k_2 k_3$ sucht k_3 negative Elektricität zu entziehen, während die von b_1 abgestossene positive Elektricität wenigstens zum Theile durch k_3 abzufliessen strebt. Von den beiden Einwirkungen überwiegt die erste oder die zweite, je nachdem die Entfernung zwischen den Elektroden e_1, e_2 gering oder bedeutend ist.

Im ersten Falle wird nämlich der grösste Theil der von b_1 abgestossenen Elektricität bei e_1, e_2 neutralisirt und aus k_2 strömt negative Elektricität, welche sich mit einem Theile der auf der Scheibe befindlichen positiven vereinigt. Es ist leicht einzusehen, dass dieser Vorgang auf die Ladung von b_1 und überhaupt auf die Wirksamkeit der Influenzmaschine nachtheilig einwirkt, wesshalb sich die Benützung des Conductors k_3 für eine geringe Distanz der Elektroden nicht empfiehlt.

Für den zweiten Fall, d. i. für die Wirkung von k_3 bei bedeutender Entfernung der Elektroden, lässt sich etwa folgende Erklärung aufstellen.

Werden die Elektroden immer weiter zurückgeschoben, so reicht schliesslich die Anziehung der beiden auf e_1 und e_2 angesammelten entgegengesetzten Elektricitäten nicht mehr hin, um den Widerstand der Luft zu überwinden und sich zu vereinigen. Von da an strömt die gesammte, im Conductor k_1 erzeugte positive Elektricität durch k_3 auf die Scheibe, indem die Abstossung von b_1 die vom Sector $k_2 k_3$ herrührende überwiegt. Hiedurch wird nun die Belegung b_1 stärker geladen, eine grössere Menge positiver Elektricität strömt nach k_3 und nach e_1,

überhaupt der ganze Vorgang wird intensiver, so dass eine neue Entladung zwischen e_1 und e_2 möglich ist. Dies wiederholt sich rasch und zwar so oft, als die der jeweiligen Ladung der Influenzmaschine entsprechende Schlagweite überschritten wird. Da somit die Einwirkung von k_3 auf b_1 um so kräftiger wird, je weiter die Elektroden von einander entfernt werden, so finden die bedeutenden, mit den Combinationen A und C erzielten Schlagweiten darin ihre Erklärung.

Offenbar gibt es auch eine gewisse mittlere Distanz der Elektroden, für welche der Conductor k_3 vollständig ausser Wirksamkeit tritt und dies ist dann der Fall, wenn die beiden oben besprochenen Einwirkungen auf k_3 sich aufheben.

Die im Dunklen am Conductor k_3 beobachteten Lichterscheinungen stehen mit dieser Erklärung in vollkommener Übereinstimmung. Bei immer zunehmender Entfernung der Elektroden erscheinen zuerst an den Spitzen von k_3 schwache Lichtpunkte, ein Zeichen für das Ausströmen von negativer Elektricität, dieselben verschwinden hierauf und es treten die positiven, immer länger werdenden Lichtbüschel an deren Stelle.

Untersuchungen über Borneolkohlensäure und Campherkohlensäure.

Von **J. Kachler** und **F. V. Spitzer.**

(Aus dem Laboratorium des Prof. A. Lieben.)

Die ersten Angaben über die Borneolkohlensäure und die Campherkohlensäure (Camphocarbonsäure) hat Baubigny[1] gemacht; er gibt darüber Folgendes an: Wenn man auf eine Lösung von Campher in Toluol Natrium unter Erwärmen einwirken lässt, so wird kein Wasserstoff entwickelt und es entstehen die Natriumverbindungen des Borneols und des Camphers.

$$2C_{10}H_{16}O + 2Na = C_{10}H_{15}NaO + C_{10}H_{17}NaO.$$

Leitet man in dieses Gemenge Kohlensäure bis zur Sättigung und behandelt darauf die Masse mit Wasser, so scheidet die von dem Kohlenwasserstoff getrennte wässerige Lösung allmälig Borneol in reichlicher Menge aus. Die davon abfiltrirte Flüssigkeit gibt beim Versetzen mit Säure einen in Äther und Alkohol leicht, in Wasser wenig löslichen Niederschlag, welcher eine einbasische nach der Formel $C_{11}H_{16}O_3$ zusammengesetzte Säure ist, die durch einfache Anlagerung von Kohlensäure an den Campher entstanden gedacht werden kann, und welche er als Camphocarbonsäure bezeichnet. Er erklärt sich den Vorgang in der Weise, dass bei der Einwirkung der Kohlensäure auf die Natriumverbindungen des Borneols und des Camphers die Natriumsalze der Borneolkohlensäure und der Camphocarbonsäure entstehen, dass ersteres jedoch unbeständig ist und analog dem äthylkohlensauren Salze schon durch Wasser zerlegt wird.

---

[1] Zeitschrift für Chemie 1868, 481 u. 647. Annales de Chim. Phys. (4) 1870, XIX, 221.

J. de Santos e Silva[1] hat durch Einwirkung von Brom auf Camphocarbonsäure ein Bromderivat $C_{11}H_{15}BrO_3$ erhalten, welches beim Erhitzen in Kohlensäure und Monobromcampher zerfällt.

Es erschien uns von Interesse, das Studium dieser Verbindungen wieder aufzunehmen, um womöglich weitere Anhaltspunkte zur Ermittlung ihrer Constitution zu gewinnen.

Borneolkohlensäure.

Baubigny hat weder diese Verbindung, noch ein Derivat derselben dargestellt, sondern glaubt aus den bei der Einwirkung von Natrium und Kohlensäure auf eine Campherlösung entstehenden Zersetzungsproducten auf die Bildung derselben schliessen zu dürfen.

Wir haben getrachtet, diese bis jetzt fragliche, wenig beständige Verbindung in Form eines Natriumsalzes darzustellen.

Versucht man die Producte der Einwirkung von Natrium und Kohlensäure auf eine Campherlösung direct, ohne selbe mit Wasser in Berührung zu bringen, dadurch zu isoliren, dass man das Magma durch Filtriren und Pressen vom Lösungsmittel befreit, so erhält man eine schwach gelblich gefärbte, durchscheinende Salzmasse, die sich dem Anscheine nach an der Luft nicht verändert. Dieselbe hat einen starken Geruch nach Borneol und den Kohlenwasserstoffen; um sie von letzteren zu befreien, wurde die zerriebene Substanz an der Luft liegen gelassen und dann aufbewahrt. Bei einem Versuche, die Salzmasse zu sublimiren, wurden anfangs ölige Tropfen (Benzol, Toluol), später Borneol erhalten; bei stärkerem Erhitzen entwickelten sich Campherdämpfe und im Rückstande hinterblieb kohlensaures Natron. Mit absolutem Äther behandelt, löst sich ein grosser Theil auf; die Lösung hinterliess beim Abdunsten eine weisse Krystallmasse, welche beim Erhitzen ohne Rückstand sublimirte. Das Sublimat zeigte den Schmelzpunkt von 197° C. und alle Eigenschaften des Borneols. Der in Äther unlösliche Theil war pulverig und im warmen Wasser vollkommen löslich; beim Kochen der Lösung entwichen Campherdämpfe. Auf Zusatz von Säuren trübte

[1] Berl. Ber. VI, 1092.

sich dieselbe unter Aufbrausen. Durch Ausschütteln der saure Flüssigkeit mit Äther konnte Campherkohlensäure erhalte werden.

Aus diesem Verhalten ist zu ersehen, dass die abgepresst Salzmasse bereits freies Borneol neben kohlensaurem Natro und campherkohlensaurem Natron enthalten hat.

Wenn die Natriumverbindung der Borneolkohlensäure übe haupt entstanden ist, so hat die längere Berührung mit der Lu (Feuchtigkeit etc.) während der Operation, oder vielleicht da längere Aufbewahren genügt, um sie zu zersetzen.

Wir versuchten unter Vermeidung der Bildung der Campher kohlensäure, die Borneolkohlensäure, respective deren Natrium verbindung, direct aus Borneol darzustellen.

Einwirkung von Natrium auf Borneol. 3 Grm. subli mirtes Borneol wurden in 20 C. C. hochsiedenden (110—150° durch Destillation gereinigten Benzol gelöst und unter Erwärmun im Ölbade 0·5 Grm. blankes Natrium eingetragen. Bei 80° C beginnt Wasserstoffentwicklung, welche zwischen 100 und 130° C sehr heftig wird. Nach einiger Zeit hörte die Gasentwicklun auf und es blieb eine kleine Natriumkugel zurück, ohne dass au der Lösung sich etwas ausgeschieden hätte. Wurde ein kleine Theil des Reactionsproductes mit Wasser geschüttelt, so entstan eine Trübung und die wässerige Flüssigkeit enthielt Ätznatron

Beim Verdunsten des Kohlenwasserstoffes bildeten sich an fangs schöne farblose, sechsseitige Blättchen, die später di Flüssigkeit erfüllten. Als nun die dicke, etwas gefärbte Mass durch Stehen über Paraffin im Vacuum allmälig trocken geworde war, stellte sie eine schwach gefärbte, lockere Substanz dar, di sich in Wasser in Folge etwas noch anhaftendem Benzols nich vollkommen löst. Wird dieselbe jedoch mit Äther gewaschen, so ist sie in Wasser vollständig löslich. Bei längerem Stehen de Lösung oder beim Kochen derselben scheidet sich Borneol aus, während Ätznatron gelöst bleibt.

0·4147 Grm. der über Chlorcalcium getrockneten Substanz gaben 0·1667 Grm. Na_2SO_4.

Für $C_{11}H_{17}NaO$ berechnet	Gefunden
Na. . . . 13·06 %	13·02 %.

Dieses Resultat lässt die so erhaltene Verbindung ausser allem Zweifel als Borneolnatrium erscheinen. Dasselbe ist analog den gewöhnlichen Alkoholaten, sowohl in der Zusammensetzung als in den Eigenschaften. Bei längerem Aufbewahren tritt theilweise Zersetzung ein, wobei dann die Löslichkeit in Wasser mehr und mehr abnimmt, indem sich freies Borneol und Ätznatron oder auch kohlensaures Natron bildet.

Einwirkung von Natrium und Kohlensäure auf Borneol. Nachdem durch die eben angeführte Reaction bewiesen war, dass bei der Einwirkung von Natrium auf Borneol, Borneolnatrium ($C_{10}H_{17}NaO$) entsteht, so war die Möglichkeit geboten, daraus durch Einwirkung von Kohlensäure direct borneolkohlensaures Natron darzustellen. Es wurden wieder 5 Grm. sublimirtes Borneol in etwa 20 Grm. hochsiedendem, mittelst Natrium gereinigtem Benzol gelöst und unter Erwärmen im Ölbad auf etwa 110—130° C. 1 Grm. Natrium eingetragen. Sobald die Einwirkung beendet war, wurde nach dem Erkalten die geringe Menge unangegriffenen Natriums entfernt, hierauf neuerdings auf 130° C. erwärmt und bei dieser Temperatur trockene Kohlensäure eingeleitet. Dabei war ebenfalls keine Ausscheidung zu bemerken; erst nachdem während des fortgesetzten Einleitens die Temperatur auf etwa 100° C. gesunken war, begann sich die Lösung zu trüben. Das Einleiten von Kohlensäure wurde noch bis zur vollständigen Abkühlung fortgesetzt. Nach einiger Zeit hatte sich eine feinkrystallinische Salzmasse abgeschieden, welche vom Lösungsmittel abfiltrirt, gepresst und fein verrieben, über Paraffin und Schwefelsäure gestellt wurde.

I. 0·2729 Grm. Substanz ergaben beim Glühen 0·0639 Grm. kohlensaures Natron.

II. 0·3654 Grm. im Vacuum über Schwefelsäure getrockneter Substanz ergaben 0·0876 Grm. kohlensaures Natron.

	$C_{11}H_{17}NaO_3$	Gefunden I	Gefunden II
Na	10·45 %	10·15 %	10·40 %.

Daraus ergibt sich, dass bei Einwirkung von Kohlensäure auf Borneolnatrium borneolkohlensaures Natron $C_{11}H_{17}NaO_3$ gebildet wird. Dasselbe ist frisch bereitet, im kalten

Wasser leicht und vollkommen klar löslich. Die alkalisch re agirende, verdünnte Lösung beginnt jedoch bald Borneol in schönen, glänzenden Blättchen auszuscheiden, während dies bei einer concentrirten Lösung erst nach einiger Zeit eintritt. Diese Zersetzung ist nach zwei bis drei Tagen vollständig; die vom Borneol getrennte Flüssigkeit enthält nur saures kohlensaures Natron.

$$C_{11}H_{17}NaO_3 + H_2O = C_{10}H_{18}O + NaHCO_3.$$

Durch Säuren wird diese Zerlegung sofort unter Entweichen von Kohlensäure bewirkt.

Die Bildung und die Eigenschaften des borneolkohlensauren Natrons entsprechen vollkommen der Entstehung und dem Verhalten der äthylkohlensauren Salze, so dass dem ersteren wohl die Formel $C_{10}H_{17}O.CO.ONa$ zukommt.

Campherkohlensäure.

Die Campherkohlensäure bildet sich, wie bereits erwähnt, neben Borneolkohlensäure in Form ihres Natriumsalzes, wenn eine Campherlösung mit Natrium und Kohlensäure behandelt wird.

Während durch Wasser das borneolkohlensaure Salz sich rasch unter Ausscheidung von Borneol zerlegt, bleibt das campherkohlensaure Natron in Lösung.

War die wässerige Lösung concentrirt, so scheidet diese beim Versetzen mit Säure einen Theil der freien Campherkohlensäure in Form eines gelblichweissen, deutlich krystallinischen Niederschlages ab; wenn die Lösung verdünnt war, so tritt beim Ansäuern bloss Trübung ein. Durch wiederholtes Ausschütteln der Flüssigkeit mit Äther wird die Campherkohlensäure angezogen und nach dem Abdestilliren des ersteren hinterbleibt ein gelblich gefärbter, dicker Syrup, der nach einiger Zeit krystallinisch erstarrt. Die erhaltene Substanz, welche zwischen Papier gepresst bei 118 bis 119°C. schmilzt, ist jedoch nicht rein, sondern enthält neben Campherkohlensäure zum Theile harzige, zum Theile krystallinische Körper, von denen sie am besten durch Umkrystallisiren aus Wasser getrennt werden kann. Zu diesem Zwecke wird die zerriebene rohe Säure in einem Kolben mit heissem Wasser heftig durchgeschüttelt, da die rohe Säure zu einer zähen

Masse zusammenschmilzt. Dabei wird ein Theil der Campherkohlensäure gelöst und kann die bald klar werdende Lösung durch feine Leinwand oder ein gut durchlassendes Filter abgegossen werden. Beim Auskühlen erscheinen schöne lange, farblose Krystallnadeln der Campherkohlensäure. Die Mutterlauge wird wieder heiss gemacht und auf den erstarrten Kolbeninhalt gegossen und durch Schütteln und Erwärmen auf dem Wasserbade neue Mengen der Säure in Lösung gebracht. Man muss die Siedetemperatur des Wassers vermeiden, da dabei ein Verlust durch Zerlegung der Säure in Campher und Kohlensäure stattfindet. Bei dem Umkrystallisiren grösserer Mengen roher Campherkohlensäure erhält man schliesslich einen zähen, leicht schmelzenden Rückstand, aus dem Wasser nur schwer die darin noch enthaltene Campherkohlensäure aufnimmt. Es ist in diesem Falle zweckmässig, denselben in der Kälte mit mässig concentrirter Kalilauge zu behandeln, worin er sich bis auf eine kleine Menge Borneol leicht löst. Die klare alkalische Lösung liefert beim Versetzen mit verdünnter Schwefelsäure eine nicht unbeträchtliche Menge Campherkohlensäure, so dass manchmal das Ganze zu einem Krystallbrei erstarrt. Nach dem Abpressen kann dieser Theil der Säure wie früher aus Wasser umkrystallisirt werden. Schliesslich bleibt eine harzige Masse zurück, die sich wohl in Kalilauge, aber nicht mehr in Wasser löst. Durch Behandeln mit Alkohol kann ein krystallinischer, bei circa 200° C. schmelzender, bis jetzt jedoch nicht näher untersuchter Körper erhalten werden. 340 Grm. rohe Campherkohlensäure lieferten nach diesem Verfahren 252 Grm. reine Campherkohlensäure, 20 bis 30 Grm. Borneol und 20 bis 30 Grm. der in Wasser unlöslichen, krystallinischen Substanz.

Die Campherkohlensäure krystallisirt aus einer warmen concentrirten, wässerigen Lösung in langen, weissen, seidenglänzenden Nadeln; ist die Lösung verdünnt, so bilden sich, wie auch aus Alkohol oder Äther, grössere, farblose, durchsichtige Krystalle, die nach einer freundlichen Mittheilung des Herrn Prof. v. Zepharovich folgende krystallographische Verhältnisse zeigen.

„Vier- oder sechsseitige orthodiagonal gestreckte Säulchen, welche seitlich durch das Klinodoma geschlossen sind, zum Theil

Zwillinge mit dem Hemiorthodoma als Zwillingsebene, nach OP vollkommen spaltbar. Krystallsystem monosymmetrisch.

$$\text{Elemente: } a : b : c = 1\cdot0474 : 1 : 1\cdot5000.$$

$$\beta = (ac) = 85°11'.$$

Beobachtete Formen: $0P$, $\infty P\infty$, $P\infty$, $+P\infty$

Die Krystalle schmelzen bei 123 bis 124° C.; sie sind in Äther, Alkohol, Chloroform leicht, in kaltem Wasser schwer löslich. Beim Einleiten von trockenem Salzsäuregas in eine abgekühlte, ätherische Lösung wird die Säure unverändert gefällt.

Die Analyse der Campherkohlensäure gab folgende Zahlen:

0·3509 Grm. über Schwefelsäure im Vacuum getrockneter Substanz lieferten 0·8659 Grm. CO_2 und 0·2577 Grm. H_2O.

Berechnet für $C_{11}H_{16}O_3$	Gefunden
C....67·34 %	67·29 %
H.... 8·16 „	8·16 „ .

Concentrirte Schwefelsäure löst Campherkohlensäure bei gelinder Wärme leicht auf, Wasser fällt sie unverändert wieder aus. Beim Erhitzen bräunt sich die Schwefelsäure, es entwickelt sich Kohlensäure und schwefelige Säure, wobei theilweise Verkohlung eintritt. Concentrirte Salpetersäure wirkt energisch ein; kocht man damit so lange als noch rothe Dämpfe entweichen, und lässt dann auskühlen, so erhält man breite, nadelförmige Krystalle, welche, entsprechend gereinigt, sich als bei 178° C. schmelzende Camphersäure erweisen, während die Mutterlauge geringe Mengen von Camphoronsäure enthielt. Mit rauchender Salpetersäure tritt schon in der Kälte eine sehr heftige Einwirkung ein. Wird nach der Reaction mit Wasser verdünnt und abgedampft, so erhält man ebenfalls Camphersäure neben sehr geringen Mengen harziger Substanz. Es scheint also, dass die rauchende Salpetersäure aus Campherkohlensäure ziemlich glatt Camphersäure und Kohlensäure bildet.

Baubigny hat von der Campherkohlensäure die Salze der Alkalien, ferner das Silber und Bleisalz dargestellt, jedoch nur letzteres analysirt. Er gibt für dasselbe die Formel $\left.\begin{matrix}[C_{11}H_{15}O_2]^2 \\ Pb''\end{matrix}\right\} O_2$ an

und schliesst daraus, dass die Campherkohlensäure eine einbasische Säure sei. Wir haben weiterhin ein Baryumsalz und eine Natriumverbindung dargestellt und bei der letzteren eine für die Molecularformel der Campherkohlensäure massgebende Zusammensetzung gefunden.

Baryumsalz. Wird die Campherkohlensäure mit Barytwasser im Überschuss erwärmt, so löst sich selbe leicht auf; fällt man nun den überschüssigen Baryt in der Hitze durch Kohlensäure, filtrirt und verdunstet die neutral reagirende Flüssigkeit über Schwefelsäure im luftverdünnten Raume, so bilden sich bald schöne, zu Büscheln vereinigte, flache Nadeln eines Baryumsalzes, das getrocknet an der Luft vollkommen haltbar ist.

0·1366 Grm. des bei 100° C. getrockneten Salzes gaben 0·0634 Grm. schwefelsauren Baryt.

Daraus ergibt sich:

	Für $C_{22}H_{30}\overset{II}{Ba}O_6$ berechnet
Ba....25·98%	25·99%.

Dasselbe ist demnach eine neutrale, dem von Baubigny untersuchten Bleisalze analoge Verbindung.

Natriumsalz. Dasselbe wurde abweichend von der gewöhnlichen Bereitung nicht durch Sättigen mit Ätznatron oder kohlensaurem Natron, sondern durch Einwirkung von metallischem Natrium dargestellt. Eine verdünnte Lösung der Campherkohlensäure in absolutem Äther wurde mit Natrium zusammengebracht; es trat dabei lebhafte Wasserstoffentwicklung ein, unter gleichzeitiger Ausscheidung eines weissen Niederschlages. Die Reaction wurde durch Erwärmen am Wasserbade zu Ende geführt und das Salz nach dem Auskühlen abfiltrirt, dabei auch das unverändert gebliebene Natrium entfernt. Nach dem Waschen mit absolutem Äther und Trocknen über Schwefelsäure im Vacuum erscheint die Natriumverbindung als blendend weisse, lockere Masse, die aus feinen mikroskopischen Nadeln besteht. Sie ist nicht hygroskopisch, jedoch in Wasser leicht löslich. Die Lösung reagirt sauer, liefert beim Verdunsten wieder das krystallinische Natriumsalz, und wird durch die Nitrate von Baryum, Silber, Kupfer und Blei nicht gefällt. Beim Erhitzen zersetzt sich das Salz leicht;

es sublimirt dabei Campher und kohlensaures Natron hinterbleib
Bei der Analyse wurden folgende Zahlen erhalten:

I. 0·3597 Grm. über Schwefelsäure im Vacuum getrocknete Substanz gaben 0·8225 Grm. CO_2, 0·2446 Grm. H_2O un 0·0468 Grm. Na_2CO_3.

II. 0·3763 Grm. getrockneter Substanz ergaben beim Glühe 0·0476 Grm. Na_2CO_3.

Daraus berechnet sich:

	I.	II.
C	63·81 %	
H	7·55 „	
Na	5·64 „	5·49 %.

Auf diese Zahlen passt nur die Formel $C_{22}H_{31}NaO_6$, welche verlangt:

$C_{22}H_{31}NaO_6$	
C	63·76 %
H	7·49 „
Na	5·55 „ .

Bei der Darstellungsweise dieses Salzes ist wegen der leichten Löslichkeit der Campherkohlensäure in Äther nicht anzunehmen, dass die vorliegende Verbindung aus neutralem Salze $C_{11}H_{15}NaO_3$ und freier Säure $C_{11}H_{16}O_3$ bestehe.

Es muss demnach für die Campherkohlensäure die Formel $C_{22}H_{32}O_6$ angenommen werden, in welcher ein oder zwei Atome Wasserstoff durch Metalle ersetzbar sind.

Um einen Aufschluss über die Constitution der Campherkohlensäure zu erhalten, haben wir die folgenden Reactionen mit derselben ausgeführt.

Einwirkung von Acetylchlorid auf Campherkohlensäure. Wird die Campherkohlensäure mit einem grösseren Überschusse von Acetylchlorid zusammengebracht, so ist bei gewöhnlicher Temperatur keine Einwirkung zu bemerken, erst wenn das Gemenge auf dem Wasserbade am Rückflusskühler erwärmt wird, tritt Lösung ein; zugleich reichliche Entwicklung von Salzsäure, die nach einiger Zeit wieder aufhört. Zur Vervollständigung der Reaction wurde das Erwärmen längere Zeit

fortgesetzt und dann das überschüssige Acetylchlorid bei Wasserbadtemperatur abdestillirt. Wird der Rückstand zur Entfernung der Essigsäure in Wasser gegossen, so scheidet sich eine butterartige Masse aus, die dann bald zu einem harten, weissen Krystallkuchen erstarrt. Es ist vortheilhaft, denselben in Äther zu lösen und die noch anhaftende Essigsäure durch öfteres Schütteln mit Wasser möglichst zu entfernen. Nachdem die Lösung mit Chlorcalcium entwässert ist, bringt man sie zur Trockene und krystallisirt aus absolutem Alkohol um. Dabei bilden sich feine, weisse Krystallnadeln, welche zu Drusen vereinigt sind. Nach dem Waschen mit Alkohol und Pressen zwischen Papier zeigten dieselben den Schmelzpunkt von 195 bis 196° C.; beim Abkühlen erstarrte die Substanz und schmolz beim Erwärmen wieder bei derselben Temperatur. Die letzten Mutterlaugen enthalten meistens noch etwas unveränderte Campherkohlensäure, die durch wiederholtes Auskochen mit Wasser entfernt werden kann.

Die neue bei 196° C. schmelzende Substanz zeigte folgende analytische Resultate:

I. 0·2755 Grm. der bei 100° C. getrockneten Substanz ergaben 0·7463 Grm. CO_2 und 0·1933 Grm. H_2O.

II. 0·2790 Grm. bei 100° C. getrockneter Substanz ergaben 0·7534 Grm. CO_2 und 0·2024 Grm. H_2O.

Diese Zahlen stimmen für die Formel $C_{22}H_{28}O_4$.

Für $C_{22}H_{28}O_4$ berechnet	Gefunden I	Gefunden II
C....74·15%	C....73·88	73·65%
H.... 7·86%	H.... 7·79	8·06%

Daraus geht hervor, dass das Acetylchlorid auf die Campherkohlensäure eigentlich bloss wasserentziehend wirkt.

$$C_{22}H_{32}O_6 - 2H_2O = C_{22}H_{28}O_4.$$

Dieser Verlauf der Reaction lässt schliessen, dass in der Campherkohlensäure wahrscheinlich keine Hydroxylgruppe enthalten ist.

Die Verbindung $C_{22}H_{28}O_4$ krystallisirt aus Alkohol in schneeweissen Nadeln, die zu blumenkohlartigen Gruppen vereinigt sind

und welche bei 195—196° C. ohne Zersetzung schmelzen. Dieselben sind in Wasser nicht, in Alkohol und Äther leichter löslich. Mit Alkalien tritt selbst beim Kochen nur unvollständige Lösung ein, wobei die alkalische Reaction nicht verschwindet.

Beim Erhitzen mit Wasser im zugeschmolzenen Rohre durch 20 Stunden auf 90° C. bleibt die Substanz unverändert; mit verdünnter Kalilauge trat erst beim Erhitzen im Rohre auf 100—120° C. Lösung ein, jedoch fiel beim Versetzen mit Säuren unveränderte Substanz wieder aus. Concentrirte Salpetersäure verwandelt den Körper schon in der Kälte in eine schleimige Masse, welche bei gelindem Erwärmen unter stürmischer Entwicklung von rothen Dämpfen sich löst; beim Erkalten scheiden sich schwach gefärbte, sternförmig gruppirte Krystallaggregate aus. Mit kochendem Wasser behandelt, hinterblieb eine geringe Menge gelben Öles, während die wässerige Lösung beim Auskühlen farblose, salmiakähnliche Krystalle lieferte, welche bei 178° C. schmolzen und sich als Camphersäure erwiesen. Die Mutterlauge ist gelblich gefärbt und enthält noch neben etwas Öl Camphoronsäure. Mit Phosphorpentachlorid zusammengebracht, verändert sich die Verbindung $C_{22}H_{28}O_4$ nicht, selbst beim Erhitzen bis zum Schmelzen des Phosphorchlorides ist eine Reaction nicht wahrzunehmen.

Einwirkung von Phosphorsäureanhydrid auf Campherkohlensäure. Das Phosphorsäureanhydrid wirkt bei gewöhnlicher Temperatur auf krystallisirte Campherkohlensäure nicht ein. Eine Erwärmung musste wegen der leichten Zersetzbarkeit der Campherkohlensäure vermieden werden; wir haben desshalb dieselbe in Chloroform gelöst, grössere Mengen Phosphorsäureanhydrid eingetragen und damit längere Zeit stehen lassen. Dabei wurde häufig geschüttelt und von Zeit zu Zeit neue Mengen Anhydrid zugesetzt. Nach einigen Wochen wurde mit Äther verdünnt und das Lösungsmittel am Wasserbade durch Destillation und schliesslich im Vacuum so viel als möglich entfernt. Es bleibt dann, wenn mit kleinen Mengen gearbeitet wird, eine bräunlich gefärbte krystallinische Masse zurück, welche beim Erwärmen auf dem Wasserbade Campherdämpfe entwickelt, die offenbar von der Zerlegung der unveränderten Campherkohlensäure herrühren und welche durch andauerndes Erwärmen zum grossen Theile

entfernt werden kann. Der Rückstand aus Alkohol oder Alkoholäther umkrystallisirt, liefert feine weisse Krystallnadeln, welche durch Waschen mit kaltem Äther, worin sie sich nicht sehr leicht lösen, rein erhalten werden. Die erste Fraction zeigte den Schmelzpunkt von 265°C., die zweite 263°, die dritte Fraction war mit einer klebrigen Masse durchzogen. Bei der Bereitung grösserer Mengen bleibt nach dem Abdestilliren des Lösungsmittels der Rückstand syrupartig und kann selbst durch längeres Stehen im Vacuum nicht krystallinisch erhalten werden. Es empfiehlt sich dabei, denselben in gelinder Wärme mit verdünnter Kalilauge zu behandeln. Das Product löst sich darin bis auf eine geringe Menge klebriger Substanz. Die alkalische Lösung wird filtrirt, angesäuert und mit Äther ausgeschüttelt. Nach dem Abdampfen des Äthers hinterbleibt ein nahezu weisser, krystallinischer Rückstand, der zweckmässig zur möglichst vollständigen Entfernung der noch unveränderten Campherkohlensäure mit warmem Wasser behandelt, hierauf aus Ätheralkohol umkrystallisirt wird. Die Analyse der ersten Fraction ergab folgendes Resultat:

I. 0·3170 Grm. Substanz gaben 0·8187 Grm. CO_2 und 2198 Grm. H_2O.

II. 0·3011 Grm. bei 110° C. getrockneter Substanz gaben 0·7754 Grm. CO_2 und 0·2207 Grm. H_2O. Daraus berechnet sich:

	Gefunden		Für $C_{22}H_{30}O_5$ berechnet
	I	II	
C	70·43%	70·23%	70·58%
H	7·70 „	8·14 „	8·02 „ .

Diese Verbindung ist also durch Entziehung von bloss einem Molekül Wasser aus der Campherkohlensäure entstanden.

$$C_{22}H_{32}O_6 - H_2O = C_{22}H_{30}O_5.$$

Wie weiterhin gezeigt werden soll, kann derselben mit Leichtigkeit durch Acetylchlorid noch ein Molekül Wasser entzogen werden, wobei der bereits beschriebene Körper $C_{22}H_{28}O_4$ gebildet wird. Die Verbindung $C_{22}H_{30}O_5$ ist in Wasser unlöslich, wird dagegen von Alkohol und Äther ziemlich leicht aufgenommen. Aus einer solchen Lösung krystallisirt sie in schönen, weissen,

seidenglänzenden Nädelchen, die bei 265° C. unter schwacher Bräunung schmelzen. Weiter erhitzt, tritt Kohlensäure auf, neben einem gelblichen, später erstarrenden Öl. Mit Wasser gekocht oder im Rohre durch zwanzig Stunden auf 90° C. erhitzt, bleibt die Verbindung unverändert. Verdünnte Kalilauge, mit einem Überschusse der krystallinischen Substanz gekocht, verliert die alkalische Reaction; bei einem Überschusse von Alkali tritt wohl in Folge einer Bildung von leicht löslichem Alkalisalze rasch Lösung ein. Eine alkalische Lösung im Rohre auf 170° C. durch sechzehn Stunden erhitzt, gibt beim Versetzen mit Säure wieder die unveränderte bei 265° C. schmelzende Substanz. Mit Salzsäure gesättigter Äther ist ohne Wirkung. Wird die Verbindung mit einem Überschusse von Ätzbaryt gekocht, so tritt vollständige Lösung ein. Nachdem man in dieselbe in der Kochhitze durch mehrere Stunden Kohlensäure eingeleitet hat, wird filtrirt und im Vacuum über Schwefelsäure abgedunstet; es bilden sich dann allmälig weisse Krystallkrusten einer im Wasser schwer löslichen Baryumverbindung.

I. 0·1363 Grm. der bei 130° C. getrockneten Substanz lieferten 0·0885 Grm. $BaSO_4$.

II. 0·2363 Grm. der aus Wasser umkrystallisirten, bei 120° C. getrockneten Substanz lieferten 0·0672 Grm. $BaSO_4$.

Für $C_{22}H_{28}BaO_5$ berechnet	Für $C_{22}H_{29}BaO_5$ berechnet	Gefunden I	Gefunden II
Ba. . 26·91%	Ba. . 15·51%	Ba. . 17·29%	16·72%.

Nach diesem Ergebnisse kann angenommen werden, dass die neue Substanz im Gegensatze zur Campherkohlensäure nur ein Atom durch Metalle ersetzbaren Wasserstoff enthält. Der für die Formel $C_{22}H_{29}BaO_5$ etwas zu hoch gefundene Baryumgehalt rührt wahrscheinlich von einem geringen Gehalte an campherkohlensaurem Baryt her.

Wird der Körper $C_{22}H_{30}O_5$ mit einem Überschusse von Acetylchlorid am Rückflusskühler auf dem Wasserbade erhitzt, so tritt Salzsäureentwicklung auf.

Nachdem das überschüssige Acetylchlorid abdestillirt war, wurde der Rückstand nach Zusatz von etwas Alkohol der Krystalli-

sation überlassen. Dabei bildeten sich zu Drusen vereinigte weisse, bei 195—196° C. schmelzende Nädelchen, welche in den Eigenschaften und der Zusammensetzung mit der aus Campherkohlensäure und Acetylchlorid erhaltenen Verbindung $C_{22}H_{28}O_4$ übereinstimmen.

0·2872 Grm. der bei 100° C. getrockneten Substanz ergaben 0·7760 Grm. CO_2 und 0·1925 Grm. H_2O.

Für $C_{22}H_{28}O_4$ berechnet	Gefunden
C....74·15%	C....73·67%
H.... 7·86 „	H.... 7·45 „ .

Einwirkung von Phosphorpentachlorid auf Campherkohlensäure. Bei dieser Reaction haben wir zunächst das Verhältniss von einem Molekül $C_{22}H_{32}O_6$ auf vier Moleküle PCl_5 eingehalten. In einem kleinen Kölbchen, das zur Abhaltung der Feuchtigkeit mit einem Chlorcalciumrohre versehen war, wurden 21·5 Grm. Phosphorpentachlorid mit Schnee abgekühlt und 10 Grm. gereinigte Campherkohlensäure in kleinen Portionen eingetragen. Das Gemenge verflüssigt sich allmälig und es entweicht Salzsäure zum Schlusse in reichlicher Menge. Nach zweitägigem Stehen wurde, obwohl noch etwas festes Phosphorpentachlorid in der Flüssigkeit enthalten war, dieselbe in Eiswasser eingetragen; dabei fiel ein Öl aus, das nur allmälig und theilweise erstarrte. Der erhaltene Krystallbrei auf einer Thonplatte vom anhaftenden Öle befreit und hierauf zwischen Papier gepresst, wurde in ätherischer Lösung mittelst Chlorcalcium getrocknet. Beim Verdunsten der filtrirten Lösung bildeten sich strahlenförmig gruppirte Krystallnadeln, die den Schmelzpunkt von 41·5—42° C. zeigten und sich beim Umkrystallisiren als nahezu homogene Substanz erwiesen. Die Ausbeute an diesem festen Producte war nicht befriedigend. Bei der Analyse wurde Folgendes erhalten:

0·3100 Grm. der über Schwefelsäure getrockneten Substanz ergaben 0·5245 Grm. CO_2 und 0·1369 Grm. H_2O.

0·2203 Grm. Substanz ergaben nach der Methode von Carius 0·3560 Grm. AgCl; daraus berechnet sich

C....46·14%
H.... 4·90 „
Cl...39·97 „ .

Bei einem zweiten Versuche wurde gleich anfangs etwas mehr Phosphorpentachlorid als früher angewandt. Nach vierzehntägigem Stehen und darauffolgendem Fällen mit Wasser hatte sich ein zähes Öl ausgeschieden, das jedoch selbst bei wiederholtem Waschen mit Wasser nicht erstarrte. Beim Abkühlen auf — 15° C. auch nach mehrmonatlichem Stehen mit Wasser blieb es noch flüssig. Aus diesem Ergebnisse glaubten wir entnehmen zu können, dass zur Gewinnung des festen Chlorides, beim Beginn der Reaction ein Überschuss von Phosphorpentachlorid vermieden werden soll. In der Folge haben wir desshalb an dem früheren Verhältnisse von einem Molekül Säure auf vier Moleküle Phosphorchlorid festgehalten, und erst nachträglich zur Vervollständigung der Reaction neuerdings Phosphorpentachlorid zugefügt. Bei dem Umstande, dass die Campherkohlensäure eine verhältnissmässig leicht zersetzbare Verbindung ist, haben wir bei der Einwirkung des Phosphorpentachlorides es auch für nothwendig erachtet, die bei diesem Processe auftretenden gasförmigen Producte zu untersuchen, um zu sehen, ob dabei nur Salzsäure auftritt. Zu diesem Zwecke wurde der Kolben, in welchem die Reaction vor sich gehen sollte, mit zwei entsprechenden Absorptionsapparaten verbunden. Der erstere enthielt Wasser, der zweite Ammoniak und schliesslich war noch ein Gefäss mit Barytwasser vorgelegt. Es zeigte sich, dass, nachdem die Luft verdrängt war, das entweichende Gas im ersten Absorptionsapparate vollständig aufgenommen wurde, da keine Gasblasen in den zweiten Apparat eintraten und derselbe keine Gewichtszunahme erfuhr; auch das Barytwasser wurde nicht getrübt. Das Wasser enthielt Salzsäure und geringe Mengen Phosphorsäure, letztere offenbar von mitgerissenem Phosphorchlorid herrührend. Mithin ist bei der Reaction bloss Salzsäure entwickelt worden. Wir haben in diesem Apparate 65 Grm. Phosphorpentachlorid auf 30 Grm. Campherkohlensäure einwirken lassen. Nachdem die Salzsäureentwicklung zum grössten Theile vorüber war, wurden die Absorptionsapparate entfernt, der Kolben nur mit einem Chlorcalciumrohr abgesperrt und weiter mittelst Wasser gekühlt. Es war eine gelblich gefärbte rauchende Flüssigkeit entstanden, in der noch etwas festes Phosphorpentachlorid bemerkbar war, welches aber nach etwa zwei Tagen verschwand. Nun erst wurden

weitere 15—20 Grm. Phosphorpentachlorid zugesetzt und nachdem auch diese ohne bemerkbare Reaction nach einigen Tagen aufgebraucht waren, wieder 20 Grm. Phosphorchlorid eingetragen, die jedoch selbst nach mehreren Tagen zum grössten Theile unverändert blieben. Nach vierzehntägigem Stehen mit Eiswasser behandelt, begann das ausgeschiedene Öl bereits nach kurzer Zeit fest zu werden und erstarrte endlich beim häufigen Waschen mit Eiswasser zu einer weichen Krystallmasse. Durch Pressen zwischen Leinwand und Papier konnte die noch anhaftende geringe Menge Öl entfernt werden. Das feste Rohproduct betrug 30 Grm. Dasselbe aus Alkoholäther umkrystallisirt, lieferte wieder wie im ersten Falle die schön krystallisirende Chlorverbindung. Wir lassen jetzt die analytischen Resultate dieses Körpers folgen:

I. 0·3189 Grm. über Schwefelsäure getrockneter Substanz lieferten 0·5315 Grm. CO_2 und 0·1481 Grm. H_2O; 0·2093 Grm. lieferten nach Carius 0·3398 Grm. AgCl.

II. 0·3050 Grm. im Vacuum über Schwefelsäure getrockneter Substanz lieferten 0·5140 Grm. CO_2 und 0·1415 Grm. H_2O; 0·1897 Grm. lieferten nach Carius 0·3032 Grm. AgCl; daraus berechnet sich:

I		II	
C	45·45%	C	45·96%
H	5·16 „	H	5·15 „
Cl	40·16 „	Cl	39·54 „ .

Diese Zahlen stimmen zwar genügend überein, jedoch lässt sich daraus keine der Reaction entsprechende Formel für die Chlorverbindung ableiten. Wir haben daher die Substanz neuerlich und wiederholt umkrystallisirt, ohne dass diese Operation einen wesentlichen Einfluss auf den Schmelzpunkt der einzelnen Fractionen gehabt hätte. Die Substanz enthält keinen Phosphor, da die bei den Chlorbestimmungen nach Carius vom Chlorsilber abfiltrirte Lösung keine Phosphorsäurereaction lieferte. Es lag noch die Möglichkeit vor, dass vielleicht in Folge unvollständiger Verbrennung der Kohlenstoffgehalt zu niedrig gefunden wurde; wir haben desshalb eine Verbrennungsanalyse im Sauerstoffstrom besonders langsam ausgeführt, jedoch

dabei mit den früheren Resultaten übereinstimmende Zahlen gefunden.

0·2873 Grm. längere Zeit über Chlorcalcium getrockneter Substanz ergaben 0·4802 Grm. CO_2 und 0·1257 Grm. H_2O entsprechend

C....45·58%
H.... 4·86 „ .

Weniger befriedigend war die Übereinstimmung der mit verschiedenen Mengen dieser Substanz nach der Methode von Carius ausgeführten Chlorbestimmungen.

I. 0·2061 Grm. ergaben 0·3330 Grm. AgCl.

II. 0·2940 Grm. ergaben 0·5079 Grm. Ag. Cl.

Daraus berechnet sich:

Cl...39·97%   Cl...42·73%.

Da weiter beobachtet wurde, dass bei diesen Chlorbestimmungen nach Carius, die bei einer Temperatur von 160—180°C. ausgeführt wurden, sich immer eine gewisse Menge krystallinischer organischer Substanz fand, haben wir die Bestimmungen durch Glühen mit Ätzkalk ausgeführt.

I. 0·3057 Grm. Substanz lieferten 0·6107 Grm. AgCl.

II. 0·3720 Grm. Substanz lieferten 0·7423 Grm. AgCl.

Diese Zahlen entsprechen

I	II
Cl....49·42%	Cl....49·36%.

Stellt man diesen Chlorgehalt mit den früher ausgeführten übereinstimmenden Bestimmungen von Kohlenstoff und Wasserstoff zusammen, so findet man sofort, dass das fragliche Chlorid sauerstofffrei ist und nach der Formel $C_{22}H_{28}Cl_8$ zusammengesetzt sein muss.

Für $C_{22}H_{28}Cl_8$ berechnet	Gefunden				
C....45·83%	45·45 —	45·96 —	45·58%		
H.... 4·86 „	5·15 —	5·12 —	4·86 „		
Cl....49·31 „	—	—	—	49·42 —	49·36%.

Die Bildung dieses sauerstofffreien Chlorides lässt schliessen, dass in der Campherkohlensäure auch keine Carboxylgruppe enthalten ist.

Es ergibt sich, dass die früheren, zahlreichen Chlorbestimmungen nach der Methode von Carius zu niedrige Resultate gegeben haben. Um nach dieser Methode eine vollständige Oxydation des Chlorides zu erzielen, dürfte es nothwendig sein, concentrirtere Salpetersäure bei höherer Temperatur einwirken zu lassen.

Das Chlorid der Campherkohlensäure zeichnet sich durch eine besondere Krystallisationsfähigkeit aus. Aus einer Lösung von absolutem Alkohol und Äther scheidet es sich in mehrere Centimeter langen, farblosen, durchsichtigen Krystallen aus. Selbst die letzte Mutterlauge, die manchmal ein dickes Öl bildet, liefert nach längerem Stehen schöne Krystalle.

Herr Professor v. Zepharovich hatte die Freundlichkeit, über die Krystallform Folgendes mitzutheilen:

Krystallsystem asymmetrisch (triklin).

Axenverhältniss: $a : b : c = 1 : 0{\cdot}8040 : 0{\cdot}4697$ (a Längs-, b Quer-, c Verticalaxe).

Axenwinkel im I. Octanten (vorne, oben, rechts):

$$ac = 103^\circ\ 32'\ 2'';\ bc = 91^\circ\ 57'\ 12'';\ ab = 89^\circ\ 45'\ 48''.$$

Normalwinkel der Pinakoide:

$$100:001 = 76^\circ\ 28';\ 010:001 = 83^\circ\ 3';\ 100:010 = 89^\circ\ 47'$$

Beobachtete Flächen:

$$(100)\ .\ (010)\ .\ (001)\ .\ (\bar{1}20)\ .\ (120)\ .\ (\bar{1}10)\ .\ (110)\ .$$
$$\infty P\breve{\infty}\quad \infty P\bar{\infty}\quad 0P\quad \infty{}^1P\bar{2}\quad \infty P'\bar{2}\quad \infty{}^1P\quad \infty P^1$$

$$(\bar{2}10)\ .\ (320)\ .\ (101)\ .\ (\bar{1}01)\ .\ (\bar{1}\bar{2}2)\ .$$
$$\infty{}^1P\breve{2}\quad \infty P'\breve{3/2}\quad {}^1P^1\breve{\infty}\quad {}_1P_1\infty\quad P_1\bar{2}$$

Krystalle säulenförmig nach der Verticalaxe; die Prismenflächen vorne und rückwärts nicht correspondirend, indem vorne die sämmtlich beobachteten, rückwärts nur $\bar{1}\bar{2}0$ und $\bar{1}20$ auftreten. An den freien Enden erscheinen gewöhnlich $\bar{1}\bar{2}2$ und 001 oder $\bar{1}01$. 001 . Zwillinge dreiseitiger Säulen ($\bar{1}\bar{2}0$. $\bar{1}20$. 100 . 001) mit 100 als Zwillingsebene.

Die Verbindung zeigt den Schmelzpunkt von 45—45·5° C., ist in Wasser unlöslich, ziemlich leicht in Äther, Alkohol, Chloroform und Schwefelkohlenstoff, schwerer in Chlorkohlenstoff löslich. Bei gewöhnlicher Temperatur ist das Chlorid sehr beständig,

jedoch nicht ohne Zersetzung destillirbar. Noch unter 100° C. spaltet es Salzsäure ab, bei höherer Temperatur destillirt unter starker Salzsäureentwicklung eine geringe Menge von bräunlichem Öl über und es hinterbleibt ein klebriger Rückstand. Mit rauchender Salzsäure im zugeschmolzenen Rohre durch acht Stunden auf 110° C. erhitzt, war die feste Substanz in ein Öl verwandelt, welches jedoch von der Salzsäure getrennt und mittelst Chlorcalcium getrocknet, wieder erstarrt. Die feste Substanz war unverändertes Chlorid, dessen Schmelzpunkt dann bei 43° C. gefunden wurde. Mit Wasser im zugeschmolzenen Rohre durch zwanzig Stunden auf 100—110° C. erhitzt, spaltet sich viel Salzsäure ab, wobei ein dickflüssiges Öl gebildet wird welches mit durch Salzsäuregas gesättigtem Äther stehen gelassen dann in ätherischer Lösung mit Wasser gewaschen, hierauf mittelst Chlorcalcium getrocknet, wieder schöne bei 44° C. schmelzende Krystalle des ursprünglichen Chlorides lieferte. Mit Kalilauge gekocht, kommt es zum Schmelzen, erstarrt jedoch wieder beim Erkalten nach einiger Zeit. Nascirender Wasserstoff in der Weise zur Wirkung gebracht, dass man in eine abgekühlte ätherische Lösung, welche Natriumamalgam enthielt, mit Salzsäure gesättigten Äther zutropfen liess und öfters frisches Natriumamalgam zufügte, blieb ohne Einwirkung. Die ätherische Lösung von der Salzmasse abfiltrirt, der grösste Theil des Äthers abdestillirt und mittelst Chlorcalcium getrocknet, gab wieder beim Verdunsten Krystalle des unveränderten Chlorides. Natriumamalgam wirkt auf eine kochende ätherische Lösung desselben nicht ein. Dagegen reagirt metallisches Natrium auf eine solche heftig ein. Mit einem Überschusse von Natrium einige Stunden erwärmt, filtrirt und destillirt, ging, nachdem der Äther entfernt war, über 160° C. wenig, angenehm terpentinartig riechendes Öl über, während ein bedeutender harziger Rückstand zurückblieb.

Vorläufig beschränken wir uns darauf, diesen experimentellen Theil unserer Arbeit mitzutheilen. In Kürze zusammengefasst, hat sich Folgendes daraus ergeben:

Entsprechend den bereits früher gefundenen Eigenschaften des Borneols, verhält sich dieses auch Natrium gegenüber, wie ein einatomiger Alkohol. Das dabei entstehende den Alkoholaten entsprechende Borneolnatrium liefert mit Kohlensäure borneol-

kohlensaures Natron, welches dem äthylkohlensauren Natron analog ist.

Die Campherkohlensäure ist eine nach der Formel $C_{22}H_{32}O_6$ zusammengesetzte Verbindung, in welcher leicht ein oder zwei Atome Wasserstoff durch Metalle ersetzt werden können. Sie enthält wahrscheinlich keine Hydroxyl- und keine Carboxylgruppe, da Acethylchlorid nur wasserentziehend wirkt und durch Phosphorpentachlorid ein sauerstofffreies Chlorid gebildet wird.

Wir wollen noch erwähnen, dass es uns gelungen ist, die Campherkohlensäure unter Vermeidung einer Borneolbildung aus Bibromcampher $C_{10}H_{14}Br_2O$ durch Einwirkung von Natrium und Kohlensäure darzustellen. Diese Resultate liefern ein reichliches Material zur Beurtheilung der Constitution der Campherkohlensäure, respective des Camphers; wir behalten uns vor, auf diesen Gegenstand in der nächsten Zeit zurückzukommen.

Weitere Versuche mit der Campherkohlensäure und ihren Derivaten sind im Gange.

Über die Einwirkung von molecularem Silber auf die Kohlenstoffchloride.

Von Phil. Dr. **Heinrich Goldschmidt.**

Die in vorliegender Abhandlung beschriebenen Versuche habe ich unternommen in der Absicht, durch dieselben etwas beizutragen zur Lösung der Frage nach der Gleichartigkeit oder Ungleichartigkeit der vier Kohlenstoffvalenzen. Der Gedanke, von dem ich ausgieng, war der folgende: Sind an die *n* Valenzen eines Elementes *X*, *n* Chloratome mit der gleichen Affinität gebunden, so müssen sie sich bei einer bestimmten Temperatur chlorentziehenden Mitteln gegenüber ganz gleich verhalten. Es werden entweder alle *n* Chloratome aus der Verbindung herausgenommen unter Isolirung von *X*, oder es findet überhaupt keine Einwirkung statt. Sind dagegen die *n* Chloratome mit verschiedenen Affinitäten mit *X* verknüpft, so können chlorentziehende Agentien möglicherweise nur einen Theil des Chlors entziehen, und es entstehen Chloride von geringerem Chlorgehalt. Es handelt sich also in dem gegebenen Falle darum, ob die Kohlenstoffchloride beim Erhitzen mit molecularem Silber Kohle geben, unangegriffen bleiben, oder ob ein Theil des Chlors entzogen und chlorärmere Chloride gebildet werden.

I. Einwirkung von molecularem Silber auf Carbontetrachlorid CCl_4.

Das Präparat, welches ich benützte, stammte aus der Fabrik von Kahlbaum. Die Flüssigkeit wurde zum Zwecke der Reinigung mit Wasser gewaschen, mit Chlorcalcium getrocknet und hierauf rectificirt. Der grösste Theil davon ging bei 78° C. über. Um mich von der Reinheit des Körpers zu überzeugen, machte ich zwei Dampfdichtenbestimmungen nach der Luftverdrängungsmethode.

1. Bei der Temperatur des siedenden Wassers. 0·082 Grm. verdrängten 12·5 CC. Luft bei einer Temperatur von 20° und einem Barometerstande von 746 Mm.
2. Im Anilindampf. 0·1305 Grm. verdrängten 19·6 CC. Luft bei einer Temperatur von 15° und einem Barometerstande von 746 Mm.

	Berechnet	Gefunden	
Dampfdichte....	5·33	5·66	5·64

3 Grm. moleculares Silber (nach der Methode von Wislicenus bereitet) wurden mit 8 Grm. Carbontetrachlorid im zugeschmolzenen Rohr auf 200° C. erhitzt. Nach 12 Stunden zeigte sich die Flüssigkeit etwas bräunlich gefärbt und von kleinerem Volumen als im Anfange. Beim Öffnen des Rohres fand sich kein Druck vor. Der Inhalt wurde mit Äther ausgezogen. Der Rückstand enthielt kein metallisches Silber mehr, sondern bestand nur aus Chlorsilber. Die ätherische Lösung wurde durch Destillation eingeengt. Nach dem Erkalten schieden sich aus derselben schöne, farblose Nadeln aus. Die Mutterlauge wurde von ihnen abgegossen, weiter eingeengt und durch mehrfache Wiederholung dieses Verfahrens wurden weitere Mengen des krystallisirten Körpers erhalten. Derselbe war in Alkohol und Äther leicht, in Wasser nicht löslich. Er zeigte einen kampherähnlichen Geruch und sublimirte ohne vorher zu schmelzen. Alle diese Eigenschaften deuteten darauf hin, dass der Körper Perchloräthan C_2Cl_6 war. Das specifische Gewicht fand ich zu 1·9, während die meisten Lehrbücher für C_2Cl_6 das specifische Gewicht 2·0 angeben.

0·126 Grm. wurden mit Ätzkalk zum Behufe einer Chlorbestimmung erhitzt und gaben 0·4625 Grm. Chlorsilber.

	Berechnet für C_2Cl_6	Gefunden
Cl........	89·87%	90·48%

Der entstandene Körper war also wirklich Perchloräthan.

Aus dem Versuche geht hervor, dass das Silber dem Carbontetrachlorid bei einer Temperatur von 200° C. nur eines der Chloratome zu entziehen vermag, und dass dieses also lockerer mit dem Kohlenstoff verknüpft ist, als die andern. Es gehört

übrigens nicht einmal die Temperatur von 200° dazu, um di Reaction zu ermöglichen. Schon beim Kochen von Silber mit CCl am Rückflusskühler bilden sich geringe Mengen von C_2Cl_6.

Der Versuch, Carbontetrachlorid auf Zink wirken zu lassen gab ein negatives Resultat. Nach mehrwöchentlichem Erhitzen auf 250° C. zeigte sich das Zink nicht merklich angegriffen.

Ich will hier noch eines Versuches mit CCl_4 erwähnen, de für die in dieser Arbeit behandelten Frage von Wichtigkeit zu sein scheint. Ich erhitzte Carbontetrachlorid mit einer ziemlich grossen Menge Wasser im zugeschmolzenen Rohre auf 250°. Es zersetzte sich hiebei das Chlorid in Kohlensäure und Salzsäure Als aber CCl_4 mit einer sehr geringen Menge Wasser erhitz wurde, machte sich beim Öffnen des Rohres der penetrante Geruch des Kohlenoxychlorides $COCl_2$ bemerkbar. Es schein daraus hervorzugehen, dass im Molekül CCl_4 zwei Chloratome leichter von Wasser angegriffen werden, als die beiden anderen Das Auftreten von Kohlensäure, wenn ein Überschuss von Wasser vorhanden war, erklärt sich dahin, dass das zuerst entstehende Carbonylchlorid weiter in Kohlensäure und Salzsäure zersetzt wird.

II. Einwirkung von molecularem Silber auf Perchloräthan C_2Cl_6.

5 Grm. Perchloräthan wurden mit dem gleichen Gewicht Silber mehrere Stunden lang im zugeschmolzenen Rohr auf 250° C. erhitzt. Da nach dem Erkalten das Aussehen des Rohres zeigte, dass noch sehr viel C_2Cl_6 unverändert geblieben war, wurde die Temperatur auf 280° gesteigert und dieselbe durch sechs Stunden so hoch erhalten. Sodann wurde der Inhalt des Rohres in einen Kolben gethan und aus einem Paraffinbade der flüchtige Antheil desselben abdestillirt. Die zwischen 120 und 180° übergehende Flüssigkeit wurde der fractionirten Destillation unterworfen. Hiedurch gelang es, einen zwischen 115 und 120° siedenden Körper zu isoliren, während nach jedesmaliger Destillation unangegriffenes C_2Cl_6 zurückblieb. Der Siedepunkt des erwähnten Körpers deutete darauf hin, dass derselbe Perchloräthylen C_2Cl_4 war. Analyse und Dampfdichtenbestimmung bestätigten diese Vermuthung.

0·1095 Grm. verdrängten in Anilindampf erhitzt, 15 CC. Luft bei einer Temperatur von 15° und 752 Mm. Barometerstand.

	Berechnet	Gefunden
Dampfdichte......	5·78	6·08

0·2705 Grm. gaben mit Ätzkalk und Zinkstaub erhitzt 0·941 Grm. AgCl.

0·211 Grm. von einer anderen Darstellung gaben beim Behandeln mit $AgNO_3$ und HNO_3 im zugeschmolzenen Rohr 0·728 Grm. AgCl.

	Berechnet für C_2Cl_4	Gefunden	
Cl......	85·54%	85·06%	85·38%

Der entstandene Körper war demnach wirklich Perchloräthylen. Es werden also von den sechs Chloratomen des Perchloräthans zwei leichter durch Silber herausgenommen als die übrigen.

III. Einwirkung von molecularem Silber auf Perchloräthylen C_2Cl_4.

Das zu diesen Versuchen verwendete Perchloräthylen stammte aus der Fabrik von Kahlbaum, und war durch mehrmaliges Fractioniren gereinigt. Der Siedepunkt desselben war 118° C. Eine Dampfdichtenbestimmung wurde unternommen, um mich von der Reinheit des Körpers zu überzeugen.

0·1325 Grm. verdrängten 19 CC. Luft bei einer Temperatur von 18° und 756 Mm. Barometerstand

	Berechnet für C_2Cl_4	Gefunden
Dampfdichte......	5·78	5·89

Moleculares Silber wurde mit einem Überschuss von C_2Cl_4 mehrere Tage lang auf 300° C. erhitzt. Nach dem Öffnen des Rohres, in dem die Erhitzung vorgenommen worden war, zeigte sich das Silber nur zum geringsten Theile in Chlorsilber verwandelt. Es findet also bei 300° noch keine merkliche Einwirkung statt. Einen zweiten Versuch stellte ich in der Weise an, dass der Dampf von Perchloräthylen über in einem Rohr erhitztes Silber geleitet wurde. Es trat in diesem Falle Ausscheidung von Kohle neben Bildung von Chlorsilber auf. Die Flüssigkeit, welche durch Condensation der über das Silber geleiteten Dämpfe

gewonnen wurde, erwies sich als unverändertes Perchloräthylen. Der Siedepunkt war 118° C., die Dampfdichte 5·89. Bei der Temperatur, auf welche das Silber bei diesem Versuche erhitzt war, werden also sämmtliche Chloratome dem Perchloräthylen entzogen. Es ist aber dadurch noch nicht bewiesen, dass sie mit gleicher Stärke an den Kohlenstoff gebunden sind. Vielleicht gelingt es bei gehöriger Regulirung der Temperatur nur die Hälfte des Chlors der Verbindung zu entziehen. Es müsste dann C_6Cl_6, Julin's Chlorkohlenstoff, entstehen. Versuche in dieser Richtung behalte ich mir vor.

Indem man die Resultate, der oben beschriebenen Experimente überblickt, sieht man, dass diejenigen Erscheinungen eingetroffen sind, die unter der Annahme der Ungleichartigkeit der vier Kohlenstoffvalenzen zu erwarten waren. Und ich glaube nicht, dass meine Versuche von der Theorie der gleichartigen Valenzen aus erklärt werden können. Wieso würde es geschehen, dass, je weiter man mit der Entchlorung fortschreitet, eine desto höhere Temperatur angewendet werden muss? Und andrerseits, warum entsteht bei einer Temperatur, bei der die Bildung mehrerer Chloride möglich wäre, doch nur eines derselben? Es bezieht sich dieses auf einen Versuch, bei dem Silber mit einem Überschuss von Carbontetrachlorid längere Zeit auf 300° C. erhitzt wurde, und wobei doch nur Perchloräthan entstand und keine Spur von Perchloräthylen, das doch bei dieser Temperatur aus C_2Cl_6 gebildet wird. Es lässt sich dieses nur unter der Annahme erklären, dass das eine Chloratom in CCl_4 mit weit geringerer Festigkeit gebunden ist, als die übrigen, denn im entgegengesetzten Falle hätte auch C_2Cl_4 entstehen müssen. Übrigens sind ja die von mir angestellten Versuche durchaus nicht die einzigen, bei welchen ein ungleichartiges Verhalten der Chloratome in den diversen Kohlenchloriden beobachtet wird. Die Zersetzung der Dämpfe derselben, wenn sie durch glühende Röhren geleitet werden, entsprechen ganz der Zersetzung durch Silber. CCl_4 zerfällt in C_2Cl_6 und Cl_2 einerseits, in C_2Cl_4 und $2Cl_2$ andererseits. C_2Cl_6 gibt Chlor und Perchloräthylen, letzteres zerfällt je nach der Temperatur der Röhre, durch die es geleitet wird entweder in C_6Cl_6 und Chlor, oder in Kohlenstoff und Chlor.

Die Ungleichartigkeit der vier C-Valenzen tritt auch bei der Substitution des Wasserstoffs im Methan durch Chlor hervor, indem hiebei nicht sofort CCl_4 entsteht, sondern successive CH_3Cl, CH_2Cl_2, $CHCl_3$ und CCl_4. Ebenso werden bei der Reduction des Carbontetrachlorides durch nascirenden Wasserstoff die Chloratome nicht auf einmal, sondern nacheinander herausgenommen.

Was nun den Misserfolg so vieler Versuche anbelangt, isomere Körper darzustellen, deren Isomerie auf der Verschiedenheit der Valenzen, an welche gewisse Gruppen gebunden sind, beruhen soll, so glaube ich nicht, dass dieser ein Beweis für die Gleichartigkeit der Valenzen sein kann. Es ist eine durch eine grosse Zahl von Erscheinungen gestützte Hypothese, dass die beiden Valenzen des Sauerstoffs verschiedener Natur sind, oder mit anderen Worten, der Sauerstoff ist bipolar. Nun wird aber doch Niemand behaupten wollen, es müssten in Folge dieser Ungleichartigkeit der beiden O-Valenzen z. B. zwei verschiedene Essigsäureäthyläther existiren von den Formeln:

$$(C_2H_5) - O + (C_2H_3O) \text{ und } (C_2H_5) + O - (C_2H_3O).$$

Und es entsteht ja auch in der That eine und dieselbe Verbindung, ob nun die Darstellung nach der Gleichung

$$Na\overset{-+}{O}(C_2C_3O) + C_2H_5Cl = NaCl + (C_2H_5)O(C_2H_3O)$$

oder nach der Gleichung

$$Na\overset{-+}{O}(C_2H_5) + C_2H_3OCl = NaCl + (C_2H_5)O(C_2H_3O)$$

verläuft. Bei der Bildung nach der zweiten Gleichung müssen jedenfalls die Radicale Acetyl und Äthyl ihre Stellungen zu dem sie verknüpfenden Sauerstoff getauscht haben.

Ein ähnlicher Platzwechsel kann möglicher Weise auch unter den an ein Kohlenstoffatom gelagerten Radicalen stattfinden in dem Sinn, dass immer die *beständigste* Verbindung entsteht.

Prag, Universitätslaboratorium im März 1881.

Beitrag zur Trennung des Wolframs von Antimon, Arsen und Eisen, nebst Analyse eines sogenannten Pseudometeoriten.

Von **Albert Cobenzl.**

(Aus dem Universitäts-Laboratorium des Professor v. Barth.)

Im vorigen Jahre erhielt ich von Herrn Dr. Aristides Březina ein, äusserlich den Eisenmeteoriten nicht unähnliches, bei Čista, Pilsener Kreis, Böhmen, im Jahre 1879 aufgefundenes Stück Metall zur Analyse. Da dessen Fall nicht beobachtet wurde und dasselbe bei genauerer Untersuchung in physikalischer und chemischer Beziehung sich von den bisher bekannten authentischen Eisenmeteoriten verschieden zeigte, so wurde es nach Dr. Březina's Vorschlag Pseudometeorit genannt.

Von den hauptsächlichsten Eigenschaften, wodurch sich dieses Fundstück von authentischen Eisenmeteoriten unterscheidet, sind nach Dr. Březina's Beobachtungen folgende hervorzuheben.

„Ersteres ist spröde, mit dem Hammer sind leicht Stücke abzuschlagen, ebenso lässt sich dasselbe leicht zu Pulver zerreiben, letztere sind zähe, das Abschlagen von Stücken ist fast unmöglich.

Es hat eine feinkörnige, verworren krystallinische Structur, welche sich durch das schimmernde Aussehen des frischen Bruches und die feine Moirirung einer polirten und mit Salpetersäure geätzten Schnittfläche documentirt; Meteoreisen haben einen hakigen Bruch.

Ferner hat dasselbe eine blasige Beschaffenheit, welche im Innern und an der Oberfläche vielfach zu sehen ist, rundliche Löcher an der Oberfläche sind nicht, wie bei Meteoreisen nach aussen verflacht, so dass ihr allfälliger Inhalt leicht herausfallen kann, sondern sind nur so weit geöffnet, dass der zurückbleibende

Theil $^3/_4$ oder $^4/_5$ einer Vollkugel darstellt, somit noch zusammengreifende Ränder besitzt. Zuweilen sind solche Hohlräume mit einer gleichgeformten dünnen Schale ausgelegt, welche meist an irgend einer Stelle durchlöchert ist, ein Verhalten, wie es an blasigen Hüttenproducten häufig beobachtet wird.

Die Farbe ist violettgrau — nach Raddes internationaler Farbenscala 40·0 — im Gegensatze zu dem neutralgrau der Eisenmeteoriten.

Eine vorgenommene qualitative Analyse ergab als Hauptmenge Eisen, Wolfram, Antimon und Arsen neben wenig Wasser und unlöslichen Silicaten (Eisenoxyd, Thonerde, Kalk und Magnesia) Kohlenstoff und Schwefel. Ausserdem konnten noch geringe Spuren von Wismuth und Zinn nachgewiesen werden.

In Betreff der quantitativen Analyse zeigten sich behufs der Trennung der ersten vier Bestandtheile grosse Schwierigkeiten, da hierüber keine Angaben in der Literatur zu finden sind. [1]

Rose in seinem Lehrbuche der quantitativen Analyse [2] erwähnt, dass die Trennung des Wolframs von den Metallen, deren Schwefelverbindungen in Schwefelammonium löslich sind, mit Ausnahme des Zinnes, mit grossen Schwierigkeiten verbunden sei, ohne jedoch irgend welche nähere Angaben hierüber zu machen. Ferner ist im Lehrbuche der anorganischen Chemie von Dr. Julius Otto in Betreff des Wolframs gesagt, dass die Abscheidung durch Zersetzung der Salze mit Salpetersäure kein genaues Resultat gebe, dass, namentlich wenn Alkalisalze vorhanden sind, viel Wolfram als Metawolframsäure in Lösung bleibe. Auch die Fällung der Wolframsäure durch Quecksilberoxydulsalz sei nicht gut, weil der Niederschlag sehr voluminös auftritt und durch's Filter geht. Eine Trennungsmethode aber, bei der Antimon und Arsen ebenfalls berücksichtigt wären, ist auch hier nicht angegeben.

---

[1] Jahresbericht über die Fortschritte der Chemie. Annalen der Chemie von Justus Liebig; Fresenius, Zeitschrift für analytische Chemie; Berichte der deutschen chemischen Gesellschaft; Anleitung zur quantitativen chemischen Analyse von Dr. C. R. Fresenius; Titrirmethode nach Friedrich Mohr; Lehrbuch der Chemie von H. E. Roscoë und C. Schorlemmer; Quantitative Analyse von Dr. A. Classen

[2] Letzte, von Finkener besorgte Auflage.

Ich war daher genöthigt, eine Art der Bestimmung aufzufinden, womit man befriedigende Resultate erzielen kann.

Nach einer Reihe von Versuchen ist es mir gelungen, ein Verfahren zu finden, das Wolfram als Wolframsäure derart mittelst Salpetersäure abzuscheiden, dass einerseits die abfiltrirte Lösung kein Wolfram, anderseits die ausgeschiedene Säure keine fremden Beimengungen ausser den unlöslichen Silicaten und der Kieselsäure enthält. Ich habe mich in den einzelnen Fällen in der unten angegebenen Weise überzeugt, dass letzteres wirklich der Fall war, und glaube auch, dass die Übereinstimmung der Zahlen für das Wolfram und Arsen und das Gesammtresultat genügenden Nachweis liefert, dass die Trennung gelungen war.

Das analytische Verfahren, welches angewendet wurde, bestand in Folgendem:

Der äusserst fein gepulverte und durch feine Leinwand gesiebte Pseudometeorit wurde in einem Kölbchen mit concentrirter Salpetersäure übergossen und unter zeitweiligem Zusatz von Salzsäure auf dem Wasserbade bis zur Aufschliessung erwärmt. Nach 5 bis 6 Tagen war ausser der rein gelben Wolframsäure kein dunkel gefärbtes Pulver mehr zu sehen.

Die Lösung sammt der Wolframsäure wurde nun in eine Schale gebracht und auf dem Wasserbade bis zur Trockne eingedampft, der staubig-trockne Rückstand mit ganz verdünnter Salpetersäure wieder aufgenommen und nochmals zur Trockne gebracht. Diese Operation wiederholte ich dreimal und nahm erst dann den Rückstand mit sehr verdünnter Salpetersäure unter Zusatz von etwas Weinsäure auf, erwärmte die Lösung auf dem Wasserbade bis 100°, filtrirte, wusch hierauf die zurückgebliebene Wolframsäure unter Decantation mehrmals mit angesäuertem siedendem Wasser und brachte dieselbe dann zuletzt auf das Filter. [1]

Auf dem Filter hat man nun das gesammte Wolfram neben den durch Säuren nicht aufschliessbaren Silicaten und Kiesel-

---

[1] Es ist besonders darauf zu achten, dass das zum Auswaschen dienende Wasser siedend und nur mit einer geringen Menge Salpetersäure versetzt sei, damit einerseits nicht etwas Wolframsäure mechanisch durch's Filter gehe, anderseits nicht etwas davon durch zu grossen Salpetersäurezusatz aufgelöst werde.

säure, im Filtrat befinden sich alle anderen Metalle nebst Thonerde und Kalk.

Die Wolframsäure wurde auf dem Filter mit sehr verdünntem Ammoniak behandelt, wobei sie sich löste und die Silicate neben Kieselsäure zurückblieben. Bei Anwendung von concentrirtem Ammoniak würde sich letztere theilweise lösen. Die ammoniakalische Lösung wurde nun in einem gewogenen Porzellantiegel zur Trockne gebracht, geglüht und die rein strohgelbe Säure gewogen.

Die auf dem Filter zurückgebliebenen Silicate habe ich getrocknet, geglüht und gewogen, und darauf nach der gewöhnlichen Methode durch Aufschliessen mit kohlensaurem Natronkali analysirt.

Das nach dem Abscheiden der Wolframsäure erhaltene Filtrat übersättigte ich mit gelbem Schwefelammonium, wobei Schwefeleisen und Thonerde niederfiel, Arsen, Antimon und Kalk hingegen in Lösung blieben. Das Eisen wurde nach bekannter Art von der Thonerde getrennt. Die Schwefelammoniumlösung ward mit Salzsäure angesäuert, die ausgeschiedenen Schwefelverbindungen des Arsens und Antimons oxydirt, das Arsen als pyroarsensaure Magnesia, das Antimon als antimonsaures Antimonoxyd bestimmt. Den Kalk bestimmte ich durch Überführung des gefällten oxalsauren in Calciumoxyd und Wägen desselben.

Der Schwefel wurde nach Abscheidung des Wolframs als schwefelsaurer Baryt gewogen.

Die Kohlenstoffbestimmung wurde zugleich mit der des Wassers durch Glühen des Pulvers in einem Schiffchen im Sauerstoffstrom mit vorgelegtem Chlorcalciumrohr und Kaliapparate bewerkstelligt.

Durch Reduction der vorhandenen Oxyde im Wasserstoffstrom ward der Sauerstoffgehalt bestimmt.

Das von mir analysirte Stück besass folgende Zusammensetzung:

I. 1·5662 Gramm Substanz gaben 0·4993 Wolframräure; 0·0260 Silicate; 1·2611 Eisenoxyd; 0·0094 Thonerde; 0·1680 pyroarsensaure Magnesia; 0·1947 antimonsaures Antimonoxyd und 0·0058 Kalk.

II. 4·9790 Gramm Substanz gaben 1·5941 Wolframsäure; 0·0677 Silicate und 0·0193 schwefelsauren Baryt.

III. 0·5993 Gramm Substanz gaben 0·0033 Kohlensäure; 0·0048 Wasser und 0·0615 pyroarsensaures Magnesia.

IV. 10·5313 Gramm Substanz gaben 0·0406 schwefelsauren Baryt.

V. 1·3557 Gramm Substanz gaben 0·0146 Wasser, nach Abrechnung des Wassergehaltes 0·0040 Wasser; 0·0123 Thonerde und 0·0072 Kalk.

VI. 0·5084 Gramm Substanz gaben 0·1630 Wolframsäure; 0·0040 Kohlensäure und 0·0039 Wasser.

In 100 Theilen:

Bestandtheile	I	II	III	IV	V	VI	Mittel
Eisen	56·37	—	55·77	—	—	—	56·07
Wolfram	25·32	25·40	—	—	—	25·44	25·39
Antimon	9·85	—	—	—	—	—	9·85
Arsen	5·19	—	4·97	—	—	—	5·08
Silicate	1·66	1·35	—	—	—	—	1·55
Wasser	—	—	0·80	—	—	0·76	0·78
Thonerde	0·60	—	—	—	0·91 [1]	—	0·60
Kalk	0·37	—	—	—	0·53 [1]	—	0·37
Sauerstoff	—	—	—	—	0·28	—	0·28
Kohlenstoff	—	—	0·15	—	—	0·21	0·18
Schwefel	—	0·053	—	0 053	—	—	0·053

Procentische Zusammensetzung der Silicate:

Kieselsäure	41·2
Thonerde	26·8
Eisenoxyd	18·0
Kalk	14·0.

Zur Bestimmung des Eisens und der Thonerde neben Kalk ist es jedoch am vortheilhaftesten das Pulver mit kohlensaurem

[1] Gesammtmenge, erhalten durch Aufschliessen mit kohlensaurem Natron und Salpeter.

Natron und Salpeter aufzuschliessen, indem hierbei dasselbe mit der gesammten Thonerde und Kalk ungelöst bleibt, während alle anderen Elemente vollständig in Lösung gehen.

Zuletzt habe ich noch zu bemerken, wie ich mich von der Reinheit der Niederschläge überzeugt habe.

Das gewogene Wolframtrioxyd wurde mit kohlensaurem Natron zusammengeschmolzen, die Schmelze löste sich in Wasser vollkommen klar ohne Rückstand; Eisen war somit nicht beigemengt.

Das Eisenoxyd wurde ebenfalls mit kohlensaurem Alkali geschmolzen, das hierbei zurückgebliebene Oxyd nochmals gewogen. Die Übereinstimmung der beiden Wägungen zeigte die Reinheit desselben. Die wässerige Lösung der Schmelze gab mit Salzsäure und Zink nicht die charakteristische blaue Färbung, auch mit Schwefelwasserstoff ward nach dem Ansäuern keine Fällung beobachtet.

Auch die pyroarsensaure Magnesia und das antimonsaure Antimonoxyd, auf die gleiche Art wie das Eisenoxyd behandelt, erwiesen sich als vollkommen rein und frei von Wolfram.

Da nun die Niederschläge frei von fremden Beimengungen waren, und die einzelnen Bestimmungen mit einander gut übereinstimmen, so glaube ich, dass man die Trennungsmethode mit Salpetersäure unter den oben angegebenen Bedingungen dort mit gutem Erfolg anwenden kann, wo es sich um die Scheidung des Eisens, Arsens und Antimons von Wolfram handelt.

Die Angabe Otto's, dass bei der Behandlung mit Salpetersäure viel Wolfram als Metawolframsäure gelöst bleibt, ist wahrscheinlich dadurch zu erklären, dass die ursprüngliche Lösung nur einmal oder wenigstens nicht genügend oft zur Trockne gebracht und daher die gebildete Metawolframsäure nicht vollständig zersetzt wurde. Dass die Überführung von metawolframsauren Salzen durch Säuren in der Kochhitze in unlösliches Wolframtrioxyd vollständig gelinge, findet sich übrigens schon in Roscoë-Schorlemmer's Lehrbuch (1879) erwähnt.

Was nun den Pseudometeorit selbst betrifft, so geht aus der physikalischen und chemischen Untersuchung mit an Sicherheit grenzender Wahrscheinlichkeit hervor, dass derselbe kein wirklicher Eisenmeteorit ist, sondern ein Hüttenproduct, wie solche

zur Zeit, als man Wolfram technisch zu verwenden begann, vielfach hergestellt wurden.

Zum Schlusse möge noch sein specifisches Gewicht und seine Hauptbestandtheile neben denen der wirklichen Eisenmeteoriten zum weiteren Beweis für das oben Gesagte zusammengestellt sein:

Eisenmeteore im Mittel[1]		Pseudometeorit	
Eisen	81—98%	Eisen	56·4
Nickel	3—17	Wolfram	25·3
Phosphor	0—1	Antimon	9·9
Cobalt	0—2·6	Arsen	5·1
Spec. Gewicht	6·6—7·9	Im Stück	8·854
		„ Pulver	8·8993.

[1] Nur ein Meteorit, der bei Octibeha Co. Mississippi gefunden, dessen Fall übrigens nicht beobachtet wurde, zeigte bei der Analyse einen Procentgehalt von 37·7 Eisen und 59·7 Nickel.

Die Sulfochromite.

Von **Max Gröger.**

(Aus dem Laboratorium Prof. Zulkowsky's an der techn. Hochschule in Brünn.)

In einer in den Sitzungsberichten der kais. Akademie der Wissenschaften erschienenen Abhandlung [1] sprach ich die Vermuthung aus, dass das Chromsulfid mit den Alkalisulfiden Doppelverbindungen einzugehen vermöge. Erhitzt man nämlich das am erwähnten Orte beschriebene Zinksulfochromit mit Natriumcarbonat in einem Kohlensäurestrome, ohne jedoch die Temperatur bis zum Schmelzen der Masse zu treiben, so erhält man eine lebhaft braunrothe Masse, welche an Salzsäure Zink abgibt; da nun das Zinksulfochromit in Salzsäure unlöslich ist, so schloss ich, dass dabei eine Umsetzung eintritt, die sich durch die Gleichung

$$ZnCr_2S_4 + Na_2CO_3 = Na_2Cr_2S_4 + ZnCO_3$$

ausdrücken lässt. Es gelang aber auf keine Weise, die vermuthete Natriumverbindung von dem Zinkoxyd zu trennen; desshalb wurde versucht, dieselbe auf analoge Weise wie das Zinksulfochromit zu erzeugen, nämlich durch Erhitzen von Natriumcarbonat mit Chromhydroxyd und Schwefel im Wasserstoffstrome. Dabei wurde in der That eine rothe Schmelze, die bei der Behandlung mit Wasser ein rothes Pulver zurückliess, erhalten. Nimmt man an, dass bei diesem Verfahren ein Process sich abspiele, der durch die Gleichung

$$Cr_2(OH)_6 + Na_2CO_3 + S_6 = Na_2Cr_2S_4 + 3H_2O + CO_2 + 2SO_2$$

repräsentirt wird, so müsste man auf 1 Gewichtstheil Chromhydroxyd 0·515 Gewichtstheile Natriumcarbonat und 0·932 Gewichtstheile

[1] Wien, Ber. d. k. Akad. d. Wissensch. LXXXI. Bd., Märzheft, p. 531.

Schwefel nehmen; es zeigt sich aber, dass man dann eine sehr ungleichförmige, stellenweise schwarze Schmelze erhält; soll die Operatiön gut gelingen, so muss man einen grossen Überschuss an den letzteren beiden Bestandtheilen verwenden; ausserdem erwies sich die Anwendung des Wasserstoffstromes, der den Luftzutritt abhalten sollte, als überflüssig, indem der überschüssige Schwefel, der bei der Operation verdampft und verbrennt, dessen Rolle übernimmt.

Übergiesst man die erkaltete Schmelze mit Wasser, so geht Natronschwefelleber in Lösung, während ein ziegelrother Niederschlag ungelöst zurückbleibt. Versucht man jedoch, denselben abzufiltriren und mit Wasser auszuwaschen, so bemerkt man, dass, sobald die Natronschwefelleberlösung zum grössten Theile weggewaschen ist, der Niederschlag durch das Filter geht und auf demselben fast gar nichts zurückbleibt, ferner dass er sich rasch schwärzt, also jedenfalls eine Zersetzung erleidet. Da die Schwärzung an der, der Einwirkung der Luft ausgesetzten Oberfläche des Filtrates beginnt, schloss ich, dass diese Zersetzung durch die oxydirende Wirkung des atmosphärischen Sauerstoffes herbeigeführt werde, und versuchte daher, den Niederschlag in einer sauerstofffreien Atmosphäre, u. zw. im Wasserstoffstrome auszuwaschen; aber einerseits ist der Niederschlag im Wasser so fein vertheilt, dass er sich weder durch Decantation auswaschen, noch durch das dichteste Filter filtriren lässt, anderseits ist die vollständige Ausschliessung des Sauerstoffes der Luft und die Herbeischaffung von luftfreiem Wasser eine so ausserordentlich schwierige, dass es mir nicht gelang, die Schwärzung des Niederschlages zu verhindern.

Behandelt man jedoch die Schmelze mit absolutem Alkohol, so gehen Polysulfide des Natriums in Lösung, und es bleibt ein rother Niederschlag zurück, der sich ganz gut abfiltriren, mit absolutem Alkohol auswaschen und dann trocknen lässt, ohne seine Färbung zu verändern, allein der Niederschlag ist, wie man schon mit freiem Auge erkennen kann, nicht homogen, sondern enthält krystallinische Blättchen von Natriumthiosulfat und Natriumsulfat beigemengt; da für letztere ausser Wasser kein Lösungsmittel bekannt ist, so war ich auch auf diese Weise nicht im Stande, das vermeintliche Natriumsulfochromit zu isoliren.

aber es war aus diesen Versuchen ersichtlich, dass die fragliche Verbindung, sobald sie sich im trockenen Zustande befindet, an der Luft haltbar sei.

Man hat nun längst die Erfahrung gemacht, dass manche in sehr feiner Vertheilung befindliche Niederschläge sich nicht in reinem Wasser, wohl aber in concentrirten Salzlösungen absetzen (z. B. durch Fällung erhaltener Schwefel). Diese Erfahrung suchte ich nun auszunützen. Es musste dabei aber die Lösung einer Verbindung benützt werden, welche erstens auf das vermuthete Natriumsulfochromit nicht chemisch einwirken konnte (am Besten also eine Natriumverbindung), zweitens, sich in Alkohol löst, da man sonst nicht im Stande wäre, den mit derselben ausgewaschenen Niederschlag für sich allein im trockenen Zustande zu erhalten.

Eine solche in Alkohol lösliche Natriumverbindung ist das Ätznatron. Die damit angestellten Versuche gelangen in überraschender Weise; nicht allein setzt sich der Niederschlag in Natronlauge rasch ab, sondern er lässt sich auch an der Luft filtriren und mit derselben auswaschen, ohne die geringste Schwärzung zu erleiden. Die Methode, welche ich einschlug, um diese Verbindung, die sich in der That als

Natriumsulfochromit ($Na_2Cr_2S_4$)

erwies, darzustellen, ist nun folgende:

„Man verreibt 1 Grm. bei niederer Temperatur getrocknetes Chromhydroxyd mit 9 Grm. wasserfreiem Natriumcarbonat und 11 Grm. Schwefel zu einem homogenen feinen Pulver und füllt mit diesem einen Porzellantiegel bis zu ungefähr $^4/_5$ seines Inhaltes an, bedeckt denselben mit einem Porzellandeckel und erhitzt auf eine so hohe Temperatur, dass der Schwefel zu verdampfen und sich am Tiegelrande zu entzünden beginnt, und setzt von diesem Momente an die Erhitzung circa $^1/_4$ Stunde lang fort. Man hört mit dem Erhitzen schon auf, bevor noch aller überschüssige Schwefel verdampft ist, damit zur Schmelze, so lange sie sich in erhitztem Zustande befindet, der Sauerstoff der Luft nicht hinzutreten könne.

Die erkaltete Schmelze übergiesst man mit so viel Wasser, als zur Auflösung der in der Schmelze befindlichen löslichen

Schwefelverbindungen des Natriums nöthig ist, lässt den ungelöst gebliebenen Niederschlag sich absetzen und wäscht mit einer Ätznatronlösung, die in 1 Liter 15 Grm. Ätznatron enthält, durch Decantation so lange aus, bis sich in der decantirten Flüssigkeit weder Schwefelnatrium, noch Natriumthiosulfat nachweisen lässt. Sodann wäscht man die Ätznatronlösung, mit welcher der Niederschlag durchtränkt ist, mit starkem Weingeist (96% Tr.) weg, so lange bis die Waschflüssigkeit Curcumapapier nicht mehr bräunt, verdrängt diese schliesslich durch absoluten Alkohol, bringt den Niederschlag aufs Filter, lässt abtropfen und trocknet dann rasch.

Die so erhaltene Verbindung ist ein dunkel ziegelrothes amorphes Pulver. Im trockenen Zustande erleidet sie beim Liegen an der Luft keine Veränderung. Erhitzt man sie auf höhere Temperatur, so erglüht sie unter Entwicklung von Schwefeldioxyd und Zurücklassung eines Gemenges von Chromsesquioxyd und Natriumsulfat. Dieses Verhalten wurde gleich zur Analyse der Verbindung benützt, und zwar in folgender Weise: Die Substanz wurde bei 100°C. bis zur Gewichtsconstanz getrocknet und dann im Sauerstoffstrome erhitzt. Der dabei in Form von Schwefeldioxyd entweichende Schwefel wurde nach der von Zulkowsky für die Bestimmung des Schwefelgehaltes der Kiese angegebenen Methode[1] bestimmt und als $BaSO_4$ gewogen. Der aus Chromoxyd und Natriumsulfat bestehende Glührückstand wurde gewogen, dann mit Wasser ausgezogen und die gebildete Lösung von Natriumsulfat von dem ungelöst gebliebenen Chromoxyd abfiltrirt; letzteres wurde gewaschen, getrocknet, geglüht und gewogen. Man findet dann die Menge des Natriumsulfates durch Subtraction. Die Lösung des Natriumsulfates wurde mit Chlorbarium versetzt und das gefällte $BaSO_4$ auf gewöhnliche Weise zur Wägung gebracht, woraus sich die Menge des Schwefels berechnet, welche als Sulfat in dem Glührückstande enthalten ist.

0·2445 Grm. Substanz gaben:

0·1244	Grm.	Na_2SO_4	
0·1345	„	Cr_2O_3	
0·6086	„	$BaSO_4$	(beim Rösten im O als SO_2 entwichen).
0·2105	„	$BaSO_4$	(als Na_2SO_4 zurückgeblieben).

[1] Zulkowsky, Ber. d. öst. Ges. z. Förderung d. chem. Industrie, 1881.

Daraus berechnet sich:

		Die Formel $Na_2Cr_2S_4$ verlangt
Na	16·48%	16·49%
Cr	37·75	37·63
S (abröstbar)	34·19	34·41
S (nicht abröstbar)	11·82	11·47
	100·24%	100·00%.

Diese Verbindung ist also in der That Natriumsulfochromit. Zu gleicher Zeit ergibt sich daraus, dass beim Erhitzen derselben im Sauerstoffstrome der durch die Gleichung

$$Na_2Cr_2S_4+O_{13} = Na_2SO_4+Cr_2O_3+3SO_2$$

ausdrückbare Process vor sich geht.

Diese Verbindung ist in Wasser unlöslich; rührt man sie in demselben auf, so geräth sie in einen Zustand ausserordentlich feiner Vertheilung, so dass sie sich, wie schon erwähnt, nicht abfiltriren lässt und beginnt sich dabei zu schwärzen. Da auch noch bei der Behandlung des Niederschlages mit Wasser, welches durch Auskochen vermeintlich von Luft befreit war, immer Bräunung desselben eintrat, so glaubte ich anfangs, dass die Verbindung durch Wasser selbst zersetzbar sei. Diese Bräunung rührt aber nur davon her, dass man durch blosses Auskochen nicht vollkommen sauerstofffreies Wasser herstellen kann. Um mir ein solches zu verschaffen, versetzte ich ausgekochtes Wasser mit Eisenvitriollösung und Kalilauge und liess das Ganze in einem Wasserstoffstrome, der durch Eisenhydroxydul ebenfalls von etwas beigemengtem Sauerstoffe befreit wurde, einige Zeit stehen. Sodann wurde das auf diese Art seines Sauerstoffes beraubte Wasser im Wasserstoffstrome in eine ebenfalls von Wasserstoff durchströmte Vorlage, welche das Natriumsulfochromit enthielt, überdestillirt. Die Vorlage wurde dann luftdicht verschlossen. Der Niederschlag erlitt nicht die geringste Farbenveränderung, setzte sich aber erst nach monatelangem, ruhigem Stehen vollkommen ab.

Vertheilt man jedoch das Natriumsulfochromit in einer Lösung von Ätznatron von oben angegebener Concentration, so setzt es sich ziemlich rasch ab und erleidet auch bei wochen-

langem Stehen an der Luft, sowie auch beim Durchsaugen eine Luftstromes durch die Flüssigkeit keine Schwärzung. Um di Wirkung des Ätznatron zu erklären, glaubte ich annehmen zi dürfen, dass diese durch eine Schwärzung sich kundgebend Zersetzung von der Einwirkung der Kohlensäure der Luft her rühre, dass die Kohlensäure zuerst vom Ätznatron absorbirt werde und letzteres so das Natriumsulfochromit vor der Zersetzung schütze. Allein diese Schwärzung tritt auch auf, wenn man durch das Wasser, in welchem das Natriumsulfochromit vertheilt ist einen vollkommen kohlensäurefreien Luftstrom leitet. Der dabei entstehende schwarze Niederschlag befindet sich ebenfalls in sehr feiner Vertheilung und lässt sich erst abfiltriren, wenn die Flüssigkeit, in welcher er suspendirt ist, durch Eindampfen stark concentrirt wird; er erwies sich als Chromsesquisulfid. Im Filtrat liessen sich Polysulfide des Natriums, Natriumthiosulfat und Natriumhydroxyd, also die Oxydationsproducte des Natriummonosulfides nachweisen, woraus ersichtlich ist, dass die eintretende Zersetzung eine Oxydationserscheinung ist. Die Ursache, warum die Ätznatronlösung diese Oxydation verhindert, ist mir vollständig unerklärlich; man müsste nur annehmen, dass erst die äusserst feine Vertheilung des Natriumsulfochromites im Wasser diese leichte Oxydirbarkeit hervorrufe, und dass die Natronlauge diese feine Vertheilung (wie dies ja auch aus der raschen Absetzbarkeit des Niederschlages in derselben hervorgeht) verhindere. (Ein ähnliches Verhalten zeigt der Eisenkies, der sich in feuchtem Zustande nur in sehr feiner Vertheilung an der Luft von selbst oxydirt, so dass ein Thonschiefer, der Eisenkiestheilchen von solcher Grösse enthält, dass sie schon mit freiem Auge wahrgenommen werden können, sich zur Alaungewinnung, oder zur Darstellung von Vitriolstein sehr schlecht oder gar nicht eignet.)

Concentrirte Salzsäure greift das Natriumsulfochromit nicht, verdünnte Salzsäure, sowie verdünnte Schwefelsäure beim Erhitzen etwas an, wobei eine geringe Schwefelwasserstoffentwicklung bemerkbar ist; wahrscheinlich sind es aber eigentlich nur die durch den Gehalt der Säuren an freiem Sauerstoff erzeugten Zersetzungsproducte desselben, welche von der Säure gelöst werden. In concentrirter Salpetersäure und Königswasser hingegen ist es schon in der Kälte, in verdünnter Salpetersäure

beim Erwärmen unter Bildung der Sulfate des Chroms und Natriums leicht löslich. Concentrirte Schwefelsäure hat in der Kälte fast keine Einwirkung, beim Erhitzen jedoch tritt zuerst eine Schwärzung, sodann unter Schwefeldioxydentwicklung und Schwefelabscheidung eine vollständige Lösung der Verbindung ein, es entsteht dabei eine Natriumsulfat und Chromsulfat enthaltende grüne Lösung.

Nun versuchte ich auf ganz dieselbe Weise das Kaliumsulfochromit darzustellen, indem ich das Natriumcarbonat durch eine äquivalente Menge Kaliumcarbonat ersetzte. Merkwürdigerweise verhält sich aber das Kaliumcarbonat ganz anders; man erhält, selbst wenn man einen noch viel grösseren Überschuss an Kaliumcarbonat und Schwefel nimmt, als dies bei der Darstellung des Natriumsulfochromites geschehen, eine schwarze Schmelze, welche an Wasser die Polysulfide des Kaliums und Kaliumthiosulfat unter Zurücklassung eines schwarzen Niederschlages von krystallinischem Aussehen, der sich sehr gut abfiltriren und auswaschen lässt, abgibt. Der bei 100° C. getrocknete Niederschlag erwies sich bei der Analyse als Chromsesquisulfid, welches nur geringe Mengen von Kalium (0·6%) enthielt. In der Meinung, dass beim Auswaschen des Niederschlages mit Wasser ein analoger Vorgang stattfinde, wie beim Natriumsulfochromit, versuchte ich auf dieselbe Weise, wie dies bei letzterem geschehen, die vermuthete Zersetzung durch Auswaschen des Niederschlages mit Kalilauge und Verdrängen dieser Waschflüssigkeit durch Alkohol die vermeintliche Kaliumverbindung zu isoliren, allein auch auf diese Weise erhielt ich ein Product, das nur 1·3% Kalium enthielt, im Übrigen aber die Zusammensetzung des Chromsesquisulfides zeigte. Auch auf andere Art, wie z. B. durch Ersatz des Kaliumcarbonates durch Kaliumhydroxyd oder durch Eintragen von Chromsesquisulfid in schmelzende Kalischwefelleber konnte ich eine der Formel $K_2Cr_2S_4$ entsprechende Verbindung nicht erhalten. Die Bildung eines solchen kalihältigen Chromsulfides aber beobachtete schon Schafařik[1] beim Schmelzen von Kaliumchromat mit Schwefelleber.

[1] Schafařik, Wien, Ber. d. k. Akad. d. Wissensch. 47, 2, p. 253.

Da das Natriumsulfochromit mit Metallsalzlösungen behan delt die entsprechenden Metallsulfochromite liefert, so konnte e als Ausgangspunkt für die Darstellung derselben benützt werden Zu diesem Zwecke wurde in folgender Weise verfahren: „Au der concentrirten Lösung des entsprechenden Metallchlorides (be der Darstellung der Silber- und Bleiverbindung wurden di Nitrate verwendet) wurde zuerst durch anhaltendes Kochen di Luft so gut wie möglich ausgetrieben, um die Oxydation de Natriumsulfochromites, welches darauf in einen Überschuss der selben eingetragen wurde, und dadurch die Bildung secundäre Producte zu verhindern; nach etwa einstündigem Erhitzen wurd der Niederschlag abfiltrirt, mit heissem Wasser gewaschen und getrocknet. Ich erhielt auf diese Weise die Sulfochromite des Silbers, Bleies, Kupfers, Kadmiums, Zinns, Kobalts, Nickels Eisens, Mangans und Zinks.

Die Eigenschaften dieser verschiedenen Sulfochromite weichen so wenig von einander ab, dass es angezeigt erscheint, dieselben in Einem zu beschreiben. (Die auf nassem Wege erzeugten Sulfochromite des Eisens, Mangans und Zinks zeigen mit Ausnahme der dunkleren Farbe dieselben Eigenschaften, wie die früher von mir auf trockenem Wege dargestellten und in oben citirter Abhandlung beschriebenen Verbindungen.)

Die übrigen Sulfochromite sind sämmtlich schwarze, oder grauschwarze, pulverförmige, in Wasser unlösliche Substanzen. Von Salzsäure werden dieselben nicht angegriffen, hingegen lösen sie sich in Salpetersäure unter Oxydation leicht auf, die entsprechenden Matallsalze bildend. Das Stannosulfochromit hinterlässt dabei Metazinnsäure, das Bleisulfochromit Bleisulfat. Auch in Königswasser sind alle leicht löslich, das Silbersulfochromit natürlich unter Zurücklassung von Chlorsilber.

Beim Erhitzen an der Luft verglimmen die Sulfochromite unter Entwicklung von Schwefeldioxyd. Der Glührückstand besteht bei den Sulfochromiten vom Silber, Kupfer, Kadmium, Kobalt, Nickel und Mangan aus Chromoxyd und den Sulfaten der entsprechenden Metalle, bei dem Eisen- und Stannosulfochromit aus Chromoxyd und Eisenoxyd, respective Zinnoxyd; Blei- und Zinksulfochromit hinterlassen die Chromite diese Metalle.

Dieses Verhalten wurde zur Analyse der Verbindungen benützt, indem sie heftig und anhaltend geglüht wurden, um dadurch das Chromoxyd in die in Salzsäure unlösliche Modification überzuführen. Der Glührückstand wurde mit verdünnter Salzsäure ausgekocht (bei der Silberverbindung wurde Salpetersäure genommen), das ungelöst gebliebene Chromoxyd abfiltrirt und im Filtrat das Metall bestimmt. Es wurde das Silber als AgCl gefällt und gewogen, das Kupfer als CuS gefällt und in Form von Cu_2S gewogen, das Cadmium als $CdCO_3$ gefällt und als CdO gewogen. Die Kobaltlösung wurde mit Schwefelsäure eingedampft, das gebildete $CoSO_4$ als solches zur Wägung gebracht. Das Nickel endlich wurde als Ni $(OH)_2$ gefällt, in NiO übergeführt und gewogen. Die Blei- und Zinnverbindung mussten in etwas anderer Weise analysirt werden, und zwar wurde das Bleisulfochromit mit concentrirter Salpetersäure behandelt, die entstandene Lösung sammt dem ausgeschiedenen Bleisulfat mit verdünnter Schwefelsäure eingedampft und das abgeschiedene $PbSO_4$ auf gewöhnliche Weise zur Wägung gebracht. Das Stannosulfochromit wurde mit Salpetersäure oxydirt, die abgeschiedene Metazinnsäure abfiltrirt, gewaschen, getrocknet, geglüht und gewogen.

Es ergaben:

						Berechnet nach der Formel	
„0·5500 Silber-Sulfochromit	…	0·3544 AgCl	entsprechend	48·50%	Ag	48·11%	$Ag_2Cr_2S_4$
0·5015 Kupfer-	„	….0·1318 Cu_2S	„	21·02	Cu	21·39	$CuCr_2S_4$
0·6400 Blei-	„	….0·4365 $PbSO_4$	„	46·59	Pb	47·40	$PbCr_2S_4$
0·4985 Cadmium-	„	….0·1825 CdO	„	32 03	Cd	32·46	$CdCr_2S_4$
0·5450 Stanno-	„	….0·2327 SnO_2	„	33·59	Sn	33·62	$SnCr_2S_4$
0·6016 Cobalt-	„	….0·3160 $CoSO_4$	„	19·99	Co	20·21	$CoCr_2S_4$
0·5800 Nickel-	„	….0·1517 NiO	„	20·57	Ni	20·21	$NiCr_2S_4$."

Die Sulfochromite des Bariums, Stronziums und Calcium lassen sich aus dem Natriumsulfochromit durch doppelte Zer setzung nicht darstellen, indem diese Umsetzung nur sehr unvol ständig und langsam erfolgt, aus welchem Grunde auch da Natriumsulfochromit Gelegenheit findet, sich zu oxydiren und di früher beschriebenen Zersetzungsproducte zu liefern.

Die Existenz der beschriebenen Sulfochromite zeigt, das das Chromsesquisulfid den Sulfiden vieler Metalle gegenüber sic gerade so verhält, wie das Chromoxyd zu den Oxyden derselben Da nun das Aluminiumoxyd dem Chromoxyd in vielen Stücke sich ähnlich verhält, so liegt die Frage nahe, ob diese Analogi auch zwischen dem Aluminiumsulfid und dem Chromsulfid bestehe eine Frage, mit deren Lösung ich noch beschäftigt bin, und übe welche ich nächstens berichten zu können hoffe.

Zur Reduction Abel'scher auf elliptische Integrale.

Von Dr. **Max Ungar.**

(Vorgelegt in der Sitzung am 10. März 1881.)

In der vorliegenden Abhandlung werden die Bedingungen untersucht, unter welchen ein Abel'sches Integral, dessen Irrationalität durch eine binomische Gleichung gegeben ist, mit Hilfe einer algebraischen Substitution auf ein elliptisches Integral reducirt werden kann.

Für solche Reductionen sind bis jetzt nur wenige Beispiele bekannt. Abgesehen von einigen hyperelliptischen Integralen nennt Legendre im ersten Bande seines „Traité des fonctions elliptiques" die Integrale

$$\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt[3]{(a+bx+cx^2+dx^3)^p}}, \quad \int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt[4]{(a+2bx^2+cx^4)^p}},$$

zwei Integrale, welche Röthig in der Abhandlung „Über einige Gattungen elliptischer Integrale"[1] genauer untersuchte. Er fand, dass die elliptischen Integrale, auf welche die Reduction der voranstehenden in allen Fällen führt, die Moduln

$$k = \tfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}, \text{ respective } k = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

besitzen.

Briot und Bouquet[2] haben die Reductionsfrage unter der wesentlichen Beschränkung, dass sich die obere Grenze des zu reducirenden Integrals als eine überall eindeutige Function ergebe, dahin beantwortet, dass, vorausgesetzt dass die Irrationalität durch eine binomische Gleichung gegeben ist, im Ganzen nur neun Integrale vorhanden sind, welchen diese Eigenschaft zukömmt.

---

[1] Crelle's Journal f. Math., Bd. 56.

[2] Théorie des fonctions elliptiques. Livre V, Paris 1875.

Es sind dies die folgenden:

$$m=3,\quad \int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-a)^2(x-b)^2}},\quad \int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-a)^2(x-b)^2(x-c)^2}},$$

$$m=4,\quad \int\frac{dx}{\sqrt[4]{(x-a)^2(x-b)^3}},\quad \int\frac{dx}{\sqrt[4]{(x-a)^2(x-b)^3(x-c)^3}},$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(x-a)^3(x-b)^3}}$$

$$m=6,\quad \int\frac{dx}{\sqrt[6]{(x-a)^3(x-b)^4}},\quad \int\frac{dx}{\sqrt[6]{(x-a)^3(x-b)^5}},$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt[6]{(x-a)^4(x-b)^5}},\quad \int\frac{dx}{\sqrt[6]{(x-a)^3(x-b)^4(x-c)^5}}.$$

In den letzten Jahren hat Königsberger[1] Untersuchunge allgemeinerer Natur über die Reduction von Abel'schen Inte gralen auf elliptische und hyperelliptische angestellt. Von seine Resultaten ist für die hier in Betracht kommende Frage da folgende hervorzuheben:

„Versteht man unter einen Fundamentalintegral erster Gattung ein solches, in welches nur eine einzige Potenz der Irrationalität

$$y=\sqrt[m]{R(z)}$$

eintritt, so gibt es überhaupt nur drei Wurzelexponenten, welche die Reduction eines einzigen Fundamentalintegrals auf ein elliptisches gestatten. Es hat m die Werthe

$$3,\ 4,\ 6;$$

die entsprechenden Reductionen sind:

$$\int\frac{f(x)dx}{\sqrt[3]{R(x)^\rho}}=\int\frac{dz}{\sqrt{z^3-1}},$$

$$\int\frac{f(x)dx}{\sqrt[4]{R(x)^\rho}}=\int\frac{dz}{\sqrt{z^4-1}},$$

$$\int\frac{f(x)dx}{\sqrt[6]{R(x)^\rho}}=\int\frac{dz}{\sqrt{1-z^3}}.\text{“}$$

[1] Crelles' Journal f. Math. Bd. 85, 86, 87; Math. Annalen Bd. XVI

„Die elliptischen Integrale gestatten die complexe Multiplication mit den Multiplicatoren

$$e^{\frac{2\pi i}{3}}, \quad e^{\frac{2\pi i}{4}}, \quad e^{\frac{2\pi i}{6}}.“$$

„Soll mehr als ein Fundamentalintegral in die Relation eintreten und ist m eine Primzahl, so wird, wenn nicht alle Fundamentalintegrale in der Relation vorhanden sind, das elliptische Integral die complexe Multiplication gestatten müssen.“

An die Untersuchungen Königsbergers knüpft die vorliegende an. Es wird die Frage specieller gestellt, nämlich nur für solche Abel'sche Integrale, deren Irrationalitäten m^{te} Wurzeln sind, die Beschränkung jedoch, dass der Wurzelexponent eine Primzahl sei, wird fallen gelassen.

Dann lässt sich eine Reihe von Sätzen beweisen, durch welche einerseits die Zahlen m, für welche eine Reduction stattfinden kann, bestimmt sind, während andererseits für jedes m die elliptischen Integrale, auf welche reducirt werden kann, gefunden und die in die Relation eintretenden Fundamentalintegrale angegeben werden.

Schliesslich wird gezeigt, wie man zu den hinreichenden Bedingungen der Reduction gelangen kann.

I.

Vor Allem ist der Zusammenhang des Problems mit dem der complexen Multiplication der elliptischen Integrale nachzuweisen. Es geschieht dies durch eine Betrachtung, welche im Wesentlichen nichts als eine leichte Verallgemeinerung der von Königsberger angegebenen ist.

Es sei

$$y^m = R(z), \tag{1}$$

$R(z)$ eine ganze Function von z, m eine beliebige ganze Zahl,

$$m = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots .$$

Soll zwischen einem zur Gleichung 1) gehörigen Abel'schen Integrale und einem elliptischen eine algebraische Beziehung bestehen und sollen ausserdem die oberen Grenzen der beiden

Integrale durch eine algebraische Gleichung von einander abhängen, so wird[1] schon zwischen den Integralen erster Gattung die Gleichung stattfinden müssen

$$\int^{z} \left\{ \frac{\varphi_1(z)}{y} + \frac{\varphi_2(z)}{y^2} + \ldots + \frac{\varphi_{m-1}(z)}{y^{m-1}} \right\} dz = \int^{x} \frac{dx}{\Delta(x)} \qquad 2)$$

$$\Delta(x) = \sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}$$

und es sind x und $\Delta(x)$ rationale Functionen von z und y

$$x = f(z, y)$$
$$\Delta(x) = F(z, y). \qquad 3)$$

Die m Lösungen der Gleichung 1), die sich auf denselben Werth von z beziehen, sind

$$y,\ \varepsilon y,\ \varepsilon^2 y,\ \ldots \varepsilon^{m-1} y;\ \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{m}}.$$

Für jeden dieser Werthe behält die Gleichung 2) ihre Geltung, wenn nur in die Gleichungen 3) derselbe Werth von y eingesetzt wird.

Setzen wir zur Abkürzung

$$a^{\alpha} = \delta,\ \frac{m}{\delta} = m_1,\ e^{\frac{2\pi i}{\delta}} = \theta$$

und bilden die δ Gleichungen, welche durch Einsetzen von

$$y,\ \theta y,\ \theta^2 y,\ \ldots\ \theta^{\delta-1} y$$

in 2) entstehen. Durch Addition derselben erhält man

$$\delta \sum_{1}^{m_1-1} \int^{z} \frac{\varphi_{\varkappa\delta}(z)}{y^{k\delta}}\, dz = \int^{x} \frac{dx}{\Delta(x)} + \int^{x_1} \frac{dx}{\Delta(x)} + \ldots + \int^{x_{\delta-1}} \frac{dx}{\Delta(x)} \qquad 4)$$

und es ist

$$x_\mu = f(z, \theta^\mu y);\ \Delta(x_\mu) = F(z, \theta^\mu y).$$

Die δ elliptischen Integrale auf der rechten Seite lassen sich nach dem Additionstheorem zu einem einzigen von derselben

[1] Pick u. Ungar: Sitzungsber. d. k. Ak. d. W. Nov.-Heft 1880.

Beschaffenheit vereinigen, die Irrationalität der linken Seite ist aber nicht mehr y, sondern y^δ, also durch eine Gleichung niedrigeren Grades gegeben

$$(y^\delta)^{m_1} = R(z).$$

Aus der Gleichung 4) lässt sich auf dieselbe Weise eine andere absondern, welche y^δ zu den Potenzen

$$a,\ 2a,\ 3a,\ \ldots.$$

enthält. Dasselbe gilt für jeden anderen Theiler von m. Die Untersuchung aller dieser besonderen Reductionsgleichungen wird in der allgemeineren mit eingeschlossen sein, bei welcher wir die Voraussetzung machen dürfen, dass die Potenzen von y zu m relativ prim sind.

Seien demnach

$$r_1,\ r_2,\ \ldots.\ r_{\nu-1},\ r_\nu$$

Zahlen unter m, die zu m relativ sind, und die zu untersuchende Gleichung

$$\int^z \left\{\frac{\varphi_1(z)}{y^{r_1}} + \frac{\varphi_2(z)}{y^{r_2}} + \ldots + \frac{\varphi_\nu(z)}{y^{r_\nu}}\right\} dz = \int^x \frac{dx}{\Delta(x)}. \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= f(z, y) \\ \Delta(x) &= F(z, y). \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Wir bilden wieder die ν Gleichungen, welche aus 5) entstehen, wenn man y der Reihe nach durch

$$\varepsilon^{-1}y,\ \varepsilon^{-2}y,\ \ldots.\ \varepsilon^{-(\nu-1)}y,\ \varepsilon^{-\nu}y$$

ersetzt. Zusammen mit der Gleichung 5) haben wir dann $\nu+1$, Gleichungen, welche wir mit den noch zu bestimmenden Grössen

$$C_\nu,\ C_{\nu-1},\ \ldots.\ C_2,\ C_1,\ 1$$

multipliciren. Indem wir sie addiren, erhalten wir

$$\sum_1^\nu{}_k [C_\nu + C_{\nu-1}\varepsilon^{r_k} + C_{\nu-2}\varepsilon^{r_k} + \ldots. + \varepsilon^{\nu r_k}] \int^z \frac{\varphi_k(z)}{y^{r_k}} dz =$$

$$= C_\nu \int^x \frac{dx}{\Delta(x)} + C_{\nu-1} \int^{x_1} \frac{dx}{\Delta(x)} + \ldots + \int^{x_\nu} \frac{dx}{\Delta(x)}. \tag{5'}$$

Wir bilden ferner die Gleichung, deren Lösungen die ν **Einheitswurzeln**

$$\varepsilon^{r_1}, \varepsilon^{r_2}, \ldots . \varepsilon^{r_\nu}$$

und setzen die Grössen C den Coëfficienten dieser Gleichung gleich

$$t^\nu + C_1 t^{\nu-1} + \ldots + C_{\nu-1} t + C_\nu = o. \qquad 7)$$

Dann verschwindet die linke Seite von 5′) identisch und man hat

$$\int^{x_\nu} \frac{dx}{\Delta(x)} + C_1 \int^{x_{\nu-1}} \frac{dx}{\Delta(x)} + \ldots + C_{\nu-1} \int^{x_1} \frac{dx}{\Delta(x)} + C_\nu \int^{x} \frac{dx}{\Delta(x)} = o. \qquad 8)$$

Die oberen Grenzen dieser Integrale sind durch die Gleichungen (6) und die analog gebildeten gegeben, mit ihrer Hilfe lassen sich

$$x,\ x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_{\nu-1}$$

algebraisch durch x_ν ausdrücken, dann ist aber nach einem bekannten Satze von Abel auch die Gleichung

$$\delta \int^{x_\nu} \frac{dx}{\Delta(x)} + C_1 \int^{\xi_{\nu-1}} \frac{dx}{\Delta(x)} + \ldots . + C_\nu \int^{\xi} \frac{dx}{\Delta(x)} = o \qquad 9)$$

erfüllt, in welcher δ eine ganze Zahl ist, $\xi_{\nu-k}$ und $\Delta(\xi_{\nu-k})$ rationale Functionen von x_ν und $\Delta(x_\nu)$ sind

$$\begin{aligned} \xi_{\nu-k} &= \psi[x_\nu, \Delta(x_\nu)] \\ \Delta(\xi_{\nu-k}) &= \Psi[x_\nu, \Delta(x_\nu)]. \end{aligned} \qquad 10)$$

Aus diesen letzten Gleichungen muss aber durch Differentiation folgen

$$\frac{d\xi_{\nu-k}}{\Delta(\xi_{\nu-k})} = M_k \frac{dx_\nu}{\Delta(x_\nu)}, \quad k = 1, 2, \ldots \nu-1, \nu. \qquad 11)$$

Setzt man in 9) ein, so erhält die lineare Relation

$$\delta + C_1 M_1 + C_2 M_2 + \ldots + C_\nu M_\nu = 0 \qquad 12)$$

und es fragt sich, ob diese stattfinden kann.

Ist $\nu=\varphi(m)$, unter $\varphi(m)$ die Anzahl aller Zahlen verstanden, die kleiner als m, zu m relativ prim sind, so sind die C die Coëfficienten der Gleichung

$$F_m(x)=0$$

bekanntlich ganze Zahlen, und das Bestehen der Relation 12) wird an keine besondere Bedingung gebunden sein, wenn $R(z)$ so beschaffen ist, dass zu jeder Potenz von y, y^{r_k} ein Integral erster Gattung existirt. Anders verhält es sich in dem Falle, der im Folgenden immer vorausgesetzt wird, dass

$$\nu<\varphi(m)$$

ist. Dann sind die C im Allgemeinen ganze complexe Zahlen, die aus $\varepsilon=e^{\frac{2\pi i}{m}}$ gebildet sind und da M_k, der Multiplicator eines elliptischen Integrals für die rationale Transformation, entweder eine ganze Zahl oder die Lösung einer ganzzahligen Gleichung zweiten Grades mit negativer Discriminante sein muss, so werden sich aus dem Bestehen von 12) weitere Folgerungen ergeben müssen.

Vor Allem die, dass der Modul k^2 des elliptischen Integrals die complexe Multiplication gestatten muss; wäre dies nicht der Fall, so könnten die Multiplicatoren

$$M_1,\ M_2,\ \ldots\ M_\nu$$

nur ganze Zahlen sein. Dann liesse sich aus 12) eines der C linear mit rationalen Coëfficienten durch die anderen ausdrücken und man könnte die Gleichung 8) in die Form bringen

$$0=\left\{M_\nu\int^{x_\nu}\frac{dx}{\Delta(x)}-\delta\int^{x}\frac{dx}{\Delta(x)}\right\}+C_1\left\{M_\nu\int^{x_{\nu-1}}\frac{dx}{\Delta(x)}-M_1\int^{x}\frac{dx}{\Delta(x)}\right\}+\ldots$$
$$+C_{\nu-1}\left\{M_\nu\int^{x_1}\frac{dx}{\Delta(x)}-M_{\nu-1}\int^{x}\frac{dx}{\Delta(x)}\right\}.$$

Denken wir uns jeden Klammerausdruck nach dem Additionstheorem in ein Integral verwandelt und dieselben Schlüsse wiederholt, so würden wir zu einer linearen Relation geführt, die

ein C weniger enthält

$$\delta + C_1 M_1' + C_2 M_2' + \ldots + C_{\nu-1} M_{\nu-1}' = 0. \qquad 13)$$

Vorausgesetzt, dass kein Klammerausdruck verschwindet, würde man durch ν-malige Wiederholung dieser Operationen dazu gelangen, ein beliebiges der C durch die M allein auszudrücken, so dass jedes C eine rationale Zahl sein müsste. Dies widerspräche aber der Irreductibilität der Gleichung

$$F_m(x) = 0,$$

welche alle primitiven Einheitswurzeln zu Lösungen hat und von welcher die Gleichung mit den Coëfficienten C jedenfalls ein Theiler ist.

Damit wäre schon bewiesen, dass die Multiplicatoren M nicht alle reelle Zahlen sein können, wenn noch gezeigt wird, dass die im Laufe des Beweises gemachte Annahme, dass keiner der sich successive ergebenden Klammerausdrücke verschwindet, eine berechtigte war.

Aber ein solcher Ausdruck hat die Form

$$\mu \int^{x} \frac{dx}{\Delta(x)} + \mu_1 \int^{x_1} \frac{dx}{\Delta(x)} + \ldots + \mu_\nu \int^{x_\nu} \frac{dx}{\Delta(x)},$$

wo die Zahlen μ aus den M rational zusammengesetzt, also ebenfalls reelle Zahlen sein müssen. Verschwindet dieser Ausdruck, so findet man aus 5)

$$\mu \sum_1^{\nu} {}_k \int \frac{\varphi_k(z)}{y^{r_k}} dz + \mu_1 \sum_1^{\nu} {}_k \varepsilon^{r_k} \int \frac{\varphi_k(z) dz}{y^{r_k}} + \ldots + \mu_\nu \sum_1^{\nu} \varepsilon^{\nu r_k} \int \frac{\varphi_k(z)}{y^{r_k}} dz = 0.$$

Dieser Ausdruck verschwindet offenbar dann und nur dann, wenn die Gleichung

$$\mu + \mu_1 \varepsilon^{r_k} + \mu_2 \varepsilon^{2 r_k} + \ldots + \mu_\nu \varepsilon^{\nu r_k} = 0$$

$$k = 1,\ 2, \ldots \nu$$

erfüllt ist, also, wenn die ν Einheitswurzeln ε^{r_k} die Lösungen einer Gleichung νten Grades mit ganzzahligen Coëfficienten sind,

was unter der Annahme

$$\nu < \varphi(m)$$

der Irreductibiltät von $F_m(x)$ widerspricht.

Es ergibt sich somit die Verallgemeinerung des von Königsberger für Primzahlen ausgesprochenen Satzes:

„Enthält die Reductionsgleichung nicht alle $\varphi(m)$ Fundamentalintegrale, welche zu den Potenzen von y gehören, die zu m gelativ prim sind, so gestattet der Modul des elliptischen Integrals, auf welches reducirt werden kann, nothwendigerweise die complexe Multiplication."

Die Grössen m sind dann im Allgemeinen Lösungen von ganzzahligen Gleichungen zweiten Grades mit derselben Discriminante, und da sich die C durch die M ausrechnen lassen, so werden auch diese sich als Lösungen von ganzzahligen Gleichungen zweiten Grades ergeben müssen, deren Discriminante dieselbe ist. Sollten sich die C nicht ausrechnen lassen, dadurch, dass die sie multiplicirenden Klammerausdrücke verschwinden, so wird das, was von den C behauptet wird, für die Grössen μ gelten müssen, was in der weiteren Untersuchung nichts ändert.

Es hängt demnach die Möglichkeit der Reduction mit den Zerlegungen der Gleichung

$$F_m(x) = 0$$

in Factoren zusammen und diese sind es daher, welche zunächst untersucht werden müssen.

II.

Die Gleichung

$$F_m(x) = 0,$$

welche die primitiven Wurzeln von

$$x^m = 1$$

zu Lösungen hat, lässt sich immer in zwei Factoren zerlegen, deren Coëfficienten die Form

$$\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\, i^{\left(\frac{P-1}{2}\right)^2} \sqrt{P}$$

haben, wo a und b ganze Zahlen sind, P das Product aller in m enthaltenen Primzahlen ist. [1]

Wir haben die Frage zu beantworten, wie viele Zerlegungen mit Coëfficienten von der Form

$$\alpha + \beta i^k \sqrt{q}$$

für beliebige Zahlen m die Gleichung $F_m(x) = 0$ zulässt, und welche primitiven Einheitswurzeln die Lösungen eines Factors der Zerlegung bilden.

Die Sätze, welche wir hier zusammenstellen und die im Folgenden bewiesen werden sollen, gestatten unmittelbar die Folgerungen zu ziehen, welche sich aus der Thatsache, dass complexe Multiplication stattfindet, für die Reductionsfrage ergeben.

1. Ist

$$m = p,\ p^k,\ 2p,\ 2p^k,\ 4,$$

p eine beliebige ungerade Primzahl, so lässt sich die Zerlegung nur auf eine einzige Art bewerkstelligen. Die Coëfficienten der Zerlegung haben in den vier ersten Fällen die Form

$$\frac{a}{2} + \frac{b}{2} i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} \sqrt{p}$$

für $m = 4$ die Form

$$a + bi.$$

2. Ist $m = 2^\lambda$, $\lambda \geqq 3$, so gibt es drei und nur drei verschiedene Zerlegungen, die Coëfficienten haben die Form

$$a + bi, \quad a + bi\sqrt{2}, \quad a + b\sqrt{2}.$$

3. Ist $m = p^\pi q^k r^\rho \ldots$ eine beliebige ungerade Zahl, so gehört zu jedem Theiler δ von $P = pqr \ldots$ eine Zerlegung mit dem Coëfficienten

$$\frac{a}{2} + \frac{b}{2} i^{\left(\frac{\delta-1}{2}\right)^2} \sqrt{\delta}$$

und dieselben und nur diese Zerlegungen finden statt für

$$m = 2p^\pi q^k r^\rho \ldots$$

[1] Siehe: Dedekind, Vorl. über Zahlentheorie, wo der Beweis für alle ungeraden Zahlen, die durch kein Quadrat theilbar sind, geliefert wird.

4. Für $m = 4p^\pi q^k r^\rho \ldots$ hat man ausser diesen Zerlegungen noch eine, welche dem Theiler 4 entspricht mit den Coëfficienten

$$a + bi$$

und überdies zu jeder Zerlegung eine zweite, deren Coëfficienten

$$\frac{a}{2} + \frac{b}{2} i \sqrt{\pm\delta}$$

sind, wenn die der ungeraden Zahl entsprechenden

$$\frac{a}{2} + \frac{b}{2} \sqrt{\pm\delta}$$

waren.

Ist endlich

$$m = 2^\lambda p^\pi q^k r^\rho \ldots \qquad \lambda \geqq 3,$$

so hat man die drei Zerlegungen, welche zu 2^λ gehören, mit den Coëfficienten

$$a + bi, \quad a + bi\sqrt{2}, \quad a + b\sqrt{2}$$

und überdies entsprechen jedem Theiler δ von $P = pqr \ldots$ vier Zerlegungen mit den Coëfficienten

$$\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\sqrt{\delta}, \quad \frac{a}{2} + \frac{b}{2} i\sqrt{\delta}, \quad \frac{a}{2} + \frac{b}{2} i\sqrt{2\delta}, \quad \frac{a}{2} + \frac{b}{2}\sqrt{2\delta}.$$

Es seien

$$a_1, a_2, \ldots a_\mu, a_{\mu+1}, \ldots a_{2\mu}$$

alle Zahlen, welche, kleiner als m, zu m relativ prim sind, so ist

$$F_m(x) = (x - \varepsilon^{a_1}).(x - \varepsilon^{a_2}) \ldots (x - \varepsilon^{a_{2\mu}})$$

$$2\mu = \varphi(m), \quad \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{m}}.$$

Sind λ, λ' die beiden Lösungen einer ganzzahligen Gleichung zweiten Grades und wird angenommen, dass $F_m(x)$ in zwei Factoren zerlegbar ist, deren Coëfficienten in λ rational sind, so ist nothwendig

$$F_m(x) = f(x, \lambda) f(x, \lambda') \tag{1}$$

$$f(x, \lambda) = (x-\varepsilon^{\alpha_1})(x-\varepsilon^{\alpha_2})\dots(x-\varepsilon^{\alpha_\mu}) \qquad 2)$$

$$f(x, \lambda') = (x-\varepsilon^{\beta_1})(x-\varepsilon^{\beta_2})\dots(x-\varepsilon^{\beta_\mu}), \qquad 3)$$

wenn die α und β die Zahlen a in irgend einer Aufeinanderfolge sind.

Setzt man in 1) für ε, ε^h und wählt h relativ prim zu m, so bleibt die linke Seite, also auch die rechte der Gleichung unverändert. Aber 2) geht durch diese Substitution über in

$$f_h(x, \lambda) = (x-\varepsilon^{h\alpha_1})(x-\varepsilon^{h\alpha_2})\dots(x-\varepsilon^{h\alpha_\mu}) \qquad 4)$$

und 3) in

$$f_h(x, \lambda') = (x-\varepsilon^{h\beta_1})(x-\varepsilon^{h\beta_2})\dots(x-\varepsilon^{h\beta_\mu}). \qquad 5)$$

Es sind 4) und 5) ganze Functionen von x, welche die h^{ten} Potenzen der Lösungen von 2), respective von 3) zu Lösungen haben, deren Coëfficienten also gleichfalls in λ, respective λ' rational sind.

Dann ist aber 4) nothwendigerweise identisch entweder mit 2) oder mit 3). Denn wäre dies nicht der Fall, so würde der grösste gemeinsame Theiler von 2) und 4)

$$G(x, \lambda)$$

von einem niedrigeren als dem μ^{ten} Grade sein, das Product

$$G(x, \lambda)\ G(x, \lambda')$$

wäre eine ganze Function mit rationalen Coëfficienten von einem Grade, der kleiner als 2μ und hätte mit $F_m(x)$ Lösungen gemein. Dies widerspräche der Irreductibilität von $F_m(x)$.

Die h^{te} Potenzsumme der Lösungen von $f(x, \lambda) = 0$ ist also gleich der ersten Potenzsumme der Lösungen entweder derselben Gleichung oder der Gleichung

$$f(x, \lambda') = 0,$$

wenn h und m relativ prim sind, und dasselbe gilt, wenn man von der letzten Gleichung ausgeht.

Wir können auch Folgendes aussagen:

Die beiden Zahlenreihen

$$(\alpha) = \alpha_1,\ \alpha_2, \dots \alpha_\mu$$

$$(\beta) = \beta_1,\ \beta_2, \dots \beta_\mu,$$

beziehungsweise die ihnen nach dem Modul m congruenten Zahlen bleiben ungeändert oder vertauschen sich gleichzeitig, wenn man

für α, $h\alpha$

für β, $h\beta$

setzt und h eine der Zahlen aus den Reihen (α), (β) ist.

Man kann $\alpha_1 = 1$ annehmen, dann bleiben die beiden Reihen ungeändert, für

$$h = \alpha_1, \ \alpha_2, \ldots \alpha_\mu,$$

sie vertauschen sich für

$$h = \beta_1, \ \beta_2, \ldots \beta_\mu.$$

Sei vorerst m eine der Zahlen

$$p, \ p^k, \ 2p, \ 2p^k, \ 4$$

und p eine ungerade Primzahl, dann gibt es immer eine Zahl g, welche zum Exponenten $\varphi(m)$ nach dem Modul m gehört, so dass die Congruenz

$$g^r \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\, m)$$

erst für $r = \varphi(m)$ erfüllt ist.

Die Zahlen α, β sind dann jede einer anderen Potenz von g congruent, jedenfalls gehören aber die Zahlen, welche geraden Potenzen von g congruent sind, in die Reihe (α). Solcher Potenzen gibt es aber gerade

$$\frac{\varphi(m)}{2} = \mu.$$

Die Reihe (α), demnach auch die Reihe (β), ist vollständig bestimmt, dann aber auch die Lösungen eines jeden Factors der Zerlegung, so dass zwei verschiedene Zerlegungen nicht vorhanden sein können.

Es folgt ferner, dass die Reihe (α) alle quadratischen Reste, die Reihe (β) alle Nichtreste von m enthält; die Potenzsummen der Ausdrücke $f(x, \lambda)$ also auch die Coëfficienten ergeben sich dann durch Auswerthung der bekannten Gauss'schen Summen in der Form

$$\frac{a}{2} + \frac{b}{2} i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} \sqrt{p}.$$

Ist $m = 2p$, so ist jede Lösung von $F_{2p}(x)$ die negative ein[e]
bestimmten von $F_p(x)$, die Coëfficienten der Zerlegung hab[en]
also dieselbe Form.

Es ist ferner

$$F_{p^k}(x) = F_p(x^{p^{k-1}}).$$

Die Zerlegung der linken Seite wird unmittelbar aus der d[er]
rechten Seite zu entnehmen sein, die Coëfficienten sind dieselbe[n].

Endlich ist

$$F_4(x) = x^2 + 1 = (x+i)(x-i).$$

Es sei zweitens

$$m = 2^\lambda, \quad \lambda \geqq 3.$$

Die Zahl 5 gehört zum Exponenten $\frac{1}{2}\varphi(2^\lambda)$ nach dem Modul 2^λ.
Alle Zahlen, welche zu 2^λ relativ prim sind, sind congruent

$$5,\ 5^2,\ 5^3,\ \ldots$$
$$-5,\ -5^2,\ -5^3.\ \ldots$$

Wir bilden die vier Reihen

$$(a) = 5,\ 5^3,\ 5^5,\ \ldots$$
$$(b) = 5^2,\ 5^4,\ 5^6,\ \ldots$$
$$(c) = -5,\ -5^3,\ -5^5,\ \ldots$$
$$(d) = -5^2,\ -5^4,\ -5^6.\ \ldots.$$

Die Reihe (b) gehört jedenfalls der Reihe (α) an, da in ihr
auch die Einheit vorkömmt. Die Combinationen, welche allein
möglich bleiben, sind die folgenden:

$$(\alpha) = (b) + (a); \quad (\beta) = (d) + (c) \tag{1}$$
$$(\alpha) = (b) + (c); \quad (\beta) = (d) + (a) \tag{2}$$
$$(\alpha) = (b) + (d); \quad (\beta) = (c) + (a). \tag{3}$$

Mehr als drei Zerlegungen kann es also nicht geben, aber diese
finden in der That statt, denn es ist

$$\begin{aligned} F_8(x) &= x^4 + 1 \\ &= (x^2+i)(x^2-i) \\ &= (x^2+i\sqrt{2}x-1)(x^2-i\sqrt{2}x-1) \\ &= (x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1) \end{aligned}$$

und aus diesen sind die Zerlegungen von $F_{2\lambda}(x)$ für $\lambda > 3$ unmittelbar zu entnehmen.

Ist drittens m eine beliebige ungerade Zahl

$$m = p^\pi q^\varkappa r^\rho \ldots,$$

so wollen wir zur Abkürzung

$$p^\pi = \delta_1, \quad \frac{m}{p^\pi} = m_1$$

setzen. Es ist $\varphi(m) = \varphi(\delta_1)\,\varphi(m_1)$ die Anzahl aller Zahlen unter m, welche zu m relativ prim sind.

Seien

$$\begin{array}{l} \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\mu \\ \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_\mu \end{array}$$

die beiden vollständig bestimmten Reihen, welche zu δ_1 gehören, ferner

$$r_1, r_2, \ldots r_\nu$$

alle Zahlen unter m_1, welche zu m_1 relativ prim sind.

Die $2\mu\nu$ Zahlen, welche zu m relativ prim sind, ordnen wir in folgender Weise:

$$[\alpha] = \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 m_1 + r_1\delta_1, \ \alpha_1 m_1 + r_2\delta_1, \ldots\ldots \alpha_1 m_1 + r_\nu\delta_1 \\ \alpha_2 m_1 + r_1\delta_1, \ \alpha_2 m_1 + r_2\delta_1, \ldots\ldots \alpha_2 m_1 + r_\nu\delta_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_\mu m_1 + r_1\delta_1, \ \alpha_\mu m_1 + r_2\delta_1, \ldots\ldots \alpha_\mu m_1 + r_\nu\delta_1 \end{array} \right.$$

$$[\beta] = \left\{ \begin{array}{l} \beta_1 m_1 + r_1\delta_1, \ \beta_1 m_1 + r_2\delta_1, \ldots\ldots \beta_1 m_1 + r_\nu\delta_1 \\ \beta_2 m_1 + r_1\delta_1, \ \beta_2 m_1 + r_2\delta_1, \ldots\ldots \beta_2 m_1 + r_\nu\delta_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \beta_\mu m_1 + r_1\delta_1, \ \beta_\mu m_1 + r_2\delta_1, \ldots\ldots \beta_\mu m_1 + r_\nu\delta_1 . \end{array} \right.$$

Wir zerfällen $F_m(x)$ in zwei Factoren, so dass die Potenzen von ε in dem einen der Reihe $[\alpha]$, in dem zweiten der Reihe $[\beta]$ angehören.

Die erste Potenzsumme der Lösungen des Factors ist dann

$$\begin{aligned} S_1 &= \left[\varepsilon^{\alpha_1 m_1} + \varepsilon^{\alpha_2 m_1} + \ldots + \varepsilon^{\alpha_\mu m_1}\right]\left[\varepsilon^{r_1\delta_1} + \varepsilon^{r_2\delta_1} + \ldots + \varepsilon^{r_\nu\delta_1}\right] \\ &= s_1 R_1, \end{aligned}$$

wenn s_1 die erste Potenzsumme ist des entsprechenden Factors in der Zerlegung von $F_{\delta_1}(x)$, R_1 die erste Potenzsumme von $F_{m_1}(x)$. Es ist

$$s_1 = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} \sqrt{p},$$

R_1 aber eine ganze Zahl. Dasselbe gilt für jede andere Potenzsumme. Es sind demnach die Coëfficienten dieser Zerlegung ebenfalls von der Form

$$\frac{a}{2} + \frac{b}{2} i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} \sqrt{p}.$$

Eine ganz analoge Rechnung kann man in Bezug auf jede in m enthaltene Primzahlpotenz durchführen.

Man sieht aber leicht ein, dass, wenn $F_m(x)$ auf zwei verschiedene Arten in zwei Factoren zerlegbar ist, auch eine dritte von diesen beiden verschiedene Zerlegung vorhanden sein wird, dergestalt, dass die in den Coëfficienten auftretende Irrationalität, das Product der beiden gegebenen Irrationalitäten ist.

Man hat nämlich der Voraussetzung nach

$$\begin{aligned} F_m(x) &= f(x, \sqrt{p}) f(x, -\sqrt{p}) \\ &= f_1(x, \sqrt{q}) f_1(x, -\sqrt{q}). \end{aligned}$$

Wir bilden den grössten Theiler zwischen

$$f(x, \sqrt{p}) \text{ und } f_1(x, \sqrt{q}),$$

er hat die Form

$$G(x, \sqrt{p}, \sqrt{q}),$$

ferner den grössten gemeinsamen Theiler zwischen

$$f(x, -\sqrt{p}) \text{ und } f_1(x, -\sqrt{q}),$$

er hat die Form

$$G(x, -\sqrt{p}, -\sqrt{q}).$$

Das Product

$$G(x, \sqrt{p}, \sqrt{q})\ G(x, -\sqrt{p}, -\sqrt{q})$$

ist ein Theiler von $F_m(x)$, die Coëfficienten sind rational in $\sqrt{p}$ und $\sqrt{q}$, aber man sieht unmittelbar, dass die Ausdrücke mit $\sqrt{p}$

sich gegen die mit $-\sqrt{p}$ wegheben, ebenso die mit $\sqrt{q}$ gegen die mit $-\sqrt{q}$, es bleibt nur die Irrationalität

$$\sqrt{pq}$$

die überall dasselbe Vorzeichen hat, diese aber kann nicht herausfallen, weil sonst $F_m(x)$ eine rationale Zerlegung zulassen müsste.

Demnach gibt es zu jedem Theiler δ von $P = pqr\ldots$ eine bestimmte Zerlegung mit den Coëfficienten

$$\frac{a}{2} + \frac{b}{2} i^{\left(\frac{\delta-1}{2}\right)^2} \sqrt{\delta},$$

die so gebildeten Zerlegungen sind aber auch die allein möglichen.

Gäbe es noch eine Zerlegung, so könnte sie keinesfalls eine andere Irrationalität als

$$\sqrt{\pm\delta}$$

enthalten, wenn δ ein Theiler von $pqr\ldots$ ist.

Wir können nämlich die Thatsache, dass eine Zerlegung mit der Irrationalität

$$\sqrt{\pm r}$$

vorhanden ist, auch in folgender Weise darstellen. Es ist

$$\varkappa F_m(x) = X^2 \pm r Y^2. \tag{1}$$

Dann sind X und Y ganze und ganzzahlige Functionen von x, $\varkappa$ zu r relativ prim.

Wir bestimmen eine Zahl $\varkappa'$ durch die Congruenz

$$\varkappa\varkappa' \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, r),$$

dann ist

$$F_m(x) = \varkappa' X^2 \pm r[\varkappa' Y^2 + \rho F_m(x)].$$

Setzen wir für x irgend eine Lösung x_1 von $F_m(x)$, so erhalten wir

$$0 = \varkappa' X_1^2 \pm r\varkappa' Y_1^2.$$

Es ist

$$X_1^2 = r A_1,$$

wo A_1 $x_1^{2\mu}$ nicht mehr enthält. Differentiiren wir die Identität 2),

so erhalten wir

$$F'_m(x) = 2\varkappa' XX' \pm r[2\varkappa' YY' + \rho F'_m(x)].$$

Wir setzen in diese Gleichung für x der Reihe nach

$$x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_{2\mu}$$

alle Lösungen der Gleichung $F_m(x) = 0$ und bilden das Produc derselben. Die linke Seite wird die Discriminante von $F_m(x)$ welche wir mit Δ bezeichnen wollen

$$\Delta = r^\mu \sqrt{A_1 A_2 \ldots A_\mu} B + r \,.\, Q.$$

Auf beiden Seiten dieser Gleichung stehen jetzt nur meh ganze Zahlen. Es muss Δ durch r theilbar sein, weil aber Δ eine Potenz von m ist, so wird r ein Theiler von

$$P = rpq \ldots$$

sein müssen.

Sollte es also ausser den vorhandenen Zerlegungen noch eine geben, so könnte dies nur in der Weise stattfinden, dass zu einem Theiler δ zwei verschiedene Zerlegungen, eine reelle und eine complexe existiren, oder dass man eine Zerlegung mit den Coëfficienten

$$a + bi$$

hat. Beide Fälle müssten, wenn einer stattfindet, zugleich stattfinden, wie daraus folgt, dass zu zwei Zerlegungen eine dritte gehört, deren Irrationalität das Product der beiden gegebenen ist.

$$\sqrt{-\delta}\ \sqrt{\delta} = \delta i.$$

Soll aber eine Zerlegung

$$kF_m(x) = X^2 + Y^2$$ [1]

stattfinden, so ersieht man durch die eben angestellte Betrachtung, dass dann Δ durch

$$2^{2\mu}$$

[1] Dass die Quadratzahl k nicht durch 4 theilbar ist, ergibt sich aus der Vergleichung der Coëfficienten gleich hoher Potenzen von x auf beiden Seiten. Es müsste jeder Coëfficient von X und Y durch 2 theilbar sein, man könnte demnach durch 4 dividiren.

theilbar sein muss, was nicht der Fall ist, so lange m den Factor 4 nicht enthält und der Voraussetzung nach ist m eine ungerade Zahl. Übrigens folgt dies auch aus einem bekannten Satze von Kronecker:

„$F_m(x)$ ist dann und nur dann in Bezug auf eine Einheitswurzel reductibel, wenn der Exponent dieser Einheitswurzel ein Theiler von m ist.“ [1]

In ganz analoger Weise erledigen sich aber die Fälle

$$m' = 2m$$

$$m' = 4m$$

$$m' = 2^{\lambda} m$$

durch Schlüsse, deren Ausführung eine blosse Wiederholung der bereits gemachten wäre. Wir können somit die am Eingange dieses Abschnittes aufgestellten Sätze als bewiesen ansehen.

III.

Für die Reductionsfrage ergeben sich aus dem Vorhergehenden unmittelbar die folgenden Sätze:

1. Die Anzahl der Fundamentalintegrale, welche in die Reductionsgleichung eintreten, ist genau

$$\mu = \frac{\varphi(m)}{2},$$

die Potenzen von y, durch welche sie gekennzeichnet sind, sind die Potenzen von

$$\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{m}},$$

welche in einem der beiden Factoren der Zerlegung von $F_m(x)$ als Lösungen enthalten sind, wenn diese Zerlegung eine complexe ist.

Hat m keinen Theiler von der Form

$$4n+3, \; 4, \; 2^{\lambda}, \; \lambda \geqq 3,$$

[1] Liouville's Journal, Bd. 19: Mémoire sur les functions irréductibles de l'expression

$$x^m - 1 = 0.$$

so gibt es auch keine Reduction, wenn nicht etwa alle Fundamentalintegrale in die Relation eintreten, welcher Fall in dieser Untersuchung nicht berücksichtigt ist.

2. Das elliptische Integral gestattet die complexe Multiplication mit dem Multiplicator

$$\alpha + \beta i \sqrt{\delta}$$

und es ist $i\sqrt{\delta}$ eben die Irrationalität, welche in die Coëfficienten der entsprechenden Zerlegung von $F_m(x)$ eintritt, es ist also für einen gegebenen Wurzelexponenten m die Zahl der verschiedenen möglichen Reductionen, gerade die Zahl der complexen Zerlegungen von $F_m(x)$. Sind die Fundamentalintegrale, respective die Potenzen von y bekannt, welche in die Reductionsgleichung eintreten, so ist der Multiplicator der complexen Multiplication des elliptischen Integrals bestimmt.

In seinen bekannten Untersuchungen über die complexe Multiplication der elliptischen Integrale hat Kronecker gezeigt, wie man bei gegebenem Multiplicator

$$i\sqrt{n}$$

den zugehörigen Integralmodul finden kann. Es geschieht dies durch Resultantenbildung aus Modular- und Multiplicatorgleichung. Man kann demnach, wenn der Wurzelexponent m gegeben ist, die Integrale angeben, auf welche allein eine Reduction möglich wäre.

Die Untersuchung wäre somit vollständig abgeschlossen, wenn man auch die hinreichenden Bedingungen für die ganze Function $R(z)$ in $y = \sqrt[m]{R(z)}$ angeben könnte, damit die Reduction auch wirklich stattfinde.

Diese letzte Frage ganz allgemein zu lösen, ist mir bis jetzt nicht gelungen, es scheint auch, dass in dem Vorhergehenden die Hilfsmittel zu ihrer Lösung nicht gegeben sind.

Doch kann man in vielen Fällen auch zu diesen Bedingungen gelangen. Dies soll im Folgenden gezeigt werden, wobei uns zugleich die Gelegenheit geboten sein wird, Beispiele von Reductionen für mehrere Zahlen m anzugeben.

Es sei ein zur Gleichung

$$\eta^m = P(\xi) \tag{1}$$

gehöriges Abel'sches Integral auf ein elliptisches reducirbar. Dann besteht die Relation

$$\sum_r \int^{\xi} \frac{f_r(\xi)}{\eta^{\alpha_r}} d\xi = \int^{x} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}} \tag{2}$$

und zwischen x und ξ, $\Delta(x)$ und ξ finden die wiederholt angegebenen algebraischen Gleichungen statt.

Wir nehmen an, ein zu einer zweiten Gleichung

$$y^m = R(z) \tag{3}$$

gehöriges Abel'sches Integral sei auf dasselbe elliptische Integral reducirbar.

Dann werden die Potenzen von y, welche in die Relation eintreten, entweder der Reihe $[\alpha]$ oder der Reihe $[\beta]$ angehören. Es ist für die folgende Auseinandersetzung ohne Bedeutung, welcher der beiden Reihen sie angehören. Wir haben eine zweite Relation

$$\sum_r \int^{z} \frac{\varphi_r(z)}{y^{\beta_r}} dz = \int^{x} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}} \tag{4}$$

und zwischen x und z, $\Delta(x)$ und z finden analoge Gleichungen, wie für ξ statt. Dann wird man aber auch haben

$$\sum_r \int^{\xi} \frac{f_r(\xi)}{\eta^{\alpha_r}} d\xi = \sum_r \int^{z} \frac{\varphi_r(z)}{y^{\beta_r}} dz \tag{5}$$

und zwischen z und ξ besteht eine algebraische Gleichung, die man durch Elimination von x aus den gegebenen erhält.

Wir haben an anderer Stelle nachgewiesen,[1] dass die nothwendige Folge einer solchen Gleichung 5) die ist, dass jedes zu $\sqrt[m]{R(z)}$ gehörige Fundamentalintegral auf eine Summe von p bestimmten gleichartigen, zu $\sqrt[m]{P(\xi)}$ gehörigen reducirbar sein muss und zwar in der Weise, dass die Gleichungen bestehen müssen:

---

[1] Pick u. Ungar: Sitzungsber. d. Ak. d. W. Nov.-Heft 1880, p. 918.

$$\int^{z}\frac{\psi_1(z)}{y^{m-1}}dz=\int^{\xi_1}\frac{\varphi_1(\xi)}{\eta}d\xi+\int^{\xi_2}\frac{\varphi_1(\xi)}{\eta}d\xi+\ldots+\int^{\xi_p}\frac{\varphi_1(\xi)}{\eta}d\xi$$

$$\int^{z}\frac{\psi_2(z)}{y^{m-1}}dz=\int^{\xi_1}\frac{\varphi_2(\xi)}{\eta}d\xi+\int^{\xi_2}\frac{\varphi_2(\xi)}{\eta}d\xi+\ldots+\int^{\xi_p}\frac{\varphi_2(\xi)}{\eta}d\xi$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad 6)$$

$$\int^{z}\frac{\psi_r(z)}{y^{m-k}}dz=\int^{\xi_1}\frac{\varphi_r(\xi)}{\eta^k}d\xi+\int^{\xi_2}\frac{\varphi_r(\xi)}{\eta^k}d\xi+\ldots+\int^{\xi_p}\frac{\varphi_r(\xi)}{\eta^k}d\xi$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\int^{z}\frac{\psi_p(z)}{y}dz=\int^{\xi_1}\frac{\varphi_p(\xi)}{\eta^{m-1}}d\xi+\int^{\xi_2}\frac{\varphi_p(\xi)}{\eta^{m-1}}d\xi+\ldots+\int^{\xi_p}\frac{\varphi_p(\xi)}{\eta^{m-1}}d\xi.$$

Die Integrale auf der rechten Seite sind willkührlich gewählte Integrale erster Gattung, die auf der linken sind durch sie bestimmt.

Die oberen Grenzen

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots\ \xi_p$$

der Integrale auf der rechten Seite sind dann die Lösungen einer Gleichung p^{ten} Grades, deren Coëfficienten z rational enthalten

$$\xi^p+F_1(z)\xi^{p-1}+\ldots+F_{p-1}(z)\xi+F_p(z)=0, \qquad 7)$$

während das Product der Irrationalitäten

$$\sqrt[m]{R(z)}\ \sqrt[m]{P(\xi)}=\Lambda(z,\xi) \qquad 8)$$

sich als eine rationale Function von z und ξ darstellen muss.

Sind anderseits 7) und 8) gegeben, so folgt aus ihnen durch Differentiation das System 6).

Wählen wir die ganzen Functionen $\varphi(\xi)$ so, dass sie eben die sind, welche die Relation

$$\sum_r\int^{\xi_k}\frac{\varphi_r(\xi)}{\eta^{\alpha_r}}d\xi=\int^{x_k}\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}}$$

befriedigen, so erhält man aus 6)

$$\sum_r\int^{z}\frac{\psi_r(z)}{y^{m-\alpha_r}}dz=\sum_1^p{}_k\int^{x_k}\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}} \qquad 9)$$

Da sich die rechte Seite nach dem Additionstheorem zu einem Integrale vereinigen lässt, so erscheint in 9) die Reduction thatsächlich durchgeführt.

Damit ergibt sich, dass die hinreichende Bedingung für $R(z)$ darin gegeben ist, dass der Gleichung 8) genügt werden kann, während ξ und z durch eine Gleichung von der Form der Gleichung 7) mit einander verbunden sind.

Welche Bedingungen dann die Coëfficienten von $R(z)$ bei gegebenem m und $P(\xi)$ erfüllen müssen, diese Frage wird in jedem vorgelegten Falle zu beantworten sein.

Diese Kriterien setzen die Kenntniss eines reducirbaren Integrals voraus. Wir wollen zeigen, wie man zu Integralen gelangen kann, die die Reduction gestatten, und welche sich durch eine recht einfache Form auszeichnen.

Zu diesem Zwecke gehen wir von der Gleichung

$$y^m = 1 - z^\mu$$

aus und wollen, um die Darstellung zu vereinfachen,

$$\mu = m$$

annehmen.

Das Integral

$$\int \frac{z^{l_r-1}}{y^{\alpha_r}}\,dz$$

ist ein Integral erster Gattung, so lange l_r kleiner ist als α_r.

Die Periodicitätsmoduln dieses Integrals, deren Anzahl die allgemeine Formel mit

$$2p = (m-1)(m-2)$$

beziffert, sind nicht von einander unabhängig. Setzen wir

$$K_r = \int_0^1 \frac{z^{l_r-1}}{y^{\alpha_r}}\,dz$$

und bestimmen eine ganze Zahl σ durch die Congruenz

$$\sigma\alpha_r \equiv l_r \pmod{m},$$

so zeigt eine sehr einfache Rechnung, dass sie sich alle aus den

Grössen

$$K_r,\ \varepsilon^{\alpha_r} K_r,\ \varepsilon^{2\alpha_r} K_r,\ \dots\ \varepsilon^{(m-1)\alpha_r} K_r$$

linear und ganzzahlig zusammensetzen. Diese Grössen sind zwa auch noch nicht linear-unabhängig, sie sollen aber der Symmetri wegen beibehalten werden.

Ist übrigens $\varphi(m)=2$, sind also nur zwei Zahlen unter m z m relativ prim, so sieht man schon hier, dass nur zwei unabhän gige Perioden vorhanden sind. Ist also der Wurzelexponen $m=3, 4, 6$, so ergibt sich, dass die obere Grenze der zugehörige Integrale eine doppeltperiodische Function ist, und dass das Ver hältniss der beiden Perioden durch die Einheitswurzeln

$$e^{\frac{2\pi i}{3}},\quad e^{\frac{\pi i}{2}},\quad e^{\frac{\pi i}{3}}$$

dargestellt ist.

Ist $\varphi(m)>2$, so wissen wir aus den vorhergehenden Unter suchungen, dass wir nur dann eine doppeltperiodische Umkeh rungsfunction erhalten können, wenn wir die Summe von $\frac{\varphi(m)}{2}$ bestimmten Fundamentalintegralen bilden.

Sie sind durch die Zahlen

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots\ \alpha_\mu$$

gekennzeichnet. Wir bemerken, dass in dem vorliegenden Falle nur die eine Reihe möglich ist, welche die Einheit nicht enthält, weil

$$\int \frac{dz}{y}$$

logarithmisch unendlich werden kann, also kein Integral erster Gattung ist.

Demzufolge bilden wir das Integral

$$J = A_1 \int \frac{z^{l_1-1}}{y^{\alpha_1}} dz + A_2 \int \frac{z^{l_2-1}}{y^{\alpha_2}} dz + \dots + A_\mu \int \frac{z^{l_\mu-1}}{y^{\alpha_\mu}} dz,$$

in welchem die Constanten A vorläufig unbestimmt gelassen werden. Soll J ein Integral erster Gattung sein, so muss für jedes r, $l_r < \alpha_r$ sein und wir setzen überdies fest, dass die

Congruenzen

$$\sigma\alpha_1 \equiv l_1 \pmod{m}$$
$$\sigma\alpha_2 \equiv l_2 \pmod{m}$$
$$\cdots\cdots$$
$$\sigma\alpha_\mu \equiv l_\mu \pmod{m}$$

erfüllt sind, was nicht für jedes m der Fall ist.

Ist dann

$$K_1 = \int_0^1 \frac{z^{l_1-1}}{y^{\alpha_1}}\,dz, \quad K_2 = \int_0^1 \frac{z^{l_2-1}}{y^{\alpha_2}}\,dz, \ldots K_\mu = \int_0^1 \frac{z^{l_\mu-1}}{y^{\alpha_\mu}}\,dz,$$

so werden die mit demselben Integrationsweg gebildeten Periodicitätsmoduln eines jeden einzelnen in J enthaltenen Integrals sich auf dieselbe Weise aus den Grössen

$$\begin{array}{l} K_1,\ \varepsilon^{\alpha_1}K_1,\ \varepsilon^{2\alpha_1}K_1,\ \ldots\ \varepsilon^{(m-1)\alpha_1}K_1 \\ K_2,\ \varepsilon^{\alpha_2}K_2,\ \varepsilon^{2\alpha_2}K_2,\ \ldots\ \varepsilon^{(m-1)\alpha_2}K_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ K_\mu,\ \varepsilon^{\alpha_\mu}K\ ,\ \varepsilon^{3\alpha_\mu}K\ ,\ \ldots\ \varepsilon^{(m-1)\alpha_\mu}K_\mu \end{array}$$

linear und ganzzahlig zusammensetzen. Aber wir können diese Integrationswege so wählen, dass, unter λ eine ganze Zahl verstanden, die Periodicitätsmoduln geradezu die Grössen

$$\begin{array}{l} \lambda^{(0)}K_1,\ \lambda^{(1)}\varepsilon^{\alpha_1}K_1,\ \lambda^{(2)}\varepsilon^{2\alpha_1}K_1,\ \ldots\ \lambda^{(m-1)}\varepsilon^{(m-1)\alpha_1}K_1 \\ \lambda^{(0)}K_2,\ \lambda^{(1)}\varepsilon^{\alpha_2}K_2,\ \lambda^{(2)}\varepsilon^{2\alpha_2}K_2,\ \ldots\ \lambda^{(m-}\ \varepsilon^{(m-1)\alpha_2}K_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda^{(0)}K_\mu,\ \lambda^{(1)}\varepsilon^{\alpha_\mu}K_\mu,\ \lambda^{(2)}\varepsilon^{3\alpha_\mu}K\ ,\ \ldots\ \lambda^{(m-1)}\varepsilon^{(m-1)\alpha_\mu}K_\mu \end{array}$$

sind.

Dann sind aber die Periodicitätsmoduln von J die folgenden:

$$\begin{array}{ll} \omega_0 = \lambda^{(0)}\{A_1K_1 + A_2K_2 + \ldots + A_\mu K_\mu\} & \\ \omega_1 = \lambda^{(1)}\{\varepsilon^{\alpha_1}A_1K_1 + \varepsilon^{\alpha_2}A_2K_2 + \ldots + \varepsilon^{\alpha_\mu}A_\mu K_\mu\} & \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \omega_{\mu-2} = \lambda^{(\mu-2)}\{\varepsilon^{(\mu-2)\alpha_1}A_1K_1 + \varepsilon^{(\mu-2)\alpha_2}A_2K_2 + \ldots + \varepsilon^{(\mu-2)\alpha_\mu}A\ K_\mu\} & 1) \\ \omega_{\mu-1} = \lambda^{(\mu-1)}\{\varepsilon^{(\mu-1)\alpha_1}A_1K_1 + \varepsilon^{(\mu-1)\alpha_2}A_2K_2 + \ldots + \varepsilon^{(\mu-1)\alpha_\mu}A_\mu K_\mu\} & \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \omega_{m-1} = \lambda^{(m-1)}\{\varepsilon^{(m-1)\alpha_1}A_1K_1 + \varepsilon^{(\ -1)\alpha_2}A_2K_2 + \ldots + \varepsilon^{(m-1)\alpha_\mu}A_\mu K_\mu\}. & \end{array}$$

Wir wählen die bisher unbestimmten Grössen A so, dass $\mu-1$ Gleichungen

$$\omega_0 = \omega_1 = \qquad = \omega_{\mu-2} = 0$$

durch sie befriedigt werden. Dies erreichen wir durch die folgenden Bestimmungen

$$\begin{aligned} A_1 &= D_1 K_2 K_3 \ldots K_\mu \\ A_2 &= D_2 K_1 K_3 \ldots K_\mu \\ &\ldots\ldots\ldots \\ A_\mu &= D_\mu K_1 K_2 \ldots K_{\mu-1} \end{aligned} \tag{2}$$

und es sind die D_k, die nach der letzten Horizontalreihe genommenen Unterdeterminanten der Determinante

$$D = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & \ldots\ldots & 1 \\ \varepsilon^{\alpha_1}, & \varepsilon^{\alpha_2}, & \varepsilon^{\alpha_3} & \ldots\ldots & \varepsilon^{\alpha_\mu} \\ \varepsilon^{2\alpha_1}, & \varepsilon^{2\alpha_2}, & \varepsilon^{2\alpha_3}, & \ldots\ldots & \varepsilon^{2\alpha_\mu} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varepsilon^{(\mu-2)\alpha_1}, & \varepsilon^{(\mu-2)\alpha_2}, & \varepsilon^{(\mu-2)\alpha_3}, & \ldots & \varepsilon^{(\mu-2)\alpha_\mu} \\ \varepsilon^{(\mu-1)\alpha_1}, & \varepsilon^{(\mu-1)\alpha_2}, & \varepsilon^{(\mu-1)\alpha_3}, & \ldots & \varepsilon^{(\mu-1)\alpha_\mu} \end{vmatrix} \tag{3}$$

Sind die A aber so gewählt, so zeigt es sich, dass von den übrigen $m-\mu+1$ Periodicitätsmoduln nur zwei linear-unabhängig bleiben.

Denn setzt man die Werthe der A aus 2) in 1) ein, so erhält man die Werthe der übrigen Periodicitätsmoduln, die wir in Determinantenform so schreiben können

$$\omega_s = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & \ldots\ldots & 1 \\ \varepsilon^{\alpha_1}, & \varepsilon^{\alpha_2}, & \varepsilon^{\alpha_3}, & \ldots\ldots & \varepsilon^{\alpha_\mu} \\ \varepsilon^{2\alpha_1}, & \varepsilon^{2\alpha_2}, & \varepsilon^{2\alpha_3}, & \ldots\ldots & \varepsilon^{2\alpha_\mu} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varepsilon^{(\mu-2)\alpha_1}, & \varepsilon^{(\mu-2)\alpha_2}, & \varepsilon^{(\mu-2)\alpha_3}, & \ldots & \varepsilon^{(\mu-2)\alpha_\mu} \\ \varepsilon^{s\alpha_1}, & \varepsilon^{s\alpha_2}, & \varepsilon^{s\alpha_3}, & \ldots\ldots & \varepsilon^{s\alpha_\mu} \end{vmatrix} \lambda^{(s)} K_1 K_2 \ldots K_\mu . \qquad s \geqq \mu - 1$$

Bei einer Vertauschung von α_r mit $\alpha_{r'}$ ändert ω_s nur das Vorzeichen und ist ausserdem in Bezug auf eben diese Zahlen

symmetrisch. Man hat also nach einem bekannten Satze über solche Determinanten [1]

$$\omega_{\mu-1} : \omega_{\mu} : \ldots . : \omega_{m-1} = S_{\mu-1} : S_{\mu} : \ldots . : S_{m-1} \qquad 4)$$

und die Grössen S sind ganze und ganzzahlige symmetrische Functionen der Lösungen

$$\varepsilon^{\alpha_1},\ \varepsilon^{\alpha_2},\ \ldots .\ \varepsilon^{\alpha_{\mu}}$$

eines Factors der Zerlegung von $F_m(x)$.

Aber dann ist es klar, dass durch zwei verschiedene von diesen, alle übrigen linear ausdrückbar sind, dass also mehr als zwei unabhängige Perioden in der That nicht vorhanden sind. Das Verhältniss der beiden ist

$$\frac{\Lambda'}{\Lambda} = \frac{a' + b'i\sqrt{\delta}}{a + bi\sqrt{\delta}}$$

oder

$$\frac{\Lambda'}{\Lambda} = \frac{a' + b'\sqrt{\delta}}{a + b\sqrt{\delta}},$$

je nachdem die Zerlegung von $F_m(x)$ eine complexe oder eine reelle ist.

Im ersten Falle wird man ein elliptisches Integral mit demselben Periodenverhältnisse angeben können, und da der Multiplicator der complexen Multiplication die Form hat

$$M = \alpha + \beta\frac{\Lambda'}{\Lambda},$$

so sieht man, dass dieses elliptische Integral die complexe Multiplication zulässt, mit einem Multiplicator, der den in den vorhergehenden Abschnitten bewiesenen Sätzen entspricht.

Nennen wir das Abel'sche Integral u, so haben wir

$$z = f(u)$$
$$x = \text{sinam } u.$$

---

[1] Baltzer, Determinanten, p. 86.

Jedem Werthe von z entsprechen m Werthe u

$$u_1 + n\Lambda + n'\Lambda'$$
$$u_2 + n\Lambda + n'\Lambda'$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$u_m + n\Lambda + n'\Lambda',$$

aber jedem dieser Werthe nicht mehr als ein Werth von x.

Es wird, wie man sich leicht überzeugt, z für keinen Werth von u von unendlich hoher Ordnung unendlich, so dass der Schluss berechtigt erscheint, dass z und x durch eine algebraische Gleichung verbunden sein werden.

Das ist aber gleichbedeutend damit, dass die betrachteten Abel'schen Integrale durch eine algebraische Substitution sich in elliptische, und zwar in ganz bestimmte transformiren lassen.

Eine ähnliche Betrachtung lässt sich für die Gleichung

$$y^m = 1 - z^{\mu}$$

durchführen, wenn μ, passend gewählt, von m verschieden ist.

Wir wollen einige der Reductionen, welche das Resultat dieser Betrachtung sind, angeben.

$m = 3,$
$$y^3 = 1 - z^3$$
$$\alpha = 2, \quad l = 1$$
$$x = \frac{\sqrt[3]{4y}}{1-z} \text{ führt auf } \int^x \frac{dx}{\sqrt{x^3 - 1}}$$
$$\text{Multiplicator}: a + bi\sqrt{3}$$

$m = 4,$
$$y^4 = 1 - z^4$$
$$\alpha = 3, \quad l = 1$$
$$x = \frac{y^2}{z^2} \text{ führt auf } \int^x \frac{dx}{\sqrt{x(1+x^2)}}$$
$$\text{Multiplicator}: a + bi$$

$m = 6,$
$$y^6 = 1 - z^6$$
$$\alpha = 5, \quad l = 2$$
$$x = \frac{y^2}{z^2} \text{ führt auf } \int^x \frac{dx}{\sqrt{x(1+x^3)}}$$
$$\text{Multiplicator}: a + bi\, 3\sqrt{\;}$$

$m = 7,$ $$y^7 = 1 - z^7$$
$$\alpha_1 = 3, \quad \alpha_2 = 5, \quad \alpha_3 = 6$$
$$l_1 = 1, \quad l_2 = 4, \quad l_3 = 2$$
Multiplicator: $a + bi\sqrt{7}$

$m = 8,$ $$y^8 = 1 - z^8$$
$$\alpha_1 = 5, \quad \alpha_2 = 7$$
$$l_1 = 1, \quad l_2 = 3$$
$$x = \frac{y^4 + z^4}{z^2 y^2} \text{ führt auf } \int^x \frac{dx}{\sqrt{(x+2)(x^2-2)}}$$
Multiplicator: $a + bi\sqrt{2}$

$m = 8,$ $$y^8 = 1 - z^8$$
$$\alpha_1 = 3, \quad \alpha_2 = 7$$
$$l_1 = 1, \quad l_2 = 5$$
$$x = \frac{1}{z^2 y^2} \text{ führt auf } \int^x \frac{dx}{\sqrt{x(x^2+2)}}$$
Multiplicator: $a + bi$

$m = 9,$ $$y^9 = 1 - z^{18}$$
$$\alpha_1 = 2, \quad \alpha_2 = 5, \quad \alpha_3 = 8$$
$$l_1 = 3, \quad l_2 = 3, \quad l_3 = 3$$
Multiplicator: $a + bi\sqrt{3}$

$m = 12,$ $$y^{12} = 1 - z^{12}$$
$$\alpha_1 = 7, \quad \alpha_2 = 11$$
$$l_1 = 1, \quad l_2 = 5$$
$$x = \frac{z^4 + y^4}{z^2 y^2} \text{ führt auf } \int^x \frac{dx}{\sqrt{(x^2-3)x}}$$
Multiplicator: $a + bi$

$m = 12,$ $$y^{12} = 1 - z^{12}$$
$$\alpha_1 = 5, \quad \alpha_2 = 11$$
$$l_1 = 1, \quad l_2 = 7$$

$$2x^3 = \frac{1}{z^6 y^6} \text{ führt auf } \int^x \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$$

Multiplicator : $a + bi\sqrt{3}$

$m = 15,\qquad y^{15} = 1 - z^{15}$

$$\alpha_1 = 7,\quad \alpha_2 = 11,\quad \alpha_3 = 13,\quad \alpha_4 = 14$$
$$l_1 = 1,\quad l_2 = 8,\quad l_3 = 4,\quad l_4 = 2$$

Multiplicator : $a + bi\sqrt{15}$

$m = 16,\qquad y^{16} = 1 - z^{16}$

$$\alpha_1 = 5,\quad \alpha_2 = 7,\quad \alpha_3 = 13,\quad \alpha_4 = 15$$
$$l_1 = 3,\quad l_2 = 2,\quad l_3 = 11,\quad l_4 = 9$$

$$x = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} + z^4 y^4}{\frac{2}{\sqrt{2}} z^2 y^2} \text{ führt auf } \int^x \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(2x^2-1)}}$$

Multiplicator : $a + bi\sqrt{2}$

$m = 18,\qquad y^{18} = 1 - z^{18}$

$$\alpha_1 = 5,\quad \alpha_2 = 11,\quad \alpha_3 = 17$$
$$l_1 = 2,\quad l_2 = 8,\quad l_3 = 14$$

Multiplicator : $a + bi\sqrt{3}$

$m = 21,\qquad y^{21} = 1 - z^{21}$

$$\alpha_1 = 5,\quad \alpha_2 = 10,\quad \alpha_3 = 13,\quad \alpha_4 = 17,\quad \alpha_5 = 19,\quad \alpha_6 = 20$$
$$l_1 = 1,\quad l_2 = 2,\quad l_3 = 11,\quad l_4 = 16,\quad l_5 = 8,\quad l_6 = 4$$

Multiplicator: $a + bi\sqrt{7}$

$m = 22,\qquad y^{22} = 1 - z^{22}$

$$\alpha_1 = 7,\quad \alpha_2 = 13,\quad \alpha_3 = 17,\quad \alpha_4 = 19,\quad \alpha_5 = 21$$
$$l_1 = 1,\quad l_2 = 5,\quad l_3 = 15,\quad l_4 = 9,\quad l_5 = 3$$

Multiplicator: $a + bi\sqrt{11}$

$m = 24, \qquad y^{24} = 1 - z^{24}$

$$\alpha_1 = 7, \quad \alpha_2 = 11, \quad \alpha_3 = 19, \quad \alpha_4 = 23$$
$$l_1 = 2, \quad l_2 = 5, \quad l_3 = 13, \quad l_4 = 17$$

Multiplicator: $a + bi$.

Die Anzahl dieser Beispiele liesse sich noch erheblich vermehren, doch zeigen schon diese, dass es sehr viele Zahlen m gibt, für welche eine Reduction vorhanden ist. Die Beispiele für die Zahlen $m = 8$, $m = 12$ zeigen, dass zu ein und derselben Irrationalität Reductionen auf wesentlich verschiedene elliptische Integrale vorhanden sein können.

Normalenfläche einer Developpablen längs ihres Durchschnittes mit einer krummen Fläche.

Von Dr. **Gustav Ad. V. Peschka,**

k. k. Regierungsrath, ordentlicher öffentlicher Hochschulprofessor in Brünn.

Behufs Feststellung der Charaktere der Normalenfläche einer Developpablen längs ihres Schnittes mit irgend einer krummen Fläche, wollen wir voraussetzen, dass die Leitfläche derselben eine Developpable D vom Range r, von der Classe n und ihre Cuspidalcurve von der m-ten Ordnung sei. Ferner nehmen wir an, dass die Leitcurve L der Normalenfläche der Durchschnitt der Developpablen D mit einer krummen Fläche F von m_1-ter Ordnung, a_1-ten Ranges, n_1-ter Classe sei, und dass diese eine Cuspidalcurve c_1-ter Ordnung besitzen möge.

Die Doppelcurve der Fläche F ist eine Raumcurve, deren Ordnung b_1 durch die Gleichung:

$$a_1 = m_1(m_1 - 1) - 2b_1 - 3c_1,$$

vermöge der vorausgesetzten Charaktere vollkommen bestimmt ist.

Vor Allem wollen wir daran gehen, die Charaktere der Leitcurve L zu ermitteln, oder mit anderen Worten, diese durch die gegebenen Zahlen auszudrücken.

Die Ordnung μ von L ist bekanntlich gleich dem Producte der Ordnungszahlen der sie bestimmenden Flächen D und F, und daher:

$$\mu = m_1 r.$$

Der Rang der Leitcurve L, d. i. die Anzahl der Tangenten, welche eine beliebige Gerade g des Raumes schneiden, lässt sich vermittelst des Chasles'schen Correspondenzprincipes folgendermassen bestimmen.

Man denke sich in jedem Punkte x der Leitcurve L an die Fläche D die Tangentialebene ε_1, als auch die Tangentialebene ε_2 an die Fläche F gelegt.

Diese Paare von Tangentialebenen ε_1 und ε_2 bestimmen, sobald x die Curve L durchläuft, auf irgend einer Geraden g des Raumes zwei geometrisch verwandte Punktreihen, in welchen sich solche Punkte ξ_1 und ξ_2 entsprechen, welche von den Tangentialebenen der Flächen D und F in einem und demselben Punkte x von L herrühren.

Fallen nun zwei solche entsprechende Punkte ξ_1 und ξ_2 zusammen, so stellt die Verbindungsgerade des Coïncidenzpunktes $(\xi_1 \xi_2)$ mit dem zugehörigen Punkte x, den Schnitt der beiden dem Punkte x entsprechenden Tangentialebenen von D und F, d. i. eine Tangente von L vor, oder mit anderen Worten, der Rang von L ist der Anzahl der Doppelpunkte der beiden Reihen ξ_1 und ξ_2 gleich.

Um diese Zahl der Doppelpunkte zu ermitteln, suchen wir die „Correspondenz" der Reihen ξ_1 und ξ_2.

Zum Zwecke dieser Bestimmung nehmen wir auf g einen beliebigen Punkt ξ_1 an und betrachten denselben als einen Punkt der Reihe ξ_1, also herstammend von gewissen Tangentialebenen der Fläche D in Punkten der Leitcurve L.

Die Zahl der von ξ_1 aus möglichen Tangentialebenen an die Developpable D ist, der Voraussetzung gemäss, gleich n (Classe der Developpablen D).

Jede dieser Tangentialebenen berührt die D in einer geraden Erzeugenden, welche ihrerseits mit der Fläche F, also auch mit der Curve L, m_1 Punkte gemein hat.

Es gibt sonach auf der Leitcurve L im Ganzen

$$m_1 . n$$

Punkte, in welchen die Tangentialebene der Developpablen D durch einen und denselben Punkt ξ_1 von g gehen.

Die Tangentialebenen der Fläche F in diesen $m_1 n$ Punkten treffen die Gerade g in $m_1 n$ Punkten der Reihe ξ_2, welche sämmtlich dem Punkte ξ_1 entsprechen.

Nehmen wir nun umgekehrt einen Punkt ξ_2 der Reihe ξ_2 an, so wird der der Fläche F von diesem Punkte aus umschriebene

Kegel dieselbe, auf Grund unserer Voraussetzung, in einer Curv a_1-ter Ordnung berühren; welche ihrerseits die Fläche D und mit hin auch die Leitcurve L in $a_1 r$ Punkten trifft. Es gibt sonach auf der Leitcurve L immer

$$a_1 . r$$

zusammengehörige Punkte, in welchen die Tangentialebenen der Fläche F die Gerade g in dem nämlichen Punkte ξ_2 schneiden werden.

Die Tangentialebenen der Developpablen D in diesen $a_1 r$ Punkten treffen die Gerade g in $a_1 r$ Punkten ξ_1, der Reihe ξ_1, welche wieder sämmtlich dem Punkte ξ_2 entsprechen. Die Correspondenz der Reihen ξ_1 und ξ_2 ist mithin eine:

$$(a_1 . r) - (m_1 . n)\text{-deutige.}$$

Nach dem Chasles'schen Correspondenzprincipe besitzen folglich die beiden Reihen ξ_1 und ξ_2

$$a_1 r + m_1 n$$

Doppelpunkte, oder nach den vorhergegangenen Ausführungen, ist der Rang ρ der Leitcurve:

$$\rho = m_1 n + a_1 r.$$

Es ist ferner bekannt, dass die Schnittcurve zweier Flächen, welche keine vielfachen, respective keine Cuspidal-Curven besitzen, auch keine stationären Punkte besitzt. Die einzig möglichen Cuspidalpunkte der Leitcurve L sind demgemäss die Punkte, in welchen die Cuspidalcurve der einen Fläche die andere Fläche trifft. Besagte Anzahl ist demnach bestimmt durch:

$$\beta = m_1 m + r c_1.$$

Durch die drei somit gefundenen Charaktere μ, ρ und β der Raumcurve L ist dieselbe vollkommen festgestellt und können nunmehr aus den Plücker-Cayley'schen Gleichungen alle anderen Singularitäten abgeleitet werden.

Nach diesen einfachen Voreinleitungen, respective Vorbereitungen, können wir uns nun der Betrachtung der Normalenfläche der Developpablen D längs der Curve L zuwenden.

Gewisse Singularitäten derselben, und zwar die Doppel- und stationären Erzeugenden, lassen sich durch einfache Überlegung von vornherein sogleich bestimmen.

Die Fläche F besitzt nämlich eine Doppelcurve von der Ordnung:

$$b_1 = \frac{1}{2}[m_1(m_1-1) - a_1 - 3c_1],$$

welche die Developpable D in:

$$\frac{1}{2} r[m_1(m_1-1) - a_1 - 3c_1]$$

Punkten trifft, deren jeder einen wirklichen Doppelpunkt der Leitcurve L repräsentirt.

Ohne zu besonderen Hilfsmitteln Zuflucht nehmen zu müssen, findet man nun durch blosse Anschauung, dass die Normale der Developpablen D in jedem der vorbezeichneten Doppelpunkte eine Doppelerzeugende der Normalenfläche vorstellt.

Die Leitcurve L besitzt allerdings noch weitere wirkliche Doppelpunkte, und zwar die Schnittpunkte der Fläche F mit der Doppelcurve der Developpablen D, doch geben diese keine Veranlassung zur Entstehung von Doppelerzeugenden, da die Developpable in jedem solchen Punkte zwei verschiedene Normalen besitzt.

Ebenso wenig gibt es Doppelerzeugende, welche von der Coïncidenz zweier parallelen Normalen der Developpablen herrühren, da die Paare paralleler Normalen in endlicher Anzahl vorkommen, eine Vereinigung zweier derselben mithin nicht stattfinden kann. Hieraus folgt unmittelbar, dass die Normalenfläche im Ganzen:

$$\frac{1}{2} r[m_1(m_1-1) - a_1 - 3c_1]$$

Doppelerzeugende besitze.

Analog dem, wie die Doppelpunkte der Leitcurve L, welche von der Doppelcurve der Fläche F herrühren, Veranlassung zur Entstehung doppelter Erzeugenden bieten, ebenso bedingt jeder stationäre Punkt der Leitcurve L, welcher von der Cuspidal-

curve der Fläche herstammt, eine stationäre Erzeugende. Die Zahl derselben ist mithin:

$$r . c_1 .$$

Die Zahl α der Wendeebenen, welche der Leitfläche L entsprechen, bestimmt die Gleichung:

$$\alpha = m - 3(r - n).$$

In jedem Punkte der zugehörigen Berührungserzeugenden (Inflexions- oder Wendeerzeugenden) besitzt die Developpable zwei zusammenfallende Berührungsebenen, daher auch zwei zusammenfallende Normalen.

Die α Wendeerzeugenden von D schneiden mithin die Fläche F, also auch die Leitcurve L in

$$m_1 [m - 3(r - n)]$$

Punkten und durch jeden einzelnen derselben wird gleichfalls eine stationäre Erzeugende der Normalenfläche gehen.

Die Gesammtzahl g_s der stationären Erzeugenden der Regelfläche (Normalenfläche) ist demnach:

$$g_s = m_1 m + r c_1 + 3 m_1 n - 3 m_1 r.$$

Mit Zuhilfenahme dieser Singularitäten lassen sich nunmehr alle anderen Charaktere der Normalenfläche leicht auf folgende Weise bestimmen.

Die Leitcurve L ist eine einfache Curve der Normalenfläche, da durch jeden ihrer Punkte bloss eine einzige Erzeugende geht. Dasselbe gilt auch von jedem ebenen Schnitte der Normalenfläche. Es können somit vermittelst der Erzeugenden die Punkte eines ebenen Schnittes C eindeutig auf jene der Leitcurve L und umgekehrt bezogen werden.

Hieraus folgt aber nach dem bekannten Riemann'schen Satze, dass die Geschlechter der Curven C und L einander gleich sein müssen.

Bezeichnen wir demnach mit π das Geschlecht der Leitcurve L, so findet man anstandslos, dass:

$$2(\pi - 1) = \rho - 2\mu + \beta$$

oder

$$2(\pi - 1) = m_1 m + m_1 n - 2 m_1 r + a_1 r + r c_1$$

sei.

Ist ferner M der Grad der Normalenfläche (Ordnung ihres ebenen Schnittes) R der Rang derselben (Classe des ebenen Schnittes), g_s die Zahl der stationären Erzeugenden (Rückkehrpunkte des ebenen Schnittes), so ergibt sich für P, als Geschlecht des ebenen Schnittes, die Gleichung:

$$2(P-1) = R - 2M + g_s$$

und nachdem $P = \pi$, muss auch:

$$R - 2M + g_s = m_1 m + m_1 n - 2m_1 r + a_1 r + c_1 r$$

oder da

$$g_s = m_1 m + 3m_1 n - 3m_1 r + c_1 r$$

gefunden wurde, wird:

$$R - 2M = m_1 r - 2m_1 n + a_1 r.$$

Der Grad M der Normalenfläche kann vermittelst des Chasles'schen Correspondenzprincips, wie folgt, bestimmt werden.

Die Erzeugenden der Normalenfläche stehen senkrecht zu den Berührungsebenen der Developpablen D; ihre unendlich fernen Punkte sind daher die Pole der unendlich fernen Geraden der Berührungsebenen in Bezug auf den unendlich fernen Kugelkreis oder, mit anderen Worten, die unendlich ferne Curve U_n der Normalenfläche ist die Polarreciproke zu der unendlich fernen Curve U_d der Leitdeveloppablen D in Bezug auf den imaginären Kugelkreis.

Nachdem die letztgenannte Curve U_d von der n-ten Classe ist, so ist die erstere U_n von der n-ten Ordnung. Da ferner auf jeder Erzeugenden der Developpablen D, m_1 Punkte der Leitcurve L liegen, in welchen die Normalen von D sämmtlich unter einander parallel sind, so folgt, dass durch jeden Punkt der unendlich fernen Curve U_n, m_1 Erzeugende der Normalenfläche gehen.

Setzen wir nun eine beliebige Gerade g als gemeinschaftliche Axe zweier Ebenenbüschel ε_1 und ε_2 voraus, wovon das eine (ε_1) die Punkte der Curve L und das andere (ε_2) die Punkte der Curve U_n projicirt.

In diesen beiden Büscheln mögen sich solche Ebenen entsprechen, welche durch entsprechende Punkte von L und U_n, d. i.

durch Punkte gehen, welche einer und derselben Erzeugenden der Normalenfläche angehören.

Eine Ebene des Büschels ε_1 trifft L in $m_1 r$ Punkten, welchen auf U_n ebenfalls $m_1 r$ Punkte, im Büschel ε_2 daher $m_1 r$ Ebenen entsprechen. Umgekehrt schneidet eine Ebene des Büschels ε_2 die Curve U_n in n Punkten, deren jedem auf L, m_1 Punkte entsprechen. Einer Ebene des Büschels ε_2 entsprechen sonach im Büschel ε_1, $m_1 n$ Ebenen.

Nach dem Chasles'schen Correspondenzprincipe besitzen demgemäss die beiden Ebenenbüschel ε_1 und ε_2:

$$m_1 (r + n)$$

Doppelebenen, das heisst, es kommt $m_1 (r + n)$mal vor, dass die Verbindungsgerade zweier entsprechenden Punkte von L und U_n (eine Erzeugende der Normalenfläche) eine gegebene Gerade g schneidet; es ist daher:

$$M = m_1 (r + n).$$

Mit Bezug auf die früher gefundene Formel erhält man somit für den Rang der Normalenfläche den Werth:

$$R = r (3m_1 + a_1).$$

Bezeichnet man mit D die Gesammtheit aller Doppelpunkte des ebenen Schnittes der Normalenfläche, so ist:

$$R = M (M - 1) - 2D - 3g_s$$

oder, nach Substitution der bereits bekannten Werthe von R, M und g_s:

$$2D = m_1^2 (r + n)^2 - m_1 (r + n) - r (3m_1 + a_1) - 3mm_1 - 3rc_1 - \\ - 9m_1 n + 9m_1 r.$$

Diese Doppelpunkte rühren her:

a) von den $\frac{1}{2} r [m_1 (m_1 - 1) - a_1 - 3c_1]$ Doppelerzeugenden;

b) von den n, m_1-fachen Punkten der unendlich fernen $m_1$fachen Curve n-ter Ordnung N, welche im Ganzen $\frac{1}{2} [m_1^2 n - m_1 n]$ Doppelpunkte vertreten;

c) von den Punkten, in welchen die eigentliche Doppelcurve der Normalenfläche die schneidende Ebene trifft.

Bezeichnet man die Ordnung dieser Doppelcurve mit d, so ist:

$$2d + m_1^2 n - m_1 n + m_1^2 r - m_1 r - a_1 r - 3c_1 r$$
$$= 2D =$$
$$= m_1^2 (r+n)^2 - m_1 (r+n) - ra_1 - 3rm_1 - 3mm_1 - 3rc_1 -$$
$$- 9m_1 n + 9m_1 r$$

und daher:

$$2d = m_1^2 (r^2 + 2rn + n^2 - r - n) - 3m_1 (m + 3n - 2r).$$

Dieses Resultat kann folgendermassen verificirt werden. Es ist ersichtlich, dass das für d gefundene Resultat einzig und allein von der Ordnung m_1 der Fläche F abhängig ist; es muss dasselbe daher für jede Fläche m_1-ter Ordnung gelten und auch dann seine Richtigkeit bewähren, wenn die Fläche in m_1 Ebenen degenerirt. Unter dieser Annahme setzt sich sodann die Normalenfläche aus m_1 verschiedenen Normalenflächen zusammen; ihre eigentliche Doppelcurve besteht dann aus den m_1 eigentlichen Doppelcurven der einzelnen Theilflächen und aus deren gegenseitigen Schnitten nach Abrechnung der gemeinschaftlichen Erzeugenden und der gemeinschaftlichen unendlich fernen Curve.

Die Ordnung der Normalenfläche von D längs eines ebenen Schnittes erhält man, wenn $m_1 = 1$ gesetzt wird, ausgedrückt durch:

$$(r+n).$$

Unter gleicher Voraussetzung, d. i. für $m_1 = 1$, erhält man die Ordnung ihrer Doppelcurve:

$$2d_1 = (r^2 + 2rn + n^2 - r - n) - 3(m + 3n - 2r).$$ [1]

[1] Diese Gleichung differirt mit der in „Peschka, Normalenflächen", LXXXI. Band der Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, II. Abtheilung, Mai-Heft 1880, aufgestellten Gleichung aus dem Grunde, weil dort die von den Wendeebenen herrührenden stationären Erzeugenden, als gewöhnliche Doppelerzeugende betrachtet wurden.

Je zwei solcher Theilflächen schneiden sich in einer Curve:

$$(r+n)^2\text{-ter Ordnung.}$$

Diese besteht jedoch aus einer eigentlichen Schnittcurve m^1-ter Ordnung, aus der unendlich fernen Curve n-ter Ordnung und aus den r gemeinschaftlichen Erzeugenden, welche durch die Normalen der Developpablen D in den Schnittpunkten derselben mit den Schnittgeraden der Ebenen beider Leitcurven vertreten erscheinen; es ist folglich:

$$m^1 = r^2 + 2rn + n^2 - n - r.$$

Nachdem es aber m_1 solcher Theilflächen gibt, so repräsentirt der eigentliche Gesammtschnitt derselben eine Curve der

$$\frac{m_1^2 - m_1}{2}(r^2 + 2rn + n^2 - n - r)\text{-}$$

ten Ordnung.

Die eigentlichen Doppelcurven der m_1 Flächen stellen zusammen eine Curve dar, welche der

$$\frac{1}{2}m_1\left[(r^2 + 2rn + n^2 - n - r) - 3(m + 3n - 2r)\right]\text{-}$$

ten Ordnung angehört.

Man erhält somit als Ordnung der Normalenfläche, deren Leitcurve L aus m_1 ebenen Schnitten der Developpablen D besteht, die Summe der beiden letztangeführten Zahlen und gelangt hiedurch zu einem Resultate, welches mit dem früher gefundenen in voller Übereinstimmung sich befindet.

Bei einer jeden windschiefen Fläche ist die Zahl T der Torsallinien, d. i. die Anzahl zweier sich schneidenden unendlich nahen Erzeugenden gleich:

$$T = 2(R - M).$$

Im vorliegenden Falle erhält man demgemäss:

$$T = 2a_1 r + 6m_1 r - 2m_1 r - 2m_1 n$$

oder

$$T = 2a_1 r + 4m_1 r - 2m_1 n$$

als die Zahl der Torsallinien der Normalenfläche, oder mit anderen Worten, die Zahl der Paare unendlich naher Punkte auf

der Leitcurve L, in welchen sich die Normalen der Developpablen schneiden, oder auch die Zahl der Krümmungslinien der Developpablen, welche die Leitcurve L berühren.

Wir erhalten mithin schliesslich noch den Satz:

Die Schnittcurve einer Developpablen

$$D(m, n, r)$$

mit einer Fläche

$$F(m_1 a_1 n_1)$$

wird von

$$2(a_1 r + 2m_1 r - m_1 n)$$

Krümmungslinien der Developpablen berührt.

Die Untersuchung über „die Normalenfläche einer krummen Fläche längs ihres Durchschnittes mit einer zweiten krummen Fläche" behält sich der Verfasser des Vorliegenden für eine nächste Abhandlung vor.



SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LXXXIII. Band. IV. Heft.

ZWEITE ABTHEILUNG.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Mechanik, Meteorologie und Astronomie.

X. SITZUNG VOM 7. APRIL 1881.

In Verhinderung des Vicepräsidenten übernimmt Herr Dr. L. J. Fitzinger den Vorsitz.

Das c. M. Herr Director C. Hornstein übersendet eine Abhandlung des Herrn Dr. G. Bečka, Assistenten der Prager Sternwarte: „Über die Bahn des Planeten Ino (173)."

Das c. M. Herr Prof. E. Weyr übersendet eine Abhandlung: „Über die Ausartungen biquadratischer Involutionen und über die sieben Systeme der eine rationale Plancurve vierter Ordnung vierfach berührenden Kegelschnitte".

Ferner übersendet Herr Prof. Weyr eine Abhandlung des Herrn A. Ameseder, Assistenten an der technischen Hochschule in Wien: „Über die eine rationale Plancurve vierter Ordnung vierfach berührenden Kegelschnitte, welche ein einzelnes System bilden."

Das c. M. Herr Professor E. Ludwig übersendet eine Mittheilung: „Über eine neue Methode zur quantitativen Bestimmung der Harnsäure."

Herr Professor Ludwig übersendet ferner eine Abhandlung des Herrn Dr. D. Dubelir aus St. Petersburg, über die von demselben im Wiener Universitätslaboratorium für medicinische Chemie durchgeführten Untersuchungen: „Über den Einfluss des fortdauernden Gebrauches von kohlensaurem Natron auf die Zusammensetzung des Blutes."

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. „Elektrostatische Untersuchungen insbesondere über die Verzweigung der Induction beim Differential-Inductometer und Elektrophor", von Herrn Dr. James Moser in London.

2. „Über Deviations-Momente", von Herrn Ingenieur Ferd Wittenbauer, Privatdocenten an der technischen Hochschule in Graz.
3. „Die abgeleitete Natur-Urkraft", von Herrn H. Wernick in Philadelphia.

Das w. M. Herr Hofrath Langer überreicht eine Abhandlung des Herrn Dr. M. Holl, Assistenten am Wiener anatomischen Institute, unter dem Titel: „Die Blutgefässe der menschlichen Nachgeburt."

Das w. M. Herr Director Dr. E. Weiss überreicht eine Abhandlung des Herrn Prof. W. Tinter an der technischen Hochschule in Wien: „Zur Bestimmung der Polhöhe auf dem Observatorium der k. k. technischen Hochschule in Wien."

Das w. M. Herr Prof. Ad. Lieben überreicht eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit: „Über Nitroolifine", von Herrn L. Haitinger.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Académie de Médecine: Bulletin. 2ᵉ série. Tome X, 45ᵉ année, Nrs. 12 & 13. Paris, 1881; 8⁰.

Accademia, R. dei Lincei: Atti. Anno CCLXXVIII 1880—81. Serie terza Transunti. Vol. V. Fascicoli 7⁰ & 8⁰. Roma, 1881; 4⁰.

Akademie, kaiserliche Leopoldino-Carolinisch-Deutsche der Naturforscher: Leopoldina. Heft XVII. Nr. 3—4. Halle a. S. 1881; 4⁰.

Apotheker-Verein, Allgem.-österr.: Zeitschrift nebst Anzeigen-Blatt, XIX. Jahrgang, Nr. 9 & 10. Wien, 1881; 8⁰.

Central-Commission, k. k. statistische: Statistisches Jahrbuch für das Jahr 1878. 8. Heft. Wien, 1881; 8⁰ — für das Jahr 1879, 7. u. 9. Heft. Wien, 1881; 8⁰.

— — Ausweise über den auswärtigen Handel der österr.-ungar. Monarchie im Jahre 1879, I. Abth. XL. Jahrgang. Wien, 1881; gr. 4⁰.

Central-Station, k. bayerische meteorologische: Übersicht über die Witterungsverhältnisse im Königreiche Bayern während des December 1880, Jänner und Februar 1881; Folio.

Chemiker-Zeitung: Central-Organ. Jahrgang V. Nr. 13. Cöthen, 1881; 4°.

Comptes rendus des Séances de l'Académie des Sciences. Tome XCII. Nr. 12. Paris, 1881; 4°.

Entomologisk Tidskrift. Band I. Häft 2, 3 o. 4. Stockholm, 1880; 8°.

Erdélyi Muzeum. VIII. évfolyam, 1. 2. és 3. sz. 1881; 8°.

Gesellschaft, Deutsche chemische: Berichte. XIV. Jahrgang Nr. 5. Berlin, 1881; 8°.

— naturwissenschaftliche. Isis in Dresden: Sitzungsberichte. Jahrgang 1880. Januar bis Juli und Juli bis December. Dresden, 1881; 8°.

Gewerbe-Verein, n. ö.: Wochenschrift. XLII. Jahrgang, Nr. 10 bis 13. Wien, 1881; 4°.

Ingenieur- und Architekten-Verein, österr.: Wochenschrift. VI. Jahrgang, Nr. 10—13. Wien, 1881; 4°.

— — Zeitschrift. XXXIII. Jahrgang 1881. 1. Heft. Wien; 4°.

Johns Hopkins University: American Journal of Mathematics. Vol. III. Nrs. 1—3. Cambridge, 1880; 4°.

Journal für praktische Chemie. N. F. Bd. XXIII, 7. Heft. Leipzig, 1881; 8°.

Mittheilungen aus Justus Perthes' geographischer Anstalt von Dr. A. Petermann. XXVII. Band, 1881. IV. Gotha 1881; 4°. — Ergänzungsheft Nr. 64: Fischer, Die Dattelpalme. Gotha, 1881; 4°.

Moniteur scientifique du Docteur Quesneville: Journal mensuel. 25e année. 3e série. Tome XI. 472e livraison. — Avril 1881. Paris; 4°.

Museum, städtisches Carolino-Augusteum zu Salzburg: Jahresbericht für 1880. Salzburg; 8°.

Nature. Vol. XXIII, Nr. 596. London, 1881; 8°.

Observatory, the: A monthly review of Astronomy. Nr. 48. 1881, April 1. London, 1881; 8°.

Osservatorio del Collegio reale Carlo Alberto in Moncalieri: Bullettino meteorologico. Anno XV. 1879—80. Nrs. 2 & 3. Torino, 1880; 4°.

Repertorium für Experimental-Physik etc. von Dr. Ph. Carl. XVII. Band, 5. Heft. München und Leipzig 1881; 8°.

Résumé météorologique de l'année 1879 pour Genève et le Grand Saint-Bernard par E. Plantamour. Genève, 1880; 8°.

Section de Travaux géologiques du Portugal: Étude stratigraphique et paléontologique des terrains jurassiques du Portugal, par Paul Choffat. 1re Livraison. Lisbonne, 1880; 4°.

Società degli Spettroscopisti italiani: Memorie. Dispensa 2a. Decembre 1880. Roma, 1881; 4°. — Indice. Vol. IX. 1880. Roma, 1881; 4°. — Vol. X. Dispensa 1a. Gennaio 1881. Roma, 1881; 4°.

Société d'Histoire naturelle de Colmar: Bulletin. 20e & 21e année. 1879—80. Colmar, 1880; 8°.

— philomatique de Paris: Bulletin. 7e série. Tome IV, Nr. 4, 1879—80. Tome V. Nr. 1. 1880—81. Paris, 1880—81; 8°.

Verein für Natur- und Heilkunde zu Pressburg: Verhandlungen. N. F. 3. Heft, Jahrgang 1873—1875. Pressburg, 1880; 8°.

— naturforschender in Brünn: Verhandlungen. XVIII. Band. 1879. Brünn, 1880; 8°.

— — Katalog der Bibliothek. I. Supplement-Heft. Brünn, 1880; 8°.

Wiener Medizinische Wochenschrift. XXXI. Jahrg., Nr. 12—14. Wien, 1881; 4°.

Wissenschaftlicher Club: Monatsblätter. II. Jahrgang, Nr. 6 und ausserordentliche Beilage Nr. V. Wien, 15. März, 1881; 8°.

Über Ausartungen biquadratischer Involutionen und über die sieben Systeme der eine rationale Plancurve vierter Ordnung vierfach berührenden Kegelschnitte.

Von Emil Weyr.

I. Involutionen vierten Grades mit einer zwei Doppelelemente enthaltenden Gruppe.

Nachdem man von den Gruppen einer Involution erster Stufe zwei beliebig wählen kann, so kann man eine biquadratische Involution bestimmen durch ein beliebiges Quadrupel $A_1 A_2 A_3 A_4$ und zwei eine Gruppe bildende Doppelelemente $D_{12} D_{34}$. Denkt man sich die Involution als Tangenteninvolution an einem Kegelschnitte K_2, so ist die Involutionscurve J_3 eine Curve dritter Ordnung, welche durch die sechs Ecken des Vierseits $A_1 A_2 A_3 A_4$ hindurchgeht und in dem Schnittpunkte δ der beiden Doppelelemente $D_{12} D_{34}$ einen Doppelpunkt besitzt; die Tangenten von J_3 in diesem Punkte bilden mit $D_{12} D_{34}$ ein harmonisches Büschel. Die Involutionscurve enthält auch die Berührungspunkte des Trägers K_2 mit den beiden Doppelelementen D_{12}, D_{34} und ist offenbar der Ort der Berührungspunkte der von δ an die dem Vierseit $A_1 A_2 A_3 A_4$ eingeschriebenen Kegelschnitte gelegten Tangenten. Es ist selbstverständlich, dass man das letztgenannte Vierseit durch irgend ein Quadrupel der Involution ersetzen kann. Die Tangenten der Involutionscurve im Doppelelemente δ sind somit die Tangenten der beiden Kegelschnitte, welche durch δ hindurchgehen und irgend einem ein Quadrupel der Involution darstellenden Vierseit eingeschrieben sind. Je zwei Gegenecken eines solchen Vierseits sind conjugirte Punkte von J_3, so dass also die Diagonaldreiseite der sämmtlichen, die Involution bildenden

Vierseite einen Kegelschnitt umhüllen werden, den Cayley'schen Kegelschnitt der Curve J_3. Da auch die Berührungspunkte der beiden von δ an irgend einen einem der Vierseite eingeschriebenen Kegelschnitt conjugirte Pole von J_3 sind, so ist der Cayley'sche Kegelschnitt von J_3 zugleich die Enveloppe der Polaren von δ in Bezug auf die irgend einem der Vierseite eingeschriebenen Kegelschnitte. Die Polare von δ bezüglich des Cayley'schen Kegelschnittes enthält die drei Inflexionspunkte von J_3.

Die den einzelnen Vierseiten der biquadratischen Involution entsprechenden Diagonaldreiseite bilden auf dem Cayley'schen Kegelschnitte von J_3 eine cubische Tangenteninvolution, welche mit der biquadratischen projectivisch ist. Das Erzeugniss dieser beiden Involutionen ist die Curve J_3 doppelt gezählt und die vier Doppeltangenten der biquadratischen Involution, welche ausser D_{12} und D_{34} auftreten, jede ebenfalls doppelt gezählt. Diese vier Tangenten sind selbstverständlich auch Tangenten des Cayley'schen Kegelschnittes.

Jede Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte kann auf unendlich viele Arten als Involutionscurve J_3 einer biquadratischen Tangenteninvolution auf einem Kegelschnitte K_2 auftreten. Man hat nur K_2 irgend einem vollständigen, der J_3 eingeschriebenen Vierseite einzuschreiben. Oder aber man verbindet zwei conjugirte Punkte von J_3 mit dem Doppelpunkte und legt K_2 so durch die beiden Punkte, dass er in ihnen jene Verbindungslinien berührt.

Eine Curve dritter Ordnung mit einem Rückkehrpunkte kann nicht als Involutionscurve für biquadratische Involutionen an Kegelschnitten auftreten.

Für eine biquadratische Involution, welche eine Gruppe mit zwei Doppelelementen enthalten soll, kann man ausser einem beliebigen Quadrupel nur noch zwei Elementenpaare willkürlich wählen und dann gibt es vier Involutionen, welche der Anforderung entsprechen.

In der That, es sei $A_1 A_2 A_3 A_4$ ein Tangentenquadrupel von K_2 und $M_1 M_2$, $N_1 N_2$ zwei weitere Tangentenpaare, welche sich in m respective n schneiden mögen. Die Curven dritter Ordnung, welche dem Vierseit A umschrieben sind und durch m und n hindurchgehen, bilden ein Curvenbüschel und sind sämmtlich Invo-

lutionscurven; jene unter ihnen, welche einen Doppelpunkt haben, liefern Involutionen mit zwei Doppelelemente enthaltenden Quadrupeln.

Der neunte Scheitel p des Curvenbüschels ist bekanntlich der Schnittpunkt der Tangenten, welche man von m, n an den dem Vierseit A eingeschriebenen und die Gerade mn berührenden Kegelschnitt legen kann. Das Curvenbüschel dritter Ordnung enthält zwölf Doppelpunkte. Jede Seite des Vierseits A stellt mit dem Kegelschnitte, welchen man dem von den übrigen drei Seiten gebildeten Dreiecke und dem Dreiecke mnp umschreiben kann, auch eine Curve des Büschels dar, welche zwei Doppelpunkte besitzt; dies liefert im Ganzen acht Doppelpunkte (auf jeder Seite des Vierseits A zwei), so dass noch weitere vier eigentliche Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte im Büschel auftreten werden, wodurch unsere Behauptung erwiesen erscheint.

II. Involutionen vierten Grades mit einem vierfachen Elemente.

Wenn die beiden eine Gruppe bildenden Doppelelemente D_{12} D_{34} in ein einziges zusammenfallen, so entsteht ein vierfaches Element der Involution. Der Doppelpunkt δ der Involutionscurve J_3 fällt auf den Kegelschnitt K_2 und die Tangente von K_2 in δ (das vierfache Element D) ist eine von den beiden Tangenten von J_3 im Doppelpunkte δ; die andere Tangente des Doppelpunktes ist Tangente des zweiten Kegelschnittes, welcher durch δ hindurchgeht und einem Vierseit A eingeschrieben ist.

Der Träger K_2 trifft J_3 ausser in δ noch in drei weiteren Punkten, welche den drei Doppelelementen der Involution entsprechen, welche ausser dem vierfachen Elemente auftreten.

Jede Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte kann auf unendlich viele Arten als Involutionscurve einer biquadratischen mit einem vierfachen Elemente versehenen Tangenteninvolution an einem Kegelschnitte betrachtet werden. Wenn man nämlich irgend ein der Curve eingeschriebenes Vierseit A wählt, so kann jeder der beiden diesem Vierseit eingeschriebenen und durch den Curvendoppelpunkt hindurchgehenden Kegelschnitte als Träger einer solchen biquadratischen Tangenteninvolution betrachtet werden.

III. Biquadratische Involutionen, welche zwei aus Doppelelementen bestehende Gruppen enthalten.

Nachdem zwei Quadrupel beliebig gewählt werden können, kann man ein Quadrupel aus zwei Doppelelementen $D_{12} D_{34}$ und ebenso ein zweites Quadrupel aus zwei Doppelelementen D'_{12} D'_{34} zusammensetzen. Denkt man sich die Involution als aus Tangenten eines Kegelschnittes K_2 bestehend, so wird die Involutionscurve J_3 nach *I* eine Curve dritter Ordnung sein, welche den Schnittpunkt δ von D_{12} mit D_{34} und ebenso den Schnittpunkt δ' von D'_{12} mit D'_{34} zu Doppelpunkten hat und daher in die Gerade $\delta\delta'$ oder J_1 und einen Kegelschnitt J_2 zerfallen muss. Der Kegelschnitt J_2 geht durch δ, δ' und durch die Berührungspunkte d_{12} d_{34} d'_{12} d'_{34} der Tangenten D_{12} D_{34} D'_{12} D'_{34}; seine Tangenten $\Delta\Delta'$ in $\delta\delta'$ respective sind zu J_1 harmonisch conjugirt bezüglich der Strahlenpaare D_{12} D_{34}, D'_{12} D'_{34} und verbinden somit δ und δ' mit dem Pole i_1 der Geraden J_1 bezüglich K_2, so dass also i_1 der Pol von J_1 bezüglich K_2 und J_2 ist. Es ist somit i_1 eine Ecke und J_1 die gegenüberliegende Seite des beiden Kegelschnitten gemeinschaftlichen, sich selbst conjugirten Dreieckes. Die Gerade J_1 schneidet K_2 in zwei Punkten e, f, deren Tangenten E_{13} F_{13} die beiden übrigen Doppelemente der biquadratischen Involution darstellen und durch den Pol i_1 von J_1 hindurchgehen. Man erkennt sofort, dass diese beiden Tangenten die Tangentenpaare D_{12} D_{34}, D'_{12} D'_{34} gleichzeitig harmonisch trennen.

„Wenn also eine biquadratische Involution zwei nur Doppelelemente enthaltende Gruppen besitzt, so stellt das zu diesen beiden Gruppen gemeinschaftlich harmonische Elementenpaar das fünfte und sechste Doppelelement der Involution dar.

Es sei nun $X_1 X_2 X_3 X_4$ irgend ein Quadrupel der Involution; die sechs Ecken des von den vier Tangenten gebildeten Vierseits müssen auf der Involutionscurve liegen und man erkennt sofort, dass zwei von ihnen, und zwar zwei Gegenecken, etwa $x' x''$ auf J_1 und die vier anderen, etwa $y_1 y_2 y_3 y_4$ auf J_2 liegen müssen. Die Gerade J_1 ist somit Diagonalseite in allen Vierseiten (X). Wir wollen die Bezeichnung so wählen, dass x' der Schnittpunkt von X_1 mit X_3 und x'' jener von X_2 und X_4. Die Punkte $y_1 y_2 y_3 y_4$

seien die reihenweisen Schnittpunkte der vier Tangenten $X_1 X_2 X_3 X_4$. Die aus den Punkten der Geraden J_1 an K_2 gelegten Tangenten bilden eine quadratische Involution, welche offenbar unsere biquadratische Involution enthält; denn jedes Quadrupel der letzteren zerfällt in zwei Paare ($X_1 X_3$ und $X_2 X_4$) der ersteren. Zugleich sieht man, dass sich die zwei ein Quadrupel bildenden Paare eindeutig und vertauschungsfähig, d. h. involutorisch entsprechen und dass $E_{13} F_{13}$ die Doppelelemente der quadratischen Involution sind. Die beiden Paare der Doppelelemente $D_{12} D_{34}$, $D'_{12} D'_{34}$ sind offenbar jedes sich selbst entsprechend. Wir haben somit den Satz: „Wenn eine biquadratische Involution zwei nur Doppelelemente enthaltende Gruppen besitzt, so besteht sie aus Elementenpaaren der durch diese beiden Gruppen bestimmten quadratischen Involution, so zwar, dass je zwei Elementenpaare der quadratischen Involution, welche die beiden Doppelelementengruppen harmonisch trennen, ein Quadrupel der biquadratischen Involution bilden. Die Doppelelemente der quadratischen Involution stellen das fünfte und sechste Doppelelement der biquadratischen Involution dar.“ [1]

Kehren wir zurück zu unserer Tangenteninvolution auf dem Kegelschnitte K_2. Aus der vertauschungsfähigen eindeutigen Beziehung zwischen den Tangentenpaaren $X_1 X_3$, $X_2 X_4$ folgt dieselbe Beziehung zwischen den Punkten $x' x''$ auf J_1. Die Punktepaare $x' x''$ bilden somit auf J_1 eine quadratische Involution,

---

[1] Man kann zu demselben Resultate gelangen, ausgehend von der Involutionsgleichung. Wenn $\alpha\alpha'$ $\beta\beta'$ die Parameterwerthe der die Gruppen bildenden Doppelelemente sind, so ist die Gleichung der Involution:

$$(x-\alpha)^2 (x-\alpha')^2 = \lambda (x-\beta)^2 (x-\beta')^2$$

und man sieht sofort, dass die Involution übergeht in die quadratische, involutorisch auf sich selbst bezogene Involution

$$(x-\alpha)(x-\alpha') = \pm\sqrt{\lambda}.(x-\beta)(x-\beta').$$

Man sieht auch, dass die Gruppen $\alpha\alpha'$ $\beta\beta'$ sich selbst entsprechen und dass je zwei Paare der quadratischen Involution, welche mit $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$ vier harmonische Paare bilden, zusammen ein Quadrupel der biquadratischen Involution darstellen.

deren Doppelpunkte $\delta\delta'$ sind, d. h. $x'x''$ sind bezüglich J_2 conjugirte Polepaare. Die Tangentenquadrupel $X_1 X_2 X_3 X_4$ bilden einfache, dem Kegelschnitte K_2 umschriebene und dem J_2 eingeschriebene Vierecke $y_1 y_2 y_3 y_4$. Die beiden Kegelschnitte K_2 und J_2 haben somit eine solche Lage, dass man dem ersten unendlich viele einfache Vierecke $y_1 y_2 y_3 y_4$ (Vierseite) umschreiben kann, welche dem zweiten eingeschrieben sind; die beiden Schnittpunkte $x' x''$ der zwei Gegenseitenpaare dieser einfachen Vierecke rücken als entsprechende Punkte einer quadratischen Involution auf einer festen Geraden J_1 fort. Man erkennt sofort, dass die Punktquadrupel $y_1 y_2 y_3 y_4$ auf J_2 ebenfalls eine biquadratische Involution bilden, nachdem durch eine Ecke das ganze Viereck bestimmt erscheint; diese Involution ist jedoch auch von derselben Art wie die Tangenteninvolution auf K_2; denn die Geraden $y_1 y_3$ oder Y' und $y_2 y_4$ oder Y'', welche ausser J_1 in dem Vierseit $X_1 X_2 X_3 X_4$ als Diagonalseiten auftreten, müssen durch den Pol von J_1, d. h. durch i_1 hindurchgehen und bilden als conjugirte Strahlen bezüglich K_2 eine quadratische Involution, für welche E_{13} und F_{13} die Doppelstrahlen sind. Die biquadratische Punktinvolution auf J_2 geht somit auch in eine quadratische Involution über, deren Punktepaare $y_1 y_3$, $y_2 y_4$ sich involutorisch zugeordnet erscheinen und zwar so, dass je zwei Paare, welche die beiden anf den Strahlen E_{13} F_{13} liegenden Punktepaare $e_{12} e_{34}$, $f_{12} f_{34}$ harmonisch trennen, ein Quadrupel der biquadratischen Involution bilden. Aus der Eigenschaft der Curve J_2 als Involutionscurve folgt, dass die Tangenten von J_2 in den Punkten $e_{12} e_{34} f_{12} f_{34}$ die gemeinschaftlichen Tangenten von J_2 und K_2 sind; sie müssen sich selbstverständlich zu zweien auf J_1 schneiden. Die beiden Kegelschnitte K_2 und J_2 haben also eine solche gegenseitige Lage, dass zwei Gegenseiten des von ihren Schnittpunkten gebildeten Viereckes ihre bezüglich K_2 genommenen Pole auf J_2 haben und umgekehrt die correspondirenden Gegenecken des von den vier gemeinsamen Tangenten gebildeten Vierseits Tangenten von K_2 zu Polaren bezüglich J_2 haben.

Dem K_2 sind unendlich viele einfache Vierecke umgeschrieben, welche dem J_2 eingeschrieben sind; die Seiten derselben bilden eine biquadratische Tangenteninvolution auf K_2 und ihre Ecken eine biquadratische Punktinvolution auf J_2. Jede der

beiden Involutionen enthält zwei nur aus Doppelelementen bestehenden Gruppen. Und zwar sind die für die Tangenteninvolution, die aus den oben genannten Polen an K_2 gelegten Tangentenpaare und für die Punktinvolution sind es die Schnittpunktpaare von J_2 mit den obengenannten Polaren. Die Verbindungslinie J_1 jener Pole bildet mit J_2 die Involutionscurve der biquadratischen Tangenteninvolution und der Schnittpunkt i_1 jener Polaren zusammen mit K_2 bildet die Involutionscurve der biquadratischen Punktinvolution. Die von i_1 an K_2 gelegten zwei Tangenten sind weitere Doppelelemente der Tangenteninvolution und die Schnittpunkte von J_1 mit J_2 sind weitere Doppelelemente der Punktinvolution. Jede der beiden Involutionen besteht aus involutorisch zugeordneten Paaren einer quadratischen Involution, deren Doppelelemente die letztgenannten Elementenpaare sind.

IV. Bestimmung von Involutionskegelschnitten für biquadratische Involutionen.

Die Involutionscurve für eine auf einem Kegelschnitte auftretende cubische Involution ist ein Kegelschnitt, welcher wieder als Träger einer cubischen Involution auftritt, für welche der erste Kegelschnitt die Involutionscurve ist. Wir haben zwei solche Kegelschnitte als in involutorischer Lage bezeichnet. Dem einen sind immer unendlich viele Dreiecke eingeschrieben, welche dem anderen umgeschrieben sind.

Nun haben wir gesehen, dass auch bei biquadratischen Involutionen auf Kegelschnitten (wenn sie zwei Doppelelementenpaare besitzen) Kegelschnitte als (Bestandtheile der) Involutionscurven auftreten. Dem einen Kegelschnitte K_2 sind unendlich viele (einfache) Vierecke umgeschrieben, welche dem anderen Kegelschnitte J_2 eingeschrieben sind. Wir werden daher auch diese beiden Kegelschnitte als involutorische Kegelschnitte bezeichnen. Während nun die Kegelschnitte für cubische Involutionen allgemeine Involutionscurven sind und als in „cubisch involutorischer Lage“ bezeichnet werden könnten, sind sie für die „biquadratisch involutorische Lage“ Theile der (cubischen) Involutionscurven, welche in die betreffenden Kegelschnitte $K_2 J_2$

und einen Punkt i_1 respective eine Gerade J_1 zerfallen; i_1 ist Pol von J_1 für beide Kegelschnitte.

Um zwei Kegelschnitte in biquadratisch-involutorischer Lage zu erhalten, kann man von einem derselben z. B. K_2 ausgehen, aus zwei beliebigen Punkten $\delta\delta'$ an ihn die beiden Tangentenpaare legen, so liegen ihre vier Berührungspunkte mit δ und δ' auf einem Kegelschnitte J_2, welcher als Involutionscurve einer Tangenteninvolution auf K_2 auftritt. Die Gerade $\delta\delta'$ ist J_1.

Es ist klar, dass man ebenso von J_2 ausgehen könnte.

„Wenn man von zwei Punkten $\delta\delta'$ aus an einen Kegelschnitt K_2 die Tangenten legt, so liegen ihre vier Berührungspunkte mit δ und δ' auf einem Kegelschnitte J_2, welchem man unendlich viele einfache Vierecke einschreiben kann, die dem Kegelschnitte K_2 umgeschrieben sind. Die Gerade $\delta\delta'$ besitzt bezüglich beider Kegelschnitte einen gemeinschaftlichen Pol und auf ihr bilden die Schnittpunkte der beiden Gegenseitenpaare jener einfachen Vierecke eine quadratische Involution, deren Doppelpunkte δ und δ' sind u. s. w.

Da man denselben Satz auch in der Form aussprechen kann: „zwei Punktepaare eines Kegelschnittes K_2 und die Pole ihrer beiden Verbindungslinien liegen auf einem Kegelschnitte J_2, so gilt auch der Satz:

„Jeder Kegelschnitt J_2, welcher durch zwei beliebige Punkte eines Kegelschnittes K_2 und durch den Schnittpunkt ihrer Tangenten hindurchgeht, enthält unendlich viele einfache ihm eingeschriebene Vierecke, welche dem K_2 umschrieben sind. Insbesondere schneidet J_2 den K_2 in zwei weiteren Punkten, deren Tangenten sich auf J_2 schneiden.“

Weil J_2 vollkommen bestimmt erscheint, wenn man kennt: die beiden Punkte auf K_2, deren Tangenten sich auf J_2 schneiden und zwei weitere beliebige Punkte von J_2, welche zwei beliebigen Tangentenpaaren der Involution auf K_2 entsprechen, so gilt der Satz:

„Eine biquadratische Involution, welche eine gegebene, zwei Doppelelemente enthaltende Gruppe

besitzt und noch eine zweite solche Gruppe besitzen soll, ist vollkommen gegeben, wenn man noch zwei beliebige Elementenpaare kennt."

Wir machen gleich hier auf die zwei verschiedenen Arten von Elementenpaaren der biquadratischen Involution aufmerksam. Jede Gruppe $X_1 X_2 X_3 X_4$ enthält zwei Paare $X_1 X_3$ und $X_2 X_4$, deren Schnittpunkte $x' x''$ auf der festen Geraden J_1 fortrücken. Diese Gerade erscheint als Ergebniss der Paare von der Art $X_1 X_3$ und $X_2 X_4$ und wir wollen daher solche Paare als „lineare Paare" bezeichnen. Die Elementenpaare $X_1 X_2$, $X_2 X_3$, $X_3 X_4$, $X_4 X_1$, deren Schnittpunkte $y_1 y_2 y_3 y_4$ den Kegelschnitt J_2 erfüllen, sollen „conische Paare" der biquadratischen Involution genannt werden. Jedes Quadrupel enthält somit zwei lineare und vier conische Paare. In dem letzten Satze sind offenbar conische Paare als die Involution bestimmend zu verstehen.

„Jeder einem dem Kegelschnitte K_2 umgeschriebenen einfachen Vierecke umgeschriebener Kegelschnitte J_2 ist zu K_2 in biquadratisch involutorischer Lage, und umgekehrt." [1]

Ist $y_1 y_2 y_3 y_4$ ein dem K_2 umschriebenes einfaches Viereck und J_2 diesem Vierecke umgeschrieben, so stellt J_2 zusammen mit der Verbindungslinie J_1 der beiden Gegenseitenpaare des Viereckes eine Curve dritter Ordnung dar, welche dem als vollständigen Vierseit aufgefassten einfachen Viereck umschrieben ist und daher eine Involutionscurve sein muss. [2] Hiedurch ist unsere Behauptung erwiesen.

„Durch ein Quadrupel und ein (conisches) Elemententenpaar sind drei biquadratische Involutionen bestimmt, von denen jede zwei nur aus Doppelelementen bestehende Gruppen enthält."

Ist nämlich $X_1 X_2 X_3 X_4$ das Quadrupel und $P_1 P_2$ das Elementenpaar, so enthält das vollständige Vierseit drei einfache Vierseite den drei Gegeneckenpaaren entsprechend und es gibt also drei Kegelschnitte J_2, welche den einzelnen einfachen Vier-

[1] Vergl. die Poncelet'schen Sätze über um- und eingeschriebene Polygone in „Curvenlehre" 1880, Art. 37—39.

[2] Vergl.: Über biquadratische Involutionen erster Stufe. I. Sitzung om 10. Februar 1881.

ecken umgeschrieben sind und durch den Schnittpunkt von P_1 und P_2 hindurchgehen. Jedem solchen Involutionskegelschnitte entspricht eine der drei genannten Involutionen.

„Durch zwei lineare und zwei conische Elementenpaare ist eine mit zwei nur Doppelelemente enthaltenden Gruppen versehene biquadratische Involution vollkommen bestimmt."

Die beiden linearen Paare bestimmen die quadratische Involution, in welcher die biquadratische enthalten ist; dadurch ergänzen sich die beiden conischen Paare, wenn man zu ihren Elementen die ihnen in der quadratischen Involution entsprechenden aufsucht zu zwei Quadrupeln, durch welche die biquadratische Involution eindeutig bestimmt erscheint. Mit anderen Worten:

„Wenn zwei einem Kegelschnitte K_2 umschriebene einfache Vierecke eine gemeinschaftliche Diagonale besitzen, so liegen ihre acht Ecken auf einem Kegelschnitte J_2, welcher zu K_2 in biquadratisch involutorischer Lage ist."

Man sieht sofort ein, dass jedes der vier Doppelelemente, welche in den beiden sie enthaltenden Gruppen vorkommen, auch ein conisches Elementenpaar darstellt; dagegen werden die zwei übrigen Doppelelemente (das fünfte und sechste), welche zugleich Doppelelemente der quadratischen Involution sind, als lineare Elementenpaare aufzufassen sein. Man kann daher die sechs Doppelelemente unserer biquadratischen Involution in zwei Arten theilen: in die zwei Paar conischer Doppelelemente, welche die beiden singulären Quadrupel darstellen und in das Paar linearer Doppelelemente, welches das Doppelelemententenpaar der quadratischen Involution darstellt.

Es sei der Kegelschnitt K_2, ferner drei Punkte $p_1 p_2 p_3$ von J_2 und einer der vier Schnittpunkte beider Kegelschnitte, z. B. d_{12} gegeben; der Kegelschnitt J_2 soll bestimmt werden. — Mit anderen Worten:

„Wie viele biquadratische Involutionen mit zwei nur Doppelelemente enthaltenden Gruppen sind gegeben durch drei beliebige conische Elementenpaare (das sind die von $p_1 p_2 p_3$ an K_2 gehenden Tangentenpaare) und durch ein conisches Doppelelement (die Tangente D_{12} von K_2 in d_{12})?"

Irgend ein durch $p_1 p_2 p_3 d_{12}$ hindurchgehender Kegelschnitt schneidet K_3 in drei Punkten $y_1 y_2 y_3$ und D_{12} in einem Punkte ξ von dem aus sich an K_2 eine weitere Tangente mit einem Berührungspunkte x legen lässt. Damit der betreffende Kegelschnitt ein Involutionskegelschnitt J_2 werde, ist nur nothwendig, dass x mit einem der drei Punkte $y_1 y_2 y_3$ zusammenfalle. Nun sieht man sofort, dass jedem Punkte x drei Punkte y entsprechen, wogegen jedem y nur ein einziges x zugeordnet ist. Es werden also im Ganzen vier Coïncidenzen vorkommen, von denen jedoch, wie man eben so leicht einsieht, eine im Punkte d_{12} vor sich geht und keine Lösung der Aufgabe liefert. Es bleiben somit nur drei Lösungen zurück den drei anderen gemeinschaftlichen Punkten der ein-drei-deutigen Punktsysteme $(x)(y)$ auf K_2 entsprechend:

„Durch drei conische Elementenpaare und ein conisches Doppelelement sind drei biquadratische Involutionen mit zwei nur Doppelelemente enthaltenden Gruppen bestimmt.“

„Durch zwei conische Elementenpaare und die conischen Doppelelemente einer Gruppe ist eine einzige biquadratische Involution bestimmt, welche noch eine zweite nur Doppelelemente enthaltende Gruppe besitzt.“

Es ergibt sich nämlich in diesem Falle ein System von fünf Punkten für den Kegelschnitt J_2.

„Durch zwei conische Elementenpaare und zwei nicht demselben Quadrupel angehörende conische Doppelelemente sind zwei biquadratische Involutionen bestimmt, in denen die letzteren Doppelelemente durch je ein conisches Doppelelement zu Quadrupeln ergänzt werden.“

Sind nämlich für J_2 zwei beliebige Punkte $p_1 p_2$ und zwei Schnittpunkte d_{12} d'_{12} mit K_2 gegeben, welche jedoch nicht Berührungspunkte zweier ein Quadrupel bildender Doppeltangenten sind, so bestimmen die durch $p_1 p_2$ $d_{12} d'_{12}$ hindurchgehenden Kegelschnitte auf K_2 eine quadratische Punktinvolution $(y_1\ y_2)$, auf D_{12} etwa, eine Punktreihe (ξ) von der aus an K_2 ein Tangentensystem gelegt werden kann, dessen Berührungspunktsystem (x) mit der Involution $(y_1\ y_2)$ in projectivischer Beziehung ist. Es werden also drei Coïncidenzen vorkommen, von denen

der Punkt d_{12} eine absorbirt, so dass zwei weitere für die Lösungen unserer Aufgabe bleiben.

Es bleiben noch die folgenden Fragen zu erörtern übrig:

„Wie viele Involutionen der von uns betrachteten Art sind durch vier conische Elementenpaare bestimmt und wie viele durch drei conische und ein lineares Elementenpaar?"

Zur Beantwortung der ersten Frage könnte man den folgenden Weg einschlagen. Es seien $pp_1p_2p_3$ die Schnittpunkte der vier conischen Tangentenpaare einer mit zwei nur Doppelelemente enthaltenden biquadratischen Tangenteninvolution auf einem Kegelschnitte K_2. Die sich in p schneidenden Tangenten seien PP'; die sämmtlichen durch $pp_1p_2p_3$ gehenden Kegelschnitte (ξ_2) bilden ein Büschel und es handelt sich nur darum, jene unter ihnen zu finden, welche einen dem K_2 umschriebenen einfachen Vierecke umschrieben sind. Das Büschel (ξ_2) bestimmt auf PP' zwei projectivische Punktreihen $(\pi)(\pi')$, von denen aus an K_2 zwei projectivische Tangentensysteme $(\xi)(\xi')$ gelegt werden können; wenn der Schnittpunkt x zweier entsprechenden Tangenten $\xi\xi'$ auf ξ_2 zu liegen kommt, so ist ξ_2 ein Kegelschnitt, welcher dem den K_2 umschriebenen Vierecke $p\pi x\pi'$ umgeschrieben ist und daher die Aufgabe lösen wird. Nun erfüllen die Punkte x einen den Kegelschnitt K_2 doppelt berührenden Kegelschnitt K'_2 und bilden auf diesem ein mit dem Büschel (ξ_2) projectivisches System. Die Kegelschnitte (ξ_2) schneiden K'_2 in einer mit dem Systeme (x) projectivischen Punktinvolution vierten Grades, welche somit fünf Coïncidenzen und daher auch fünf Lösungen des Problemes liefern wird, wenn nicht etwa einige hievon auszuscheiden sind.

Anmerkung: Kegelschnitte in biquadratisch involutorischer Lage kommen oft auch in elementaren Betrachtungen vor. So ist z. B. jeder Kreis J_2, welcher durch den Mittelpunkt eines zweiten Kreises K_2 hindurchgeht, mit diesem in biquadratisch involutorischer Lage, d. h. man kann dem K_2 unendlich viele einfache Vierecke umschreiben, welche dem J_2 eingeschrieben sind.

Ebenso sind irgend ein Centralkegelschnitt K_2 und der Kreis J_2, welcher die Scheitel der dem K_2 umschriebenen rechten Winkel enthält, in biquadratisch involutorischer Lage.

V. Biquadratische Involutionen mit einem vierfachen Elemente und einer aus zwei Doppelelementen bestehenden Gruppe.

Wenn die beiden Doppelelemente $D_{12} D_{34}$ einer Gruppe zusammenhalten, so entsteht ein vierfaches Element D_{1234}. Der Involutionskegelschnitt J_2 berührt in diesem Falle den Träger K_2 im Berührungspunkte d von D_{1234} und geht durch $d'_{12} d'_{34}$ und δ hindurch. Eine elementar geometrische Betrachtung (sowie eine einfache Rechnung) zeigt, dass der Krümmungshalbmesser von K_2 im Punkte d zweimal so gross ist, wie jener von J_2 in demselben Punkte. [1]

Man erhält somit die Sätze:

„Ein Kegelschnitt J_2, welcher durch zwei beliebige Punkte d'_{12} d'_{34} eines Kegelschnittes K_2 und durch den Schnittpunkt T dieser Tangenten in diesen Punkten hindurchgeht und K_2 in einem beliebigen Punkte d berührt, ist in diesem Punkte zweimal so stark gekrümmt als K_2."

„Wenn ein Kegelschnitt J_2 einen zweiten K_2 in einem Punkte d berührt und daselbst doppelt so stark gekrümmt als K_2 ist, so ist es ein Involutionskegelschnitt, [2] d. h. man kann ihm unendlich viele einfache Vierecke einschreiben, welche dem K_2 umgeschrieben sind."

---

[1] Man sieht nämlich sofort ein, dass irgend eine Curve J_2, welche durch zwei unendlich nahe Punkte d_{12} d_{34} einer zweiten Curve K_2 und durch den Schnittpunkt δ der Tangenten dieser Punkte hindurchgeht, an der Berührungsstelle einen Krümmungshalbmesser haben muss, welcher halb so gross ist, wie der Krümmungshalbmesser von K_2 an derselben Stelle. Hieraus folgt das oben Gesagte und ausserdem auch der folgende Satz:

„Die beiden Kegelschnitte, welche durch den Doppelpunkt einer ebenen Curve dritter Ordnung hindurchgehen und einer beliebigen der Curve eingeschriebenen vollständigen Vierseite eingeschrieben sind, sind in dem Doppelpunkte (dessen Tangenten sie berühren) doppelt so stark gekrümmt als die sie berührenden Curvenzweige."

[2] Vergleiche: „Über die involutorische Lage sich berührender Kegelschnitte." Sitzung vom 13. Jänner 1881.

VI. Biquadratische Involutionen mit zwei vierfachen Elementen.

Wenn ausser dem schon aufgetretenen vierfachen Elemente D_{1234} auch noch die beiden ein Quadrupel bildenden Doppelelemente $D'_{12}D'_{43}$ zusammenfallen, so besitzt die Involution zwei vierfache Elemente. Der Involutionskegelschnitt J_2 wird K_2 in den Berührungspunkten $d\ d'$ der beiden vierfachen Elemente $D\ D'$ berühren und in jedem dieser Punkte doppelt so stark gekrümmt sein, als der Kegelschnitt K_2; hiedurch erscheint er vollkommen gegeben. Um zu einer geometrisch einfachen Construction von J_2 zu gelangen, betrachten wir zunächst die Involution, gegeben durch die Doppelelementengruppe $D'_{12}\ D'_{34}$, ferner ein Tangentenpaar PP', welches sich in p schneiden möge und schliesslich durch die Bedingung, dass die Involution ein vierfaches Element haben soll. Die durch $p d'_{12} d'_{34}$ und den Schnittpunkt δ' von D'_{12} und D'_{34} hindurchgehenden Involutionskegelschnitte J_2 bilden ein Büschel und werden daher auf K_2 Punktpaare $d_{12}\ d_{34}$ (die Berührungspunkte der die zweite singuläre Gruppe bildenden Tangenten $D_{12}\ D_{34}$) bestimmen, welche eine quadratische Involution bilden. Die Geraden $d_{12}\ d_{34}$ gehen durch einen festen Punkt o, welcher sich leicht ergibt, wenn man K_2 mit $d'_{12}p$ und $d'_{34}p$ in q und q' respective schneidet und dann $d'_{12}q'$ mit $d'_{34}q$ in o zum Schnitte bringt. Die beiden von o an K_2 gelegten Tangenten berühren K_2 in Punkten, welche durch das Zusammenfallen von d_{12} mit d_{34} entstehen. Es gibt somit zwei Involutionen, welche den gestellten Bedingungen genügen. Zugleich ist hiedurch die folgende Beziehung als richtig erwiesen.

„Wenn man einen beliebigen Punkt o auf der vierfachen Tangente D_{1234} wählt und K_2 mit $d'_{12}o$ und $d'_{34}o$ in q' und q, respective zum Schnitte bringt, so schneiden sich die Geraden $d'_{12}q$ und $d'_{34}q'$ in einem Punkte p, welcher dem Involutionskegelschnitte J_2 angehört.“

Nach bekannten Eigenschaften der Kegelschnitte muss die Gerade op durch den Punkt δ' hindurchgehen und wird die Gerade qq' in dem zu δ' bezüglich o und p harmonisch conjugirten Punkte r schneiden. Lässt man nun D'_{12} mit D'_{34} zusammenfallen, so fallen auch $d'_{12}\ d'_{34}$ und δ' in einem Punkt zusammen; ebenso

vereinigen sich qq' und r in einem Punkte von K_2 und man hat somit in diesem Falle die folgende Relation:

„Wenn D und D' vierfache Elemente der biquadratischen Tangenteninvolution auf K_2 sind, so schneidet jede durch den Berührungspunkt einer dieser Tangenten, z. B. durch d hindurchgehende Gerade den Involutionskegelschnitt J_2 in einem Punkte p, die andere Tangente D' in einem Punkte o und den Träger K_2 in einem Punkte r, so dass $(drop) = -1$ ist.“

Dies liefert eine einfache Construction von J_2, wenn D und D' gegeben sind.

VII. Biquadratische Involutionen mit drei nur Doppelelemente enthaltenden Gruppen.

Die biquadratische Tangenteninvolution auf K_2 ist vollkommen bestimmt, wenn man die beiden Punkte $\delta\delta'$ beliebig annimmt; die Berührungspunkte $d_{12}d_{34}$, $d'_{12}d'_{34}$ der von δ und δ' an K_2 gelegten Tangentenpaare bestimmen mit δ und δ' den Involutionskegelschnitt J_2. Die Gerade $\delta\delta'$ oder J_1 trifft K_2 in zwei Punkten, deren Tangenten das fünfte und sechste Element der Involution darstellen.

Werden die Punkte $\delta\delta'$ als zwei conjugirte Pole von K_2 gewählt, so liegen $d_{12}d_{34}$ auf einer Geraden mit δ', und $d'_{12}d'_{34}$ liegen auf einer Geraden mit δ. Der Kegelschnitt J_2 zerfällt somit in diese beiden geraden Linien, welche sich im Pole i_1 von J_1 durchschneiden und mit J_1 ein bezüglich K_2 sich selbst conjugirtes Dreieck bilden. Da sich die Tangenten von K_2, welche das fünfte und sechste Doppelelement der Involution darstellen, im Punkte i_1 also auf J_2 schneiden, so bilden sie auch eine Gruppe der Involution, so dass dieselbe drei nur Doppelelemente enthaltende Gruppen besitzt:

„Wenn eine biquadratische Tangenteninvolution auf K_2 drei nur Doppelelemente enthaltende Gruppen besitzt, so zerfällt die Involutionscurve in drei Gerade, welche ein bezüglich K_2 sich selbst conjugirtes Dreiseit bilden. Die Quadrupel dieser Involution bilden dem K_2 umschriebene Vierseite, welche jenes

Dreiseit zum gemeinschaftlichen Diagonaldreiseit besitzen."

VIII. In Bezug auf drei Elementenpaare conjugirte biquadratische Involutionen erster Stufe.

Eine biquadratische Involution ist durch drei Elementenpaare und eine ganze Gruppe (ein Quadrupel) vollkommen und unzweideutig bestimmt.[1] Denken wir uns eine biquadratische Punktinvolution auf einer ebenen rationalen Curve vierter Ordnung C_4, so bestimmt, dass die Nachbarpunkte eines jeden der drei Doppelpunkte $d_i (i = 1, 2, 3)$ ein Punktepaar der Involution bilden. Eine solche Involution wird also vollkommen bestimmt sein, wenn man vier beliebige Curvenpunkte $a_1 a_2 a_3 a_4$ annimmt und als ein Quadrupel der Involution bildend festsetzt. Die Involution selbst kann nun leicht durch Kegelschnittbüschel vervollständigt werden. Legt man nämlich durch die vier Punkte (a) einen beliebigen Kegelschnitt, so wird er C_4 in weiteren vier Punkten $b_1 b_2 b_3 b_4$ schneiden und man erkennt sofort, dass jeder dem Viereck (b) umgeschriebene Kegelschnitt die Curve C_4 in vier ein Quadrupel bildenden Punkten $x_1 x_2 x_3 x_4$ der durch das Quadrupel (a) und die drei Curvendoppelpunkte bestimmten biquadratischen Involution schneiden muss. Man kann bei der Construction der (b)-Gruppe einen beliebigen Kegelschnitt durch die vier a-Punkte legen und offenbar die a-Gruppe auch durch eine beliebige x-Gruppe ersetzen. Man sieht weiter, dass alle b-Gruppen wieder eine biquadratische Involution auf C_4 bilden, welche in den drei Curvendoppelpunkten drei Paar entsprechender Elemente besitzt. So erhält man zwei „conjugirte" Involutionen; jene der sämmtlichen x-Gruppen und die der sämmtlichen b-Gruppen. Die Beziehung zwischen den beiden Involutionen besteht darin, dass jedes Quadrupel der einen mit jedem Quadrupel der anderen auf einem Kegelschnitte liegt, so dass man also jede der beiden Involutionen erhält, wenn man die Curve C_4 mit Kegelschnitten zum Durchschnitte bringt, welche irgend einem Quadrupel der zweiten Involution umgeschrieben sind.

---

[1] Siehe: Über biquadratische Involutionen erster Stufe. V. Abschnitt. Sitzung vom 10. Februar 1881.

In dieser Art erscheinen die auf C_4 befindlichen biquadratischen Punktinvolutionen, welche in den drei Curvendoppelpunkten Punktepaare besitzen, zu Paaren conjugirter Involutionen vereinigt. Jeder Involution ist eine andere conjugirt und der letzteren ist wieder die erste als conjugirte zugewiesen.

Wir wollen solche Involutionen vierten Grades, welche in den drei Curvendoppelpunkten Punktepaare besitzen, als **fundamentale** biquadratische Punktinvolutionen auf C_4 bezeichnen. Die fundamentalen biquadratischen Involutionen auf C_4 bilden nichts anderes, als ein System von biquadratischen Involutionen (auf einem beliebigen rationalen Träger) mit drei gemeinschaftlichen Elementenpaaren. Denkt man sich auf irgend einem Träger drei feste Elementenpaare $d'_1 d''_1$, $d'_2 d''_2$, $d'_3 d''_3$ als Paare einer biquadratischen Involution, so ist diese noch unbestimmt, wird aber eindeutig bestimmt, wenn zu den drei Paaren noch ein Quadrupel $a_1 a_2 a_3 a_4$ hinzukommt. Denkt man sich nun die drei Elementenpaare als Bilder der drei Doppelpunkte einer rationalen ebenen Curve vierter Ordnung,[1] so wird die Involution auftreten als Bild einer biquadratischen Fundamentalinvolution und ist daher begleitet von der ihr bezüglich der drei Elementenpaare d_2 conjugirten Involution.

Die Elementenpaare der conjugirten Involution (b) kann man auch sämmtlich erhalten, wenn man die degenerirten Kegelschnitte der Büschel (a) verwendet; jede Seite des vollständigen Viereckes (a) schneidet C_4 in zwei Punkten (b) und die beiden Punktepaare (b), welche durch zwei Gegenseiten eines (a)-Viereckes auf C_4 bestimmt werden, bilden ein Quadrupel der conjugirten Involution. Nun bilden irgend zwei Punkte (a) mit den beiden anderen auf ihrer Verbindungslinie liegenden Curvenpunkten (b) ein gerades Quadrupel der Curve, d. h. ein Quadrupel der biquadratischen Involution zweiter Stufe,[2] für welche die Curvendoppelpunkte die neutralen Paare vorstellen. Das Punktepaar (a) wird von dem dasselbe zu einem geraden Quadrupel

---

[1] Über biquadratische Involutionen zweiter Stufe und ihre typischen Curven, IV. Abschnitt. Sitzungsbericht vom 7. Mai 1880.

[2] Über biquadratische Involutionen zweiter Stufe und ihre typischen Curven. Abschnitt I, III. VIII. Sitzung vom 7. Mai 1880.

ergänzenden Paare begleitet. Wir können somit die bezüglich dreier Elementenpaare d_i conjugirten biquadratischen Involutionen erster Stufe folgendermassen definiren:

„Wenn man drei beliebige Elementenpaare $d_i (i = 1, 2, 3)$ einer biquadratischen Involution erster Stufe als neutrale Paare einer solchen Involution zweiter Stufe betrachtet und zu jedem Elementenpaar der ersten Involution das begleitende Elementenpaar in der Involution zweiter Stufe bestimmt, so gehören die begleitenden Paare einer zweiten biquadratischen Involution erster Stufe an, welche auch die drei Paare d_i enthält und zu welcher die erste Involution in derselben Beziehung steht. Die beiden Involutionen erster Stufe sollen als bezüglich der drei Elementenpaare d_i conjugirt bezeichnet werden."

Wenn auf C_4 eine fundamentale biquadratische Punktinvolution gegeben ist, und man legt durch ihre einzelnen Quadrupel und einen beliebigen festen Curvenpunkt b_1 Kegelschnitte, so schneiden sie sich in drei weiteren festen Curvenpunkten $b_2 b_3 b_4$, welche mit b_1 ein Quadrupel der conjugirten (oder begleitenden) Fundamentalinvolution bilden. Hieraus folgt speciell:

„Die Kegelschnitte, welche man durch die einzelnen Quadrupel und einen der drei Curvendoppelpunkte hindurchlegen kann, haben in diesem letzteren eine gemeinschaftliche Tangente und gehen durch zwei feste Curvenpunkte hindurch; die letzteren ergänzen das von dem Curvendoppelpunkte dargestellte Punktepaar zu einem Quadrupel der conjugirten fundamentalen Involution. Die Strahlen, welche den Curvendoppelpunkt mit den beiden festen Punkten verbinden, schneiden die Curve in jenen zwei Punkten, die den Curvendoppelpunkt in der gegebenen Involution zu einem Quadrupel ergänzen."

IX. Biquadratische Involutionen auf der Curve, für welche ein Doppelpunkt ein Paar, und die beiden anderen Doppelpunkte eine Gruppe darstellen.

Solcher Involutionen, welche als specielle Fälle der im Vorigen behandelten betrachtet werden müssen, gibt es offenbar drei Systeme, je nachdem der eine, der zweite oder der dritte Curvendoppelpunkt als einzelnes Elementenpaar auftritt. Jedes System ist von doppelter Unendlichkeit, da die Involution erst dann vollkommen bestimmt erscheint, wenn man zu dem als Elementenpaar auftretenden Curvendoppelpunkte ein beliebiges Punktepaar der Curve als die Gruppe ergänzend annimmt.

Es sei durch die beiden Curvendoppelpunkte $d_2 d_3$ eine Quadrupel und durch den Doppelpunkt d_1 ein Elementenpaar dargestellt, welches letztere von den zwei beliebig gewählten Curvenpunkten $p p'$ zu einem Quadrupel ergänzt sein möge. Hiemit ist die Involution als durch zwei Quadrupel gegeben, vollkommen bestimmt und kann folgendermassen vervollständigt werden. Die Curve C_4 wird von der Geraden pp' in einem Punktepaare qq' geschnitten und alle Kegelschnitte, welche durch die vier Punkte $qq'd_2 d_3$ hindurchgehen, bestimmen auf C_4 eine halbfundamentale quadratische Involution,[1] und zwar ist d_1 der Curvendoppelpunkt, welcher ein Elementenpaar dieser Involution darstellt. Die quadratische Involution, welche die durch d_1 hindurchgehenden Strahlen auf C_4 bestimmen, hat mit der ersterwähnten Involution ein Elementenpaar rr' gemeinschaftlich und man sieht sofort, dass die durch $pp'rr'$ hindurchgehenden Kegelschnitte auf C_4 die durch die beiden Quadrupel gegebene biquadratische Involution bestimmen.

X. Sich selbst conjugirte biquadratische Involutionen.

„Wenn eine biquadratische Involution, welche in den Doppelpunkten einer ebenen Curve vierter Ordnung Elementenpaare besitzt, sich selbst conjugirt ist,

[1] Über biquadratische Involutionen zweiter Stufe und ihre typischen Curven, Abschnitt IX. Sitzung vom 7. Mai 1880.

so sind ihre Quadrupel Berührungspunkte der Curve mit vierfach berührenden Kegelschnitten; und umgekehrt, bestimmen die vier Berührungspunkte eines solchen Kegelschnittes als Quadrupel aufgefasst mit den drei Curvendoppelpunkten als Punktepaare aufgefasst, eine sich selbst conjugirte Involution."

In der That müssen je zwei Quadrupel einer sich selbst conjugirten Involution auf einem Kegelschnitte liegen und es muss daher jedes Quadrupel mit dem ihm unendlich nahen auch auf einem Kegelschnitte liegen, welcher somit die Curve in den vier Punkten des Quadrupels berühren wird; ebenso klar ist die Umkehrung des Satzes.

XI. Die sieben Systeme der die Curve C_4 vierfach berührenden Kegelschnitte.

Jeder die Curve C_4 vierfach berührende Kegelschnitt liefert zunächst eine sich selbst conjugirte fundamentale biquadratische Involution, welche bestimmt erscheint durch das Quadrupel der Berührungspunkte und die drei in den Curvendoppelpunkten enthaltenen Elementenpaare. Jedes Quadrupel dieser Involution stellt die vier Berührungspunkte eines anderen Kegelschnittes dar und die den sämmtlichen Quadrupeln der Involution entsprechenden Kegelschnitte bilden ein System. Die acht Berührungspunkte zweier Kegelschnitte des Systemes liegen auf einer Curve zweiter Ordnung.

Jeder Kegelschnitt, welcher die Curve C_4 in vier Punkten $a_1 a_2 a_3 a_4$ berührt, liefert jedoch auch biquadratische Involutionen, welche zwei nur Doppelelemente enthaltende Gruppen besitzen. Betrachtet man nämlich die sämmtlichen Kegelschnitte, welche die Curve C_4 in den Punkten $a_1 a_2$ berühren, so werden sie auf derselben eine biquadratische Punktinvolution bestimmen, in welcher $a_2 a_4$ als Doppelelemente ein Quadrupel bilden. Ebenso bilden die weiteren zwei Schnittpunkte $\alpha_1 \alpha_2$ der Curve C_4 mit der Geraden $\overline{a_1 a_2}$ jeder als Doppelpunkt aufgefasst, ein Quadrupel derselben Involution. Die Curvendoppelpunkte $d_1 d_2 d_3$ stellen schliesslich drei Punktepaare dieser Involution dar.

„Irgend zwei von den vier Berührungspunkten eines vierfach berührenden Kegelschnittes und die Schnittpunkte der Curve mit der Verbindungsgeraden der beiden anderen Berührungspunkte bestimmen, als Paare conischer Doppelelemente aufgefasst, eine biquadratische Involution, welcher auch die Curvendoppelpunkte als Punktepaare angehören.“

„Wenn man umgekehrt auf C_4 eine fundamentale biquadratische Involution mit zwei nur Doppelelemente enthaltenden Gruppen construirt, so sind die Punkte der einen Gruppe und die Schnittpunkte der Curve mit der Verbindungslinie der Punkte der anderen Gruppe immer vier Punkte, in denen die Curve C_4 von einem Kegelschnitte berührt wird.“

Es seien in der That $a_3 a_4$ die Doppelelemente der einen Gruppe und $\alpha_1 \alpha_2$ jene der anderen und $a_1 a_2$ die Schnitte von C_4 mit der Geraden $\alpha_1 \alpha_2$. Die in a_1 und a_2 die Curve berührenden Kegelschnitte bestimmen auf ihr eine biquadratische Involution, welche mit der gegebenen, die Doppelelementengruppe $\alpha_1 \alpha_2$ und überdies die in den Curvendoppelpunkten gelegenen Paare gemeinschaftlich hat und folglich mit ihr identisch sein muss; es wird also einen Kegelschnitt unter den in a_1 und a_2 berührenden geben müssen, welcher auch die Gruppe $a_3 a_4$ enthält und die Curve daher in allen vier Punkten $a_1 a_2 a_3 a_4$ berührt.

Diese auf der Curve auftretenden biquadratischen Involutionen, welche zwei nur Doppelelemente enthaltende Gruppen besitzen und so geartet sind, dass sie zu den die Curve vierfach berührenden Kegelschnitten führen, besitzen in den drei Curvendoppelpunkten $d_1 d_2 d_3$ Elementenpaare; jedes dieser Paare kann entweder conisch oder linear sein und es sind in dieser Beziehung offenbar die folgenden Fälle möglich:

A) Die drei Elementenpaare $d_1 d_2 d_3$ sind sämmtlich conischer Natur (siehe Abschnitt IV).

B)
- *a*) d_1 und d_2 sind conisch, d_3 linear
- *b*) d_2 „ d_3 „ „ d_1 „
- *c*) d_3 „ d_1 „ „ d_2 „

$C)$ $\begin{cases} a) & d_1 \text{ und } d_2 \text{ bilden ein Quadrupel, } d_3 \text{ ist conisch,} \\ b) & d_2 \;\; „ \;\; d_3 \;\; „ \;\; „ \;\; „ \;\; d_1 \;\; „ \;\; „ \\ c) & d_3 \;\; „ \;\; d_1 \;\; „ \;\; „ \;\; „ \;\; d_2 \;\; „ \;\; „ \end{cases}$

$D)$ Zwei von den drei Doppelpunkten stellen lineare Paare dar und der dritte ein conisches Paar.

Alle drei Paare $d_1 d_2 d_3$ können nicht linear sein weil sie sonst einer und derselben quadratischen Involution angehören müssten, was nie der Fall sein kann.[1]

Wir zeigen überdies, dass auch die drei sub $D)$ enthaltenen Fälle ausgeschieden sind, indem sie keine eigentlichen vierfach berührenden Kegelschnitte liefern. Wenn nämlich zwei der Paare d, z. B. d_2 und d_3 linear wären, so wird die quadratische Involution, welche die biquadratische enthält, identisch mit der fundamentalen Involution, welche die Strahlen durch den dritten Doppelschnitt d_1 auf der Curve C_4 bestimmen. Nun gehören die beiden nur Doppelelemente enthaltenden Gruppen als Paare ebenfalls dieser Involution an und die Verbindungslinie eines dieser Paare trifft C_4 in zwei Berührungspunkten eines vierfach berührenden Kegelschnittes so, dass also diese beiden Berührungspunkte in d_1 hineinfallen und folglich zu keinem eigentlichen (vierfach berührenden Kegelschnitte führen können.

Es bleiben somit nur die sub $A)$ $B)$ $C)$ angeführten sieben Fälle, welche zu von einander wesentlich verschiedenen sieben Systemen von vierfach berührenden Kegelschnitten führen.[1]

Es möge zum Schlusse bemerkt werden, dass das sub $A)$ aufgezählte System, respective das ihm entsprechende vereinzelte System vierfach berührender Kegelschnitte in der folgenden Abhandlung des Herrn Adolf Ameseder einer eingehenden Untersuchung unterzogen wird.

Die übrigen sechs Systeme theilen sich den drei Doppelpunkten entsprechend in zwei Tripel, auf die wir in nächster Zukunft eingehender zurückkommen dürften.

---

[1] Vergleiche: „Über biquadratische Involutionen zweiter Stufe und ihre typischen Curven.“ Abschn. I—V. Sitzung vom 7. Mai 1880.

[2] Vergleiche: Clebsch-Lindemann: Vorlesungen über Geometrie, pag. 898.

Über die eine rationale Plancurve vierter Ordnung vierfach berührenden Kegelschnitte, welche ein einzelnes System bilden.

Von Adolph Ameseder,

Assistenten der darstellenden Geometrie an der k. k. technischen Hochschule in Wien.

(Mit 1 Tafel.)

In der Abhandlung „Über Curven vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten“ [1] haben wir nachgewiesen, dass ein Kegelschnitt, welcher Träger einer Tangenteninvolution zweiten Grades ist, die mit einem projectivischen Strahlbüschel eine rationale Plancurve vierter Ordnung erzeugt, diese Curve vierfach berührt, und dass es eine einfach unendliche Reihe von Kegelschnitten dieser Eigenschaft gibt, deren jeder als Träger einer erzeugenden Tangenteninvolution erwähnter Art angenommen werden kann.

Wir gelangten mit Hilfe dieser Kegelschnitte zu einer geometrischen Herleitung der Eigenschaften der rationalen Curven vierter Ordnung und zu der wohl einfachsten Ausführung der an ihnen auftretenden Constructionen.

Das System dieser Kegelschnitte haben wir bereits in der citirten Abhandlung und in den „Bemerkungen“ am Schlusse der Publication: „Beitrag zur Theorie der Regelflächen vierten Grades mit einem Doppelkegelschnitt“ [2] berührt und nun in der vorliegenden Arbeit einer eingehenden Untersuchung unterworfen. Von den zahlreichen Eigenschaften dieses Systems wollen wir hier nur hervorheben, dass irgend zwei Kegelschnitte desselben und nur solche als Träger projectivischer die Curve vierter Ordnung C_4 erzeugender Tangentensysteme angenommen werden

---

[1] Sitzb. d. k. Akademie der Wissenschaften in Wien, Bd. 79, II. Abth., pag. 241—268.

[2] Ibidem Bd. 81, I. Abth., pag. 298.

können; ferner dass jeder Kegelschnitt, welcher Träger einer Tangenteninvolution dritten oder vierten Grades ist, die mit einem eindeutigen Strahlbüschel, oder im ersten Falle auch mit einem conlocalen, projectivischen Tangentensysteme eine Curve C_4 zum Erzeugniss hat, für diese Curve ein vierfach berührender Kegelschnitt des sprachlichen Systems ist.

Aus diesen Eigenschaften, welche die hervorragende Bedeutung des Systems für die Curven vierter Ordnung hinlänglich darthun, liessen sich mit Leichtigkeit Kriterien über die Realität der Doppeltangenten und ihrer Berührungspunkte und über den Zusammenhang der Art der Doppelpunkte mit der Anzahl der reellen Tangenten aus einem Punkte der Curve ableiten (Art. 6 und 14). Doch auch das System selbst ist reich an interessanten Eigenschaften, wie die Abschnitte über die Polareigenschaften und über die Hesse'sche und Cayley'sche Curve desselben zeigen.

Von speciellen Curven C_4 wurden jene mit Doppelinflexionspunkten und die Curven mit Rückkehrpunkten in soweit besprochen, als das behandelte System sich für dieselben wesentlich specialisirt. Für die ersteren wurde noch der Satz aufgestellt und bewiesen, dass für eine Curve vierter Ordnung, welche irgend drei Doppelpunktstangenten zu Inflexionstangenten hat, alle Tangenten in den Doppelpunkten Inflexionstangenten sind.

I. Charakteristiken des Systems.

1. Sind Δ_i, Δ_k, Δ_l die Doppelpunkte einer eindeutig gegebenen allgemeinen, rationalen Plancurve vierter Ordnung C_4, G eine Gerade, welche die Curve im Punkte p schneidet, φ der nach diesem zielende Strahl des Büschels Δ_i und X der Schnittpunkt von G mit der Linie $\overline{\Delta_k\Delta_l}$, so wissen wir aus Artikel 4 der zuerst citirten Abhandlung (A), dass, wenn φ sich um Δ_i dreht und X auf $\Delta_k\Delta_l$ eine Reihe beschreibt, die mit der von φ auf dieser Geraden bestimmte Reihe x projectivisch ist und mit ihr Δ_k und Δ_l zu Doppelpunkten hat, die Gerade G einen Kegelschnitt S_2 umhüllt, der die Curve C_4 an vier Stellen berührt.

Der Strahl φ trifft C_4 noch in einem zweiten Punkte p', dessen Verbindungslinie mit X auch eine Tangente von S_2 ist.

Alle diese Geraden gruppiren sich in dieser Weise zu Paaren, sie bilden eine quadratische Involution auf S_2, die $\overline{\Delta_k\Delta_l}$ zur Axe hat und deren Elementenpaare mit den homologen Strahlen von Δ_i sich in Punkten von C_4 begegnen.

„Das Erzeugniss einer centralen, quadratischen Punktinvolution [1] auf der Curve C_4 und einer projectivischen Reihe auf der Verbindungslinie der zwei weiteren Doppelpunkte ist ein die Curve vierfach berührender Kegelschnitt S_2, wenn die zwei letzteren Doppelpunkte, welche gemeinsame Elemente der erzeugenden Gebilde sind, sich selbst entsprechen."

Aus Art. 4 (A) ist bekannt, dass jeder Bestimmung in der Zuordnung der Punkte x und X nur ein Kegelschnitt S_2 entspricht.

Wenn wir nun den Werth des Doppelverhältnisses $(\Delta_k\Delta_l xX)$ mit h bezeichnen, so ist, wie wir aus dem ersten Abschnitte der Publicationen „Über ein Nullsystem zweiten Grades" [2] wissen, $\frac{h-1}{h}$ der Doppelverhältnisswerth jener vierpunktigen Gruppe, welche aus den Punkten Δ_l, Δ_i, aus dem Schnitt Y von G mit $\overline{\Delta_l\Delta_i}$ und der Projection von p aus Δ_k auf $\overline{\Delta_l\Delta_i}$ besteht. Dieser Werth bleibt derselbe, so lange x und X entsprechende Punkte der durch die Gleichung $(\Delta_k\Delta_l xX) = h$ fixirten Reihen sind; so lange werden also auch y und Y coordinirte Punkte der projectivischen Reihen $(\Delta_l\Delta_i yY)$ mit dem charakteristischen Doppelverhältnisse $\frac{h-1}{h}$ sein.

Die Gerade G schneidet also bei jeder Lage des Punktes p die Seiten $\overline{\Delta_k\Delta_l}$, $\overline{\Delta_l\Delta_i}$ und $\overline{\Delta_i\Delta_k}$ in drei Punkten X, Y und Z, welche den Projectionen x, y, z von p aus Δ_i, Δ_k, Δ_l auf jene Seiten, bezüglich der Punkte Δ_k und Δ_l, Δ_l und Δ_i, und Δ_i und Δ_k respective als Fundamentalpunkte für die bestimmten Doppelverhältnisswerthe $h, \frac{h-1}{h}$ und $\frac{1}{1-h}$ entsprechen. Jener Kegelschnitt S_2, welcher für die durch die Zuordnung von φ und G bestimmte Projectivität $(\Delta_k\Delta_l xX) = h$ von der Geraden G umhüllt

[1] Eine solche wird auf C_4 nur von den Strahlen durch einen Doppelpunkt festgelegt.

[2] Sitzb. der k. Akademie der Wissenschaften in Wien, Bd. LXXXIII pag. 385–401.

wird, ist daher auch Enveloppe dieser Geraden für die Projectivitäten $(\Delta_l\Delta_i yY) = \frac{h-1}{h}$ und $(\Delta_i\Delta_k zZ) = \frac{1}{1-h}$, d. h. die Gerade G umhüllt denselben Kegelschnitt S_2, ob man ihr nun $\overline{\Delta_i p}$, oder $\overline{\Delta_k p}$, oder $\overline{\Delta_l p}$ zuweist.

Wir haben aber auch gezeigt, dass die Schnitte X, Y, Z einer Geraden G mit den Seiten eines Dreieckes $\Delta_i\Delta_k\Delta_l$ und die Projectionen x, y, z eines beliebigen Punktes p von G aus den Ecken auf die Gegenseiten mit den Ecken drei Punktgruppen bilden, welche den Gleichungen $(\Delta_k\Delta_l xX) = h$, $(\Delta_l\Delta_i yY) = \frac{h-1}{h}$ und

$(\Delta_i\Delta_k zZ) = \frac{1}{1-h}$ genügen. Aus welcher Thatsache mit Beziehung auf das eben Gesagte ohne weiters hervorgeht, dass sich die einer Tangente des Kegelschnittes S_2 entsprechenden drei Strahlen in den Büscheln Δ_i, Δ_k und Δ_l allemal in einem und demselben auf jener Tangente befindlichen Curvenpunkte treffen, und dass also die charakteristischen Doppelverhältnisse zwischen jenen drei Tangenteninvolutionen, welche auf S_2 liegen,[1] und den ihnen zukommenden und projectivischen Büscheln Δ_i, Δ_k und Δ_l gleich sind den drei Grundwerthen eines Doppelverhältnisses.

Diese Eigenschaften von S_2 lassen uns in ihm [mit Hilfe des Aufsatzes „Über ein Nullsystem etc."] die Nullcurve von C_4, und zwar für den auf $\overline{\Delta_k\Delta_l}$ genommenen Doppelverhältnisswerth h und das Hauptdreieck $\Delta_i\Delta_k\Delta_l$ erkennen, und gestatten für die Kegelschnitte S_2 die folgende einfache Definition zu geben:

„Die vierfach berührenden Kegelschnitte S_2 der Curve C_4 sind ihre Nullcurven für das Doppelpunktdreieck als Hauptdreieck."

2. Wir ordneten der Geraden G die Strahlen $\overline{\Delta_i p}$, $\overline{\Delta_k p}$ und $\overline{\Delta_l p}$ zu, indem wir dem Punkte X den ersten der drei Strahlen zuwiesen, und erhielten als Enveloppe von G einen Kegelschnitt S_2. Mit demselben Rechte können wir aber die in einem der drei anderen Schnittpunkte p_1, p_2, p_3 der Geraden G mit C_4 zusammentreffenden Doppelpunktstrahlen als G entsprechend annehmen,

---

[1] Vergl. Art. 2 in (A).

d. h. dem Punkte X jeden von den drei Strahlen $\overline{\Delta_i p_1}$, $\overline{\Delta_i p_2}$, $\overline{\Delta_i p_3}$ projectivisch zuordnen. Nach Obigem bedingt eine derartige Zuordnung immer einen und nur einen andern Kegelschnitt S_2, der mit dem früheren nur G als Tangente und die Eigenschaft gemeinschaftlich hat, dass auch er die Curve C_4 vierfach berührt und als Träger sie erzeugender, quadratischer Involutionen angesehen werden kann.

Dies gibt für das System der sprachlichen Kegelschnitte das folgende wichtige Theorem:

„Jede Gerade in der Ebene einer rationalen Curve vierter Ordnung C_4 ist Tangente von vier C_4 vierfach berührenden Kegelschnitten des Systems S."

Für das Folgende ist zu bemerken, dass die vier Kegelschnitte S_2, S_2', S_2'', S_2''', welche G berühren, für diese Gerade der Reihe nach den Punkten p, p_1, p_2, p_3 conjugirt sind, so zwar, dass, wenn wir einen derselben, etwa S_2^m, zum Träger einer erzeugenden, quadratischen Tangenteninvolution T^2 machen, der Geraden G als Element von T^2 drei Strahlen in den Büscheln Δ_i, Δ_k und Δ_l zukommen, welche sich im Punkte p_m treffen. Nach Artikel 6 (A) ist p_m auch jener Punkt der Curve, welcher dem Berührungspunkte n_m von G mit S_2^m auf diesem Kegelschnitt „zugeordnet" ist.

Der obige Satz erhält für die unendlich ferne Gerade die Form:

„Das System der Kegelschnitte S_2 enthält vier Parabeln."

3. Wie wir im Artikel 3 der Abhandlung (A) gezeigt haben, sind die Tangente t in dem Berührungspunkte B eines Kegelschnittes S_2 mit der Curve C_4 und der nach diesem Punkte zielende Strahl φ im Büschel Δ_i entsprechende Elemente der erzeugenden Gebilde. Daraus ist augenscheinlich, dass wir den Kegelschnitt S_2 auch als durch die Zuordnung von $\overline{\Delta_i B}$, $\overline{\Delta_k B}$, $\overline{\Delta_l B}$ und t bedingt betrachten können; da es offenbar ganz gleichgiltig ist, von welchem Paar entsprechender Elemente G und φ der von S_2 auf $\overline{\Delta_k \Delta_l}$ hervorgerufenen Projectivität ($\Delta_k \Delta_l xX$) wir ausgehen, um umgekehrt zu S_2 zu gelangen. Um also den C_4 in einem gegebenen Punkte B und an drei anderen Stellen berührenden Kegelschnitt S_2 zu erhalten, hat man in B die Tangente an C_4 — in der in Artikel 7 (A) angegebenen Weise — zu legen,

und ihrem Schnitt X mit $\overline{\Delta_k\Delta_l}$ den Strahl $\overline{\Delta_i B}$ zuzuweisen. Durch diese Bestimmung ist S_2 als Umhüllende von t vollkommen fixirt:

„Die Curve C_4 wird in einem Punkte nur von einem Kegelschnitte des Systems S berührt."

Dieser Kegelschnitt ist zugleich der einzige, welcher durch jenen Punkt läuft, weil kein S_2 die Curve durchschneiden kann.

Wenden wir die angegebene Construction für den Berührungspunkt t_i einer aus Δ_i an C_4 gelegten Tangente T_i an, so haben wir ihren Schnitt X mit $\overline{\Delta_k\Delta_l}$ dem durch t_i' gehenden Strahl φ im Büschel Δ_i, d. h. T_i selbst entsprechen zu lassen. Die Reihen (x) und (X) sind nun identisch. Jedem Strahl φ von Δ_i sind zwei Gerade G' und G'' zugeordnet, welche als die Verbindungslinien der auf φ befindlichen Curvenpunkte p', p'' mit dem sich selbst entsprechenden φ und $\overline{\Delta_k\Delta_l}$ gemeinschaftlichen Punkt $x \equiv X$ jedesmal mit φ coïncidirend Δ_i zur Enveloppe haben.

Dieselben zwei identischen Reihen (x) und (X) treten auf, wenn wir von dem Berührungspunkt t_i'' der zweiten Curventangente T_i' aus Δ_i ausgehen; woraus wir die sich auch späterhin bestätigende Consequenz ziehen, dass die zwei Tangenten T_i und T_i' auch einen vierfach berührenden Kegelschnitt des behandelten Systems repräsentiren. Von seinen vier Berührungspunkten liegen zwei in Δ_i, die zwei anderen sind t_i' und t_i''.

Wenn aus der Thatsache, dass die Curve C_4 in einem Punkte nur von einem Kegelschnitte S_2 berührt wird, unzweideutig hervorgeht, dass diese Kegelschnitte nur ein System bilden, so erkennen wir nun auch aus der zuletzt bewiesenen Eigenschaft desselben, die aus den Doppelpunkten an die Curve gelegten Tangentenpaare als degenerirte Elemente zu enthalten, in ihm dasjenige System, welches Clebsch[1] in seiner Eintheilung der vierfach berührenden Kegelschnitte einer Curve C_4 als das ausgezeichnete System (111) bezeichnet.

---

[1] Clebsch-Lindemann: „Vorlesungen über Geometrie", pag. 898. Ausser der Eintheilung der vierfach berührenden Kegelschnitte einer rationalen Curve C_4 ist in diesem Werke über die Systeme dieser Kegelschnitte und speciell über das von uns besprochene nichts enthalten. Auch in der „Analytische Geometrie der höheren ebenen Curven" von Salmon-Fiedler findet sich keine diesbezügliche Untersuchung der rationalen Curven vierter Ordnung.

Ausser den drei erwähnten enthält das System **keine zerfallenden** Kegelschnitte.

Denn angenommen, es wäre das Conträre der Fall; so könnte ein solcher Kegelschnitt entweder aus zwei oder aus einem doppelt geltenden Punkte bestehen. Halten wir die im ersten Artikel gegebene Definition eines S_2 fest, so sehen wir nun ohne Weiteres ein: dass im ersten Falle C_4 das Erzeugniss zweier perspectivischen, die Tangenteninvolution vertretenden Strahlbüschel und eines Büschels Δ_i (oder Δ_k, Δ_l) sein müsste, also aus zwei Kegelschnitten bestehen würde; im letzteren Falle hingegen würde sich die Tangenteninvolution in eine quadratische Strahleninvolution verwandeln, was wieder nur geschehen kann, wenn ihr Scheitel ein Doppelpunkt der Curve ist.

Eine Erhärtung findet dieser Beweis in der zweiten Definition eines S_2 als Nullcurve von C_4. Eine solche kann nur in einen Hauptpunkt degeneriren.

Aus diesen Auseinandersetzungen sehen wir, dass der erste Satz der Note: „Über vierfach berührende Kegelschnitte einer Curve C_4" [1] zu allgemein gehalten ist, und dass die dort gelösten Probleme sich nicht auf alle vierfach berührenden Kegelschnitte, sondern nur die hier besprochenen beziehen. Wir setzten an jener Stelle irrthümlich voraus, C_4 wäre durch irgend einen vierfach berührenden Kegelschnitt K_2 mit seinen Berührungspunkten, einen Doppelpunkt und der Verbindungslinie desselben mit einem zweiten, nicht näher bestimmten Doppelpunkt vollkommen gegeben. In der That ist dies jedoch nur dann der Fall, wenn K_2 dem Systeme S angehört. Der Beweis in l. c. bleibt richtig, hat jedoch — wie der geehrte Leser nun leicht erkennt — nur für einen S_2 Geltung.

4. Für eine Curventangente ist jener Kegelschnitt S_2, welcher sie in ihrem Berührungspunkte mit C_4 berührt, den zwei hier zusammenfallenden Curvenpunkten entsprechend, doppelt zu zählen. Die zwei weiteren Kegelschnitte S_2, welche auch t zur Tangente haben, sind in erklärter Weise den zwei Schnittpunkten von t mit C_4 beigeordnet. Sie berühren, wie im allgemeinen Falle, t nicht in Curvenpunkten.

[1] Sitzb. der k. Akademie der Wissenschaften in Wien, Jahrg. 1879, Bd. 79, pag. 187.

Es bedarf nun wohl keines Beweises, dass eine Inflexionstangente nur Tangente von zwei Kegelschnitten S_2 ist, dem dreimal zu zählenden im Inflexionspunkte und dem durch ihren weiteren Schnittpunkt mit C_4 bedingten. Und es ist ebenso einleuchtend, dass eine Doppeltangente auch nur zwei Kegelschnitte des Systems S — deren jeder für die Tangente doppelt gilt — und zwar in ihren Berührungspunkten mit C_4 tangirt. Dies ist uns zugleich ein weiterer Beleg dafür, dass das System S Doppeltangentenpaare nicht enthält.

Den zwei Tangenten eines Kegelschnittes S_2, welche sich in Δ_i treffen, entsprechen nach Artikel 5 (A) die Tangenten der C_4 in Δ_i. Wir kommen daher umgekehrt zu den zwei eigentlichen, einen Doppelpunktstrahl berührenden Kegelschnitten des Systems S, wenn wir ihm im Büschel Δ_i die eine und dann die andere Doppelpunktstangente projectivisch zuordnen. Ausser diese berührt der Doppelpunktstrahl noch jenen für ihn doppelt zu zählenden Kegelschnitt S_2, welcher von den zwei aus Δ_i und C_4 gelegten Tangenten T'_i, T''_i constituirt wird.

5. Lässt man eine Gerade G um einen Punkt L rotiren und legt man aus letzterem an die vier G „beigeordneten" (d. h. sie berührenden) Kegelschnitte S_2 die weiteren vier Tangenten, so bilden diese mit jener Geraden ein symmetrisches Strahlensystem vom vierten Grade,[1] welches acht Doppelelemente erster Art besitzt. Sechs dieser Doppelelemente werden paarweise von den drei durch L laufenden Doppelpunktstrahlen $\overline{L\Delta_i}$, $\overline{L\Delta_k}$ und $\overline{L\Delta_l}$ absorbirt; weil ein solcher, so $\overline{L\Delta_i}$, Tangente von zwei eigentlichen Kegelschnitten S_2 und jenem degenerirten ist, welcher aus den Tangenten T'_i, T''_i besteht, und daher von den vier ihm entsprechenden Strahlen zwei mit ihm coïncidiren.

Die zwei restirenden Doppelelemente bedingen zwei Kegelschnitte S'_2 und S''_2 des Systems, welche den Punkt L enthalten; sie sind die Tangenten dieser Kegelschnitte in L.[2]

„Durch einen Punkt der Ebene gehen zwei eine Curve C_4 vierfach berührende Kegelschnitte des Systems S."

---

[1] Siehe Prof. Dr. Emil Weyr's „Beiträge zur Curvenlehre" [Wien 1880, A. Hölder], pag. 9.

[2] Eine einfache Construction dieser zwei Tangenten geben wir im Artikel 20.

Eine Gerade G schneidet demnach das System S in einem symmetrischen Punktsysteme zweiten Grades π^2. Dieses hat mit einer conlocalen quadratischen Involution zwei Punktepaare gemeinschaftlich, d. h. in dem Systeme S sind zwei Kegelschnitte, deren Schnittpunkte mit G durch zwei gegebene Punkte m und m' dieser Geraden harmonisch getrennt werden. Für die unendlich ferne Gerade als G und die imaginären Kreispunkte als Punkte m und m' gibt dies für das System die Eigenschaft:

„Im Kegelschnitt-Systeme S kommen zwei gleichseitige Hyperbeln vor.“.

II. Von dem Kegelschnittsysteme gegebene symmetrische Elementensysteme.

6. Das symmetrische Punktsystem zweiten Grades π^2, welches von den S_2 auf einer Geraden G herausgeschnitten wird, hat die Berührungspunkte n, n_1, n_2, n_3 der G beigeordneten Kegelschnitte zu Doppelpunkten erster Art. Wogegen die Schnittpunkte p, p_1, p_2, p_3 von G mit C_4 die Verzweigungspunkte vorstellen; diesen entsprechen die Doppelpunkte zweiter Art, die — als solche — jene Punkte d, d_1, d_2, d_3 sind, in welchen G die die Curve in den p berührenden S_2 zum zweiten Male trifft.

Ist G eine Curventangente, so fallen je zwei der erwähnten Punkte in den Berührungspunkt.

Für eine Inflexionstangente coïncidiren je drei mit dem Inflexionspunkte, und für eine Doppeltangente vertheilen sie sich gleichmässig auf die zwei Berührungspunkte.

Die Tangenten δ'_i, δ''_i eines S_2 in seinen Schnittpunkten X'_i, X''_i mit der Seite $\overline{\Delta_k\Delta_l}$ des Doppelpunktdreieckes sind die Doppelstrahlen der erzeugenden Involution mit der Axe $\overline{\Delta_k\Delta_l}$. Sie und mithin auch X'_i, X''_i entsprechen den Curventangenten T'_i, T''_i aus dem Doppelpunkte Δ_i projectivisch. Wir erhalten daher umgekehrt jene zwei Kegelschnitte, welche durch X'_i gehen, als durch jene Projectivitäten gegeben, die bestimmt werden durch die Zuweisung von X'_i an T'_i und dann an T''_i. Der Punkt X''_i entspricht in der betreffenden Projectivität der zweiten Tangente, also im ersten Falle T''_i im letzteren T'_i. Aus dieser Beziehnung fliessen die Sätze:

„Die Schnittpunkte der Verbindungslinie zweier Doppelpunkte Δ_k und Δ_l mit den Kegelschnitten S_2 gruppiren sich in zwei projectivische Reihen mit den gemeinschaftlichen Doppelpunkten Δ_k und Δ_l. Die charakteristischen Doppelverhältnisse sind gleich jenen des Büschels, welches von den zwei anderen Seiten des Doppelpunktdreieckes und den aus Δ_i an C_4 gelegten Tangenten gebildet wird, für die zwei ersten Strahlen als Fundamentalstrahlen.“

„Schneidet die Verbindungslinie zweier Doppelpunkte einen Kegelschnitt des Systems S in reellen (imaginären) Punkten, so hat sie mit allen reelle (imaginäre) Punkte gemein und die Tangenten aus dem dritten Doppelpunkte an die Curve sind auch reell (imaginär).“

„Kein eigentlicher Kegelschnitt des Systems berührt eine Verbindungslinie zweier Doppelpunkte.“

Die Doppelpunkttangenten in Δ_i sind als Elemente dieses Büschels den aus Δ_i an einen S_2 gezogenen Tangenten projectivisch zugeordnet und mit diesen gleichzeitig reell und imaginär:

„Die aus einem Doppelpunkte der Curve C_4 an einen Kegelschnitt S_2 gelegten Tangenten bilden mit den zwei zugehörigen Seiten des Doppelpunktdreieckes einen Vierstrahl, der doppelverhältnissgleich ist mit dem von denselben Seiten und den Doppelpunkttangenten constituirten Büschel.“

„Ein isolirter Doppelpunkt der Curve C_4 befindet sich innerhalb aller Kegelschnitte S_2, ein eigentlicher hingegen ausserhalb derselben.“

Halten wir diesen mit dem zweiten Satze dieses Artikels zusammen, so ergibt sich das folgende Resultat:

„Sind die aus einem Doppelpunkte an eine Curve C_4 gezogenen Tangenten imaginär, so sind die zwei anderen Doppelpunkte, wenn sie reell sind, eigentliche Doppelpunkte.“

In diesem Falle trifft jede Gerade durch den ersten Doppelpunkt die Curve in reellen Punkten.

7. Da die Tangentenpaare der Curve aus den Doppelpunkten selbst Kegelschnitte des Systems sind, geht durch einen Punkt einer solchen Tangente T_i nur ein eigentlicher Kegelschnitt S_2, und es ist somit das von den S_2 auf T_i fixirte Punktsystem eine quadratische Involution. Dieser gehören auch die Schnitte von T

mit den zwei anderen Tangentenpaaren und das Punktepaar, welches ihr Berührungspunkt t_i und der mit ihr incidente Doppelpunkt Δ_i vorstellen, als conjugirte Paare an; jedes Paar wird von den Berührungspunkten der Tangente mit den zwei ihr beigeordneten S_2 harmonisch getrennt.[1]

Mein verehrter Lehrer, Herr Professor Dr. Emil Weyr, war so gütig, mich darauf aufmerksam zu machen, dass es in der Ebene der Curve C_4 unendlich viele Gerade gibt, welche das System S in quadratischen Punktinvolutionen schneiden, und dass diese Geraden eine Curve dritter Classe C^3 umhüllen.

Es ist auch leicht einzusehen, dass eine jede gemeinschaftliche Sekante l zweier Kegelschnitte des Systems die erwähnte Eigenschaft hat. Denn ihre Schnitte a, a' mit diesen Kegelschnitten treten zu den Punkten p und d als ein neues Paar sowohl von Verzweigungspunkten als auch Doppelpunkten hinzu, und bewirken daher ein Zerfallen des Punktsystems π^2 von l in zwei projectivischen Reihen, deren Elemente — weil a, a' vertauschungsfähig sind — sich in Involution befinden. Nun laufen durch einen Punkt L der Ebene zwei Kegelschnitte S_2' und S_2''; von ihren gemeinschaftlichen Sekanten enthalten drei den Punkt L, sie stellen die Tangenten vor, welche sich aus L an C^3 ziehen lassen —; diese Curve ist von der dritten Classe:

„Jene Geraden, welche das System der Kegelschnitte S_2 in quadratischen Punktinvolutionen schneiden, umhüllen eine Curve dritter Classe C^3, welche die sechs aus den Doppelpunkten der Curve C_4 an diese gelegten Tangenten und die Diagonalen jener Vierseite berührt, welche von zwei Paaren solcher Tangenten gebildet werden.“

III. Die Kegelschnitte des Systems als Träger von projectivischen, die Curve C_4 erzeugenden Tangentensystemen.

8. „Zwei Kegelschnitte, welche Träger projectivischer Tangentensysteme sind, sind für das Erzeugniss dieser — das eine allgemeine, rationale Plancurve vierter Ordnung ist — vierfach berührende Kegelschnitte des Systems S.“

---

[1] Vergl. Art. 31.

Um diesen wichtigen Satz, den wir mehrfach im Folgenden benützen werden, möglichst allgemein zu beweisen, nehmen wir an, K_2' und K_2'' seien irgend zwei Kegelschnitte und a, b, c und a', b', c' entsprechende Elemente der auf beiden gedachten projectivischen Tangentensysteme Σ' und Σ''. Das Erzeugniss dieser ist nach Schröter[1] eine allgemeine Curve vierter Ordnung C_4 mit drei Doppelpunkten Δ_i, Δ_k und Δ_l. Diese Punkte haben in Bezug auf Σ' und Σ'' die Eigenschaft, dass den Tangenten i_1', i_2' aus einem solchen, so Δ_i an K_2' die Tangenten i_1'', i_2'' aus demselben Punkte an K_2'' projectivisch zukommen, d. h. dass sowohl i_1' und i_1'' als auch i_2' und i_2'' entsprechende Elemente jener Systeme sind. Schröter zeigt auch, dass, wenn man aus einem Punkte der Verbindungslinie zweier Doppelpunkte, etwa $\overline{\Delta_k\Delta_l}$, die Tangenten an K_2' legt, die diesen homologen Tangenten von K_2'' sich wieder in einem Punkte dieser Geraden treffen.

Demgemäss wird, wenn p ein einfacher Punkt der Curve C_4 ist und wir aus ihm die zwei Tangenten t_1 und (t_1) an K_2' ziehen, von den zwei diesen coordinirten Tangenten t_1' und (t_1') auf K_2'' nur eine t_1' durch p laufen. Ferner werden, nach dem zuletzt Gesagten, die Tangente t_2, welche wir aus dem Schnittpunkte X von t_1 mit $\overline{\Delta_k\Delta_l}$ an K_2' noch legen können, und die zweite Tangente t_2' von K_2'', welche durch den gemeinschaftlichen Punkt der Geraden t_1' und $\overline{\Delta_k\Delta_l}$ läuft, entsprechende Elemente der Systeme Σ' und Σ'' sein, ihr Schnittpunkt p' also auch der Curve angehören. Die Beziehung zwischen diesem Punkte p' und dem Punkte p ist eine eindeutige und — wie aus der Construction folgt — auch eine involutorische. In dieser Art — und dies zeigt auch die Construction — entsprechen sich sowohl die in Δ_k als auch die in Δ_l vereinigten Punkte der Curve; woraus hervorgeht, dass die von den Punktpaaren pp' gebildete quadratische Involution identisch ist mit jener centralen Involution, welche von den Strahlen $\varphi \equiv pp'$ durch den dritten Doppelpunkt Δ_i auf C_4 festgelegt wird.

Man sieht nun auch sofort ein, dass die Verwandtschaft zwischen dem Büschel Δ_i (φ) und den Reihen (X) und (X') eine eindeutige ist. Man gelangt zu den zwei Punkten X und X', welche

---

[1] Siehe H. Schröter: „Erzeugnisse krummer projectivischer Gebilde". Crelles Journal. Bd. 54. pag. 38 und insbesondere 43—47.

einem Strahl φ in diesen Reihen zugeordnet sind, indem man jene zwei sich entsprechenden Tangenten t_1 und t_1' von K_2', beziehungsweise K_2'' construirt, die sich in einem der Schnittpunkte p jenes Strahles mit C_4 begegnen. Sie geben uns mit $\overline{\Delta_k \Delta_l}$ zum Schnitt gebracht X und X'. Umgekehrt können wir zu einem gegebenen X den Strahl φ zeichnen. Wir legen zu dem Ende aus X die zwei Tangenten t_1, t_2 an K_2', bestimmen die ihnen entsprechenden t_1', t_2' auf K_2'', die sich in X' treffen, und fixiren die gemeinschaftlichen Punkte p von t_1 und t_1' und p' von t_2 und t_2'. Ihre Verbindungslinie läuft durch Δ_i und ist der gesuchte Strahl des Büschels.

Machen wir noch darauf aufmerksam, dass dem Strahle $\overline{\Delta_i \Delta_k}$ sowohl in (X) als auch in (X') der Punkt Δ_k zugewiesen ist, und dasselbe für $\overline{\Delta_i \Delta_l}$ und Δ_l gilt, so sehen wir den Beweis für den vorausgeschickten Satz erbracht. Denn nun ist gezeigt, dass K_2' das Erzeugniss der Reihe (X) auf $\overline{\Delta_k \Delta_l}$ und der quadratischen, centralen Involution (pp') auf C_4 unter der Voraussetzung ist, dass die beiden Gebilden gemeinsamen Elemente Δ_k und Δ_l sich selbst entsprechen; und dass K_2'' ganz in derselben Weise als Enveloppe der Verbindunglinien entsprechender Elemente von (X') und (pp') erscheint.

Dass die Umkehrung des Satzes gilt, ist selbstverständlich, weil ja zwei gegen ein Strahlbüschel Δ_i projectivische, quadratische Tangenteninvolutionen auf zwei Kegelschnitten in Bezug auf einander eindeutige Tangentensysteme sind.

IV. Tangenteninvolutionen des dritten und vierten Grades auf einem Kegelschnitte des Systems.

9. Für die Bestimmung der Schnittpunkte einer Geraden G mit der Curve C_4 haben wir im Artikel 6 (A) folgendes Verfahren angegeben: Wir construiren zu irgend einem Punkte L von G den ihm in Bezug auf einen Kegelschnitt S_2 „zugeordneten" Punkt L', indem wir L mit Δ_i verbinden, das diesem Strahle x entsprechende Tangentenpaar in der erzeugenden Tangenteninvolution auf S_2 mit der Axe $\overline{\Delta_k \Delta_l}$ construiren und seine Berührungssehne ξ_0, welche durch den Pol P_i von $\overline{\Delta_k \Delta_l}$ bezüglich S_2 geht, mit der Polare l von L für denselben Kegelschnitt in L' zum Schnitt bringen. Legen dann durch die Pole P_i, P_k und P_l der drei Seiten

des Doppelpunktdreieckes rücksichtlich S_2, den Pol P von G und L' den Kegelschnitt K_2 und ziehen in seinen Schnittpunkten n, n_1, n_2, n_3 mit S_2 an diesen Kegelschnitt die Tangenten t, t_1, t_2 und t_3. Diese treffen G in Punkten der Curve C_4.

Der Kegelschnitt K_2 hat die Eigenschaft, dass er alle Punkte L' enthält, welche jenen von G in Bezug auf S_2 „zugeordnet" sind, wesshalb wir ihn selbst als den G zugeordneten Kegelschnitt bezeichnet haben. In dieser Art sind den Punkten n von S_2 die Punkte p der Curve C_4 coordinirt, und wir finden zu einem Punkte n den zugehörigen Punkt p, indem wir in dem ersten die Tangente t an S_2 legen und ihren Schnittpunkt mit jenen drei Strahlen in den Büscheln Δ_i, Δ_k, Δ_l aufsuchen, welche ihr entsprechen, sobald man sie als Element der drei auf S_2 befindlichen erzeugenden Involutionen ansieht.[1] Aus diesem erhellt auch, dass die Punkte p, p_1, p_2, p_3 einzeln den Schnittpunkten n, n_1, n_2, n_3 von S_2 und K_2 zugeordnet sind, weil jene Punkte sowohl C_4 als auch G angehören müssen.

Die Kegelschnitte K_2, welche den Geraden des Büschels L coordinirt sind, bilden ein mit diesem projectivisches Büschel mit den Grundpunkten P_i, P_k, P_l und L'. Daraus ist ersichtlich, dass auch die Beziehung zwischen G und den Tangenten t, t_1, t_2, t_3 eine eindeutige ist und diese folglich in Involution sind. Dies zeigt übrigens auch die Construction. Denn ist t irgend eine Tangente von S_2 und n ihr Berührungspunkt, so fixirt dieser mit P_i, P_k, P_l und L' nur einen Kegelschnitt K_2, der mit S_2 noch drei Punkte n_1, n_2, n_3 gemeinsam hat. Gehen wir nun von n_1 aus und legen durch ihn und die Grundpunkte den Kegelschnitt, so ist dieser offenbar mit dem früheren identisch, trifft also S_2 in denselben weiteren Punkten n, n_2, n_3. Diese Punkte bilden ein Quadrupel und sonach auch ihre Tangenten. Die Gerade G, welche K_2 zukommt, läuft durch L, weil K_2 den Punkt L' enthält; sie ist als die Polare des zweiten Schnittpunktes P des $x \equiv \overline{\Delta_i L}$ entsprechenden Strahles ξ im Büschel P_i mit K_2 unzweideutig gegeben.[2]

[1] Will man die Construction mit Hilfe des Büschels Δ_l durchführen, so hat man t als Element der Involution mit der Axe $\overline{\Delta_k \Delta_l}$ zu betrachten.

[2] Nach Artikel 3 (A) schneiden sich x und ξ in einem Punkte jenes Kegelschnittes, welcher Δ_i, P_i und die vier Berührungspunkte von S_2 mit C_4

Die Curve C_4 erscheint nun als der geometrische Ort der Schnittpunkte von entsprechenden Elementen des Strahlbüschels L und der biquadratischen Tangenteninvolution T^4 auf S_2. Beide erzeugende Gebilde sind an sich und in Beziehung auf einander ganz allgemein und unterliegen nur der einen nothwendigen, aber hinreichenden Beschränkung — damit das Erzeugniss eine C_4 sei —, dass die Tangenten G_1 und G_2 aus L an S_2 sich selbst entsprechen. Dass dies der Fall ist, folgt aus dem Umstande, dass der Pol von G_1 der Berührungspunkt p dieser Geraden mit S_2 ist, und demnach von den Schnittpunkten n, n_1, n_2, n_3 des G_1 zugeordneten Kegelschnittes K_2^1 einer in p liegt, somit eine G_1 entsprechende Tangente t fixirt, die mit G_1 zusammenfällt.

„Ein Kegelschnitt des Systems ist für jeden Punkt der Ebene — als Scheitel eines Strahlbüschels — Träger einer biquadratischen Tangenteninvolution, die mit jenem ihr projectivischen Büschel die Curve C_4 erzeugt."

10. Die Schnitte p_1, p_2, p_3 der Geraden G_1 mit jenen Tangenten t_1, t_2, t_3, welche mit ihr ein Quadrupel bilden, sobald man sie als Element von T^4 ansieht, gehören als Ecken dieses Vierseites der Involutionscurve J_3 von T^4 an, die bekanntlich eine allgemeine Curve dritter Ordnung ist. Sie sind jedoch auch Punkte von C_4, da t_1, t_2, t_3 ihr ebenso in T^4 entsprechen, wenn man sie als Strahl des Büschels L betrachtet. Man sieht auch, dass p_1, p_2, p_3 jene auf G_1 befindlichen Curvenpunkte sind, welchen auf S_2, beziehungsweise die Berührungspunkte n_1, n_2, n_3 der erwähnten drei Tangenten „zugeordnet" sind, — dass sich also unter ihnen jener Punkt p nicht befindet, welchem im Sinne des Artikels 2 der Kegelschnitt S_2, und zwar für die Gerade G conjugirt ist. Nachdem dasselbe für G_2 gilt, haben C_4 und J_3 noch sechs Punkte gemeinschaftlich. Diese coïncidiren paarweise mit den drei Doppelpunkten Δ_i, Δ_k und Δ_l, weil beide Tangenten aus einem solchen Punkte an S_2 dem nach ihm zielenden Strahle von L entsprechen müssen, und desshalb demselben Quadrupel angehören. Es geht dies auch aus der Construction des $\overline{L\Delta_i}$ coordinirten Kegelschnittes K_2 hervor, der nach dieser in die Geraden $\overline{P_kP}$ und P_iL' zerfällt.

enthält; woraus unmittelbar die projectivische Verwandtschaft der Büschel Δ_i und P_i erhellt. Man sehe Artikel 25.

Das Gesagte beweist zugleich den folgenden Satz, wenn wir bemerken, dass J_3 durch die besprochenen Punkte eindeutig gegeben ist:

„Zieht man aus einem beliebig gewählten Punkte L der Ebene an einen Kegelschnitt S_2 die Tangenten G_1 und G_2 und legt durch jene sechs von den auf dieser Geraden befindlichen Punkten der Curve C_4, deren keiner weder für G_1 noch für G_2 dem Kegelschnitte S_2 conjugirt ist, und die drei Doppelpunkte der Curve eine Curve dritter Ordnung, so ist diese die Involutionscurve für jene biquadratische Involution auf S_2, welche mit dem Büschel L die Curve C_4 erzeugt.“

Für einen anderen Punkt λ befindet sich auf S_2 eine biquadratische Involution τ^4, die mit T^4 dasjenige Tangentenquadrupel gemeinschaftlich hat, welches von dem der Geraden $\overline{L\lambda}$, dem gemeinsamen Strahle von L und λ, zugeordneten K_2 fixirt wird. Es gilt demnach auch der Satz:

„Einem Kegelschnitte des Systems S kommt für jeden Punkt der Ebene eine Involutionscurve dritter Ordnung zu. Irgend zwei solche Curven schneiden sich ausser in den Doppelpunkten der Curve C_4, in sechs Punkten, welche die Ecken eines vollständigen, jenem Kegelschnitte umschriebenen Vierseites sind.“

Von diesen vier Tangenten zeigen wir im Artikel 16, dass sie mit den Seiten des Doppelpunktdreieckes ein und denselben Kegelschnitt umhüllen.

11. Wir wollen nun untersuchen, wie sich die Verhältnisse gestalten, wenn die Gerade G nicht um einen willkürlich gewählten Punkt, sondern um einen Punkt p der Curve C_4 rotirt. Die Kegelschnitte K_2, die sich selbstverständlich auch jetzt zu einem mit dem Strahlbüschel projectivischen Büschel vereinigen, haben ausser den festbleibenden Punkten P_i, P_k, P_l den p „zugeordneten“ Punkt n von S_2 zum Grundpunkte; für den wir wiederholen, dass die mit p incidente Kegelschnitttangente t in ihm jene ist, welche in allen drei quadratischen Tangenteninvolutionen auf S_2 der Reihe nach den in p zusammentreffenden Doppelpunktsstrahlen entspricht.

Die weiteren Schnittpunkte n_1, n_2, n_3 eines Kegelschnittes K_2 mit S_2 sind Tripel einer cubischen Involution, ihre Tangenten demgemäss Gruppen einer Involution dritten Grades T^3, welche

mit dem Büschel p (G) eindeutig verwandt ist und deren Tripel, mit den entsprechenden Strahlen von p (G) zum Schnitt gebracht, Punkte fixiren, welche die Curve C_4 zum geometrischen Ort haben.

Beide Gebilde haben die zweite Tangente t' aus p an S_2 sich selbst entsprechend gemein, da ihr Berührpunkt n' (siehe Tafel, Fig. 1) als ihr Pol in Bezug auf S_2 auf dem ihr zugeordneten Kegelschnitte K_2' liegt.

Dieser Kegelschnitt begegnet dem S_2 noch zweimal in den Punkten n'' und n''', deren Tangenten t'', t''' die Gerade t' in Punkten p'' und p''' treffen, welche sich, da $t' t'' t'''$ jenes Tripel ist, das der Tangente t', als Strahl von p betrachtet, coordinirt ist, sowohl auf C_4 als auch dem Involutionskegelschnitt J_2 von T^3 befinden. Diesen Punkten sind auf S_2 die Punkte n'', beziehungsweise n''' zugeordnet, während sich in analoger Weise der Punkt n' und der vierte von p, p'' und p''' verschiedene Punkte p' auf t' conjugirt sind. Die Punkte p'' und p''' bilden mit den drei Doppelpunkten der Curve C_4 das dieser und dem Involutionskegelschnitte gemeinschaftliche Punktsystem.

„Ein Kegelschnitt des Systems ist für jeden Punkt p der Curve C_4 Träger einer cubischen Tangenteninvolution, welche mit dem Strahlbüschel um p projectivisch ist und die Curve C_4 als Erzeugniss liefert."

12. Aus dem Umstand, dass J_2 durch die Punkte Δ_i, Δ_k, Δ_l, p'', p''' vollkommen bestimmt ist, folgt nun unmittelbar, dass jeder Kegelschnitt, welcher durch die drei Doppelpunkte geht, Involutionscurve ist, und zwar für gewisse Trägerkegelschnitte S_2 und ganz bestimmte Punkte p als Scheitel von erzeugenden Strahlbüscheln.

Dies lässt sich in der That sehr leicht direct nachweisen. Denn ist J_2 ein Kegelschnitt des Netzes $\Delta_i \Delta_k \Delta_l$ und sind p'', p''' seine weiteren mit C_4 gemeinsamen Punkte,[1] so brauchen wir diese nur durch t zu verbinden, und können nun einen oder den

---

[1] Um zu diesen Punkten constructiv zu gelangen, betrachte man C_4 und irgend einen Kegelschnitt S_2 als Nullcurven, und ermittle in dem nun gegebenen Nullsystem in der Weise, wie in der Publication „Über ein Nullsystem zweiten Grades" angegeben wurde, den auf J_2 befindlichen Nullpunkt Δ dieses Kegelschnittes. Die Tangenten aus ihm an S_2 fixiren auf J_2 die gesuchten, auch C_4 angehörenden Punkte p'', p'''.

anderen der zwei weiteren Schnittpunkte p und p' dieser Geraden und C_4 als Scheitel des erzeugenden Büschels und im ersten Falle den für t' dem Punkte p' — im letzteren den für dieselbe Gerade dem Punkte p coordinirten, t' berührenden Kegelschnitt S_2 zum Träger der cubischen Involutionen nehmen. Für beide Annahmen — und nur für diese — muss nach Obigem (Art. 11) der Involutionskegelschnitt die Punkte p'' und p''' enthalten und jedesmal auch durch Δ_i, Δ_k, Δ_l laufen, also mit J_2 identisch sein. Daraus fliesst der folgende für die Beziehung des Kegelschnittnetzes $\Delta_i\Delta_k\Delta_l$ zu dem Systeme S bemerkenswerthe Satz:

„Jeder Kegelschnitt, welcher die drei Doppelpunkte der Curve C_4 enthält, ist Involutionscurve für jene zwei Kegelschnitte des Systems S, welche die Verbindungslinie seiner zwei weiteren mit C_4 gemeinschaftlichen Punkte berühren und beziehungsweise den zwei anderen auf dieser Geraden liegenden Punkten von C_4 beigeordnet sind."

In dieser Art kommt jedem S_2 für jeden Punkt p von C_4 ein bestimmter Involutionskegelschnitt J_2 zu, so dass also die Zahl dieser Kegelschnitte für einen Kegelschnitt des Systems unendlich gross ist. Dass diese Kegelschnitte kein Büschel bilden, ist ohne Weiteres klar, und auch die Frage, wie viel solche Kegelschnitte zwei Kegelschnitten S_2' und S_2'' gemeinschaftlich sind, ist leicht beantwortet. Denn fassen wir zu dem Ende eine gemeinschaftliche Tangente der letzteren ins Auge, so liegen auf dieser vier Punkte der Curve C_4, von welchen einer S_2' und ein anderer S_2'' zukommt. Es werden sonach nur die zwei von diesen verschiedenen Punkte mit den Δ_i, Δ_k, Δ_l einen Kegelschnitt J_2 festlegen, der sowohl für S_2' als auch S_2'' Involutionskegelschnitt ist. Daraus ist evident, weil diese Curven nur vier gemeinschaftliche Tangenten haben:

„dass von den dem Doppelpunktdreieck umschriebenen Kegelschnitten viere gleichzeitig Involutionscurven für zwei gegebene Kegelschnitte des Systems S sind".

13. Im Vorhergehenden haben wir betont, dass einer Tangente t eines Kegelschnittes S_2, wenn wir sie als Element einer biquadratischen Involution T^4 auf S_2 ansehen, in dem bezüglichen Strahlbüschel L ein Strahl zukommt, der sie in jenem Punkte p schneidet, welcher ihrem Berührpunkte n „zugeordnet" ist. Dieser

Punkt ist demnach für jede Tangente eines Kegelschnittes des Systems ganz bestimmt und unabhängig von der Wahl des Scheitels L. In derselben Form kann diese Beziehung ausgesprochen werden für die cubischen Involutionen T^3 auf einem S_2 und jene Strahlbüschel, die Punkte der Curve C_4 zu Scheiteln haben. Strahlen, die in dieser einer Tangente t von S_2 entsprechen, schneiden sämmtlich diese in demselben Punkte p.

Für die drei quadratischen Involutionen auf S_2 und die Büschel Δ_i, Δ_k, Δ_l wurde diese Relation im dritten Artikel dieser Abhandlung bewiesen. Sie hat jedoch auch volle Geltung für diejenigen erzeugenden Tangentensysteme, welche einen Kegelschnitt S_2 zum Träger haben und deren jedes mit einem analogen Gebilde auf einem anderen S_2 die Curve C_4 als Erzeugniss liefert, wie aus Artikel 8 erhellt, welchem nach die einer Tangente t von S_2 projectivische Tangente t' auf einem anderen Kegelschnitt S_2' der ersteren in demselben Punkte p begegnet, in welchem sie von den ihr zukommenden drei Doppelpunktstrahlen getroffen wird.

Damit ist der folgende Satz bewiesen:

„Auf einem Kegelschnitt S_2 befindet sich für jeden Punkt der Ebene und der Curve C_4 eine erzeugende Tangenteninvolution und für jeden anderen Kegelschnitt des Systems ein erzeugendes Tangentensystem. Wir können demgemäss eine Tangente t von S_2 jedem dieser unendlich vielen erzeugenden Gebilde T als Element zuzählen und jedesmal entspricht ihr im betreffenden zweiten Gebilde, d. h. in jenem, das mit T die Curve C_4 erzeugt, ein bestimmter Strahl, beziehungsweise eine Tangente; — alle diese unendlich vielen Geraden bilden ein Strahlbüschel, welches den mit t incidenten, dem Berührungspunkte dieser Tangente zugeordneten Punkt von C_4 zum Scheitel hat.“

14. Die Doppelelemente einer Tangenteninvolution sind die Tangenten in den Schnittpunkten des Trägers S_2 mit der Involutionscurve; somit ihre Anzahl für T^4 sechs und für T^3 vier. Ihnen entsprechen offenbar in jedem Falle die Tangenten aus dem Scheitel L, respective p des erzeugenden Büschels an das Erzeugniss, und zwar projectivisch. Man kann also an die Curve C_4 aus einem Punkte der Ebene sechs, und aus einem ihrer Punkte vier Tangenten ziehen; — womit der Beweis dafür, dass C_4 eine

Curve von der sechsten Classe ist, in voller Allgemeinheit erbracht erscheint.

Befindet sich ein Punkt der Involutionscurve innerhalb des Kegelschnittes S_2, so können wir mit Sicherheit annehmen, dass beide Curven mindestens zwei reelle Punkte gemeinsam haben. Dies geschieht nun — weil sowohl J_3 als auch J_2 alle drei Doppelpunkte der Curve C_4 enthält — immer dann, wenn sich diese zum Theil oder sämmtlich innerhalb S_2 befinden, also nach Artikel 6 isolirte Punkte sind.

„Besitzt eine rationale Plancurve vierter Ordnung einen oder mehrere isolirte Doppelpunkte, so kann man aus jedem ihrer Punkte (und überhaupt aus jedem Punkte der Ebene) mindestens zwei reelle Tangenten an sie legen."

Es ist klar, dass jener Kegelschnitt K_2, welcher einer Tangente G des Büschels L zugeordnet ist, den Trägerkegelschnitt S_2 in einem seiner Schnittpunkte N mit J_2 berührt, und dass die Tangente n diesem Punkte bereits auf G den Berührpunkt fixirt.[1] Würde K_2 den S_2 an zwei Stellen berühren, so wäre G eine Doppeltangente der Curve C_4; woraus folgt, dass diese Curve vier Doppeltangenten besitzt, nachdem in jedem Netze von Kegelschnitten und so auch in jenem mit den Grundpunkten P_i, P_k, P_l vier Kegelschnitte existiren, welche einen anderen Kegelschnitt, hier S_2, doppelt berühren. Sind diese vier Kegelschnitte sämmtlich reell, so ist bekanntlich die Berührungssehne eines, etwa jene von K_2', ideell. Daraus ist nun evident, dass auch jene Doppeltangente, welche K_2' entspricht, imaginäre Berührungspunkte hat, weil diese ihre Schnittpunkte mit den Tangenten von S_2 in den Berührungspunkten dieses Kegelschnittes mit K_2' sind. Dies gibt den Satz:

„Sind die vier Doppeltangenten einer rationalen Plancurve vierter Ordnung reell, so ist eine immer ideell."

Aus der bekannten Beziehung, dass die Kegelschnitte, welche einen anderen S_2 doppelt berühren, nur dann reell sind, wenn die gegebenen Punkte $P_iP_kP_l$ sämmtlich ausserhalb oder innerhalb S_2 sich befinden, und dem Umstande, dass diese Punkte die Pole der Seiten des Doppelpunktdreieckes sind, haben wir im Artikel 10

---

[1] Siehe Artikel 8 in (A).

(*A*) die Sätze über den Zusammenhang der Realität der Doppeltangenten mit der Lage der Doppelpunkte, beziehungsweise ihrer Verbindungslinien, gegen die Trägerkegelschnitte aufgestellt. Nachdem die dort als Trägerkegelschnitte bezeichneten Curven das Kegelschnittsystem S bilden, sind die Umkehrungen jener Sätze einfache Kriterien für die Beziehung der Kegelschnitte S_2 gegen die Verbindungslinien der Doppelpunkte. Sie lauten folgendermassen:

„Sind die vier Doppeltangenten einer Curve C_4 reell, so schneidet entweder jede oder keine Seite des Doppelpunktdreieckes das System der Kegelschnitte S_2 in reellen Punkten; sind sie hingegen imaginär, so eine oder zwei Seiten."

Nach Artikel 6 sind im ersten Falle alle oder keine, im letzten zwei oder vier der aus den Doppelpunkten an C_4 gelegten Tangenten reell. Mit Beziehung auf jenen Abschnitt sehen wir auch, dass, wenn die Curve C_4 einen isolirten Doppelpunkt besitzt, aus dem sich zwei reelle Tangenten an sie ziehen lassen, ihre vier Doppeltangenten reell sind, und umgekehrt im conträren Falle. Ferner, dass eine Curve C_4 mit zwei oder drei isolirten Doppelpunkten immer vier reelle Doppeltangenten besitzt. (Vergleiche Artikel 10 [*A*].)

Halten wir zum Schlusse mit diesen Sätzen noch das im Artikel 9 über die Construction der Schnittpunkte einer Geraden mit der Curve C_4 Gesagte zusammen, so gelangen wir ohne Schwierigkeit zu dem Resultate, dass eine Curve mit vier imaginären Doppeltangenten, an die sich also nur aus einem oder zwei Doppelpunkten Tangenten ziehen lassen, von jeder Geraden der Ebene in mindestens zwei reellen Punkten geschnitten wird, und dass somit von den Kegelschnitten des Systems S einer solchen Curve mindestens zwei jede Gerade der Ebene berühren.

15. Das Erzeugniss einer biquadratischen Tangenteninvolution (T^4) auf irgend einem Kegelschnitte K_2 und eines projectivischen Strahlbüschels L (G) ist im Allgemeinen eine Curve sechster Ordnung mit zehn Doppelpunkten. Einer ist L, die anderen neun liegen auf der Involutionscurve J_3 und sind die gemeinschaftlichen Elemente der centralen, cubischen Involution, die von dem Büschel L auf J_3 bestimmt wird, und der Punktinvolution sechsten Grades, welche von den Ecken der Tangentenquadrupel (t) (t_1) (t_2) (t_3) auf derselben Curve constituirt wird.

Entsprechen die Tangenten G_1, G_2 aus L an K_2 sich selbst und nur dann zerfällt das Erzeugniss in G_1, G_2 und eine Curve vierter Ordnung, welche — da die Schnitte $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$, $\beta_1\beta_2\beta_3$ der erwähnten Geraden mit J_3 sechs auf dieser Curve liegende Doppelpunkte des Gesammterzeugnisses repräsentiren — drei Doppelpunkte Δ_i, Δ_k, Δ_l auf J_3 besistzt, — also eine Curve C_4 ist, welche durch $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$, $\beta_1\beta_2\beta_3$ einmal geht und G_1 in α und G_2 in β trifft.

Ist nun S_2 ein Kegelschnitt des Systems S, so befindet sich auch auf ihm (vergleiche Artikel 9) eine Tangenteninvolution T^4, welche mit demselben Büschel $L(G)$ die Curve C_4 zum Erzeugniss hat; so dass, wenn p, p_1, p_2, p_3 die Schnittpunkte eines Strahles G mit C_4 sind, mit jedem von diesen Punkten eine Tangente eines Quadrupels t, t_1, t_2, t_3 von T^4 und eine eines solchen (t) (t_1) (t_2) (t_3) von (T^4) incident ist. Einer Tangente von S_2, so t, entspricht nur ein Strahl G in L, welcher sie in dem Curvenpunkt p treffen möge, und diesem Strahle ein Quadrupel von Tangenten auf T. Von diesen läuft nur eine (t) durch p, nur sie bestimmt auf t einen Curvenpunkt und ist daher allein als t entsprechend zu betrachten. Weil dies auch umgekehrt gilt, so sehen wir, dass die beiden biquadratischen Involutionen in Bezug auf einander projectivische, einfache Tangentensysteme sind, deren Elemente nur bezüglich eines Strahlbüschels sich zu Quadrupeln gruppiren.

Der Kegelschnitt K_2 ist also auch Träger von Tangentensystemen, deren jedes mit einem ebensolchen, projectivischen auf irgend einem Kegelschnitt S_2 die Curve C_4 erzeugt, und in Folge dessen nach dem Satze des Artikels 8 ein Kegelschnitt des Systems S für diese Curve.

Ganz in derselben Weise lässt sich zeigen, dass auch ein Kegelschnitt K_2, auf dem eine cubische Tangenteninvolution liegt, die mit einem Büschel p (G), die C_4 als Erzeugniss liefert,[1] dem

---

[1] Dies geschieht unter der Voraussetzung, dass eine Tangente aus p an K_2 beiden Gebilden sich entsprechend gemein ist. Im Allgemeinen ist das Erzeugniss einer cubischen Involution T^3 auf einem Kegelschnitte K_2 und eines eindeutigen Büschels $p(G)$ eine Curve fünfter Ordnung C_5 mit sechs Doppelpunkten, die K_2 fünffach berührt. Ein Doppelpunkt ist p, die anderen liegen auf dem Involutionskegelschnitt J_2 von T^3. Es ist zu vermuthen, dass C_5 eine allgemeine, rationale Curve fünfter Ordnung ist, ferner dass irgend ein sie fünffach berührender Kegelschnitt als Träger

Systeme S angehört, und wir können demnach den folgenden wichtigen Satz als bewiesen betrachten:

„Ein Kegelschnitt, welcher Träger einer cubischen oder biquadratischen Tangenteninvolution ist, die mit einem projectivischen Strahlbüschel eine allgemeine, rationale Curve vierter Ordnung zum Erzeugnisse hat, ist für diese Curve ein vierfach berührender Kegelschnitt des Systems S."

16. Betrachten wir die Kegelschnitte S als Nullcurven von C_4, was immer gestattet ist, sobald man das Doppelpunktdreieck $\Delta_i\Delta_k\Delta_l$ als Hauptdreieck voraussetzt;[1] so entspricht einer Geraden G, für jede Zuordnung eines S_2 an die Curve C_4, ein sie berührender Kegelschnitt K_2, welcher dem Dreieck $\Delta_i\Delta_k\Delta_l$ eingeschrieben ist, und dessen mit S_2 gemeinsame Tangenten die Gerade G in Punkten der Curve C_4 treffen. Bedenkt man nun, dass das Nullsystem auch eindeutig bestimmt ist, wenn man einer Geraden G irgend einen sie berührenden Kegelschnitt, der auch die Seiten des Hauptdreieckes zu Tangenten hat, zuweist, und dass diese Zuordnung immer statthaft ist; so findet man die folgende interessante Beziehung bewiesen:

„Die vier weiteren Tangenten aus den Schnittpunkten einer Geraden mit einer rationalen Curve vierter Ordnung an irgend einen Kegelschnitt, welcher jene Gerade berührt und dem Doppelpunktdreieck eingeschrieben ist, sind Tangenten eines und desselben, die Curve vierfach berührenden Kegelschnittes aus dem Systeme S." [2]

Der Kegelschnitt K_2, welcher in angegebener Weise für einen bestimmten Kegelschnitt S_2 einer Geraden G beigeordnet ist, ist das Erzeugniss der Reihen (x) und (c), von welchen die erste auf $\overline{\Delta_k\Delta_l}$ von derjenigen quadratischen Tangenteninvolution T_i^2 bestimmt wird, welche mit dem Büschel $\Delta_i(\varphi)$ die Curve C_4 erzeugt, während die zweite der Schnitt dieses Strahlbüschels mit der

einer erzeugenden Involution T^3 und jeder durch fünf Doppelpunkte bestimmte Kegelschnitt als Involutionscurve angenommen werden kann, der sechste ist dann immer der Scheitel des erzeugenden Büschels.

[1] „Über ein Nullsystem zweiten Grades".

[2] Man vergleiche den Schlusssatz in Artikel 10.

Geraden G ist.[1] Aus dieser Auffassung ersieht man, dass die gemeinschaftlichen Tangenten t, t_1, t_2, t_3, von K_2 und S_2 die Gerade G in den ihren Berührpunkten n, n_1, n_2, n_3 mit S_2 „zugeordneten" Punkten p, p_1, p_2, p_3 treffen. Wir wollen diese Punkte hier kurz als den Tangenten t, t_1, t_2 und t_3 selbst coordinirt bezeichnen.

Uebergeht G in eine Tangente t von S_2, so berührt sie K_2 in dem ihr coordinirten Punkt p, wogegen die drei weiteren gemeinsamen Tangenten t_1, t_2, t_3 durch die Punkte p_1, p_2 und p_3 respective gehen. Diese Tangenten wollen wir als t entsprechend ansehen, sie bilden ein dreideutiges Tangentensystem t^3 und sind dadurch charakterisirt, dass sie durch jene auf t liegenden Curvenpunkte laufen, deren keiner t zukommt, sondern die ihnen einzeln zugewiesen sind. Einem Element t_1 von t^3 muss man hingegen jene Tangente t von S_2 entsprechen lassen, — damit beide Gebilde die Curve C_4 zum Erzeugnisse haben — welche t_1 nicht in dem ihr, sondern t_1 zugeordneten Punkte von C_4 trifft. Die Verwandtschaft zwischen den Tangentensystemen t und t^3 ist eine eindreideutige, somit das letztere eine cubische Involution.

Die vier sich selbst entsprechenden Tangenten beider Gebilde berühren den Träger S_2 in seinen Berührpunkten B mit C_4, während die vier Tangenten in den Schnittpunkten mit dem Involutionskegelschnitt J_2 von t^3 die weiteren gemeinsamen Tangenten von S_2 und C_4 vorstellen. Die Curve J_2 hat mit C_4 acht Schnittpunkte, welche paarweise auf den Tangenten T der Punkt B von S_2 liegen; weil jede dieser Tangenten — wie schon erwähnt — sich selbst entspricht, von den weiteren zwei Tangenten des Tripels, dem sie angehört, demnach in Punkten getroffen wird, die sowohl J_2 als auch C_4 angehören.

„Die acht Tangentialpunkte der Berührungspunkte der Curve C_4 mit einem Kegelschnitt S_2 liegen auf einem Involutionskegelschnitt von S_2. Dieser schneidet S_2 in jenen vier Punkten, deren Tangenten durch die Berührpunkte der S_2 und C_4 gemeinsamen Tangenten mit dieser Curve gehen."

---

[1] Siehe: „Ueber Constructionen ebener Curven vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten", (Sitzb. der k. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften vom 9. Jänner 1880.

Im Allgemeinen ist jene Tangente, welche einer Tangente t von S_2 im Tangentensysteme t entspricht, verschieden von jenen, die derselben Tangente in der Involution t^3 coordinirt sind, sobald man sie dem Systeme t als Element zuzählt. Nur in dem Falle, wenn sie mit einem Doppelpunkt Δ_i von C_4 incident ist, ist ihr dieselbe Gerade, die zweite Tangente aus Δ_i zugeordnet, man mag sie als Element von t oder t^3 ansehen.

Durch das Angeführte ist nachgewiesen, „dass jeder Kegelschnitt des Systems S Träger eines eindeutigen Tangentensystems und einer projectivischen, cubischen Tangenteninvolution ist, die mit jenem die Curve C_4 zum Erzeugnisse hat"; doch lässt sich auch zeigen, und dies soll im Folgenden geschehen: „dass ein Kegelschnitt, welcher Träger erzeugender Gebilde erwähnter Art ist, für das Erzeugniss — das eine allgemeine, rationale Curve vierter Ordnung ist — einen vierfach berührenden Kegelschnitt des Systems S repräsentirt".

Vor Allem ist klar, dass ein Tangentensystem (t) und eine projectivische, cubische Involution (t^3), vorausgesetzt, dass beide Gebilde denselben Träger K_2 haben, vier gemeinsame, sich entsprechende Elemente T_1, T_2, T_3, T_4 besitzen, und sonach eine Curve vierter Ordnung C_4 erzeugen.

Diese enthält die Berührungspunkte B_1, B_2, B_3, B_4 der erwähnten Tangenten, weil diese in jenen Punkten sich selbst durchschneiden, und berührt in ihnen den Kegelschnitt, da sich innerhalb desselben keiner ihrer reellen Punkte befinden kann.

Ausser diesen doppelt zu zählenden Tangenten haben K_2 und C_4 nur noch vier Tangenten gemeinschaftlich. Denn eine solche muss offenbar die Eigenschaft haben, dass, wenn man sie als Element des Gebildes (t) betrachtet, von den ihr entsprechenden Elementen in (t^3) zwei benachbarte Tangenten von K_2 sind und somit ein Doppelelement dieser Involution constituiren. Die Anzahl dieser ist vier; sie sind, wie leicht einzusehen, die Tangenten von K_2 in den Schnittpunkten mit dem Involutionskegelschnitt J_2. Jedem der Doppelelemente entspricht im eindeutigen Gebilde nur ein Element, womit auch gezeigt ist, dass nur noch vier Tangenten von K_2 existiren, die auch C_4 berühren. Nun kann es aber geschehen, dass von den einer Tangente τ von K_2 entsprechenden Elementen, wenn man sie als Element t_0 von (t)

annimmt, eines t'_n zusammenfällt mit jener Tangente t', die ihr, nämlich τ, zukommt, sobald man sie dem Gebilde (t^3) als Element t'_m zuzählt. Auch in diesem Falle hat $\tau \equiv t_0 \equiv t'_m$ in ihrem Schnitt Δ mit $t'_n \equiv t'$ mit der Curve C_4 zwei unendlich nahe Punkte gemeinschaftlich. Doch diesmal sind in demselben Punkte auch zwei von den auf $t'_n \equiv t'$ befindlichen Curvenpunkten vereinigt, weil dieser ebenfalls — man möge sie als Element des einen oder anderen Gebildes betrachten — dieselbe Tangente $t_0 \equiv t'_m$ beigeordnet erscheint. Daraus ersehen wir, dass Δ ein Doppelpunkt des Erzeugnisses ist, und dass dieses als Curve vierter Ordnung und sechster Classe — es hat ja mit K_2 zwölf Tangenten gemeinschaftlich — drei derartige Punkte besitzt.

Um noch einzusehen, dass K_2 für C_4 ein Kegelschnitt des Systems S ist, haben wir nur zu bedenken, dass von den zwei Tangenten, die sich aus einem Punkte p der Curve C_4 an K_2 ziehen lassen, immer eine Element des Tangentensystems (t) und die andere, wieder ganz bestimmte, ein Element t_n von (t^3) ist. Diese letztere steht mit dem Punkte p in projectivischer Beziehung, so zwar, dass ihr für jede Lage nur ein Punkt p, nämlich ihr Schnitt mit dem entsprechenden Element von (t), zukommt, und dass — wie schon angedeutet — dem Punkte p immer eine von den Tangenten an K_2, nämlich jene, welche (t^3) angehört, zuzuweisen ist.

Ist nun t ein Element von (t^3) und p ihm in auseinandergesetzter Weise zugeordnet, so legt dieser Punkt mit einem Doppelpunkt Δ_i einen Strahl φ fest, der C_4 noch in einem einfachen Punkte p' schneidet. Diesem kommt auch nur eine Tangente t' im Gebilde (t^3) zu, die wir als t conjugirt ansehen wollen. Es ist einleuchtend, dass, wenn man in derselben Weise von t' ausgeht, man unter Vermittlung desselben Doppelpunktes Δ_i zu t zurückgelangt; woraus erhellt, dass jene Elemente von (t^3), welche den Punktepaaren zugeordnet sind, die von Strahlen durch Δ_i auf C_4 bestimmt werden, auf K_2 sich zu Paaren einer quadratischen, mit dem Büschel Δ_i projectivischen Involution gruppiren, welcher auch — nach Obigem — die Tangenten von K_2 aus den anderen Doppelpunkten Δ_k und Δ_l jedesmal als Paare angehören. Damit ist gezeigt, dass K_2 für jeden Doppelpunkt von C_4 als Scheitel eines erzeugenden Strahlbüschels Träger einer Tangenteninvolution zweiten Grades ist, welche die Verbindungslinie der zwei anderen

Doppelpunkte zur Axe hat und mit dem erwähnten Büschel die Curve C_4 erzeugt, somit nach Artikel 1 auch dem Systeme S angehört.

V. Polareigenschaften des Systems.

17. Nachdem wir in dem Vorhergehenden die hervorragende Bedeutung des Kegelschnittsystems S für die Curve C_4 nachgewiesen haben, wenden wir uns nun zu der Besprechung hauptsächlich jener Eigenschaften, welche diesem Systeme mehr an und für sich zukommen. Dass dieselben jedoch vielfach Bezug auf die Fundamentalcurve — so wollen wir C_4 nennen — haben, ist wohl selbstverständlich.

Wir beginnen mit den speciellen Polareigenschaften, weil uns dieser Vorgang sonst schwer vermeidliche Wiederholungen erspart.

Bereits in dieser Publication, und zwar im Artikel 6, haben wir erwähnt und im Artikel 1 (A) nachgewiesen, dass die Doppelstrahlen jener erzeugenden, quadratischen Tangenteninvolution T_i^2 auf einem Kegelschnitte S_2, welche $\overline{\Delta_k\Delta_l}$ zum Durchschnitte hat, die bekanntlich die Tangenten δ_i', δ_i'' von S_2 in seinen Schnittpunkten X_i', X_i'' mit der Axe $\overline{\Delta_k\Delta_l}$ sind, den Tangenten T_i', T_i'' der Curve C_4 aus dem Doppelpunkte Δ_i — diese als Strahlen des Büschels Δ_i angesehen — in der durch S_2 gegebenen Projectivität entsprechen und diese Tangenten in ihren Berührpunkten t_i', respective t_i'' treffen.

Diese Berührungspunkte sind fest und folglich gruppiren sich die Tangenten der Kegelschnitte S_2 in ihren auf $\overline{\Delta_k\Delta_l}$ befindlichen Punkten zu zwei Strahlbüscheln, von welchen das eine t_i', das andere t_i'' zum Scheitel hat. Die Gerade δ_i' durch t_i' bestimmt mittelst ihres Schnittes X_i' mit $\overline{\Delta_k\Delta_l}$ im Vereine mit dem Treffpunkte x_i' dieser Linie und der Tangente T_i' eine Projectivität $(\Delta_k\Delta_l x_i' X_i')$, welcher ein einziger, und zwar jener Kegelschnitt S_2 Genüge leistet, der δ_i' in X_i berührt[1] und $\overline{\Delta_k\Delta_l}$ in einem zweiten Punkte

[1] Der zweite Kegelschnitt S_2, welcher auch durch X_i' läuft, ist bestimmt durch die Projectivität $(\Delta_k\Delta_l x_i'' X_i')$ und hat im bezeichneten Punkte $\overline{X_i' t_i''}$ zur Tangente.

X_i'' begegnet dessen Tangente durch t_i'' geht. Die Beziehung zwischen den Strahlen δ_i' und δ_i'' ist eine eindeutige, der Ort ihres gemeinschaftlichen Punktes P_i, welcher der auf S_2 bezogene Pol von $\overline{\Delta_k \Delta_l}$ ist, ist demnach als Erzeugniss der projectivischen Büschel t_i' und t_i'' ein Kegelschnitt $\mathfrak{P}_2^i$, welchen wir kurz den Polkegelschnitt jener Seite $\overline{\Delta_k \Delta_l}$ nennen werden. Er enthält auch die drei Doppelpunkte Δ_i, Δ_k, Δ_l, weil diese auch Pole von $\overline{\Delta_k \Delta_l}$, und zwar rücksichtlich der drei degenerirten Kegelschnitte $T_i T_i'$, $T_k T_k'$ und $T_l T_l'$ respective sind.

„Der geometrische Ort der Pole einer Seite des Doppelpunktdreieckes einer rationalen Plancurve vierter Ordnung bezüglich der Kegelschnitte des Systems S ist ein jenem Dreieck umschriebener Kegelschnitt $\mathfrak{P}_2$, welcher die Berührungspunkte der aus dem gegenüberliegenden Doppelpunkt an die Curve gelegten Tangenten enthält.“ [1]

18. Ein Punkt P_k des Polkegelschnittes $\mathfrak{P}_2^k$ ist der Pol der Geraden $\overline{\Delta_l \Delta_i}$ bezüglich jenes Kegelschnittes S_2, welcher die Verbindungslinien von P_k mit den Berührungspunkten t_k' und t_k'' von Δ_k in ihren auf $\overline{\Delta_l \Delta_i}$ befindlichen Punkten tangirt. Dieser Kegelschnitt, der vollkommen bestimmt ist, hat in seinen Schnittpunkten mit $\overline{\Delta_i \Delta_k}$ zwei Tangenten, welche nach Obigem durch t_l', beziehungsweise t_l'', die Berührungspunkte des Doppelpunktes Δ_l gehen und sich in dem auf $\mathfrak{P}_2^l$ befindlichen Pole P_l von $\overline{\Delta_i \Delta_k}$ genommen auf S_2 treffen.

Wenn aus dem Gesagten folgt, dass jedem P_k nur ein P_l zukommt, so gelangt man durch dieselbe Überlegung zu dem Resultate, dass auch umgekehrt P_k allein dem Pole P_l entspricht, d. h. also, „dass die Pole P_k und P_l zweier Seiten des Doppelpunktdreieckes in Bezug auf einen Kegelschnitt S_2 auf den betreffenden Polkegelschnitten $\mathfrak{P}_2^k$, beziehungsweise $\mathfrak{P}_2^l$ zwei projectivische Punktsysteme beschreiben, wenn S_2 das System S durcheilt.“

Übergeht S_2 in einen degenerirten Kegelschnitt $T_i T_i'$, so colllidiren P_k und P_l mit dem Doppelpunkt Δ_i ein sich selbst entsprechendes Element der Systeme (P_k), (P_l) bildend. Dies geschieht auch in den Doppelpunkten Δ_k und Δ_l, also im Ganzen dreimal,

[1] Man vergleiche die „Bemerkungen“ am Schlusse der Abhandlung „Beitrag zur Theorie der Regelflächen vierten Grades etc.“

und hat zur Folge, dass die Enveloppe der Polare $\overline{P_k P_l}$ von Δ_i — die als Erzeugniss der projectivischen Punktsysteme (P_k), (P_l) im allgemeinen Falle eine rationale Curve vierter Classe ist, im vorliegenden jedoch, weil jeder der gemeinsamen Punkte Δ_i, Δ_k und Δ_l ein als Curve erster Classe zu betrachtender Bestandtheil des Gesammterzeugnisses gilt — von dem vierten Schnittpunkt der Kegelschnitten $\mathfrak{P}_2^k$ und $\mathfrak{P}_2^l$ repräsentirt wird.[1]

Aus der Bemerkung, dass der sprachliche Punkt, den wir am treffendsten als den conjugirten Pol Δ_i' des Doppelpunktes Δ_i rücksichtlich des Systems S bezeichnen können, auch den Polaren von Δ_i in Bezug auf die degenerirten Kegelschnitte des Systems angehören muss, ergibt sich folgende einfache Construction desselben: Man construirt die zu der Seite $\overline{\Delta_i\Delta_k}$ bezüglich der Curventangenten T_k', T_k'' aus Δ_k harmonische Gerade $\overline{\Delta_k\Delta_i'}$ und bringt sie zum Schnitt mit jener Geraden $\overline{\Delta_l\Delta_i'}$, welche von $\overline{\Delta_l\Delta_i}$ durch die Tangenten T_l', T_l'' harmonisch getrennt wird.

„Die Polaren eines Doppelpunktes der Fundamentalcurve in Bezug auf das Kegelschnittsystem S bilden ein Strahlbüschel, dessen Scheitel jenem Doppelpunkt polar conjugirt ist bezüglich der aus den zwei anderen Doppelpunkten an die Curve gelegten Tangenten."

19. Um eine genauere Einsicht in die Beziehungen, welche zwischen dem Polardreiecke $P_iP_kP_l$ von $\Delta_i\Delta_k\Delta_l$ und diesem bestehen, zu gewinnen, wollen wir uns vor Augen halten, dass seine Seiten die festen Punkte Δ_i', Δ_k', Δ_l' (siehe die Figur 2), beziehungsweise enthalten, die Ecken sich auf den Kegelschnitten $\mathfrak{P}_2^i$, $\mathfrak{P}_2^k$ und $\mathfrak{P}_2^l$ respective befinden, dass ferner beide Dreiecke perspectivisch liegen und den Schnittpunkt c der drei Geraden $\overline{\Delta_iP_i}$, $\overline{\Delta_kP_k}$ und $\overline{\Delta_lP_l}$ zum Centrum haben.

Nimmt der Kegelschnitt S_2, bezüglich dessen besagte Dreiecke conjugirt sind, nach einander alle möglichen Lagen ein, so durcheilen die Ecken P_i, P_k, P_l beziehungsweise die perspectivi-

---

[1] Die Strahlen durch einen Schnittpunkt 1 zweier Kegelschnitte fixiren auf diesen zwei projectivische Punktsysteme, welchen die drei anderen Schnittpunkte 2, 3 und 4 als sich entsprechende Paare angehören. Da diese drei Paare umgekehrt die Beziehung zwischen den Punktsystemen vollkommen bestimmen, so ist klar, dass diese Systeme eben jene sind, welche gegen den vierten Schnittpunkt perspectivisch liegen.

schen Punktsysteme $\mathfrak{P}_2^i(P_i)$, $\mathfrak{P}_2^k(P_k)$ und $\mathfrak{P}_2^l(P_l)$, somit die Strahlen $\overline{\Delta_i P_i}$, $\overline{\Delta_k P_k}$ und $\overline{\Delta_l P_l}$ drei Büschel, welche jene Punktsysteme in angegebener Reihenfolge einzeln aus den Punkten Δ_i, Δ_k und Δ_l projiciren, und also dem Punkte c einen dem Dreiecke $\Delta_i\Delta_k\Delta_l$ umschriebenen Kegelschnitt C_2 als Bahn vorschreiben.

Nähert sich während dieser Bewegung P_k auf $\mathfrak{P}_2^k$ dem Punkte Δ_i, so rücken auch P_l auf P_2^l und c auf C_2 gegen diesen Punkt: die Gerade $\overline{\Delta_i c}$ übergeht in die Tangente von C_2 in Δ_i und P_i nimmt die feste Lage des zweiten Schnittpunktes dieser mit $\mathfrak{P}_2^i$ an, die von Δ_i verschieden ist, so lange C_2 und $\mathfrak{P}_2^i$ sich in Δ_i nur durchschneiden. Nun ist aber klar, dass, wie auch schon erwähnt wurde, die Ecken des Dreieckes $P_iP_kP_e$ für den Kegelschnitt des Systems, der aus den Tangenten $T_i'T_i''$ besteht, und nur für diesen sämmtlich mit Δ_i coïncidiren, dass also auch P_i mit Δ_i identisch ist, sobald P_k und P_l in diesem liegen; d. h. dass sich C_2 und $\mathfrak{P}_2^i$ in Δ_i berühren. Auch soll ja $\overline{P_iP_k}$ durch Δ_l' und $\overline{P_iP_l}$ durch Δ_k' laufen, was jedoch, weil Δ_l' und Δ_k' feste Punkte sind und $P_k = P_l \equiv \Delta_i$ ist, nur dann geschieht, wenn auch P_i in Δ_i liegt.

Ebenso lässt sich zeigen, dass der Kegelschnitt C_2 — der Centralkegelschnitt heissen möge — die Kegelschnitte $\mathfrak{P}_2^k$ und $\mathfrak{P}_2^l$ in Δ_k beziehungsweise Δ_l berührt, und somit die Collinearcurve der drei Polkegelschnitte für die jedem zukommende Seite des Doppelpunktdreieckes als Axe und die jeweilige Gegenecke als Centrum der Collineation ist.

Aus dieser Auffassung folgt, dass die Tangente γ des Centralkegelschnittes im Punkte c die Gerade $\overline{\Delta_i\Delta_k}$ in einem Punkte π_l trifft, der mit der Tangente π_l von $\mathfrak{P}_2^l$ in P_l incident ist, dass sie mithin die Perspectivitätsaxe für das Dreieck $\Delta_i\Delta_k\Delta_l$ und das von den Tangenten der Polkegelschnitte in den Punkten P_i, P_k, P_l gebildete Dreiseit ist. Es sei noch nebenbei bemerkt, dass jede Ecke dieses Dreiseites eine Curve vierter Ordnung mit Spitzen in Δ_i, Δ_k und Δ_l zum geometrischen Ort hat, und dass auch das Centrum für diese Dreiecke eine rationale Curve vierter Ordnung beschreibt.

Die homologen Seiten $\overline{P_kP_l}$, $\overline{\Delta_k\Delta_l}$; $\overline{P_lP_i}$, $\overline{\Delta_l\Delta_i}$ und $\overline{P_iP_k}$, $\overline{\Delta_i\Delta_k}$ der Dreiecke $P_iP_kP_l$ und $\Delta_i\Delta_k\Delta_l$ schneiden sich in Punkten p_i, p_k und p_l, welche die Perspectivitätsaxe fixiren, und bei Veränderung des ersten Dreieckes auf den festen Seiten des zweiten pro-

jectivische Reihen beschreiben. Von diesen Reihen reichen zur Festlegung von a irgend zwei, so die erste und zweite hin; aus ihrer Entstehung, zufolge der entsprechende Elemente p_i und p_k die Projectionen desselben Punktes P_l aus Δ'_i beziehungsweise Δ'_k sind, erhellt, und zwar wieder aus der Grenzbetrachtung, indem man P_l mit Δ_l coïncidiren lässt, dass dieser Punkt in beiden Reihen sich selbst entspricht, und daher die Reihen perspectivisch sind. Ihr Centrum A ist die Enveloppe von a und als solche auch ein Punkt der Geraden $\overline{\Delta_l\Delta'_l}$, weil a für die erwähnte Grenzlage mit dieser Verbindungslinie zusammenfällt, wie die Bemerkung zeigt, dass p_l sich auch immer auf a befindet und für jene Lage, für die auch P_i und P_k in Δ_l liegen, in den Schnitt von $\overline{\Delta_i\Delta_k}$ mit $\overline{\Delta_l\Delta'_l}$ zu liegen kommt. Aus demselben Grunde gehört A auch $\overline{\Delta_i\Delta'_i}$ und $\overline{\Delta_k\Delta'_k}$ an, woraus mit Nothwendigkeit folgt, dass auch die Dreiecke $\Delta_i\Delta_k\Delta_l$ und $\Delta'_i\Delta'_k\Delta'_l$ und zwar gegen A perspectivisch sind.

„Die homologen Seiten der Polardreiecke des Doppelpunktdreieckes $\Delta_i\Delta_k\Delta_l$ in Bezug auf die Kegelschnitte des Systems S gehen durch drei feste Punkte, die conjugirten Pole $\Delta'_i\Delta'_k\Delta'_l$ respective der Doppelpunkte, während sich die Ecken auf den Polkegelschnitten $\mathfrak{P}^i_2$, $\mathfrak{P}^k_2$ und $\mathfrak{P}^l_2$ bewegen.

Das Centrum der Perspectivität beschreibt einen Kegelschnitt C_2, welcher die Polkegelschnitte in den bezüglichen Doppelpunkten [so $\mathfrak{P}^i_2$ in Δ_i] berührt, und die Perspectivitätsaxe a dreht sich um das Centrum A der ebenfalls perspectivisch liegenden Dreiecke $\Delta_i\Delta_k\Delta_l$ und $\Delta'_i\Delta'_k\Delta'_l$."

20. Die Frage nach der Classe der Curve, welche von den Polaren irgend eines Punktes P der Ebene umhüllt wird, findet ihre Beantwortung in der Bestimmung der Anzahl der durch einen zweiten, willkürlich angenommenen Punkt Q fixirten Polaren von P. Die Ermittlung dieser Zahl kann mit Hilfe der für die Geometrie der Curven wichtigen Theorie der symmetrischen Elementensysteme [1] überraschend einfach geschehen.

Es ist nämlich einleuchtend, dass durch Q nur so viele Polaren von P gehen, als es Kegelschnitte im Systeme S gibt, welche die Verbindungslinie $\overline{PQ}$ in Punkten α, α' treffen, die durch P und

[1] Siehe pag. 19 der „Beiträge zur Curvenlehre" von Prof. Dr. Emil Weyr.

Q harmonisch getrennt werden. Nachdem nun das von dem Systeme S auf $\overline{PQ}$ herausgeschnittene symmetrische Punktsystem vom zweiten Grade ist, und ein solches mit einer quadratischen, conlocalen Involution — hier jener, welche P und Q zu Doppelpunkten hat — zwei Elementenpaare gemeinsam besitzt, und jedes derartige Punktepaar einem und demselben Kegelschnitte angehört; — so ergibt sich als Enveloppe der Polaren von P ein Kegelschnitt $\mathfrak{P}^2$. Es braucht nur erwähnt zu werden, dass $\mathfrak{P}^2$ auch jene Geraden berührt, welche von den Verbindungslinien des Punktes P mit den drei Doppelpunkten der Fundamentalcurve, beziehungsweise durch die drei Paare von Tangenten, welche sich aus diesen an C_4 legen lassen, harmonisch getrennt werden. Auch ist klar, dass die Tangenten l', l'' jener zwei Kegelschnitte S_2', S_2'', welche P enthalten, als die Polaren dieses Punktes rücksichtlich derselben, die Tangenten vorstellen, die man aus P an $\mathfrak{P}^2$ ziehen kann.[1] Diese Tangenten nennen wir die Indicatricen und den Kegelschnitt $\mathfrak{P}^2$ den Polarkegelschnitt des Punktes P in Bezug auf das System S.

„Die Polaren eines Punktes der Ebene in Bezug auf das System S umhüllen einen Kegelschnitt, den Polarkegelschnitt des Punktes."

Ist P ein Punkt der Curve, so werden die Indicatricen zu benachbarten Tangenten dieser und auch des Polarkegelschnittes, weil C_4 in P nur von einem Kegelschnitt S_2 berührt wird, der zugleich der einzige ist, den P fixirt:

„Der Polarkegelschnitt für einen Punkt der Fundamentalcurve berührt diese in jenem."

Für das Folgende ist bemerkenswerth, dass für einen Punkt P einer Tangente T_i aus einem Doppelpunkt, durch den — wie wir wissen — nur ein eigentlicher Kegelschnitt S_2 geht, die eine Indicatrix mit T_i coïncidirt, und daher der betreffende Polarkegelschnitt diese Gerade als Tangente besitzt.

---

[1] Da der Kegelschnitt $\mathfrak{P}^2$ für jeden Punkt sich sehr leicht bestimmen lässt; so sind wir in der Lage, durch Ermittlung seiner Tangenten aus P, jene zwei Kegelschnitte des Systems zu construiren, welche durch P gegeben sind.

„Die Polarkegelschnitte der Punkte einer Tangente der Grundcurve aus einem Doppelpunkt berühren die Tangente.“

Noch ist zu erwähnen, „dass irgend eine Gerade Indicatrix für vier ihrer Punkte ist“, und zwar, wie ohne weiters einzusehen ist, für jene, in welchen sie von den ihr beigeordneten Kegelschnitten des Systems S berührt wird.

21. Wir nehmen nun an, $\mathfrak{P}_1^2$ wäre der Polarkegelschnitt eines Punktes P_1 und $\mathfrak{P}_2^2$ jener von P_2, ferner l_1' eine Indicatrix des ersten und l_2' eine solche des zweiten Punktes und halten uns die im Eingang des vorhergehenden Artikels gemachten Betrachtungen vor Augen.

Nachdem jener Kegelschnitt S_2', der l_1' in P_1 berührt, hier zwei unendlich nahe Punkte bestimmt, die mit P_1 und irgend einem zweiten Punkte Q der Geraden eine harmonische Reihe bilden, wird nur mehr ein von diesem verschiedener Kegelschnitt S_2^{I} existiren, dessen Schnittpunkte α, α' mit l_1' von P_1 und Q harmonisch getrennt werden. Nur bezüglich dieses Kegelschnittes wird P_1 eine Polare $\mathfrak{p}_1$ zukommen, welche Q enthält, — sie ist offenbar die zweite aus Q an $\mathfrak{P}_1^2$ gezogene Tangente. Doch ist auch umgekehrt $\mathfrak{p}_1$ nur für diesen Kegelschnitt die Polare von P_1, da im conträren Falle, die durch P und Q gegebene Involution und das symmetrische Punktsystem der Geraden l_1' noch ein drittes gemeinschaftliches Punktepaar aufweisen müssten, was im Allgemeinen, d.h. so lange diese Systeme nicht identisch sind, unmöglich ist.

Sowie das Entsprechen zwischen $\mathfrak{p}_1$ und S_2^{I} ein eindeutiges ist, so ist es auch jenes zwischen diesem Kegelschnitte und der in Bezug auf ihn genommenen Polare $\mathfrak{p}_2$ von P_2, und daher zwischen diesen zwei Polaren selbst. Wenn also die eine bei Veränderung von S_2^{I} den Kegelschnitt $\mathfrak{P}_1^2$ umhüllt, wird die andere auf $\mathfrak{P}_2^2$ ein Tangentensystem festlegen, das mit dem von $\mathfrak{p}_1$ bestimmten projectivisch ist. Nachdem entsprechende Elemente dieser Tangentensysteme die Polaren $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ der festen Punkte rücksichtlich desselben Kegelschnittes S_2^{I} sind und diese sich in dem Pole der Geraden $\overline{P_1P_2}$ treffen, ist der Ort desselben, als Erzeugniss jener Tangentensysteme, eine Curve vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten.

Aus Artikel 8 ersehen wir, dass diese Curve $\mathfrak{P}_4$ — die wir die P o l c u r v e der Geraden $\overline{P_1P_2} \equiv G$ nennen — die Kegelschnitte

$\mathfrak{P}_1^2$ und $\mathfrak{P}_2^2$ und, weil wir an Stelle der Punkte P_1 und P_2 irgend zwei andere Punkte von G können treten lassen, ohne dass $\mathfrak{P}^4$ beeinflusst würde, die Polarkegelschnitte aller Punkte von G vierfach berührt, und diese für sie das System der Kegelschnitte S_2 bilden. Es ist auch evident, dass $\mathfrak{P}_4$ durch die Doppelpunkte Δ_i, Δ_k, Δ_l einfach geht, weil ein solcher so Δ_i der Pol von G für die aus Δ_i an C_4 gelegten Tangenten ist, und dass ferner die Schnittpunkte von $\mathfrak{P}_4$ mit G die Berührungspunkte n, n_1, n_2, n_3 dieser Geraden mit den ihr beigeordneten Kegelschnitten des Systems S sind.

„Der geometrische Ort der Pole einer Geraden bezüglich des Systems der Kegelschnitte S_2 ist eine Curve vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten, die durch die Doppelpunkte der Grundcurve C_4 einmal geht."

„Die Polarkegelschnitte der Punkte einer Geraden sind für die Polcurve dieser vierfach berührende Kegelschnitte des Systems S."

Auch finden wir, dass sämmtliche Polcurven, welche den Geraden eines Büschels zukommen, den Polarkegelschnitt des Scheitels vierfach berühren.

„Ferner ergibt sich, dass durch zwei Punkte P_1 und P_2 vier Polcurven hindurchgehen", weil jede der vier Tangenten, welche den Polarkegelschnitten $\mathfrak{P}_1^2$ und $\mathfrak{P}_2^2$ jener Punkte gemeinsam sind, Polare beider Punkte selbstverständlich bezüglich zweier verschiedener Kegelschnitte des Systems S [der Fundamentalcurve] ist.

22. Übergeht G in eine Curventangente, so rücken zwei von den Punkten n in ihren Berührungspunkt, und folglich ist G in demselben Punkte auch Tangente für ihre Polcurve. Dieselbe Überlegung lässt uns in einer Inflexionstangente der Grundcurve eine solche für ihre Polcurve erkennen, und zeigt, dass einer Doppeltangente von C_4 eine Curve $\mathfrak{P}_4$ zukommt, welche sie auch doppelt berührt; wieder sind beide Mal die Tangentialpunkte dieselben.

In den aufgezählten Fällen bleibt $\mathfrak{P}_4$ eine rationale Curve vierter Ordnung, die nur in besagter specieller Beziehung zu der sie bestimmenden Geraden steht. Anders ist die Sache, wenn die letztere eine Tangente T_i der Fundamentalcurve aus einem Doppelpunkte Δ_i ist. Für diese wurde gezeigt, dass sie die Polarkegel-

schnitte aller ihrer Punkte berührt; somit — wie aus dem vorletzten Satze in Verbindung mit der Untersuchung des Artikels 12 der Publication (A) hervorgeht — selbst ein Bestandtheil ihrer Polcurve ist, die noch aus einer Curve dritter Ordnung $\mathfrak{P}_3^i$ besteht. Das Degeneriren der Polcurve von T_i folgt auch mit Nothwendigkeit daraus, dass sie nach Obigem die Gerade T_i in t_i berühren und sowohl Δ_i als auch die Berührungspunkte n_i', n_i'' von T_i mit den zwei dieser Geraden zugeordneten, eigentlichen Kegelschnitten S_2 enthalten soll. Wir wollen nur $\mathfrak{P}_3^i$ als Polcurve von T_i ansehen. Sie schneidet diese Gerade in n_i', n_i'' und Δ_i und hat in Δ_i' ihren Doppelpunkt, weil die Polaren von Δ_i ein Büschel mit dem Scheitel Δ_i' bilden, das in Gemeinschaft mit dem Tangentensysteme, welches von den Polaren irgend eines weiteren Punktes von T_i auf den betreffenden Polarkegelschnitt constituirt wird, sie erzeugt.

„Für eine Tangente T_i aus einem Doppelpunkte Δ_i ist die Polcurve von der dritten Ordnung, mit einem Doppelpunkte in Δ_i'. Sie berührt die Polarkegelschnitte aller Punkte von T_i dreifach.“

Als Polcurve der Verbindungslinie $\overline{\Delta_k\Delta_l}$ zweier Doppelpunkte haben wir einen Kegelschnitt $\mathfrak{P}_2^i$ gefunden. Dieser wird von den Polarkegelschnitten der Geraden $\overline{\Delta_k\Delta_l}$, die sämmtlich die festen Linien $\overline{\Delta_k\Delta_l'}$ und $\overline{\Delta_l\Delta_k'}$ zu gemeinsamen Tangenten haben, doppelt berührt.

Eine einigermassen ausgezeichnete Stellung unter den besprochenen Curven nimmt die Polcurve der unendlich fernen Geraden ein. Sie gibt den Satz:

„Die Mittelpunkte der Kegelschnitte des Systems S befinden sich auf einer rationalen Curve vierter Ordnung, welche die Doppelpunkte der Grundcurve zu einfachen Punkten hat.“

In jedem Doppelpunkte dieser Curve haben offenbar zwei Kegelschnitte S_2 ihren Mittelpunkt; „es gibt demnach im Kegelschnittsystem S drei Paare concentrischer Kegelschnitte.“

VI. Die Hesse'sche und Cayley'sche Curve des Systems.

23. Aus der Umkehrung des früheren Satzes, nach welchem sich die Pole einer Geraden G auf einer Curve $\mathfrak{P}_4$ befinden, erhellt, dass alle Polarkegelschnitte $\mathfrak{P}^2$, welche den Punkten einer solchen

Curve entsprechen, besagte Gerade berühren. Diese Gerade hat nämlich irgend einen Punkt P von $\mathfrak{P}_4$ zum Pol für einen bestimmten Kegelschnitt S_2 und ist desshalb auch Tangente für den Polarkegelschnitt $\mathfrak{P}_2$ jenes Punktes.

Berücksichtigen wir nun, dass ein Doppelpunkt $\mathfrak{D}_1'$ der Curve $\mathfrak{P}_4$ nur dadurch zu Stande kommen kann, dass von den Polen der Geraden G zwei solche zusammenfallen, welche nicht auf benachbarte, sondern ganz verschiedene Kegelschnitte S_2 bezogen sind, so werden wir ohne Schwierigkeit durch die frühere Überlegung zu der Überzeugung geführt, dass G für den Polarkegelschnitt $\mathfrak{D}'$ des Punktes $\mathfrak{D}_1'$ eine Doppeltangente vorstellen muss; was wieder als weitere Consequenz mit Nothwendigkeit das Zerfallen dieses Kegelschnittes nach sich zieht. Dieser Kegelschnitt ist aber, wie wir bereits wissen, ein vierfach berührender Kegelschnitt des Systems S für die Polarcurve $\mathfrak{P}_4'$ irgend einer Geraden G_1', welche $\mathfrak{D}_1'$ enthält. In diesem Systeme sind nur drei degenerirte Kegelschnitte, und zwar werden sie repräsentirt von den Tangentenpaaren, welche man aus den Doppelpunkten der Curve $\mathfrak{P}_4'$ an sie legen kann. Der Kegelschnitt $\mathfrak{D}_2'$ besteht also aus zwei Geraden, deren Schnittpunkt sich auf G befindet und Doppelpunkt für die Polcurven aller Geraden des Büschels $\mathfrak{D}_1'$ ist. Es ist natürlich, dass dasselbe auch von den zwei anderen Doppelpunkten $\mathfrak{D}_1''$ und $\mathfrak{D}_1'''$ der Curve $\mathfrak{P}_4$ gilt, auch ihnen, und nur noch ihnen kommen auf G Punkte $\mathfrak{D}_2''$ und $\mathfrak{D}_2'''$ der eben erwähnten Art zu.

Aus dem Gesagten ist nun klar, dass die Beziehung zwischen zwei Punkten $\mathfrak{D}_1^{(n)}$ und $\mathfrak{D}_2^{(n)}$ eine durchaus wechselweise ist, d. h. dass jede Gerade durch $\mathfrak{D}_2^{(n)}$ — sowie G — die Polare von $\mathfrak{D}_1^{(n)}$ für zwei verschiedene Kegelschnitte S_2 ist, — und umgekehrt; womit zugleich gezeigt ist, dass $\mathfrak{D}_1^{(n)}$ und $\mathfrak{D}_2^{(n)}$ conjugirte Pole in Bezug auf das System S sind. Ferner ist dargethan, dass der geometrische Ort dieser Punkte, welche zugleich Doppelpunkte der Curven $\mathfrak{P}_4$ vorstellen, eine Curve dritter Ordnung H_3 ist, die, wie uns Artikel 18 zeigt, auch die Punktepaare Δ_i, Δ_i'; Δ_k, Δ_k' und Δ_l, Δ_l' enthält, und dass schliesslich die Pole, welche den Schnittpunkten einer Geraden G mit H_3 conjugirt sind, die Doppelpunkte der Polarcurve jener Geraden repräsentiren.

Erinnern wir uns noch, dass die Tangenten aus einem Punkte an seinen Polarkegelschnitt die Indicatricen des Punktes sind, so

können wir das Resultat der gemachten Untersuchung folgendermassen aussprechen:

„Der geometrische Ort der Doppelpunkte der Polcurven ist eine Curve dritter Ordnung, welche die Doppelpunkte der Fundamentalcurve und die ihnen conjugirten Pole enthält. Diese Curve ist ferner:

a) die Hesse'sche Curve des Kegelschnittsystems S, d. h. der geometrische Ort der conjugirten Pole desselben;

b) der Ort jener Punkte, deren Polarkegelschnitte in zwei Gerade degeneriren und

c) jener, welche zusammenfallende Indicatricen besitzen."

24. Sind nun $\mathfrak{D}_2'$, $\mathfrak{D}_2''$ und $\mathfrak{D}_2'''$ die Schnittpunkte von G mit H_2, so sind die Doppelpunkte von $\mathfrak{P}_4$, nämlich $\mathfrak{D}_1'$, $\mathfrak{D}_1''$, $\mathfrak{D}_1'''$, der Reihe nach die jenen conjugirten Pole. Nach dem Lehrsatze von Hesse[1] sind, wenn wir die Punkte $\mathfrak{D}_2'$ und $\mathfrak{D}_1'$, $\mathfrak{D}_2''$ und $\mathfrak{D}_1''$, die sich in Bezug auf einen Kegelschnitt K — hier alle Kegelschnitte S_2 — conjugirt sind, als Endpunkte zweier Diagonalen eines Vierseites betrachten, auch die Endpunkte der dritten Diagonale, d. h. die Schnittpunkte der Geraden $\overline{\mathfrak{D}_2'\mathfrak{D}_2''}$ und $\overline{\mathfrak{D}_1'\mathfrak{D}_1''}$, $\overline{\mathfrak{D}_2'\mathfrak{D}_1''}$ und $\overline{\mathfrak{D}_2''\mathfrak{D}_1'}$ conjugirte Pole in Bezug auf jenen Kegelschnitt K — im vorliegenden Falle also rücksichtlich des Systems S, und daher auch Punkte der Curve H_2. Nun ist aber $\mathfrak{D}_2'''$ der dritte Schnittpunkt von $G \equiv \overline{\mathfrak{D}_2'\mathfrak{D}_2''}$ mit H_2, er liegt also auch auf $\overline{\mathfrak{D}_1'\mathfrak{D}_1''}$. Ihm ist der Punkt $\mathfrak{D}_1'''$ conjugirt, dieser ist demnach der gemeinschaftliche Punkt der Verbindungslinien $\overline{\mathfrak{D}_2'\mathfrak{D}_1''}$ und $\overline{\mathfrak{D}_2''\mathfrak{D}_1'}$. Dies gibt den Satz:

„Den Schnittpunkten einer Geraden mit der Hesse'schen Curve sind die Doppelpunkte der Polcurve jener Geraden conjugirt. Diese bilden ein Dreieck, dessen Seiten durch jene Punkte einzeln laufen, so zwar, dass sich auf keiner Seite ein Paar conjugirter Pole befindet."

Da bekanntlich zwei unendlich nahen Punkten in Bezug auf zwei Kegelschnitte Punkte conjugirt sind, die sich ebenfalls unendlich nahe liegen; so ist unschwer einzusehen, dass $\mathfrak{D}_1'$ dem

[1] Man sehe L. Cremona: „Einleitung in die geometrische Theorie der ebenen Curven" deutsch von Curtze, pag. 160, Art. 109.

Punkte $\mathfrak{D}_1'''$ unendlich nahe rückt, sobald $\mathfrak{D}_2'$ zu $\mathfrak{D}_2'''$ benachbart wird, dann übergeht aber $\mathfrak{D}_2''$ in den Tangentialpunkt dieser Punkte und $\mathfrak{D}_1''$ wird zum dritten Schnittpunkte der Geraden $\overline{\mathfrak{D}_1'''\mathfrak{D}_2'''}$.

„In Bezug auf das Kegelschnittsystem conjugirte Pole sind correspondirende Punkte der Curve von Hesse. Dem dritten Schnittpunkte ihrer Verbindungslinie ist ihr Tangentialpunkt conjugirt."

„Die Polcurve einer Tangente der Hesse'schen Curve besitzt in dem conjugirten Pole des Berührungspunktes einen Berührungsknoten."

Die Tangenten einer rationalen Curve vierter Ordnung aus den Doppelpunkten umhüllen einen Kegelschnitt; bei einer Curve $\mathfrak{P}_4$ sind diese Tangentenpaare die Polarkegelschnitte für die Schnittpunkte von H_3 mit der $\mathfrak{P}_4$ bestimmenden Geraden:

„Die Geradenpaare, welche die Polarkegelschnitte dreier auf einer Geraden liegenden Punkte der Curve von Hesse repräsentiren, umhüllen einen Kegelschnitt."

25. Ebenso wichtig und interessant, wie die eben besprochene, ist die Cayley'sche des Systems, die wie jene mit der Fundamentalcurve in dem innigsten Zusammenhange steht. Besonders bemerkenswerth ist ihre Beziehung zu dem Punktsysteme auf der Grundcurve, welches von den Berührungspunkten der Kegelschnitte S_2 constituirt wird. Es mag daher gerechtfertigt erscheinen, wenn wir mit der Besprechung dieses Systems die folgende Untersuchung einleiten.

Wir betrachten zu dem Ende C_4 wieder als Erzeugniss einer quadratischen Tangenteninvolution T_2^i auf einem Kegelschnitt S_2 und eines projektivischen Büschels, das einen Doppelpunkt Δ_i von C_4 zum Scheitel hat, und ziehen auch jenes Strahlbüschel, welches die von der erzeugenden Tangenteninvolution auf S_2 bestimmte Punktinvolution aus ihrem Centrum P_i projicirt, in den Kreis der Untersuchung. Dies ist offenbar mit dem Büschel Δ_i projektivisch und erzeugt mit ihm einen Kegelschnitt $\mathfrak{k}_2^i$, welcher nach Artikel 3 (A) den Träger S_2 in seinen Berührungspunkten B, B_1, B_2, B_3 mit C_4 schneidet.

Nachdem der einem Strahl $\mathfrak{x}$ von Δ_i zugeordnete Strahl ξ in P_i die Berührungssehne für das $\mathfrak{x}$ entsprechende Tangentenpaar

t, t' der Involution ist, so wird er mit diesen coïncidiren, sobald sie ein Doppelelement δ_i von T_i^2 bildend selbst zusammenfallen. Hieraus geht hervor, dass der Kegelschnitt $\mathfrak{k}_2^i$ auch die Berührungspunkte t'_i, t''_i der aus Δ_i an C_4 gelegten Tangenten enthält. Die Punkte B, B_1, B_2, B_3 sind Quadrupel einer biquadratischen Involution, weil, wie bewiesen wurde, C_4 in jedem Punkte nur von einem Kegelschnitte S_2 berührt wird, und wir daher von einem Punkte B ausgehend zu Punkten B_1, B_2, B_3 gelangen, von welchen irgend einer als Ausgangspunkt gewählt immer wieder die drei weiteren Punkte derselben Gruppe liefert. Diese Involution, die Involution der Berührungspunkte B^4 wird auf der Curve C_4 festgelegt durch die Kegelschnitte $\mathfrak{k}_2^i$, deren Gesammtheit demgemäss ein Büschel bildet. Zwei von den Grundpunkten sind t'_i und t''_i, die weiteren zwei müssen in Δ_i vereinigt sein, weil auch jener Kegelschnitt, welcher aus den Tangenten $T'_i T''_i$ besteht, auf C_4 vier Punkte eines Quadrupels, nämlich seine eigenen Berührungspunkte t'_i, t''_i und Δ_i und nur diese fixirt, und desshalb dem Büschel der Kegelschnitte $\mathfrak{k}_2^i$ angehört, und von seinen Schnittpunkten mit irgend einem eigentlichen Kegelschnitte $\mathfrak{k}_2^i$ — die offenbar schon die Grundpunkte des Büschels sind, zwei sich in Δ_i befinden. Die Kegelschnitte k_2^i haben also in Δ_i eine feste Tangente τ_i, deren Lage sich später ohne Schwierigkeit wird angeben lassen und von der wir hier nur noch erwähnen, dass sie ebenfalls und zwar im Vereine mit der Geraden $\overline{T'_i T''_i}$ einen degenerirten Kegelschnitt des Büschels repräsentirt, somit C_4 in zwei Punkten trifft, welche mit den zwei weiteren Schnittpunkten der Berührungssehne $\overline{T'_i T''_i}$ Berührungspunkte eines und desselben S_2 sind. Berücksichtigen wir, dass auch der Doppelpunkt Δ_k mit seinen Berührungspunkten t'_k, t''_k ein Quadrupel von B^4 bildet und dasselbe für Δ_l und t'_l, t''_l gilt, so gelangen wir zu folgender Lagenrelation:

„Je zwei Doppelpunkte einer rationalen Curve vierter Ordnung liegen mit den Berührungspunkten der aus ihnen an die Curve gezogenen Tangenten auf einem Kegelschnitt."

In derselben Art wie von den $\mathfrak{k}_2^i$ wird B^4 auch von Kegelschnitten $\mathfrak{k}_2^k$ und $\mathfrak{k}_2^l$, die $\Delta_k t'_k t''_k$ beziehungsweise $\Delta_l t'_l t''_l$ zu festen Punkten haben — und zu denen wir in analoger Weise gelangen — auf C^4 herausgeschnitten, und jedes Quadrupel $BB_1B_2B_3$ wird, wie

mit $\Delta_i t'_i t''_i$, so auch mit diesen Punktgruppen auf einem Kegelschnitt $\mathfrak{k}_2^k$ beziehungsweise $\mathfrak{k}_2^i$ liegen.

Betrachten wir nun das Büschel der Kegelschnitte k_2^i und gleichzeitig auch dasjenige, welche das Punktquadrupel $BB_1B_2B_3$ zu Scheiteln hat. Beide Büschel legen auf C_4 biquadratische Involutionen fest, das erste B^4 und das zweite eine Involution, die nach dem Gesagten mit jener die Gruppen $\Delta_k t'_k t''_k$, $\Delta_l t'_l t''_l$, ferner jene, welche von den den Punkten $\Delta_i t'_i t''_i$ benachbarten Punkten constituirt wird und auch die aus den Nachbarpunkten des Quadrupels $B \ldots B_3$ gebildete, von S_2 fixirte Gruppe gemeinschaftlich hat, — also jedenfalls mit ihr identisch ist. Jeder Kegelschnitt, der das ganz willkürlich gewählte Quadrupel $B \ldots B_3$ enthält, schneidet also C_4 in vier weiteren Punkten, die wieder ein Quadrupel geben. Wir können daher folgenden Satz, von welchem der frühere ein specieller Fall ist, aussprechen:

„Die acht Berührungspunkte irgend zweier Kegelschnitte des Systems S sind Punkte eines Kegelschnittes."

Diese Beziehung behält selbstverständlich ihre Geltung auch für die degenerirten Elemente im Büschel $BB_1B_2B_3$, d. h. es werden je zwei Gegenseiten dieses Viereckes die Curve C_4 in vier weiteren Punkten treffen, die auch eine Gruppe der Involution vorstellen, „insbesondere schneidet demnach die Verbindungslinie irgend zweier Berührungspunkte eines Kegelschnittes S_2 die Curve C_4 in zwei anderen Punkten, in welchen C_4 wieder von einem Kegelschnitte des Systems berührt wird."

26. Die Verbindungslinien der Punktepaare einer Involution umhüllen die Involutionscurve. Für eine Involution vierten Grades auf einer Curve C_4 ist sie von der neunten Classe, weil eine solche mit der centralen Involution, die von den Geraden durch irgend einen Punkt P der Ebene auf C_4 bestimmt wird, 3×3 Punktepaare gemeinsam hat. Im vorliegenden Falle, d. h. für B_4 sind bereits die Doppelpunkte von C_4 drei gemeinschaftliche Punktepaare beider Involutionen; die jedoch auch jeder anderen centralen Involution angehören, und somit mit P verbunden keine Tangenten der Involutionscurve liefern, — was die Classe derselben um drei vermindert. Ferner haben wir bereits bemerkt, dass jede Gerade, also auch eine solche durch P, welche C_4 in zwei Punkten B_1, B_2 eines Quadrupels schneidet, auf dieser Curve zwei weitere Punkte

bestimmt, die auch ein Paar B'_1, B'_2 bilden. Die sechs weiteren gemeinsamen Elementenpaare jener Involutionen liegen also zu zweien auf derselben Geraden, und es laufen dem zufolge durch jeden Punkt der Ebene nur drei verschiedene [doppelt zu zählende] Gerade, die C_4 in Punktepaaren der B^4 treffen; woraus sich für die Classe der Involutionscurve die Zahl Drei ergibt.

Diese Curve, deren Symbol C^3 sein möge, hat jede Seite des vollständigen Viereckes, das von einem Punktquadrupel $BB_1B_2B_3$ gebildet wird, zur Tangente. Für die Punktgruppe $\Delta_i t'_i t''_i$ ist eine dieser Seiten die Gerade $\overline{t'_i t''_i}$, die zwei weiteren, welche durch t'_i laufen, fallen der Coïncidenz der zwei anderen Ecken mit Δ_i entsprechend in die Tangente T'_i, woraus erhellt, dass C^3 diese Gerade auch im Punkte t'_i berührt. Dasselbe ist natürlich von T''_i und von sämmtlichen aus den Doppelpunkten an C_4 gezogenen Tangenten zu sagen: Sie berühren in denselben Punkten sowohl C_4 als auch C^3 und jedem Tangentenpaar kommt eine Berührungssehne zu, die Tangente von C^3 ist.

„Die Involutionscurve der biquadratischen Involution der Berührungspunkte des Systems S ist eine Curve dritter Classe C^3, welche die Fundamentalcurve in den Berührungspunkten der Doppelpunkte berührt."

27. Fassen wir nun nochmals die vier Punkte B_1B_2, $B'_1B'_2$, in welchen eine Tangente von C^3 die C^4 schneidet, ins Auge, so sehen wir, dass diese im Sinne des Artikels 6 für das symmetrische Punktsystem der Geraden sowohl Verzweigungspunkte als auch Doppelpunkte zweiter Art sind, und dass die Beziehung zwischen B_1 und B_2 und so auch zwischen B'_1 und B'_2 vertauschungsfähig ist. Hieraus folgt nun vor Allem, dass das Punktsystem der Geraden eine quadratische Involution ist, und ferner dass C^3 identisch ist mit jener Curve, die wir bereits im Artikel 7 als Curve dritter Classe erkannt haben. Doch lässt sich sehr leicht auch umgekehrt zeigen, dass diese so definirte Curve die sprachliche Involutionscurve ist. Denn ist G eine ihrer Tangenten und α, α' ein Punktepaar der auf dieser liegenden Involution, so ist dieses dadurch charakterisirt, dass jene zwei Kegelschnitte S'_2, S''_2, welche durch α gegeben sind, sich auch in α' treffen und auch als durch diesen Punkt bestimmt angenommen werden können. Ist nun α ein Punkt der Curve C_4, und nur dann coïncidiren die

Kegelschnitte, und zwar mit jenem, der C_4 in α berührt und der nach dem eben Gesagten zugleich der einzige ist, welcher durch seinen zweiten Schnittpunkt α' mit G läuft. Dieser Punkt muss desshalb auch auf C_4 liegen und ein Berührungspunkt desselben Kegelschnittes mit C_4 sein; — womit gezeigt ist, dass jede Gerade, welche das System S in Punkten einer quadratischen Involution schneidet, Tangente der Involutionscurve C^3 ist.[1]

In den Doppelpunkten $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}''$ der quadratischen Involution $\alpha\alpha'$ wird G von je zwei Kegelschnitten S_2 berührt. Nach Artikel 23 sind diese Punkte, da ihre Indicatricen mit G zusammenfallen und jene des einen durch den anderen gehen, conjugirte Pole in Bezug auf das System S und somit Punkte der Hesse'schen Curve H^3. Die Curve C^3 tritt in dieser Weise als Enveloppe der Verbindungslinien conjugirter, correspondirender Punkte von H_3 auf und ist also für das System S die Cayley'sche Curve. Übergeht G in eine Tangente der Fundamentalcurve, was offenbar — da C^3 und C_4 sich bereits an sechs Stellen nämlich in den Punkten t_i berühren — noch sechsmal geschehen kann, so ist ihr Berührungspunkt D mit C_4 für sie ein Doppelpunkt $\mathfrak{D}'$ ihrer Involution, weil jener S_2^0, der C_4 in $\mathfrak{D}'$ berührt, auch G an derselben Stelle zur Tangente hat. Dieser Punkt ist demnach auch ein Punkt der Curve von Hesse und — was besonders erwähnenswerth ist — für die Involution der Berührungspunkte ein Doppelpunkt; in ihm wird die Grundcurve von dem zugehörigen Kegelschnitte S_2^0 vierpunktig berührt. Dies geht übrigens auch aus dem Begriffe der C^3 als Involutionscurve hervor, eine solche hat mit der Trägercurve, hier C_4 immer die Tangenten in den Doppelelementen der Involution gemeinsam. Der Kegelschnitt S_2^0 berührt C_4 noch an zwei anderen Stellen V_1 und V_2, den D zugehörigen Verzweigungspunkten der Involution B^4, deren Gesammtzahl 12 ist. In ihnen durchschneidet offenbar die Cayley'sche Curve die Grundcurve, weil eine Verbindungslinie $\overline{DV_1}$ als aus zwei benachbarten in V_1 sich treffenden Tangenten der ersteren bestehend

[1] Ein dritter Beweis für die Identität beider Curven ergibt sich schliesslich aus der Auffassung der Berührungspunkte $RB_1B_2B_3$ eines S_2 mit C_4, als seiner Schnittpunkte mit dem ihm benachbarten Kegelschnitte des Systems

aufzufassen ist. Ausserdem berührt C^3 die Curve an sechs Stellen nämlich in den Punkten t_i, — sie ist also eine allgemeine Curve dritter Classe und desshalb H_3 [reciproc] von der dritten Ordnung und sechsten Classe.

„Die Involutionscurve C^3 ist die Cayley'sche Curve des Kegelschnittsystems S, ferner die Einhüllende jener Geraden, welche dieses System in quadratischen Involutionen schneiden, und die Enveloppe zusammenfallender Indicatricen."

Ihre mit der Fundamentalcurve gemeinsamen sechs Tangenten berühren diese Curve in jenen Punkten, in welchen sie von der Hesse'schen Curve durchschnitten wird."[1]

28. Zwei conjugirte Pole $\mathfrak{D}'\mathfrak{D}''$ bilden als die Doppelpunkte der quadratischen Involution ihrer Verbindungslinie G mit jedem Punktepaar α, α' dieser eine harmonische Reihe. Dies gilt auch für die Schnittpunkte von G mit C_4, weil, wie oben erwähnt wurde, auch diese sich in Paare B_1B_2 und $B'_1B'_2$, deren jedes demselben Kegelschnitte S_2 angehört, gruppiren.

Erinnern wir noch daran, dass auch die Tangenten $T'_iT''_i$, $T'_kT''_k$, $T'_lT''_l$ in dieser Weise zu Paaren vereinigt Kegelschnitte des Systems S repräsentiren, so gelangen wir zu der folgenden einfachen Relation:

„Zwei conjugirte Pole des Systems S trennen die Schnittpunkte ihrer Verbindungslinie mit der Grundcurve C_4 paarweise harmonisch. Sie fixiren eine Involution, welcher auch die Schnitte der Geraden mit den Tangentenpaaren von C_4 aus den Doppelpunkten als Paare angehören."

Übergeht G in eine Tangente der Fundamentalcurve immer jedoch auch C^3 berührend, so kann dies entweder dadurch geschehen, dass ein Punkt B_1 mit dem ihm entsprechenden B_2 oder aber dadurch, dass er mit einem Punkte B'_1 des zweiten Paares zusammenfällt. Da obige Beziehung für jede Tangente der Cayley'schen Curve gilt, d. h. für jede die Gleichung $(\mathfrak{D}'\mathfrak{D}''B_1B_2) = (\mathfrak{D}'\mathfrak{D}''B'_1B'_2) = -1$ besteht; so sehen wir, dass im ersten Falle

[1] Wie schon gezeigt wurde, enthält H_3 auch die Doppelpunkte von C_4. Hier sind die weiteren Schnittpunkte gemeint; sowie auch unter den gemeinsamen Tangenten von C^3 und C_4 jene sechs T_i nicht verstanden sind, die beide Curven in denselben Punkten t_i tangiren.

B_1 und B_2 zu einem Doppelelemente $\mathfrak{D}'$ oder $\mathfrak{D}''$ coïncidiren. Dies ist auch in der That so und findet in den sechs Doppelpunkten der Involution B^4 statt, von denen wir zeigten, dass sie auch H_2 angehören. Im zweiten Falle hingegen zieht das Zusammenfallen der Punkte B_1 und B_1' auch jenes von B_2 mit B_2' nach sich. Dies kann offenbar nur dann geschehen, wenn G in die Lage einer Tangente T_i kommt. Nur eine solche hat die Eigenschaft, dass sie auch C^3 berührt, und dass von ihren vier Schnittpunkten mit C_4 zwei im Doppelpunkt Δ_i und die anderen zwei in ihren Berührpunkt t_i vereinigt sind. Diese Punkte bilden demnach ein Paar jener quadratischen Involution $\alpha\alpha'$, welche von dem System S auf T_i festgesetzt wird und die Berührungspunkte $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}''$ von T_i mit den zwei beigeordneten, eigentlichen Kegelschnitten S_2 zu Doppelpunkten hat. Diese Punkte gehören auch H_3 an und trennen in gleicher Weise jene Punktepaare harmonisch, welche die Tangentenpaare $T_k'T_k''$ und $T_l'T_l''$ auf T_i fixiren.

„Auf einer Tangente einer rationalen Curve vierter Ordnung aus einem Doppelpunkt Δ_i wird von ihren Schnittpunkten mit den Tangentenpaaren aus den zwei anderen Doppelpunkten eine quadratische Involution festgelegt, welcher auch ihr Berührungspunkt t_i und der Doppelpunkt Δ_i als ein Paar angehören, und die die zwei ausser Δ_i auf ihr befindlichen Punkte der Hesse'schen Curve des Systems S zu Doppelelementen hat."

Aus diesem Satze lassen sich ohne Schwierigkeit weitere Relationen ableiten; er gibt auch eine directe und einfache Lösung der folgenden Aufgabe:

„Von einer rationalen Curve vierter Ordnung sind die Doppelpunkte und der von den Tangenten aus den Doppelpunkten umhüllte Kegelschnitt gegeben; es sind die Berührungspunkte dieser Tangenten zu construiren." [1]

Dass die Punkte $\mathfrak{D}'\mathfrak{D}''\Delta_i t_i$ eine harmonische Reihe bilden, folgt auch aus der bekannten Beziehung der C^3 und H_3, nach welcher eine Tangente der ersteren die zweite in drei Punkten schneidet, von welchen die zwei conjugirten Pole den dritten von

---

[1] Eine Construction der Curve C_4, wenn analog die Doppelpunkte und der von den Tangenten in diesen umhüllte Kegelschnitt bekannt sind, gaben wir im Artikel 5, Punkt f, der Publication (A).

dem Berührungspunkte mit C^3 harmonisch trennen; wenn man berücksichtigt, dass Δ_i auch ein Punkt von H_3 ist und C^3 die Gerade T_i in t_i berührt.

Die dritte Tangente an diese Curve aus Δ_i ist die Verbindungslinie dieses Punktes mit seinen conjugirten Pole Δ_i'. Diese schneidet C_4 noch in zwei Punkten, welche als Berührungspunkte demselben Kegelschnitte S_2 angehören, sie ist also ein Theil jenes degenerirten Kegelschnittes im Büschel $\mathfrak{k}_2^i$ [vergl. Art. 25], dessen anderer Theil die Berührungssehne $\overline{t_i't_i''}$ vorstellt. Sie ist zugleich die feste Tangente des Kegelschnittbüschels k_2^i in Δ_i und schneidet die analogen Tangenten der Büschel k_2^k und k_2^l in demselben Punkte, dem Centrum A der perspectivischen Dreiecke $\Delta_i\Delta_k\Delta_l$, $\Delta_i'\Delta_k'\Delta_l'$.

Diese Bemerkung gestattet uns in sehr einfacher Weise zu einem Punkte B der Curve C_4 die drei anderen mit ihm ein Quadrupel von B^4 bildenden zu construiren, d. h. die drei weiteren Berührungspunkte eines Kegelschnittes S_2, der C_4 an gegebener Stelle berührt, aufzufinden.

Man hat zu dem Zwecke durch B nur jene zwei Kegelschnitte k_2^i und k_2^k zu legen, von welchen der eine $t_i't_i''$ enthält und in Δ_i die Gerade $\overline{\Delta_i\Delta_i'}$ berührt, und der zweite im Doppelpunkt Δ_k die Gerade $\overline{\Delta_k\Delta_k'}$ zur Tangente hat und durch t_k'. t_k'' läuft. Die drei weiteren Schnittpunkte dieser Kegelschnitte sind die gesuchten Punkte. Diese Construction bleibt auch dann anwendbar, wenn von den Doppelpunkten zwei etwa Δ_k und Δ_l imaginär wären. Man wird jetzt mit Beibehaltung von $\mathfrak{k}_2^i$ an Stelle des Kegelschnittes $\mathfrak{k}_2^k$ jenen nehmen, welcher durch die weiteren Schnittpunkte von $\overline{\Delta_i\Delta_i'}$ und $\overline{t_i't_i''}$ mit C_4 und durch B gegeben ist. Sind jedoch auch diese Punkte nicht reell, so bestimme man den Kegelschnitt S_2 selbst in der im Artikel 3 angegebenen Art durch Ermittlung von noch drei Tangenten und suche seine Schnitte mit $\mathfrak{k}_2^i$.

Wir haben diese Construction mehr als Beispiel angeführt, um zu zeigen, dass nicht nur alle Sätze und Relationen auch für die Curve C_4 mit imaginären Doppelpunkten Geltung haben — was, da wir in der Beweisführung nirgends von der Realität dieser Gebrauch machen, ohne weiters klar ist; — sondern dass auch und wie die Constructionen jedesmal ausgeführt werden können.

Aus obiger Auseinandersetzung ergibt sich zugleich eine von der gebräuchlichen verschiedene Entstehungsart der Curve C_4 durch projectivische Kegelschnittbüschel. In jener haben diese drei Grundpunkte gemeinschaftlich, die im Erzeugnisse als Doppelpunkte auftreten. Hier sind die Grundpunkte $\Delta_i t'_i t''_i$ und $\Delta_k t'_k t''_k$ der Büschel $\mathfrak{k}_2^i$ und $\mathfrak{k}_2^k$ verschieden. Sie befinden sich jedoch insgesammt auf einem Kegelschnitt $\mathfrak{k}_2$, der durch seine Tangenten $\overline{\Delta_i \Delta'_i}$, $\overline{\Delta_k \Delta'_k}$ in Δ_i respective Δ_k die Büschel $\mathfrak{k}_2^i$ und $\mathfrak{k}_2^k$, denen er gemeinsam ist, erst festlegt. Ihm entspricht als Element von $\mathfrak{k}_2^k$ im Büschel $\mathfrak{k}_2^i$ das Tangentenpaar $T'_i T''_i$ und in jenem Gebilde als Element von diesem der degenerirte Kegelschnitt $T'_k T''_k$.

Diese Entstehungsart hat insoferne vor anderen ähnlichen den Vorzug, als entsprechende Elemente sich in Punkten der Curve C_4 treffen, die demselben Kegelschnitt S_2 als Berührungspunkte zukommen. Sie kann verallgemeinert werden, indem man irgend zwei Quadrupel von B^4 zu Grundpunkten nimmt; doch müssen sich nun drei Paare entsprechender Elemente $\mathfrak{k}^2$ und $\mathfrak{k}_2$ berühren, der Berührungspunkt ist immer ein Doppelpunkt. Ähnliches gilt für eine allgemeine Curve vierter Ordnung (12. Classe).

29. Eine neue Definition für die Curven C^3 und H_3 geht aus der Betrachtung jener biquadratischen Involution i^4 hervor, welche auf irgend einem Kegelschnitte des Systems S von allen anderen bestimmt wird.

Dass die Kegelschnitte S_2 auf einem von ihnen S_2^1 eine Punktinvolution herausschneiden, folgt aus dem Theorem des Artikels 5, nach welchem durch einen Punkt eines solchen Kegelschnittes nur noch ein zweiter hindurchgehen kann. Die gemeinschaftlichen Sekanten des festen Kegelschnittes mit allen anderen sind Tangenten der Involutionscurve, — diese ist also nach Artikel 7 und 27 die Cayley'sche Curve C^3. Ihre mit S_2^1 gemeinsamen sechs Tangenten berühren diesen Kegelschnitt in den Doppelpunkten $\mathfrak{D}$ der Involution. In einem solchen Punkte wird S_2^1 von dem zweiten Kegelschnitte des Systems tangirt, woraus wir ersehen, dass die zugehörigen Indicatricen zusammenfallen und somit $\mathfrak{D}$ ein Punkt der Curve H_3 ist. Die Curve C^3 begegnet S_2^1 in den 12 Verzweigungspunkten der Involution i^4.

„Die Schnittpunkte eines Kegelschnittes aus dem System S mit allen anderen bilden auf ihm eine biquadratische Involution,

welche die Cayley'sche Curve zur Involutionscurve hat. Die sechs Doppelpunkte der Involution sind die Schnittpunkte des Kegelschnittes mit der Hesse'schen Curve. Ihre Tangenten die gemeinsamen Tangenten des Trägers und der Curve von Cayley."

Die Curve H_3 erscheint in dieser Weise als geometrischer Ort jener Punkte, in welchen ein Kegelschnitt S_2 von Kegelschnitten desselben Systems berührt wird, und C^3 als Enveloppe der Tangenten in diesen Punkten und Ort der erwähnten Verzweigungspunkte.

Betrachtet man das Tangentenpaar $T_i'T_i''$ als einen Kegelschnitt S_2, so wird man consequent die zwei auf ihm befindlichen quadratischen Involutionen als eine biquadratische ansehen. Diese besitzt, abgesehen von Δ_i, vier Doppelpunkte: $\mathfrak{D}_1'$, $\mathfrak{D}_2'$ auf T_i' und $\mathfrak{D}_1''$, $\mathfrak{D}_2''$ auf T_i'', und acht Verzweigungspunkte, welche auch Punkte der Curve C^3 sind. Nun ist klar, dass auf T_i'' jene Punkte als Verzweigungspunkte anzusehen sind, in welchen diese Gerade von denjenigen Kegelschnitten S_2^{I}, S_2^{II} getroffen wird, die T_i' in $\mathfrak{D}_1'$, respective $\mathfrak{D}_2'$ berühren; woraus wir folgern, dass auch diese paarweise mit den Punkten $\mathfrak{D}_2'$, $\mathfrak{D}_2''$ eine harmonische Reihe bilden.

„Die vier Schnittpunkte einer Tangente der Grundcurve aus einem Doppelpunkte mit der Cayley'schen Curve werden von den zwei auf ihr befindlichen, correspondirenden Punkten der Hesse'schen Curve paarweise harmonisch getrennt."

30. Um die Tangenten aus einem Punkte $\mathfrak{D}'$ der Curve von Hesse an die von Cayley zu legen, bestimme man jene zwei Kegelschnitte S_2', S_2'', die durch $\mathfrak{D}'$ gehen. Sie berühren in diesem Punkte dieselbe Gerade $\overline{\mathfrak{D}'\mathfrak{D}''}$, die auch C^3 tangirt, und begegnen sich noch zweimal in den Punkten a und a', die mit $\mathfrak{D}'$ die weiteren Tangenten von C^3 festlegen. Gehört $\mathfrak{D}'$ auch der Curve C^3 an, so rücken zwei von den Tangenten unendlich nahe.

Es ist leicht einzusehen, dass $\overline{\mathfrak{D}'a'}$ mit $\overline{\mathfrak{D}'a}$ nicht zusammenfallen kann. Dies hätte ja zur Folge, dass die Kegelschnitte S_2', S_2'' sich noch einmal, und zwar in $a'\equiv a$ berühren, also C^3 von der Geraden $\overline{\mathfrak{D}'a}$ auch im Punkte a tangirt wird, — was jedoch unmöglich ist, weil C^3 eine allgemeine Curve dritter Classe vorstellt. Es kann demnach $\overline{\mathfrak{D}'a}$ nur mit $\overline{\mathfrak{D}'\mathfrak{D}''}$ coïncidiren, d. h. die Kegelschnitte S_2', S_2'' müssen sich in $\mathfrak{D}'$ osculiren. Dieser Punkt ist in Folge dessen für die Involution i^4 eines jeden der zwei

Kegelschnitte ein dreifaches Element und repräsentirt zwei unendlich nahe Doppelelemente, — in ihm berührt demnach nicht nur C^3, sondern auch H^3 beide Kegelschnitte.

Aus der im Artikel 24 erklärten Lagenrelation der den Schnittpunkten einer Geraden mit H_3 conjugirten Pole ersehen wir ferner, dass der conjugirte Pol $\mathfrak{D}''$ von $\mathfrak{D}'$ ein Inflexionspunkt von H_3 ist. Damit ist der folgende Satz bewiesen:

„Die Cayley'sche Curve berührt die Hesse'sche in den neun conjugirten Polen der Inflexionspunkte.

Jeder dieser Punkte bestimmt zwei Kegelschnitte des Systems S, die sich in ihm osculiren."

31. Zu einer weiteren Eigenschaft der Hesse'schen Curve gelangen wir durch Untersuchung des geometrischen Ortes der Punkte, in welchen die Strahlen S durch einen Punkt P der Ebene die ihnen beigeordneten Kegelschnitte berühren.

Wir wissen, dass eine Gerade Tangente von vier Kegelschnitten S_2 ist, und dass durch jeden Punkt der Ebene zwei Kegelschnitte dieses Systems hindurchgehen; woraus ohne weiters ersichtlich ist, dass der sprachliche Ort der Berührungspunkte n eine Curve sechster Ordnung B_6 ist, die in P einen Doppelpunkt besitzt, dessen Indicatricen die zugehörigen Doppelpunktstangenten vorstellen. Ferner ist ohne Schwierigkeit einzusehen, dass B_6 die Curve C_4 in den Berührungspunkten β der sechs aus P an die letztere möglichen Tangenten t berührt; denn für eine solche rücken zwei von den Punkten n in den Punkt β entsprechend der Auffassung, der gemäss diesem Punkte zwei benachbarte Kegelschnitte S_2 zukommen. Anders gestalten sich die Verhältnisse, wenn S in einen Doppelpunktstrahl $\overline{P\Delta_i}$ übergeht. Dieser hat mit C_4 wohl auch zwei zusammenfallende, aber nicht benachbarte Punkte gemein, und während S nach dem Passiren der Tangente t, wenn sie früher die Curve C_4 in $2n$ reellen Punkten traf, mit dieser Curve $2n \pm 2$ Punkte gemeinsam hat; so ist dies nun nicht der Fall, sondern die Zahl der reellen mit C_4 und also auch mit B_6 gemeinschaftlichen Punkten bleibt dieselbe.[1] Daraus ist evident, dass B_6 in den Punkten Δ_i, Δ_k, Δ_l Doppelpunkte hat.

---

[1] Nach Artikel 2 sind die Punkte n gleichzeitig mit den Schnittpunkten p von G mit C_4 reell und imaginär, so zwar, dass jedem reellen p ein reeller Punkt n entspricht.

Dasselbe ist von den Punkten u für die drei Tangenten der Cayley'schen Curve aus P zu sagen. Eine solche Tangente berühren je zwei der beigeordneten Kegelschnitte S_2 — ohne benachbart zu sein — in einem der Punkte $\mathfrak{D}'$, beziehungsweise $\mathfrak{D}''$, die bekanntlich für die Hesse'sche Curve correspondirende Punkte sind und deren Gesammtheit die weiteren sechs Doppelpunkte von B_6 liefert. Für diese gilt der folgende Satz:

„Der geometrische Ort der Berührungspunkte des Systems S mit den Strahlen eines Büschels P ist eine specielle Curve sechster Ordnung und zehnter Classe. Sie hat P und Δ_i, Δ_k, Δ_l zu Doppelpunkten und besitzt weitere sechs Doppelpunkte auf der Hesse'schen Curve, welche drei Paare conjugirter Pole bilden und, in dieser Weise verbunden, die drei Tangenten der Cayley'schen Curve aus P geben.

Die sprachliche Curve berührt die Grundcurve in den Berührungspunkten der sechs Tangenten der letzteren aus P."

Es ist leicht zu erkennen, in welcher Weise sich B_6 specialisirt, wenn P ein Punkt von H_3 oder C_4, insbesondere einer der Punkte t_i ist. Wir übergehen desshalb die diesbezügliche weitere Untersuchung und wollen von den anderen Curven, die gewöhnlich mit Curvensystemen in Verbindung gebracht werden, nur noch eine, den geometrischen Ort der Brennpunkte des Systems kurz besprechen.

Zu dieser Curve gelangen wir mittelst der etwas allgemeineren Untersuchung des Ortes der vier weiteren Ecken eines einem Kegelschnitt S_2 umschriebenen vollständigen Vierseites mit zwei festen Eckpunkten P und P'.

Wir legen durch P irgend eine Gerade G und an die vier Kegelschnitte S_2, welche diese berühren, die acht Tangenten $G'_1 \ldots G'_8$ aus P'; sie treffen die ersten in ebensovielen Punkten f der sprachlichen Curve. Die Beziehung zwischen den Strahlbüscheln G und G' ist eine acht- achtdeutige, ihr Erzeugniss daher eine Curve 16. Ordnung; die jedoch, da die Verbindungslinie $\overline{PP'}$ auch Tangente von vier S_2 ist, in diese viermal zu zählende Gerade und eine Curve 12. Ordnung F_{12} zerfällt, die in P und P' vierfache Punkte hat. Die Tangenten in diesen entsprechen der Verbindungslinie $\overline{PP'}$, wenn man sie als Strahl des einen und dann des anderen Büschels nimmt, und sind die weiteren Tan-

genten der vier $\overline{PP'}$ berührenden Kegelschnitte. Weitere vierfache Punkte besitzt F_{12} in den Doppelpunkten der Fundamentalcurve, weil sowohl für die Gerade $\overline{P\Delta_i}$ als auch $\overline{P'\Delta_i}$ von den Punkten f vier in Δ_i fallen.

Die zwei Tangentenpaare aus P an die Kegelschnitte, welche durch P' gehen, sind Tangenten der Curve F_{12}. Und die sechs Tangenten t der Fundamentalcurve aus P sind Doppeltangenten von F_{12}, die Berührungspunkte sind die Schnittpunkte mit jenen Strahlen von P', welche den Kegelschnitt S_2, der t im Berührungspunkt mit C_4 tangirt, berühren. Aus P lassen sich also an F_{12} im Ganzen $2 \times 4 + 4 + 2 \times 6 = 24$ Tangenten ziehen, woraus folgt, dass diese Curve ausser den erwähnten vierfachen Punkten noch 24 Doppelpunkte oder eine aequivalente Anzahl vielfacher Punkte besitzen muss.

Ein derartiger Doppelpunkt kann nun nur dadurch zu Stande kommen, dass von den vier Kegelschnitten, welche eine Gerade des Büschels P berühren, zwei eine gemeinschaftliche Tangente besitzen, die durch P' geht:

„Es laufen demnach durch einen Punkt der Ebene 24 Gerade, deren jede zwei Kegelschnitte S_2 berührt, die eine zweite gemeinschaftliche Tangente besitzen, die durch einen anderen gegebenen Punkt der Ebene geht.“

Nehmen wir an, P und P' sind die imaginären Kreispunkte, so sind offenbar die Punkte f die Brennpunkte der Kegelschnitte S_2, für ihren Ort fliesst aus dem Vorstehenden der folgende Satz:

„Der geometrische Ort der Brennpunkte des Systems S ist eine spezielle, cyclische Curve 12. Ordnung und 24. Classe, welche in den imaginären Kreispunkten und in den Doppelpunkten der Fundamentalcurve vierfache Punkte besitzt.“

Zu dem, durch entsprechende Übertragung des Obigen, das folgende Theorem tritt:

„Im Systeme der Kegelschnitte S geschieht es 24mal, dass zwei Kegelschnitte denselben Brennpunkt besitzen.“

VII. Das System der Kegelschnitte S_2 für specielle Curven vierter Ordnung.

32. Im Vorstehenden sind die wesentlichen Eigenschaften des Kegelschnittsystems S für die allgemeine rationale Curve vierter

Ordnung entwickelt; wir schliessen dieser Betrachtung eine kurze diesbezügliche Besprechung der speciellen Curven selber Ordnung an.

Wir haben gezeigt, dass für den Fall, als ein Doppelpunkt Δ_i der Curve C_4 der Pol für die Verbindungslinie $\overline{\Delta_k\Delta_l}$ der zwei anderen bezüglich eines Kegelschnittes S_2 ist, er es für alle ist, und dass dann die Tangenten der Curve in ihm Inflexionstangenten sind;[1] ferner haben wir aber auch nachgewiesen, dass umgekehrt für eine Curve mit einem Doppelinflexionspunkte die Gegenseite des Doppelpunktdreieckes die Polare desselben für alle Kegelschnitte des Systems S repräsentirt.[2]

Da nun dem Punkte Δ_i jeder Punkt der Geraden $\overline{\Delta_k\Delta_l}$ für das System S polar conjugirt ist, so ist diese ein Bestandtheil der Curve von Hesse, die sonach noch aus einem Kegelschnitt H_2 besteht, der wohl Δ_i aber nicht mehr Δ_k und Δ_l enthält. Diesem Kegelschnitte müssen auch jene Punkte $\mathfrak{D}'_1$, $\mathfrak{D}'_2$ angehören, in welchen eine Tangente T'_k der Fundamentalcurve aus Δ_k von den ihr beigeordneten zwei eigentlichen Kegelschnitten berührt wird. Es ist klar, dass dieselben zwei Kegelschnitte auch als der zweiten Tangente T''_k aus Δ_k coordinirt erscheinen, und dass ihre Berührungspunkte $\mathfrak{D}''_1$, $\mathfrak{D}''_2$ mit dieser mit $\mathfrak{D}'_1$, respective $\mathfrak{D}'_2$ verbundene Strahlen H' und H'' des Büschels Δ_i geben, die schon den Kegelschnitt H_2 bilden. Diese zwei Strahlen sind in derselben Weise auch die Berührungssehnen für jene zwei Kegelschnitte, welche das Tangentenpaar T'_l, T''_l berühren, und ferner für irgend zwei sich doppelt berührende Kegelschnitte aus dem System S, so zwar, dass ein jeder Kegelschnitt S_2 sowohl in seinen Schnittpunkten $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}''$ mit H', die jedesmal durch Δ_i und $\overline{\Delta_k\Delta_l}$ harmonisch getrennt sind, als auch in seinen auf H'' befindlichen Punkten von demselben anderen Kegelschnitt S'_2, respective S''_2 berührt wird.

Die Geraden H', H'' fixiren auf C_4 zwei Punktepaare B'_1, B'_2; B''_1, B''_2, welche mit dem Doppelinflexionspunkt Δ_i die sechs Doppelelemente der „Involution der Berührungspunkte" vorstellen, die

---

[1] Siehe: „Über rationale Curven vierter Ordnung, deren Doppelpunktstangenten in Inflexionstangenten übergehen." Sitzb. d. k. Akad. d. Wissenschaften in Wien, 79. Bd., Märzheft.

[2] „Über rationale ebene Curven dritter und vierter Ordnung." Art. 5. Sitzb. vom 9. October 1879, 80. Bd.

im vorliegenden Falle aus zwei verbundenen gegen Δ_i centralen, quadratischen Involutionen besteht. Der einem von den vier Punkten B etwa B_1' zugehörige Kegelschnitt berührt nicht nur in ihm, sondern auch in dem conjugirten Punkte B_2' die Grundcurve vierpunktig.

Daraus, dass die Tangenten eines Kegelschnittes S_2 in seinen Schnittpunkten mit $\overline{\Delta_k\Delta_l}$ jedesmal den Punkt Δ_i enthalten, folgt unmittelbar, dass sich in jedem Punkte X dieser Geraden zwei Kegelschnitte S_2, S_2' berühren. Sie haben noch zwei Punkte p, p' gemeinschaftlich, die auf einem Strahle des Büschels Δ_i liegen und mit X verbunden, Tangenten der Cayley'schen Curve festlegen, die demgemäss aus Δ_i und einem eigentlichen Kegelschnitt C^2 besteht, welcher die zwei Hesse'schen Geraden H', H'' in ihren Schnittpunkten D', D'' mit der dritten $\overline{\Delta_k\Delta_l}$ berührt, — also auch Δ_i zum Pol für diese Linie hat.

Dieser „Cayley'sche Kegelschnitt" berührt auch die Grundcurve vierfach, und zwar in den Berührungspunkten t_k', t_k''; t_l', t_l'' der Tangenten aus den Doppelpunkten Δ_k und Δ_l, woraus wir — mit Beziehung auf Artikel 3 — ersehen, dass er dem Systeme S nicht angehört. Die Punkte D haben noch eine besondere Bedeutung für das System S. In jedem von ihnen berühren sich die zwei durchgehenden Kegelschnitte S_2 vierpunktig. Dies steht damit im Einklange, dass für einen solchen Punkt, weil er einer Geraden H und $\overline{\Delta_k\Delta_l}$ angehört, auch die Tangenten $\overline{Xp'}$ und $\overline{Xp''}$ mit H coincidiren; woraus weiter ebenfalls hervorgeht, dass C^2 in einem solchen Punkte die bezügliche Gerade H tangirt. Wir sehen ferner, dass C^2 so lange nicht degeneriren kann, als das Doppelpunktdreieck nicht Polardreieck der Kegelschnitte S_2 ist. Denn C^2 könnte ja nur aus Punkten der Geraden $\overline{\Delta_k\Delta_l}$ bestehen, würde also in dieser Gestalt bedingen, dass für jeden Punkt dieser Linie die Geraden $\overline{Xp'}$ und $\overline{Xp''}$ mit ihr zusammenfallen, d. h., dass jeder Kegelschnitt S_2', der einen anderen S_2 in einem Punkte X von $\overline{\Delta_k\Delta_l}$ berührt, mit demselben Kegelschnitte auch in seinem zweiten auf $\overline{\Delta_k\Delta_l}$ befindlichen Punkte X' dieselbe durch Δ_i laufende Tangente gemeinsam hat; — dann würde aber das symmetrische Punktsystem XX' vom $\overline{\Delta_k\Delta_l}$ in eine quadratische Involution übergehen, d. h. jedes von einem S_2 auf $\overline{\Delta_k\Delta_l}$ festgelegte Punktepaar würde mit Δ_k, Δ_l eine harmonische Reihe bilden, was unserer Voraussetzung: C_4 habe nur einen Doppelinflexionspunkt, entgegen ist.

33. Nehmen wir an, die Curve C_4 hätte nicht nur Δ_i zum Doppelinflexionspunkt, sondern noch in einem zweiten Doppelpunkt Δ_k, jedoch nur eine Inflexionstangente T_k.

Dies wird nur dann geschehen, wenn sich aus Δ_k an einen Kegelschnitt S_2 eine Tangente ziehen lässt, die diesen in einem Punkte der Linie $\overline{\Delta_i\Delta_l}$ (s. l. c.) berührt. Ist dies aber der Fall, so hat immer auch die zweite Tangente aus Δ_k ihren Berührungspunkt auf $\overline{\Delta_i\Delta_l}$. Diese Linie ist die Polare von Δ_k und daher auch Δ_l der Pol von $\overline{\Delta_i\Delta_k}$. Das Dreieck $\Delta_i\Delta_k\Delta_l$ ist somit ein Polardreieck für alle S_2 und C_4 besitzt in jedem Doppelpunkte zwei Inflexionstangenten.

Es kann nun auch die Frage aufgeworfen werden, ob die Annahme, dass C_4 in jedem Doppelpunkte nur eine Inflexionstangente besitzt, zur Folge hat, dass alle Doppelpunktstangenten Wendetangenten sind.

Wieder muss, wenn S_2 irgend ein Kegelschnitt aus dem Systeme S ist, eine seiner Tangenten τ_i aus Δ_i ihn in einem Punkte β_i von $\overline{\Delta_k\Delta_l}$ tangiren, ferner in gleicher Weise der Berührungspunkt β_k einer Tangente τ_k aus Δ_k sich auf $\overline{\Delta_i\Delta_l}$ befinden und schliesslich die Polare von Δ_l die Gerade $\overline{\Delta_i\Delta_k}$ in einem Punkte β von S_2 treffen.

Diese Beziehung kann — wie man sich leicht überzeugt — nur dann bestehen, wenn einer von den Doppelpunkten, die wir als reell voraussetzen, sich innerhalb von S_2 befindet. Nehmen wir an, Δ_l wäre dieser Punkt, so ist seine Polare reell und hat mit S_2 zwei imaginäre Punkte gemeinsam. Nach dem Gesagten soll einer dieser Punkte auch $\overline{\Delta_i\Delta_k}$ angehören. Nun trifft diese Gerade die erwähnte Polare, so lange sie von ihr verschieden ist, nie in einem imaginären Punkt; — sie muss also mit ihr identisch sein, damit dies geschehe, d. h. selbst die Polare von Δ_l vorstellen. In diesem Falle ist aber das Dreieck $\Delta_i\Delta_k\Delta_l$ sich selbst conjugirt und alle Doppelpunktstangenten sind Inflexionstangenten.

Damit ist der folgende Satz nachgewiesen, strenge genommen für Curven vierter Ordnung mit reellen Doppelpunkten; er kann jedoch mittelst des Principes der Continuität auch auf jene mit zwei imaginären ausgedehnt werden:

„Sind irgend drei Doppelpunktstangenten einer Curve vierter Ordnung Inflexionstangenten, so sind es alle.“

Für eine solche Curve (mit drei Doppelinflexionspunkten) stellen diese die Caley'sche, und die drei Seiten des Doppelpunktdreieckes die Hesse'sche Curve vor. Die Involution der Berührungspunkte hat ihre Doppelelemente in den Doppelpunkten und besteht aus drei quadratischen Involutionen, welche diese Punkte, beziehungsweise zu Centren haben. Jedes Quadrupel von Berührungspunkten bildet ein vollständiges Viereck, das das Doppelpunktdreieck zum Diagonaldreieck hat. Ferner wird jeder Kegelschnitt S_2 von drei anderen desselben Systems doppelt berührt, die Berührungssehnen sind wieder die Seiten des Dreieckes $\Delta_i \Delta_k \Delta_l$. Alle Polcurven haben die Ecken dieses Dreieckes zu Doppelpunkten und jede Berührungscurve besitzt sieben Doppelpunkte, auch die Punkte $\Delta_i \Delta_k \Delta_l$ mitgezählt, die zu dreien auf einer Geraden liegen etc., etc.

Eine vielbesprochene Curve dieser Art ist die Lenmiscate.[1] Für sie besteht das System der Kegelschnitte S aus lauter gleichseitigen, mit ihr concentrischen Hyperbeln, die zu zweien conjugirt sind, und deren jede die Lenmiscate in diametral liegenden Punkten, von welchen jedesmal nur zwei reell sind, berührt. Ausgezeichnet unter diesen Hyperbeln ist das Tangentenpaar im reellen Doppelpunkte und jene, für welche die Lenmiscate als Fusspunktcurve erscheint.

Für die Fusspunktcurven im Allgemeinen wäre noch bemerkenswerth, dass die Mittelpunkte ihrer Kegelschnitte des Systems S auf einem Kreise liegen, der den Pol und die Berührungspunkte der aus diesem an sie gezogenen Tangenten enthält.

34. Tritt an die Stelle eines Doppelpunktes Δ_i der Curve C_4 ein Rückkehrpunkt, so ändert sich das System S sehr wesentlich, weil nun alle Kegelschnitte desselben den Punkt Δ_i enthalten.[2] Dieser ist sich selbst conjugirt und desshalb für die Hesse'sche Curve ein Doppelpunkt. Jeder Kegelschnitt S_2 berührt C_4 nur mehr dreimal, die Involution der Berührungspunkte ist also cubisch; sie hat vier Doppelelemente, die, wie früher, auch auf H_3 liegen.

---

[1] Siehe: „Über Fusspunktcurven der Kegelschnitte“ und „Zur Theorie der Fusspunktcurven etc.“ im 64. Theil des „Archivs für Mathematik und Physik“ von Grunert-Hoppe.

[2] Siehe Artikel 12 in (*A*).

Die Cayley'sche Curve hingegen besteht aus dem Rückkehrpunkt Δ_i und einem eigentlichen Kegelschnitt C^2, der C_4 in den Berührungspunkten der zwei aus Δ_k und Δ_l an diese Curve gelegten eigentlichen Tangenten T_k und T_l — also doppelt berührt. Er begegnet ihr noch viermal in den Verzweigungspunkten der Involution B^2 und berührt die Curve von Hesse dreifach. Es geschieht sonach dreimal, dass sich zwei Kegelschnitte S_2 osculiren. Die im dritten und vierten Abschnitte behandelten Entstehungsarten einer Curve C_4 modificiren sich nun insoferne, als die Tangente eines Kegelschnittes S_2 im Punkte Δ_i, den wir jetzt als Träger einer cubischen oder biquadratischen Tangenteninvolution ansehen, für diese ein Doppelelement vorstellt, dem in dem jeweiligen erzeugenden Büschel P (G), beziehungsweise L (G) der nach Δ_i zielende Strahl entspricht. Auch in irgend zwei projectivischen Tangentensystemen, die auf zwei verschiedenen Kegelschnitten S_2 und S_2' sich befinden, sind sich jedesmal die Tangenten in dem Schnittpunkt Δ_i zugeordnet. In wie weit die weiteren an anderen Orten entwickelten Sätze, die selbstverständlich auch hier gelten, sich ändern, eigentlich specialisiren, ist dem Gesagten ohne Schwierigkeit zu entnehmen.

35. Für eine Curve C_4 mit zwei Rückkehrpunkten Δ_k, Δ_l ist die „Involution der Berührungspunkte" quadratisch. Die Cayley'sche Curve besteht für diese aus Δ_k, Δ_l und einem dritten Punkte C, der, wie aus dem für den allgemeinen Fall im Abschnitte VI Gesagten ohne weiters zu ersehen ist, der Schnittpunkt der Tangenten T_k und T_l von C_4 aus Δ_k und Δ_l ist. Dieser Punkt ist von besonderer Bedeutung für die Grundcurve, da er als Centrum der Involution B^2 auftritt. Er ist der feste Punkt, durch den die Berührungssehnen der Kegelschnitte S_2 — die C_4 nur mehr doppelt berühren — jedesmal hindurchgehen. Aus ihm kann man an die Fundamentalcurve noch zwei weitere Tangenten ziehen, die diese in den Doppelpunkten D', D'' der Involution B^2 tangiren, welche, wie schon wiederholt erwähnt wurde, die Berührungspunkte der C_4 vierpunktig berührenden Kegelschnitte S_2 sind.

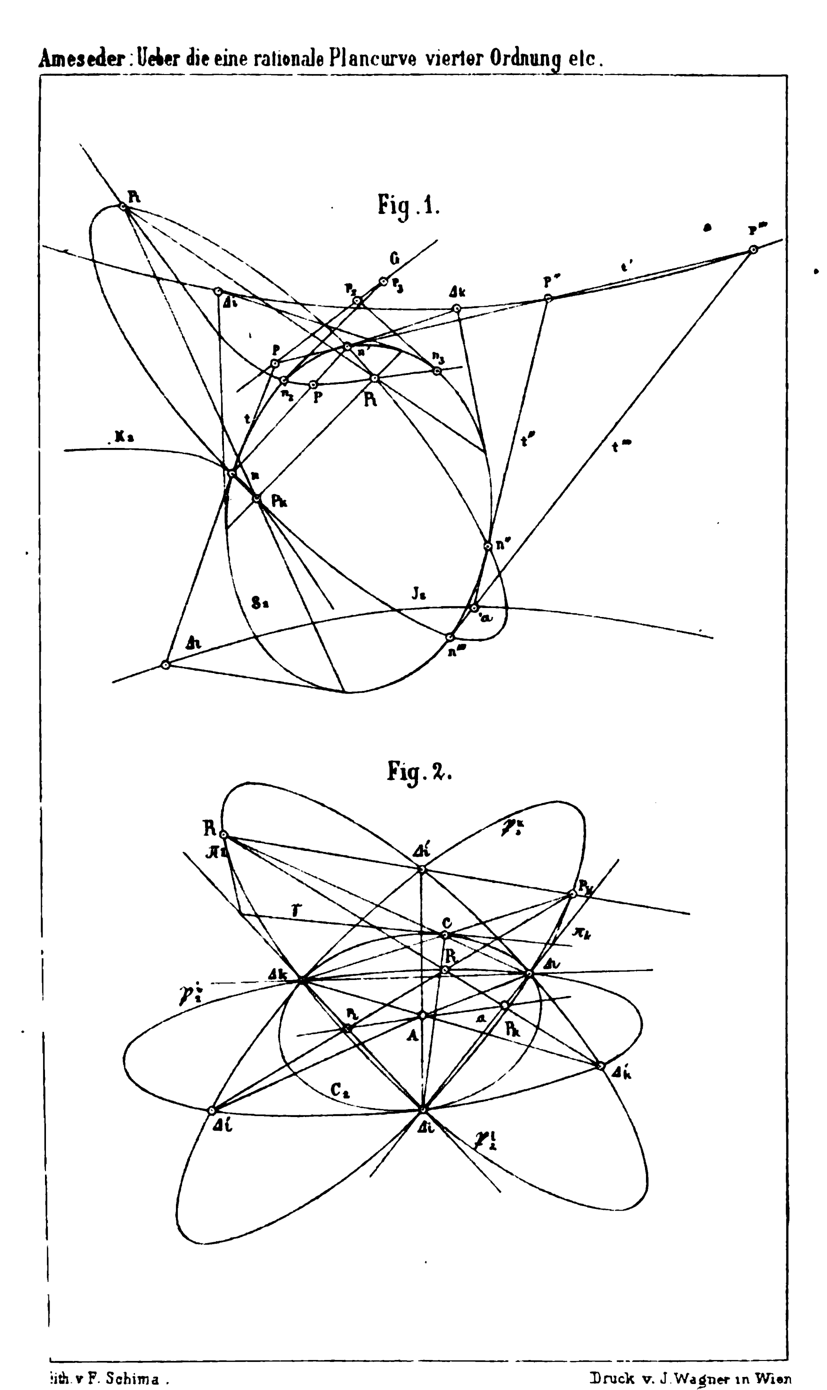
Die Punkte D', D'' legen im Vereine mit den Doppelpunkten der Grundcurve einen Kegelschnitt H_2 fest, der mit der Geraden $\overline{\Delta_k\Delta_l}$ — der Verbindungslinie der Spitzen — die Hesse'sche Curve des Systems repräsentirt und in Δ_k, Δ_l die Tangenten T_k,

beziehungsweise T_l berührt, somit die Gerade $\overline{\Delta_k \Delta_l}$ für den Punkt C zur Polare hat. Diese Thatsache steht in Übereinstimmung damit, dass jede Gerade durch C Träger einer quadratischen Involution α, α' ist, in der auch C und ihr Schnitt mit $\overline{\Delta_k \Delta_l}$ ein Punktepaar und die Schnitte mit H_2 die Doppelelemente vorstellen. Auch hat H_2 die Eigenschaft, durch die Berührungspunkte der aus C an irgend einen Kegelschnitt S_2 gezogenen Tangenten zu laufen, und zwar aus dem einfachen Grunde, weil diese Punkte die Doppelpunkte der auf einem S_2 von allen anderen Kegelschnitten dieses Systems herausgeschnittenen Punktinvolution sind.

Die Curve C_4 mit zwei Spitzen ist von der vierten Classe, sie hat eine immer reelle Doppeltangente δ_i und zwei Wendetangenten δ_k und δ_l. Fasst man sie als Enveloppe, d. h. als Erzeugniss von Punktgebilden auf, so gelangt man, wenn man insbesondere jene Kegelschnitte sucht, die Träger von Punktinvolutionen zweiten, dritten und vierten Grades sind, und welche mit projectivischen Strahlbüscheln C_4^4 als Erzeugniss liefern, zu einem Systeme von Kegelschnitten Σ, das dem Systeme S dieser Curve in jeder Hinsicht reciproc gegenübersteht.

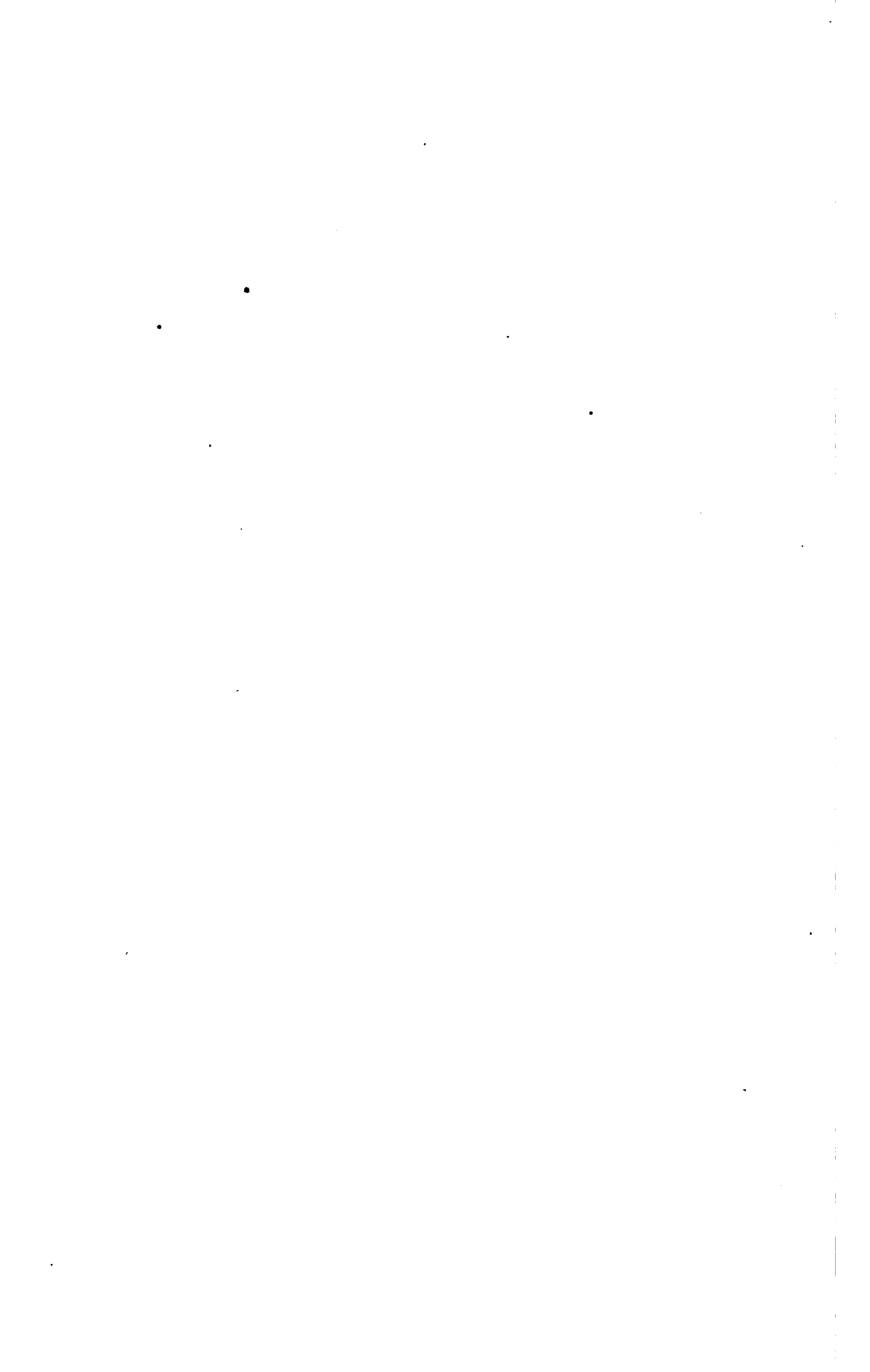
Insbesondere würde man finden, dass alle Kegelschnitte Σ_2 die Wendetangenten δ_k und δ_l berühren, und dass jeder einzelne C_4^4 doppelt berührt. Ferner, dass die Tangenten in den Berührungspunkten eines Σ_2 mit C_4^4 sich in einem Punkte treffen, dessen geometrischer Ort die Verbindungslinie Γ der Tangentialpunkte der Wendepunkte der Curve ist, dass diese Linie mit δ_k und δ_l die der Cayley'schen Curve von S reciproce Curve repräsentirt, und dass schliesslich auch in diesem Systeme ein Kegelschnitt H^2 auftritt, der dem Hesse'schen Kegelschnitte dual entspricht, also δ_k und δ_l in den Punkten von L berührt u. s. w. Ein hübsches Beispiel dieser Curvengattung ist die Limaçon des Pascal. Manche noch nicht bekannte Eigenschaft derselben liesse sich dem Vorstehenden ohne Schwierigkeit entnehmen.

Von der Curve C_4 mit drei Spitzen ist rücksichtlich des Systems S nun wenig zu sagen. Alle Kegelschnitte desselben bilden ein Netz mit den Grundpunkten Δ_i, Δ_k und Δ_l, die die Curve von Cayley vorstellen, während die Seiten des Spitzendreieckes die Curve von Hesse bilden.



lith. v F. Schima. Druck v. J. Wagner in Wien

Sitzungsb. d. kais. Akad. d. W. math. naturw. Classe LXXXIII. Bd. II. Abth. 1881.



Über metrische Beziehungen, die in einer Congruenz linearer Complexe stattfinden.

Vom Assistenten **Karl Bobek.**

(Mit 5 Holzschnitten.)

Im LVII. Bande des Borchhardt'schen Journals hat Herr Kummer Relationen für den unendlich dünnen Strahlenbündel aufgestellt, die im Folgenden auf synthetischem Wege, an einer linearen Congruenz abgeleitet werden sollen. Beachtet man, dass ein Kummer'scher Strahlenbündel aus den einem Strahle eines Strahlensystems benachbarten Strahlen besteht, und dass man in erster Annäherung an Stelle dieser auch die Nachbarstrahlen des Hauptstrahles einer leicht zu bestimmenden linearen Congruenz setzen kann; so erkennt man sogleich, dass die für das Strahlensystem erster Ordnung abgeleiteten Relationen für alle unendlich dünnen Strahlenbündel gelten.

Da ich auf eine derartige Behandlung der linearen Congruenz, wie sie im Folgenden vorausgesetzt wird, nicht hinweisen kann, so erlaube ich mir, die nöthigen Sätze vorerst zu beweisen.

I.

Die Congruenz C denken wir uns durch vier ihrer Strahlen gegeben und anticipiren den leicht zu erweisenden Satz: dass zwei durch einen Congruenzstrahl gehende Ebenen von den Congruenzstrahlen in Punkten collinearer Systeme getroffen werden.

Auf dem gemeinschaftlichen Congruenzstrahle befinden sich zwei einander projectivische Punktreihen, deren Doppelpunkte die Doppelpunkte einer quadratischen Involution J sein sollen. Es lässt sich nun zeigen, dass für alle Ebenenpaare, die durch einen und denselben Congruenzstrahl gehen die Involution J dieselbe ist, dass ferner alle in der Congruenz enthaltenen Hyperboloide

auf einem beliebigen Congruenzstrahle die Involution J zur Involution conjugirter Pole haben.

Es seien A, B, C, D vier Congruenzstrahlen und ε, ε' zwei durch D gehende Ebenen, welche die ersten drei Strahlen in a, b, c; $a'b'c'$ treffen. Ferner sollen ab, ac, bc; $a'b'$, $a'c'$, $b'c'$, die Gerade D in γ, β, α; γ', β', α' treffen, so dass die projectivischen Punktreihen auf $D\,(\alpha\beta\gamma)$, $(\alpha'\beta'\gamma')$ sind und die Doppelpunkte also das gemeinschaftliche Paar der Involutionen $J_1(\beta\alpha', \beta'\alpha)$ und $J_2(\gamma\beta', \gamma'\beta)$ sind. ($J_1(\beta\alpha', \beta'\alpha)$ soll die durch die zwei Paare $\beta\alpha'$, $\beta'\alpha$ bestimmte Involution sein.)

Das durch A, B, C bestimmte Hyperboloid H^2, dessen Schaar (A, B, C) in der Congruenz enhalten ist, kann mittelst zweier Ebenenbüschel, deren Axen A und B sind, erzeugt werden. In diesen Büscheln entsprechen den Ebenen Ac, Ac' von (A) die Ebenen Bc, Bc' von (B), ihre Schnittpunkte $\beta\beta'$, $\alpha\alpha'$ mit D sind entsprechende Punkte der von den Büscheln (A) und (B) auf D ausgeschnittenen projectivischen Punktreihen und zwar sind $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$ homologe Punkte. Die Doppelpunkte dieser Punktreihen sind daher ein Paar der Involution $J_1(\alpha\beta', \alpha'\beta)$ und bestimmen auf D als Doppelpunkte die Involution conjugirter Pole des Hyperboloides. Nehmen wir B und C als Axen von Ebenenbüscheln an zur Erzeugung des Hyperboloides, so ersehen wir, dass die Doppelpunkte der Involution conjugirter Pole des Hyperboloides auf D auch ein Paar der Involution $J_2(\gamma\beta', \gamma'\beta)$ sind, dass sie mithin das gemeinschaftliche Paar von J_1 und J_2 sind, oder dass diese Involution die Involution J ist.

Da nun das Hyperboloid von ε, ε' unabhängig ist, so ist J für alle Ebenenpaare dasselbe und da $\varepsilon\varepsilon'$ vom Hyperboloid unabhängig ist, so induciren alle Hyperboloid, die durch drei Congruenzstrahlen gehen, also in der Congruenz enthalten sind, auf D, daher auf jedem beliebigen Congruenzstrahl, dieselbe Involution.

Die lineare Congruenz ist auch das Erzeugniss je zweier in ihr enthaltener linearer Complexe. Ich will nun zeigen, dass die Doppelpunkte von J auch die Doppelpunkte der projectivischen Punktreihen sind, die man auf D erhält, durch die Nullpunkte aller Ebenen von D für zwei Complexe K_1, K_2 von C. Es seien g_1, g_2 zwei beliebige Punkte von D, die wir als Nullpunkte von $\mathfrak{E}$ annehmen, wodurch zwei Complexe K_1, K_2 der Congruenz bestimmt

sind. Es schneide nun $\mathfrak{E}$ ein Hyperboloid H^2, das in der Congruenz enthalten ist, in einem Kegelschnitte C^2 und t sei ein Punkt von C^2. Schneiden tg_1, tg_2 nun C^2 noch in t_1, t_2, so gehen durch t_1, t_2 zwei Strahlen T_1, T_2 der Leitschaar der Congruenzstrahlen von H^2, welche zu der durch t gehenden Geraden $\mathfrak{T}$ von der Schaar T_1, T_2 in K_1 respective K_2 conjugirt sind. Jede Ebene $\mathfrak{E}'$ durch D trifft nun $\mathfrak{T}, T_1, T_2$ in t', t'_1, t'_2, so zwar, dass $t' t'_1$ und $t' t'_2$ auf D die Nullpunkte g'_1, g'_2 von $\mathfrak{E}'$ für K_1, K_2 bestimmen. Die Punkte g'_1, g'_2 ergeben sich aber als Schnittpunkte homologer Ebenen der projectivischen Ebenbüschel, welche die Punkte von $\mathfrak{T}$ aus T_1 und T_2 projiciren und diese projectivischen Punktreihen haben die Doppelpunkte von J zu ihren Doppelpunkten.

Durch jeden Punkt p des Raumes geht ein einziger Congruenzstrahl P und auf diesem entspricht in der Involution J dem Punkte p ein Punkt p'. Jede durch p gehende Gerade G hat in K_1 und K_2 je eine conjugirte Gerade $G^{(1} G^{(2)}$, welche P treffen und seien $G^{(1)} G_2^{(1)}$, $G^{(2)} G_1^{(2)}$ conjugirte Gerade in K_2 und K_1 und mögen $G_2^{(1)} G_1^{(2)}$ den Congruenzstrahl P in p_2 und p_1 treffen. Diese müssen mit den früheren auf dem zu G gehörigen Hyperboloid H^2 der Congruenzstrahlen liegen. Die Ebene $(G^{(1)} P)$ hat für K_1 und K_2 die Nullpuukte p, p_2, während $(G^{(2)} P)$ die Nullpunkte p_1, p für K_1, K_2 hat, daher ist der Punkt p', der p in der Involution J entspricht, der zu p bezüglich p_1, p_2 harmonisch zugeordnete. Da nun $G G_1^{(2)} G_2^{(1)}$ auf dem Hyperboloid H^2 liegen, so müssen den Punkten der Geraden G die Punkte einer anderen auf H^2 liegenden Geraden G' entsprechen, welche von G durch $G_1^{(2)}$ und $G_2^{(1)}$ harmonisch getrennt ist. Daraus folgt weiter:

Ordnet man jedem Punkte p des Raumes den Punkt p' seines Congruenzstrahles zu, der ihm auf diesem in der Involution entspricht, so entsprechen dem Punkte einer Geraden G die Punkte einer Geraden G', den Punkten einer Ebene $\mathfrak{E}$ die einer Ebene $\mathfrak{E}'$, welche erstere in dem in beiden liegenden Congruenzstrahle E schneidet. Jeder durch E gehenden Ebene $\mathfrak{E}$ entspricht auf diese Art eine Ebene $\mathfrak{E}'$, die auch durch E geht. Diese Ebenen projiciren die Paare der Involutionen auf allen übrigen Congruenzstrahlen, bilden daher selbst eine Ebeneninvolution in (E).

Jedem Congruenzstrahle entspricht auf diese Weise eine Punkt- und eine Ebeneninvolution deren Träger er ist. Die

Doppelelemente beider sind gleichzeitig reell oder imaginär und bestimmen die Directricen. Mithin sind die Directricen der Congruenz entweder reell oder es ist kein Punkt von ihnen und keine sie enthaltende Ebene reell.

Auf Grund der vorstehenden Sätze ist es aber leicht, den durch einen Punkt p gehenden Congruenzstrahl zu construiren, sobald vier Strahlen A, B, C, D der Congruenz bekannt sind. Man bestimme auf jedem die Involution J, ziehe durch p zwei Gerade, welche A, B respective C, D in a, b; c, d treffen, suche die conjugirten Punkte a', b', c', d' zu ihnen auf den Congruenzstrahlen und ziehe $a'b'$, $c'd'$, welche Geraden sich in einem Punkte p' treffen müssen, der mit p verbunden den Congruenzstrahl liefert.[1] Ist eine Ebene 𝔈 gegeben, welche A, B, C, D in a, b, c, d trifft, so liegen a', b', c', d' auf einer Ebene 𝔈′, welche 𝔈 im Congruenzstrahle schneidet.

II.

Aus dem Vorstehenden ist die Construction des in der unendlich fernen Ebene gelegenen Congruenzstrahles U ersichtlich; die alle Mittelpunkte der Involutionen J enthaltende Ebene 𝔈 geht durch ihn. Der zu 𝔈 senkrechte Congruenzstrahl H heisst Hauptstrahl der Congruenz. Man erhält alle in der Congruenz enthaltenen reellen Complexe, wenn man einer reellen Ebene alle reellen Punkte des in ihr liegenden Congruenzstrahles als Nullpunkte zuweist. Da der Nullpunkt der unendlich fernen Ebene stets auf der Axe des Complexes liegt, so folgt:

Die Axen aller in der Congruenz enthaltenen Complexe sind senkrecht zu H und umgekehrt; jede zu H senkrechte Richtung ist die der Axe eines bestimmten Complexes der Congruenz.

Die Axe A eines Complexes finden wir in der kürzesten Transversale zwischen H und einem beliebigen Congruenzstrahle P. Die A treffenden Congruenzstrahlen bilden ein gleichseitiges Paraboloid 𝔓, da unter ihnen U ist und H, P auf A senkrecht stehen. A, H sind die Scheitelerzeugenden. Dem unendlich fernen

---

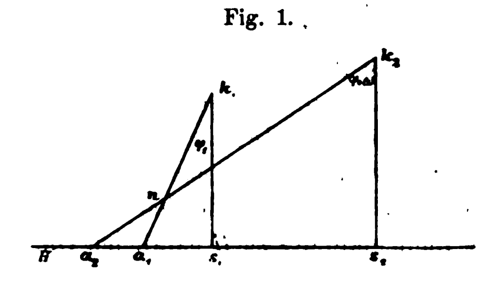
[1] Paart man die vier Strahlen auf andere Art, so erhält man doch stets den Punkt p', was Sätze für die Congruenz liefert. Siehe: Hermes. Crelles Journal, Band 67.

Punkte u von A weisen wir die unendlich ferne Ebene als Nullebene zu, wodurch ein Complex K bestimmt ist. Die in diesem zu A conjugirte Gerade A' muss in der unendlich fernen Ebene und auf $\mathfrak{P}$ liegen, d. h. sie ist zu A senkrecht und die Nullebenen aller Punkte von A sind also zu A senkrecht; A ist Axe des Complexes K.

Die Normalen in den Punkten von H zu den Nullebenen dieser Punkte in K bilden das gleichseitige Translationsparaboloid, das mit $\mathfrak{P}$ H und A (die Scheitelerzeugenden) gemeinschaftlich hat und denselben Parameter, wie der Complex besitzt. Es sei s der Schnittpunkt von AH und σ die zu A senkrechte Ebene (Nullebene von s) durch H, tragen wir ferner auf A den Parameter $k = \overline{sk}$ auf, so wird die Nullebene eines Punktes a von H mit σ den Winkel $\varphi = aks$ einschliessen, so dass $\overline{sa} = r = k \operatorname{tg} \varphi$ ist. Wir wollen φ von der Ebene σ nach der Richtung hin positiv zählen, nach welcher k auf A abgetragen ist und demzufolge auch r auf der Seite von s positiv nehmen, auf welcher die Nullebenen der Punkte von H spitzige positive Winkel mit σ einschliessen.

Es seien nun A_1, A_2 die Axen zweier Complexe K_1, K_2 der Congruenz C; s_1, s_2 die Schnittpunkte von A_1, A_2 mit H und ω der Winkel, den A_1, A_2 in ihrer positiven Richtung (Richtung von k) mit einander bilden, also auch der Winkel der Ebenen σ_1, σ_2, welche Nullebenen von s_1 in K_1 und s_2 in K_2 sind. Der Nullpunkt einer Ebene α von H sei für K_1 der Punkt a_1, also $\sphericalangle a_1 k_1 s_1 = \varphi_1$ der Winkel, den diese Ebene α mit σ_1 einschliesst. Der Nullpunkt a_2 von α für K_2 muss nun so liegen, dass $\sphericalangle a_2 k_2 s_2 = \varphi_1 + \omega$ wird.

Fig. 1.



Denkt man sich daher A_1 und A_2 in eine durch H gehende Ebene gedreht, so zwar, dass $a_1 k_1 s_1 = \varphi_1$ bleibt, so braucht man blos an

$s_2 k_2$ in bestimmtem Sinne dem Winkel $\varphi_1 + \omega$ abzutragen und erhält im Schnittpunkte des Schenkels mit H den Punkt a_2. Lässt man nun a_1 die Gerade H durchlaufen, so wird seine Nullebene α für K_1 den Büschel (H) beschreiben, daher auch a_2 die Gerade H durchmessen und die Strahlen $k_1 a_1$, $k_2 a_2$ beschreiben zwei congruente gleichstimmige Strahlenbüschel, ihr Schnittpunkt s liegt folglich auf einem Kreise $\mathfrak{K}$. Die Doppelpunkte der projectivischen Punktreihen a_1, a_2 auf H sind auch die Doppelpunkte der Involution J, und wie man sogleich erkennt, ist J die Involution conjugirter Pole von $\mathfrak{K}$ auf H.

Da der Kreis $\mathfrak{K}$ in jeder durch H gehenden Ebene durch den Endpunkt eines Parameters geht und J schon bestimmt ist, so müssen die Endpunkte aller Parameter der in der Congruenz enthaltenen Complexe nach der Drehung der Axen, auf denen sie aufgetragen sind, in eine Ebene, auf die Kreislinie $\mathfrak{K}$ fallen.

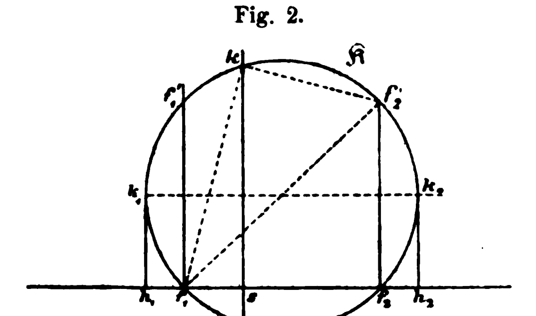
Daraus folgt umgekehrt:

Trägt man auf die Axen der in der Congruenz enthaltenen Complexe die Parameter der betreffenden Complexe vom Hauptstrahle der Congruenz aus ab; so liegen die Endpunkte auf einem Torus $\mathfrak{T}^4$, der durch Rotation von $\mathfrak{K}$ um H entsteht.

Ist k'_1 der zweite Schnittpunkt von $\mathfrak{K}$ mit $s_1 k_1$, so ist $\sphericalangle s_2 k_2 k'_1 = \omega$ der Winkel, den die Axen A_1 und A_2 mit einander bilden. Da nun jeder Punkt k von $\mathfrak{K}$ als Endpunkt der Parameterlänge eines Complexes der Congruenz aufgefasst werden kann, die Axe dieses Complexes dann in der durch k zu H senkrecht gelegten Ebene liegt und H in s trifft, so erkennt man, da diese Ebene $\mathfrak{K}$ noch in einem Punkte k' begegnet, dass durch jeden Punkt s von H im Allgemeinen die Axen A, A' zweier Complexe K, K' gehen, denen die Parameter $\overline{sk}$, $\overline{sk'}$ zugehören. Die Axen A, A' bilden nach obiger Bemerkung einen Winkel mit einander, dessen Mass der halbe Bogen kk' von $\mathfrak{K}$ ist. Sind k_1, k_2 die Endpunkte des zu H parallelen Durchmessers von $\mathfrak{K}$ und h_1, h_2 die Schnittpunkte der Tangenten in k_1, k_2 mit H, so gehen durch die Punkte h_1, h_2 nur je eine Axe eines Complexes, und zwar haben beide Complexe gleiche Parameter $\overline{h_1 k_1} = \overline{h_2 k_2}$. Die Axen seien G_1 und G_2 und die zu ihnen senkrechten Ebenen durch

H sollen $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ heissen. Da der Winkel $k_2 k_1 h_1 = 90°$ ist, so ist G_1 senkrecht zu G_2, daher geht $\mathfrak{H}_1$ durch G_2 und $\mathfrak{H}_2$ durch G_1.

Fig. 2.



Schneidet $\mathfrak{K}$ die Gerade H in zwei reellen Punkten f_1, f_2, so haben zwei der Complexe, deren Axen durch diese Punkte gehen, einen verschwindenden Parameter. Diese Axen bilden mit G_1 die Winkel von der Grösse $h_1 k_1 f_1'$ und $h_1 k_1 f_2'$, sie seien D_1, D_2. Da diese Axen Complexen specieller Art entsprechen (bei denen alle Complexstrahlen die Axe schneiden) und in der Congruenz enthalten sind, so müssen alle Congruenzstrahlen D_1 und D_2 schneiden, sie sind die Directricen der Congruenz. Die Ebenen durch H und D_1, D_2 sollen $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_1$ heissen. Ist A die durch s gehende Axe eines beliebigen Complexes K und sk sein Parameter, so ist der Winkel der Nullebene von f_1 für K mit A der Complementwinkel zu $f_1 ks$, d. h. gleich skf_2' (da f_1, f_2 durch den Mittelpunkt von $\mathfrak{K}$ geht), also gleich dem Winkel, den die Axe A mit D_2 bildet, mithin ist die Nullebene von f_1 für alle Complexe der Congruenz die Ebene $\mathfrak{F}_1$. Analog ist f_2 der Nullpunkt von $\mathfrak{F}_2$ für alle Complexe der Congruenz.

Projicirt man die durch jeden Punkt s von H gehenden Axen A, A' aus H durch die Ebenen $\mathfrak{E}, \mathfrak{E}'$, so bilden diese eine quadrische Involution, deren Doppelebenen $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2$ sind, welche die Winkel jedes Ebenenpaares halbiren. Denn die Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}'$ bilden einen Winkel miteinander, dessen Mass der halbe Bogen kk' ist, der also gleich ist dem Peripheriewinkel von $\mathfrak{K}$ für die Sehne $\overline{kk'}$, dieser Bogen wird aber stets durch den Punkt k_1 oder k_2 halbirt. Ferner bilden die Punkte k, k' auf $\mathfrak{K}$ eine quadratische Involution, deren Centrum

im Unendlichen liegt. Projicirt man dieselbe aus einem beliebigen Punkte von 𝔎, so erhält man eine Strahleninvolution, die ein Orthogonalschnitt der Ebeneninvolution von (H) ist. Die Involution auf 𝔎 ist offenbar zur Punktreihe s auf H projectivisch, also diese auch zur Ebeneninvolution (H), wenn homologe Paare sind, der Punkt s und die Ebenen 𝔈, 𝔈′ von H, welche die durch s gehenden Axen A, A' enthalten. Den Punkten h_1, h_2 von H entsprechen die Doppelebenen $\mathfrak{H}_2$, $\mathfrak{H}_1$, welche G_1, G_2 enthalten. Dem unendlich fernen Punkte von H entspricht das Ebenenpaar, welches aus H die Kreispunkte der zu H senkrechten Ebene projicirt.

Die durch die Punkte s von H gehenden Complexaxen sind Schnitte der in s zu H normalen Ebene mit dem zugehörigen Ebenenpaar der Involution von (H). Die zu H normalen Ebenen enthalten den Congruenzstrahl U, daher:

Die von den Axen der in einer linearen Congruenz enthaltenen Complexe gebildete Fläche ist eine windschiefe Fläche dritter Ordnung F^3, welche in H eine Doppelgerade besitzt. Sie schneidet die unendlich ferne Ebene in einer reellen Geraden U und in dem imaginär-punktirten Geradenpaar, welches aus dem unendlich fernen Punkte von H die auf U gelegenen imaginären Kreispunkte projicirt. Die durch h_1 und h_2 senkrecht zu H gelegten Ebenen berühren F^3 längs den ganzen in ihnen enthaltenen Erzeugenden G_1, G_2, welche auch in $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ liegen, daher stehen die Cuspidalerzeugenden von F^3 auf einander senkrecht. Der reelle Theil von F^3 liegt ganz im Endlichen, zwischen den eben genannten Cuspidal-Tangentialebenen.

Die Endpunkte der Parameter der Complexe bilden auf F^3 die charakteristische Curve der Congruenz, und daher folgt:

Die charakteristische Curve der Congruenz ist die Schnittlinie der Axenfläche F_3 und des Torus $\mathfrak{T}^4$.

F^3 ist Axenfläche für unendlich viele Congruenzen. Speciell für vier Congruenzen ergibt sich auch derselbe Torus $\mathfrak{T}^4$ und als charakteristische Curven die Ergänzungen der Durchdringungscurve von $\mathfrak{T}^4$, F^3, von der jeder Congruenz ein Theil zugehört.[1]

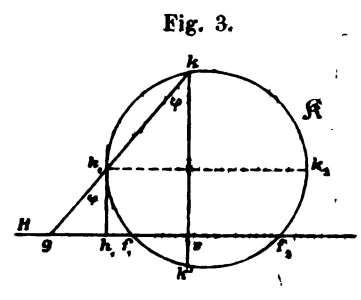
[1] Siehe: Plücker, Neue Geometrie des Raumes u. s. w. Seite 95. u. ff.

Da nur im endlichen Theile $\overline{h_1 h_2}$ von H sich Schnittpunkte reeller Axen von Complexen ergeben, so erkennen wir, dass in der Congruenz auch unendlich viel imaginäre Complexe vorhanden sind, deren Axen und Parameter imaginär sind; doch erzeugen je zwei solche imaginäre Complexe die reelle Congruenz und man könnte sie daher conjugirt imaginäre Complexe nennen.

Es wurde früher erwähnt, dass alle Complexe der Congruenz erhalten werden, wenn einer Ebene alle Punkte des in ihr liegenden Congruenzstrahles als Nullpunkte zugewiesen werden, oder wenn man einem Punkte die Ebenen des Büschels seines Congruenzstrahles als Nullebenen zuweist. Wir wollen nun für die so erhaltenen Complexe Parameter und Axe bestimmen, dabei aber Punkt und Ebene stets vom Hauptstrahle H annehmen, da man auf diesen jede Bestimmung durch die Elemente anderer Congruenzstrahlen zurückführen kann.

Da es einerlei ist, welche Ebene durch H wir zur festen Ebene wählen, so nehmen wir, um die Rechnung auch einfach zu gestalten, die Ebene $\mathfrak{H}_1$, die senkrecht zu G_1 ist, als die feste Ebene an und weisen ihr einen beliebigen Punkt g von H als Nullpunkt zu. Ziehen wir $k_1 g$, so bestimmt diese Gerade auf $\mathfrak{K}$ den Punkt k als Endpunkt des Parameters des Complexes K, wodurch auch s auf H bestimmt ist, durch welchen Punkt die Axe A geht und mit G_1 den Winkel $\varphi = k_1 k k'$ bildet.

Fig. 3.



Setzen wir $\overline{h_1 g} = x$, $\overline{h_1 s} = \rho$, $\overline{k_1 k_2} = 2d$, so werden die Gleichungen

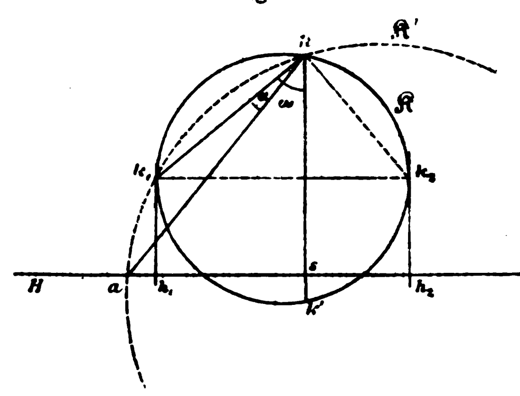
$$k_1 \operatorname{tg} \varphi = x; \quad \rho = \frac{k - k_1}{k_1} x; \quad k = k_1 + d \sin 2\varphi, \qquad 1)$$

die ohne weiters aus der Figur sich ergeben, den Zusammenhang zwischen der Punktreihe g und dem Ebenenbüschel (H) geben, welches die einzelnen Axen projicirt, sowie die Bestimmung der letzteren und ihres Parameter liefern. Punktreihe und Ebenenbüschel sind projectivisch, wie es sein muss, da letzterer die Nullpunkte der unendlich fernen Ebene projicirt.

Wird zweitens dem festen Punkte a von H eine Ebene als Nullebene zugewiesen, die mit $\mathfrak{H}_1$ den Winkel α bildet, so erhalten wir Parameter und Axe des Complexes durch folgende Construction:

Über $\overline{ak_1}$ als Sehne beschreiben wir den Kreis $\mathfrak{K}'$, welcher als Peripheriewinkel den Winkel α über $\overline{ak_1}$ hat, dieser schneidet

Fig. 4.



$\mathfrak{K}$ in dem Endpunkte k des Complexparameters, wodurch auch die Complexaxe bestimmt ist. Denn sei $\overline{sk}$ der Parameter eines Complexes, dessen Axe A durch s geht, dann ist der Winkel von A und G_1 gleich k_1ks gleichzeitig auch der Winkel, den die Ebene σ (Nullebene von s für K) mit $\mathfrak{H}_1$ bildet. Die Nullebene von a für K bildet aber mit σ den Winkel aks, daher bildet sie mit $\mathfrak{H}_1$ den Winkel $akk_1 = \alpha$, wie verlangt wurde. Durch den Winkel $k_1ks = \omega$ ist die Ebene bestimmt, welche die Axe enthält.

Verfolgen wir die Construction mit der Rechnung, indem wir die Strecken auf H von a aus zählen, und setzen

$$\overline{ah_1} = r_1 \quad \overline{ah_2} = r_2 \text{ und } \overline{h_1k_1} = \overline{h_2k_2} = k_1$$

und bezeichnen mit r, k Abscisse und Ordinate eines Punktes von $\mathfrak{K}$, für den Anfangspunkt a und Axe H, so wird $\mathfrak{K}$ gegeben sein durch

$$(k-k_1)^2-(r-r_1)(r_2-r) = 0 \qquad 2)$$

und für $\mathfrak{K}'$ findet man

$$k^2+r^2-k(k_1-r_1 \operatorname{ctg} \alpha)-r(r_1+k_1 \operatorname{ctg} \alpha) = 0. \qquad 3)$$

Hieraus ergibt sich als Gleichung der Schnittsehne $\overline{k_1k}$ von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$

$$r(k_1 \operatorname{ctg} \alpha-r_2)-k(r_1 \operatorname{ctg} \alpha+k_1)+k_1^2+r_1r_2 = 0. \qquad 3)$$

Beachtet man nun, dass aus dem rechtwinkeligen Dreiecke $k_1 k k_2$

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{k-k_1}{r_2-r} = \frac{r-r_1}{k-k_1} \tag{4}$$

folgt, so bringt man 3) leicht auf die Form

$$r_2 \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\omega + k_1(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\omega) + r_1 = 0, \tag{5}$$

woraus man ersieht, dass der Ebenenbüschel, welcher die Axen projicirt, projectivisch ist zu dem Ebenenbüschel, den die Nullebenen von a für die betreffenden Complexe bilden. Da ω der Winkel der Ebenen $\sigma\mathfrak{H}_1$ ist, so folgt für die Doppelebenen

$$\operatorname{tg}\alpha = \pm\sqrt{-\frac{r_1}{r_2}},$$

d. h. nur die Punkte zwischen $h_1 h_2$ sind Schnittpunkte von reellen Axen mit H (Siehe Seite 8).

Die Schnittpunkte von $\mathfrak{K}$ und H sollen von a die Abstände ρ_1, ρ_2 haben, also diese die Wurzeln der Gleichung

$$r^2 - (r_1+r_2)r + k_1^2 + r_1 r_2 = 0$$

sein, mithin

$$\begin{aligned} \rho_1 + \rho_2 &= r_1 + r_2 = 2m \\ \rho_1 \rho_2 &= k_1^2 + r_1 r_2. \end{aligned} \tag{6}$$

Setzt man

$$\begin{aligned} a &= k_1 \sin\alpha + r_1 \cos\alpha \\ b &= k_1 \cos\alpha - r_1 \sin\alpha, \end{aligned} \tag{7}$$

so wird aus 5) und 4)

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{a}{b} = \frac{k-k_1}{r_2-r} = \frac{r-r_1}{k-k_1} \tag{8}$$

folgen, und daher

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{r-r_1}{r_2-r}, \tag{9}$$

woraus

$$r = \frac{r_1 b^2 + r_2 a^2}{a^2+b^2} \tag{10}$$

sich ergibt und mit Hilfe von 8)

$$k=\frac{k_1(a^2+b^2)+2abd}{a^2+b^2} \qquad 11)$$

liefert. Man findet leicht, dass

$$\begin{aligned} a^2+b^2 &= [k_1-d\sin 2\alpha]^2+[r_1\cos^2\alpha+r_2\sin^2\alpha]^2 \\ k_1(a^2+b^2)+2abd &= \rho_1\rho_2(k_1-d\sin 2\alpha) \qquad 12) \\ r_1b^2+r_2a^2 &= \rho_1\rho_2(r_1\cos^2\alpha+r_2\sin^2\alpha) \end{aligned}$$

ist, wobei $2d=r_2-r_1$ gesetzt ist.

Dadurch findet man schliesslich für r und k die Werthe:

$$\text{I)} \qquad r=\frac{\rho_1\rho_2[r_1\cos^2\alpha+r_2\sin^2\alpha]}{[k_1-d\sin 2\alpha]^2+[r_1\cos^2\alpha+r_2\sin^2\alpha]^2}$$

$$\text{II)} \qquad k=\frac{\rho_1\rho_2(k_1-d\sin 2\alpha)}{[k_1-d\sin 2\alpha]^2+[r_1\cos^2\alpha+r_2\sin^2\alpha]^2}$$

Aus 9) erhält man noch die Gleichung

$$\frac{r-r_1}{r_2-r}=\operatorname{tg}^2\omega$$

oder

$$\text{III)} \qquad r=r_1\cos^2\omega+r_2\sin^2\omega,$$

aus welcher r folgt, sobald ω bekannt ist.

III.

Wir sind im vorhergehenden Abschnitte auf gleichseitige Paraboloide $\mathfrak{P}$ gestossen, welche von den Congruenzstrahlen gebildet werden, die die Axe A eines Complexes treffen. Beachten wir nun, dass die Scheitelerzeugende A des Paraboloides $\mathfrak{P}$ die kürzeste Transversale zwischen H und einer Erzeugenden von $\mathfrak{P}$ derselben Schaar enthält und ferner, dass die gefundenen Axen der Complexe alle Richtungen der zu H senkrechten Ebene erschöpfen; so erkennen wir, dass die Axen aller Complexe die kürzesten Transversalen zwischen H und den einzelnen Congruenzstrahlen enthalten und wir haben folgenden Satz:

Der Ort der kürzesten Transversalen zwischen dem Hauptstrahle H der Congruenz und den einzelnen

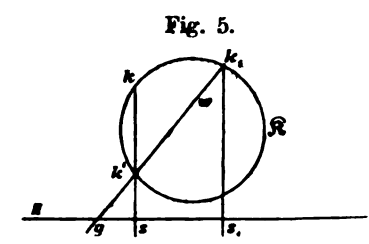
Congruenzstrahlen ist die windschiefe Fläche dritter Ordnung F^3.

Die Fusspunkte der kürzesten Abstände sind nur auf eine endliche Strecke $\overline{h_1 h_2}$ des Hauptstrahles beschränkt.

Durch jeden Punkt von $\overline{h_1 h_2}$ gehen zwei solche Transversalen, nur durch h_1 und h_2 geht je eine G_1, G_2, und zwar stehen diese aufeinander senkrecht. Die Punkte h_1, h_2 sollen nach Herrn Kummer die Grenzpunkte der kürzesten Abstände heissen und die Ebenen $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$, welche G_2, G_1 enthalten, Hauptebenen der Congruenz.

Zur vollständigen Bestimmung des gleichseitigen Paraboloides $\mathfrak{P}$ bedarf es nur noch des Vertheilungsparameters desselben. Wir definiren die Congruenz als Schnitt zweier Complexe K, K_1, deren Axen A, A_1 auf H senkrecht stehen müssen (wodurch auch H bestimmt ist). Die Complexstrahlen, welche A schneiden, liegen in zu A senkrechten Ebenen σ, welche ihre Nullpunkte auf A für K haben. Die Ebenen σ haben aber in K_1 ihre Nullpunkte auf einer Geraden G, die conjugirt ist der unendlich fernen Geraden G', durch die die Ebenen σ gehen und daher zu A_1 parallel ist. Die Verbindungsgeraden der beiden Nullpunkte von σ sind die Congruenzstrahlen, welche $\mathfrak{P}$ bilden. Es handelt sich hier also nur darum, G zu bestimmen, beziehungsweise den Nullpunkt g einer Ebene σ für K_1 zu finden, da G parallel zu A_1 ist.

Fig. 5.



Wir wählen dazu die Ebene σ, welche durch H senkrecht zu A geht, also Nullebene von s in K ist; diese bildet mit σ_1 oder der Nullebene von s_1 für K_1 denselben Winkel ω wie die Axen A, A_1. Sei nun $\mathfrak{K}$ der durch die zwei Complexe bestimmte Kreis für die Congruenz; unseren früheren Auseinandersetzungen gemäss, sind dann $\overline{sk}$, $\overline{s_1 k_1}$ die Parameter von K und K_1. Da nun der Winkel $k'k_1 s_1 = \omega$ ist, so bestimmt $k_1 k'$ auf H den Nullpunkt g der Ebene σ, die mit σ_1 den Winkel ω bildet; und da die zweite Erzeugende des Paraboloides $\mathfrak{P}$ im Punkte g die parallele Gerade G zu A_1 ist, die Axe A aber

Scheitelerzeugende von $\mathfrak{P}$ ist, so bildet die Tangentialebene von $\mathfrak{P}$ in g mit A den Winkel ω und sk' ist daher der Vertheilungsparameter von $\mathfrak{P}$.

Construirt man alle gleichseitigen Paraboloide $\mathfrak{P}$, welche in der Congruenz enthalten sind, trägt auf die Scheitelerzeugenden vom Scheitel aus die Parameter derselben auf, so liegen die Endpunkte auf einem Torus $\mathfrak{T}^4$; dreht man alle Scheitelerzeugenden in eine Ebene durch H (die gemeinschaftliche Scheitelerzeugende aller), so erfüllen sie eine Kreislinie.

Halten wir dieses Resultat mit dem unter II gefundenen zusammen, so ersehen wir, dass durch jeden Punkt von H (innerhalb $\overline{h_1 h_2}$) zwei Axen A, A' zweier Complexe K, K' gehen, deren Parameter k, k' durch $\mathfrak{K}$ bestimmt werden; diese Axen sind Scheitelerzeugende gleichseitiger Paraboloide $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$, und zwar gehört zu $\mathfrak{P}$ die Axe A und der Parameter k', und zu $\mathfrak{P}'$ die Axe A' und Parameter k. Also speciell die Paraboloide, deren Scheitelerzeugenden G_1, G_2 sind, haben gleiche Vertheilungsparameter und gleich denen der entsprechenden Complexe. Die Paraboloide, deren Scheitelerzeugende D_1, D_2 (falls diese reell) sind, haben die Parameter $\overline{f_1 f'_1}$ und $\overline{f_2 f'_2}$, während die Paraboloide, deren Scheitelerzeugende D'_1, D'_2, die zweiten durch f_1, f_2 gehenden Complexaxen, sind, verschwindende Parameter haben und in je ein Ebenenpaar $[D'_1 D_1]$, $[D_2 H]$ oder $[D'_2 D_2]$, $[D_1 H]$ zerfallen.

Durch den Punkt a von H senkrecht zu H nehmen wir eine Gerade G an, welche mit G_1 den Winkel α_0 bildet. Die dieselbe schneidenden Congruenzstrahlen bilden ein gleichseitiges Paraboloid $\mathfrak{P}$, von dem der Scheitel und Parameter, sowie die Scheitelerzeugende, oder die Linie der kürzesten Abstände, zwischen H und den einzelnen G schneidenden Congruenzstrahlen, bestimmt werden sollen.

Die Construction, die zur Lösung der Aufgabe führt, ist offenbar dieselbe, wie sie in II gegeben wurde, und ergeben sich daher auch dieselben Werthe für r, k, ω, wenn man nur α_0 statt α setzt, also

$$\text{I)} \qquad r = \frac{\rho_1 \rho_2 (r_1 \cos^2\alpha_0 + r_2 \sin^2\alpha_0)}{(k_1 - d \sin 2\alpha_0)^2 + (r_1 \cos^2\alpha_0 + r \sin^2\alpha_0)^2}$$

$$\text{II)} \qquad k = \frac{\rho_1\rho_2(k_1 - d\sin 2\alpha_0)}{(k_1 - d\sin 2\alpha_0)^2 + (r_1\cos^2\alpha_0 + r_2\sin^2\alpha_0)^2}$$

$$\text{IV)} \qquad \operatorname{tg}\omega = \frac{k-k_1}{r_2-r} = \frac{r_1-r}{k-k_1} = \frac{k_1\sin\alpha_0 + r_1\cos\alpha_0}{k_1\cos\alpha_0 - r_2\sin\alpha_0}$$

$$\text{III)} \qquad r = r_1\cos^2\omega + r_2\sin^2\omega.$$

Ihrer Wichtigkeit wegen soll noch die Gleichung V) hier notirt werden:

$$\text{V)} \qquad r_2\operatorname{tg}\omega\operatorname{tg}\alpha_0 + k_1(\operatorname{tg}\alpha_0 - \operatorname{tg}\omega) + r_1 = 0,$$

denn sie enthält, auf die Congruenz der Flächennormalen angewendet das Dupin'sche Theorem.

Betrachten wir nun ein specielles Paraboloid $\mathfrak{P}$, dasjenige, für welches die eben hingeschriebenen Werthe Statt haben und zählen r von a nach s hin positiv. Ist nun b ein Punkt von H im Abstande R von a, so bildet die Erzeugenden B von $\mathfrak{P}$, die durch b geht, mit G einen Winkel β, den Herr Kummer Drehungswinkel des G und B schneidenden Strahles für die Strecke R nennt. Ist φ der Winkel, den G mit A, und ψ der Winkel, den B mit A einschliesst, so ist $\beta = \varphi - \psi$. Nun ist aber für das Paraboloid $\mathfrak{P}$

$$r = k\operatorname{tg}\varphi \quad \text{und} \quad r - R = k\operatorname{tg}\psi$$

und wir finden daher

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{kR}{k^2 + r^2 - Rr}.$$

Benützen wir für r und k die unter 10) und 11) eingeführten kürzeren Ausdrücke, so findet man leicht

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{R[k_1(a^2+b^2)+2abd](a^2+b^2)}{[k_1(a^2+b^2)+2abd]^2 + (r_1b^2+r_2a^2)^2 - R(r_1b^2+r_2a^2)(a^2+b^2)}$$

Aus den unter 7) notirten Werthen findet man nun

$$[k_1(a^2+b^2)+2abd]^2 + (r_1b^2+r_2a^2)^2 = \rho_1^2\rho_2^2(a^2+b^2)$$

und daher

$$\text{VI)} \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{R(k_1 - d\sin 2\alpha_0)}{\rho_1\rho_2 - R(r_1\cos^2\alpha_0 + r_2\sin^2\alpha_0)},$$

wenn man noch die Gleichungen 12) benützt.

Diese Formel stimmt genau mit der von Herrn Kummer im 57. Bande des Borchardt'schen Journal gegebenen überein, denn setzt man $\rho_2 - \rho_1 = 2\delta$, so findet man mittelst der Gleichungen 6)

$$k_1^2 = d^2 - \delta^2.$$

Man findet nun auf dem dort angegebenen Wege, wenn R_1, R_2 die Werthe von R sind, für $\alpha_0 = \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\beta$, $\frac{3}{4}\pi - \frac{1}{2}\beta$, also die grössten und kleinsten Werthe von R als Function von β aufgefasst, indem man aus VI)

$$R = \frac{\rho_1 \rho_2 \sin\beta}{m \sin\beta + k_1 \cos\beta - d \sin(2\alpha_0 + \beta)}$$

berechnet, die elegante Formel

$$\text{VII)} \qquad \frac{1}{R} = \frac{\cos^2(\alpha_0 + \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{4}\pi)}{R_1} + \frac{\sin^2(\alpha_0 + \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{4}\pi)}{R_2},$$

wobei

$$R_1 = \frac{\rho_1 \rho_2 \sin\beta}{m \sin\beta + k_1 \cos\beta - d}; \quad R_2 = \frac{\rho_1 \rho_2 \sin\beta}{m \sin\beta + k_1 \cos\beta + d}$$

ist.

IV.

Die Anwendung der vorstehenden Resultate auf Flächenkrümmungen ist sehr einfach, sobald bewiesen ist, dass die Normalen um einen Punkt a einer Fläche Strahlen von Congruenzen sind, für welche die Directricen in zu einander senkrechten Ebenen liegen, wozu wohl die von Herrn Mannheim angestellten Betrachtungen am einfachsten führen.[1] Dies vorausgesetzt, erkennen wir sogleich, dass für die Congruenz, für welche die Normale A von a nebst zwei benachbarten Normalen B, C von b und c, sowie die zu A senkrechte im Unendlichen liegende Gerade Congruenzstrahlen sind, der Kreis $\mathfrak{K}$ seinen Mittelpunkt auf A hat, also $k_1 = 0$ ist, wodurch die Gleichung V) in

$$r_2 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \omega + r_1 = 0$$

übergeht und da $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ mit $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ zusammenfallen, also die Haupt-

[1] Siehe: Mannheim, Cours de géometrie descriptive. Paris 1880, pag. 373.

schnitte im Punkte a sind, so drückt vorstehende Gleichung das Dupin'sche Theorem der conjugirten Tangenten in einem Punkte der Fläche aus; denn ω ist der Winkel der Scheitelerzeugenden A von $\mathfrak{P}$ mit der Ebene $\mathfrak{H}_1$ und A ist parallel mit dem Schnitt der Tangentialebene in a und b, wenn ab die Erzeugende von $\mathfrak{P}$ ist, die durch a geht. Dabei soll stets b zu a benachbart sein.

Sind A und B die Flächennormalen in a und b, so findet man den Krümmungsmittelpunkt des Curvenelementes ab, wenn man durch A und B die Normalebenen zur Ebene Ab legt, ihre Schnittlinie (eine Erzeugende von $\mathfrak{P}$) mit A schneidet; d. h. man hat den Berührungspunkt der zur Ebene Ab senkrechten Ebene durch A, mit $\mathfrak{P}$ zu suchen. Der Drehungswinkel der Tangentialebene von $\mathfrak{P}$ vom Punkte a bis zum Krümmungsmittelpunkte ist also 90° und mithin wird die Gleichung VII)

$$\frac{1}{R}=\frac{\cos^2\alpha_0}{R_1}+\frac{\sin^2\alpha_0}{R_2}$$

das Euler'sche Theorem liefern. Dabei ist

$$R_1=\rho_2=r_2 \quad R_2=\rho_1=r_1$$

der Radius der grössten und kleinsten Krümmung in den Hauptschnitten $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$. Die vorstehenden Formeln lassen sich auch ohne Benützung der früheren direct für die Congruenz ableiten, für welche $k_1=0$ ist, wodurch die Ableitung einfacher wird.

Über die Bahn des Planeten Ino (173).

Von Dr. **Gottlieb Bečka,**

Assistent der k. k. Sternwarte zu Prag.

In diesen Blättern ist die Fortsetzung der Arbeit enthalten, die ich im Märzhefte 1880 der Sitzungsberichte der k. Akademie der Wissenschaften II. Abtheilung über die Bahn des Planeten Ino mitgetheilt habe.

Die dorthin angeführten der vorliegenden Abhandlung zu Grunde gelegten Elemente sind:

M = 329° 32′ 32″31 August 6·5 1877 Ber. Z.
π = 13 24 47·83
Ω = 148 33 43·72 mittl. Äq. 1877·0
i = 14 14 34·94
φ = 11 47 36·69
μ = 780″8029.

Durch Vergleichung der Oppositions-Ephemeride vom Jahre 1880 mit den in demselben Jahre vorgenommenen Beobachtungen ergaben sich folgende Unterschiede:

	Datum		$d\alpha$ (B—R)	$d\delta$ (B—B)	Beobtgsort
Nr. 1.	1880 März	12·48	— 97·71	+36·90	Leipzig
„ 2.	April	30·44	— 91·66	+20·14	Paris
„ 3.	„	30·45	— 97·95	+20·27	Leipzig
„ 4.	Mai	1·40	—126·96	+21·55	„
„ 5.	„	1·44	— 94·56	+23·39	Paris.

Aus diesen Daten wurden zuerst zwei neue mit den Ziffern IX u. X bezeichnete Normalorte gebildet, nämlich:

		$d\lambda\cos\beta$ (B—R)	$d\beta$ (B—R)
IX.	1880 März 12·5	—103·95	— 3·19
X.	Mai 1·0	— 92·31	—17·29.

Dabei ist zu bemerken, dass die Unterschiede $d\alpha$ in Nr. 3 u. 4 bei der Bildung der Normalorte nicht benützt wurden, da sich im Laufe der Rechnung herausgestellt hat, dass sie durch die unten angegebenen Differenzialformeln nicht genügend ausgeglichen werden konnten. Dasselbe gilt von dem Unterschiede $d\beta$ im Normalorte IX, welcher ebenso in die Rechnung nicht mitgenommen wurde.

Es blieb also übrig, nur drei neue Differenzialformeln zur Verbesserung der obigen Elemente aufzustellen, welche sich folgendermassen dargestellt haben:

$$\begin{aligned}
9{\cdot}96050\,dlo &+ 9{\cdot}64467\,d\pi + 7{\cdot}07188\,d\Omega +_n 9{\cdot}18179\,di \\
&+ 9{\cdot}95228\,(d\mu) +_n 6{\cdot}38021\,d\varphi + 2{\cdot}01682 = 0 \\
9{\cdot}94300\,dlo &+ 9{\cdot}62860\,d\pi + 7{\cdot}51851\,d\Omega +_n 9{\cdot}29638\,di \\
&+ 9{\cdot}92118\,(d\mu) + 8{\cdot}30406\,d\varphi + 1{\cdot}96525 = 0 \\
9{\cdot}28031\,dlo &+ 8{\cdot}95376\,d\pi +_n 9{\cdot}34526\,d\Omega + 9{\cdot}99722\,di \\
&+ 9{\cdot}31230\,(d\mu) +_n 9{\cdot}01687\,d\varphi + 1{\cdot}23779 = 0
\end{aligned}$$

Durch Anknüpfung derselben an die sechszehn in der oben citirten Arbeit aufgestellten Differenzialformeln bekommt man mittelst der Methode der kleinsten Quadrate sechs Gleichungen:

$$\begin{aligned}
dlo +_n 9{\cdot}40372\,d\pi +_n 8{\cdot}41721\,d\Omega + 7{\cdot}58233\,di + 8{\cdot}99575\,(d\mu) \\
+_n 9{\cdot}84270\,d\varphi + 0{\cdot}71178 = 0 \\
d\pi + 8{\cdot}10640\,d\Omega +_n 9{\cdot}02765\,di + 0{\cdot}07897\,(d\mu) \\
+ 0{\cdot}38238\,d\varphi + 2{\cdot}03411 = 0 \\
d\Omega +_n 9{\cdot}87847\,di +_n 8{\cdot}77487\,(d\mu) \\
+_n 9{\cdot}50401\,d\varphi + 9{\cdot}40136 = 0 \\
di + 8{\cdot}60230\,(d\mu) \\
+ 9{\cdot}20344\,d\varphi +_n 0{\cdot}24247 = 0 \\
(d\mu) + 1{\cdot}01339\,d\varphi +_n 1{\cdot}85804 = 0 \\
d\varphi +_n 1{\cdot}39414 = 0,
\end{aligned}$$

welche folgende Werthe für die Unbekannten liefern:

$$\begin{aligned}
dlo &= +43{\cdot}592 \\
d\pi &= +52{\cdot}651 \\
d\Omega &= +\ 0{\cdot}096 \\
di &= +\ 5{\cdot}132 \\
d\varphi &= +24{\cdot}782 \\
d\mu &= -\ 0{\cdot}1835
\end{aligned}$$

Die in den Normalörtern übrigbleibenden Fehler sind:

	Beob.—Rech.	
	$d\lambda \cos\beta$	$d\beta$
I.	+1·70	+ 0·65
II.	+1·20	+ 0·26
III.	—1·97	+ 1·58
IV.	—1·21	— 0·70
V.	+2·01	+ 1·28
VI.	—0·81	+ 0·95
VII.	+1·08	+ 2·35
VIII.	—0·36	+ 3·13
IX.	—1·88	(+11·69)
X.	+0·88	+ 4·50

Die Correctionen, auf die obigen Elemente angebracht, geben als

definitive Elemente:

M = 329° 32′ 23″25 August 6·5 1877 B. Z.
π = 13 25 40·48 ⎫
Ω = 148 33 43·82 ⎬ mittl. Äq. 1877·0
i = 14 14 40·07 ⎭
φ = 11 48 1·47
μ = 780″6194

Mittelst dieser Elemente wurde die Berechnung der Oppositions-Ephemeride für das Jahr 1881 mit Rücksicht auf die Störungen von Jupiter und Saturn ausgeführt.

Störungen:

	12h mittl. B. Z.	δv	$\delta\rho$	z
1880	7. October . . .	—211″33	+34090	+ 153
	16. November .	—261·42	+36640	— 44
	26. December .	—318·01	+39012	— 264
1881	4. Februar . . .	—381·80	+41122	— 506
	16. März	—453·50	+42872	— 765
	25. April	—533·78	+44136	—1037
	4. Juni	—623·10	+44767	—1316
	14. Juli	—721·56	+44588	—1594
	23. August	—828·61	+43397	—1863
	2. October . . .	—942·54	+40969	—2110

Oppositions-Ephemeride für das Jahr 1881.

12h mittl. Ber. Z.	A. R. app.	Decl. app.	Log Δ	Log r
1881 Mai 16	18h 7m 50s56	−4° 21′ 23″16	0·30625	0·45839
17	7 23·62	18 10 89		
18	6 55·34	45 4·55		
19	6 25·75	12 4·47		
20	5 54·87	9 10·59	0·29823	0·45719
21	5 22·70	6 23·50		
22	4 49·27	3 43 17		
23	4 14·58	−4 1 9·86		
24	3 38·70	−3 58 43·80	0·29080	0·45597
25	3 1·61	56 25·17		
26	2 23·37	54 14·30		
27	1 44·01	52 11·41		
28	1 3·55	50 16·63	0·28404	0·45475
29	18 0 22·05	48 30·20		
30	17 59 39 52	46 52·19		
31	58 56·01	45 22·74		
Juni 1	58 11·56	44 2 07	0·27803	0·45352
2	57 26 21	42 50 27		
3	56 40·00	41 47·63		
4	55 52·98	40 54·24		
5	54 5 18	40 10·24	0·27283	0·45227
6	54 16 67	39 35·72		
7	53 27·48	39 10·75		
8	52 37·66	38 55·47		
9	51 47·27	38 49·95	0·26850	0·45102
10	50 56·33	38 54·30		
11	50 4·92	39 8·61		
12	49 13·06	39 32·97		
13	48 20·82	40 7·41	0·26510	0·44976
14	47 28·25	40 52·11		
15	46 35 38	41 46·75		
16	45 42 33	42 52 02		
17	44 48 98	44 7·36	0·26264	0·44848
18	43 55·58	45 32·95		
19	42 2·11	47 8·97		
20	42 8·61	48 55·41		
21	41 15 16	50 52·25	0·26116	0·44720
22	40 21·82	52 59·43		
23	39 28·64	55 16·89		
24	38 35 68	−3 57 44·57		
25	37 42·98	−4 0 22·41	0·26066	0·44591
26	36 50·60	3 10·28		
27	35 58·69	6 8·22		
28	35 7·18	9 16·12		
29	34 16 18	12 33·86	0·26114	0·44461
30	33 25·74	16 1 26		

12h mittl. Ber. Z.	A. R. app.	Decl. app.	Log Δ	Log r
1881 Juli 1	17h 32m 35·92	−4° 19′ 38″21		
2	31 46·76	23 24·59		
3	30 58·32	27 20·21	0·26258	0·44330
4	30 10·64	31 24·87		
5	29 23·78	35 38·53		
6	28 37·77	40 0·99		
7	27 52 68	44 32·05	0·26498	0·44198
8	27 8·52	49 11·59		
9	26 25·30	53 59·31		
10	25 43·18	58 55·03		
11	25 2·10	−5 3 58·57	0·26812	0·44065
12	24 22·12	9 9·77		
13	23 43·23	14 28·45		
14	23 5·50	19 54·43		
15	22 28 94	25 27·52	0·27211	0·43931
16	21 53·61	31 7·53		
17	21 19 53	36 54·25		
18	20 46·74	42 47·49		
19	20 15·28	48 47·03	0·27682	0·43796
20	19 45·13	−5 54 52·66		
21	19 16·36	−6 1 4·19		
22	18 49·01	7 21·38		
23	18 23·08	13 44·02	0·28218	0·43661
24	17 58·56	20 11·87		
25	17 35·51	26 44·71		
26	17 13·92	33 22·31		
27	16 53·79	40 4·42	0·28814	0·43525

Opposition mit ⊙ den 17. Juni um 3h.

Zur Bestimmung der Polhöhe auf dem Observatorium der k. k. technischen Hochschule in Wien.

Von Wilhelm Tinter.

In der Abhandlung: „Bestimmung der Polhöhe auf dem Observatorium der k. k. technischen Hochschule in Wien, veröffentlicht im XLII. Bande der Denkschriften der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der k. Akademie der Wissenschaften, habe ich zur Bildung des Urtheiles über die aus den Beobachtungen der einzelnen Sterne erhaltenen Werthe der Polhöhe die Declinationen dieser Sterne für 1870·0, wie selbe in sechs verschiedenen Sternverzeichnissen für diese Epoche angegeben sind, übersichtlich zusammengestellt.

Den Reductionen der Beobachtungen wurden, mit Ausnahme von α ursae minoris, die Declinationen für 1870·0 aus dem Sternverzeichnisse: „Mittlere Örter für 1872·0 von 529 Sternen“ zu Grunde gelegt; für α ursae minoris wurde der im Berliner astronomischen Jahrbuche angegebene Werth beibehalten.

Es hat sich nun bei der Zusammenstellung der Werthe der Polhöhe, wie sie durch die Zenithdistanzmessung in der Nähe des Meridians für die einzelnen Sterne, nachdem die Correction wegen der Biegung des Fernrohres bereits angebracht worden war, die Thatsache ergeben, dass Abweichungen in den Werthen für die Polhöhe vorkommen, welche den für die einzelnen beobachteten Sterne erhaltenen Fehler des Mittels um eine Grösse überschreiten, welche nicht mehr durch die unvermeidlichen Beobachtungsfehler erklärt werden können; es wurde hieran die Bemerkung geknüpft, dass an dieser Unsicherheit der Resultate die noch nicht genügend sicher bestimmten und der Rechnung zu Grunde gelegten Werthe der Declinationen der beobachteten Sterne Schuld tragen dürften.

Die oben genannte Abhandlung war bereits veröffentlicht, als mir der „Fundamentalcatalog für die Zonenbeobachtungen am nördlichen Himmel," herausgegeben von A. Auwers, zugänglich wurde; es hatte daher für mich ein mehrfaches Interesse, die Reduction der Beobachtungen mit den Werthen der Declination, wie sie in diesem Cataloge angegeben sind, neu durchzuführen, bezüglich die entsprechenden Correctionen an die bereits gefundenen Resultate anzubringen. In dem genannten Cataloge findet man die mittleren Örter der beobachteten Sterne, sammt den jährlichen Eigenbewegungen in Declination, wie folgt:

Tabelle I.

Stern	Epoche	Rectascension	Declination	Eigenbewegung
α Ursae min.	1875·0	1h 13m 0s04	88°38'33"85	—0"001
β Ursae min.		14 51 5·42	74 39 58·90	—0·005
α Bootis		14 9 57·63	19 50 2·60	—1·977
α Orionis		5 48 24·27	7 22 54·30	+0·024
α Serpentis		15 38 6·71	6 49 12·73	+0·056
α Canis min.		7 32 45·40	5 32 37·31	—1·027
α Aurigae		5 7 27·48	45 52 5·38	—0·424
α Cygni		20 37 10·28	44 50 3·99	+0·003

Werden die den bereits publicirten Resultaten zu Grunde gelegten mittleren Örter auf 1875·0 übertragen, so erhält man die in Tabelle II angegebenen Werthe:

Tabelle II.

Stern	Epoche	Rectascension	Declination
α Ursae min.	1875·0	1h 12m 59s31	88°38'33"83
β Ursae min.		14 51 5·32	74 39 57·86
α Bootis		14 9 57·60	19 50 3·07
α Orionis		5 48 24·29	7 22 53·49
α Serpentis		15 38 6·67	6 49 13·03
α Canis min.		7 32 45·40	5 32 36·77
α Aurigae		5 7 27·45	45 52 5·26
α Cygni		20 37 10·23	44 50 3·96

Es ergibt sich aus der Vergleichung der Declinationen dieser beiden Sternverzeichnisse sofort die bedeutende Differenz für die Sterne β Ursae min., α Bootis, α Serpentis, α Orionis und α Canis min. und zwar in dem Sinne, in welchem die aus den Beobachtungen der einzelnen Sterne abgeleiteten Werthe der Polhöhe zu corrigiren wären, um die dem Genauigkeitsgrade der gemachten Beobachtungen entsprechende Übereinstimmung zu erhalten.

Mit den in der Tabelle I angegebenen mittleren Örtern wurden die scheinbaren Declinationen der Sterne β ursae min., α Bootis, α Orionis, α Serpentis, α Canis min., α Aurigae und α Cygni unter Zuhilfenahme der Constanten von O. Struve[1] neu gerechnet und an die auf den Meridian reducirten Zenithdistanzen angebracht, während für α ursae min. die früher gerechneten Werthe beibehalten worden sind.

Bei den ersten Verticalbeobachtungen konnten die gerechneten Werthe $\varphi-\delta$ sofort mit neu gerechneten Declinationen verbunden werden, um die Polhöhe φ zu erhalten, weil eine nochmalige Rechnung von $\varphi-\delta$ wegen der Kleinheit der Differenz der nunmehr angewendeten Declination zu den früher angenommenen (bei α Aurigae 0"12, bei α Cygni 0"03) keine anderen Werthe gegeben hätte.

Im Folgenden mögen blos die Endergebnisse der einzelnen Sätze für die beobachteten Sterne und zur Vergleichung auch die in der ersten Abhandlung angegebenen Mittelwerthe aufgeführt werden, und zwar I. für die Beobachtungen in der Nähe des Meridians, und II. für die Beobachtungen im ersten Vertical.

[1] Tabulae quantitatum Besselianarum pro annis 1865 ad 1874 computatae. Edidit Otto Struve. Petropoli 1867.

I. Beobachtungen in der Nähe des Meridians.

Tabelle III.

Stern	Datum	Satz	Zahl der Beobachtungen	Satzmittel	Mittel aus allen Sätzen mit der Declination nach Fundamental-catalog f. d. Zonenbeobacht.	Mittel aus allen Sätzen mit der Declination nach Mittlere Örter von 529 Sternen
α ursae min.	1. Reihe aus 9 Sätzen		45		48°11'58"96	48°11'58"96
" "	2. "		45		59·30	59·30
" "	3. "		45		59·02	59·02
" "	4. "		45		48 11 59·16	48 11 59·16
β ursae min.	1871, Juli 1	1	10	48°11'59"53	48 11 59·00	48 11 58·07
	" 4	2	10	58·66		
	" 5	3	12	58·71		
	" 11	4	12	59·05		
	" 14	5	12	59·71		
	" 15	6	10	59·19		
	" 17	7	12	58·44		
	" 22	8	10	58·55		
	" 29	9	9	48 11 59·18		

Tabelle IV.

Stern	Datum	Satz	Zahl der Beobachtungen	Satzmittel	Mittel aus allen Sätzen mit der Declination nach Fundamental-catalog f. d. Zonenbeobacht.	Mittel aus allen Sätzen mit der Declination nach Mittlere Örter von 529 Sternen
α Bootis	1871, Juli 15	1	12	48°11'58"32	48°11'58"12	48°11'58"53 ±0·06
	" 18	2	12	57·75		
	" 28	3	10	58·43		
	" 22	4	12	58·23		
	" 29	5	12	57·65		
	1872, Juli 23	6	12	48 11 58·38		

Stern	Datum	Satz	Zahl der Beobachtungen	Satzmittel	Mittel aus allen Sätzen mit der Declination nach Fundamental-catalog f. d. Zonenbeobacht.	Mittlere Örter von 529 Sternen
α Orionis	1871, März 21	1	10	48°11'58·46		
	„ 24	2	12	57·68		
	„ 25	3	12	57·22		
	„ 27	4	12	58·41		
	April 12	5	12	58·41	48°11'57·81	48°11'57·15 ±0·06
	„ 13	6	12	56·79		
	„ 23	7	9	57·57		
	„ 28	8	11	57·34		
	Mai 2	9	10	48 11 58·58		
α Serpentis	1871, Juli 14	1	10	48 11 58·82		
	„ 15	2	10	57·83		
	„ 21	3	10	58·10	48 11 58·20	48 11 58·44 ±0·06
	„ 22	4	10	58·55		
	„ 28	5	10	58·54		
	1872, Juli 22	6	8	48 11 57·17		
α Canis min.	1872, April 27	1	12	48 11 58·06		
	Mai 2	2	12	58·96		
	„ 8	3	11	57·22		
	„ 5	4	12	57·79	48 11 57·95	48 11 57·50 ±0·06
	„ 13	5	10	57·02		
	„ 14	6	12	58·07		
	Juni 5	7	10	57·60		
	„ 9	8	10	48 11 58·72		

Berechnet man mit den in Tabelle V zusammengestellten Daten den wahrscheinlichsten Werth der Polhöhe aus den Messungen der Zenithdistanzen mit Rücksicht der ausgesprochenen Wirkung der Schwere auf das Fernrohr, indem man die Biegung dem sinus der Zenithdistanz proportional setzt, so findet nach dem in der ersten Abhandlung eingehaltenem Vorgange aus den 594 Doppelbeobachtungen der Zenithdistanzen in der Nähe des Meridians:

Polhöhe des Punktes 4 auf dem Observatorium der k. k. technischen Hochschule

$$\varphi = 48°11'58\overset{s}{.}54 \pm 0\overset{s}{.}03.$$

Der wahrscheinlichste Werth der Biegung des Fernrohres im Horizonte findet sich mit

$$b = +0\overset{s}{.}887 \pm 0\overset{s}{.}052.$$

Tabelle V.

Stern	Polhöhe beobachtet	Zenith-distanz z	Gewicht	$b \sin z$	Um $b \sin z$ corrigirte Polhöhe	Übrig bleibender Fehler
α ursae min. 1. R.	48°11'58ʺ96	41° 9'	45	—0ʺ58	48°11'58·33	—0ʺ16
„ „ 2. „	59·30	41 21	45	—0 59	58·71	+0·17
„ „ 3. „	59·02	42 22	45	—0·60	58·42	—0·12
„ „ 4. „	59·16	42 46	45	—0·60	58·56	+0·02
β ursae min.	59·00	26 29	97	—0·40	58·60	+0·06
α Bootis	58·12	28 21	70	+0·42	58·54	+0·00
α Orionis	57·81	40 49	100	+0·58	58·39	—0·15
α Serpentis	58·20	41 22	58	+0·59	58·79	+0·24
α Canis min.	48 11 57·95	42 39	89	+0·60	48 11 58·55	+0·01

Durch die Vergleichung der um den Betrag der Biegung verbesserten Werthe der Polhöhe (siehe Columne 6 der Tabelle V) mit dem wahrscheinlichsten Werthe der Polhöhe ergeben sich die Fehler v (Columne 7), mit denen sich findet:

$$[pvv] = 9·0674.$$

Wahrscheinlicher Fehler Einer Gleichung . . . . $\pm 0\overset{s}{.}768$
Da das Gewicht von φ, d. i. . . . . $P_\varphi = 588·920$
und das Gewicht von b, d. i. . . . . $P_b = 222·375$
gefunden worden ist, ergibt sich:
wahrscheinlicher Fehler in der Polhöhe . . . $= \pm 0·032$
wahrscheinlicher Fehler der Biegungsconstanten $= \pm 0·052.$

Wie man aus diesen um den Betrag der Biegung verbesserten Werthen der Polhöhen, wie sie die einzelnen Sterne mit den neuen Declinationen ergeben haben, einerseits und aus den nunmehr übrigbleibenden Fehlern anderseits erkennen wird, ist eine

Übereinstimmung in den Resultaten hervorgegangen, welche äusserst zufriedenstellend genannt werden muss.

Während die mit den aus dem Sternverzeichnisse der mittleren Örter von 529 Sternen entnommenen Declinationen gerechneten Werthe der Polhöhe für die einzelnen Sterne nach Anbringung des Betrages der Biegung im Vergleiche zu dem wahrscheinlichsten Werthe der Polhöhe Differenzen gezeigt haben, welche zwischen —0·60 und +0·77 Secunden liegen (s. S. 170, Bd. XLII), kommen jetzt nur Unterschiede vor, welche sich zwischen —0·15 und +0·24 Secunden bewegen.

II. Beobachtungen im ersten Vertical.

Die beiden im ersten Vertical beobachteten Sterne α Aurigae und α Cygni haben nur kleine Verbesserungen in dem Werthe der Declination erfahren; in der Tabelle VI sind die Mittelwerthe der einzelnen Beobachtungsreihen, sowie die Werthe der Polhöhe aus den sämmtlichen Beobachtungen eines und desselben Sternes angegeben.

Tabelle VI.

Nr.	Stern	Datum	Zahl	Polhöhe	Polhöhe im Mittel mit den Declinationen nach Auwers	Mittlere Örter
1	α Aurigae	1871, März 5	11	48°11'57"78	48°11'58"14	48°11'58"00
2		„ 6	15	58·66		
3		„ 7	15	58·21		
4		„ 12	14	57·96		
5		„ 23	14	57·37		
6		„ 24	15	58·58		
7		„ 25	15	58·23		
8		27	15	58·26		
9		April 12	15	57·63		
10		Mai 26	15	58·01		
11		Juni 14	14	58·62		
12		„ 16	15	58·24		
13		Juli 14	11	57·68		
14		„ 22	14	48 11 58·48		
1	α Cygni	1870, Nov. 25	8	48 11 59·19	48 11 58·70	48 11 58·68
2		„ 56	15	57·57		
3		1871, Jänner 4	13	58·25		
4		„ 14	13	59·64		
5		März 4	13	59·19		
6		6	15	48 11 58·70		

Es folgt nun aus den zwanzig Reihen, entsprechend 275 Doppelbeobachtungen im ersten Vertical mit Rücksicht auf die Gewichte

Polhöhe des Punktes 3 $\psi = 48°11'58"294 \pm 0"079$.
Reduction der Polhöhe von Punkt 3 auf Punkt 4
$+ \ldots 0"085$, mithin

Polhöhe des Punktes 4 aus den ersten Verticalbeobachtungen
$\varphi_1 = 48°11'58"38 \pm 0"08$.

Aus den 594 Doppelbeobachtungen von Zenithdistanzen in der Nähe des Meridians ist die Polhöhe desselben Punktes
$\varphi = 48°11'58"54 \pm 0"03$.

Die Verbindung der beiden Resultate gibt aus 869 Einzelresultaten

Polhöhe des Punktes 4 des Observatoriums an der k. k. technischen Hochschule in Wien
48°11'58"49 ±0"05.

Wenngleich dieser Werth der Polhöhe von jenem, wie er sich mit den Declinationen aus dem Sternverzeichnisse der „Mittleren Örter von 529 Sternen", nämlich zu 48°11'58"27 ergeben hatte, nur um 0·22 Secunden abweicht, d. i. innerhalb des in der Bestimmung einer Polhöhe zulässig erklärten Fehlers von 0·3 Secunden liegt, so ist das im gegenwärtigen Falle dem Umstande zuzuschreiben, dass unter den zur Beobachtung verwendeten Sternen ein nördlicher und mehrere südliche vorkommen, welche eine Verbesserung der Declination im entsprechenden Sinne erfahren haben.

Geodätische Übertragung der Polhöhe auf den Punkt 4 des Observatoriums.

Nach der Triangulation und der hierauf gestützten Rechnung liegt:

Punkt 4 um 2'27"21 nördlicher als der astronomisch bestimmte Punkt am Laaer Berge.

Punkt 4 um 0'37·16 südlich von der k. k. Universitäts-Sternwarte.

Punkt 4 um 0'56·64 südlich von der Sternwarte in der Josefstadt.

Nun ist die astronomisch bestimmte Polhöhe:

des Punktes am Laaer Berge	48° 9'33"14
der k. k. Universitäts-Sternwarte	48°12'35"60
der Sternwarte Josefstadt	48°12'53"80

Diese Daten liefern demnach in Verbindung mit den früher angegebenen Breitenunterschieden:

Polhöhe des Punktes 4 aus der Bestimmung am Laaer Berge	48°11'60"35
„ „ „ 4 aus der Bestimmung der Universitäts-Sternwarte	48 11 58·44
„ „ „ 4 aus der Bestimmung der Josefstädter Sternwarte	48 11 57·16
die directe Bestimmung der Polhöhe dieses Punktes 4 hat ergeben	48 11 58·49
ferner: Polhöhe der Universitäts-Sternwarte durch die geodätische Übertragung vom Laaer Berge	48 11 37·50

Hieraus folgt, dass der Werth der Polhöhe des Punktes 4 auf dem Observatorium der k. k. technischen Hochschule, ebenso die Polhöhe der k. k. Universitäts-Sternwarte aus den directen Beobachtungen gegen den durch die geodätische Übertragung vom Laaer Berge erhaltenen Werth um 1·86, bezüglich 1·90 Secunden kleiner ist, woraus sich eine Lothablenkung nach Süden ergeben würde.

Geographische Breite und Länge der Punkte 1 bis 8 auf dem Observatorium der k. k. technischen Hochschule.

Mit Bezug auf die in der ersten Abhandlung, Seite 129 in Tabelle *a*, und Seite 182 angegebenen Daten hat man:

Punkt	Länge östlich von Berlin		Polhöhe
	Bogen	Zeit	
1	2°58'44"16	11m54s944	48°11'58"29
2	44·01	54·934	58·33
3	43·88	54·925	58·40
4	43·43	54·895	58·49
5	44·22	54·948	58·19
6	43·59	54·906	58·36
7	43·26	54·884	58·54
8	2 58 43·58	11 54·905	48 11 58·53

Am Schlusse mögen zwei Druckfehler der ersten Abhandlung berichtigt werden:

Band XLII, Seite 170, erste Zeile von unten lese man ±0"13 statt 9"13
Seite 182, Polhöhe des Punktes 5 lese man 57"97 statt 58"97

Synthese der methylirten Parabansäuren, der Methylthioparabansäure und des Thiocholestrophans.

Von **Rudolf Andreasch.**

(Aus dem Laboratorium des Prof. Maly in Graz.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 31. März 1881.)

Die Eigenschaft des Dicyans, unter Wasseraufnahme sehr leicht in Derivate der Oxalsäure überzugehen, findet sich auch in einer Reihe seiner Verbindungen erhalten. So fand zuerst A. W. Hofmann,[1] dass sich Cyan mit Anilin zu einem Körper vereinigt, der unter dem Einflusse von Säuren in Oxanilid übergeht. Im Jahre 1868 wies R. Maly[2] in seinen Untersuchungen über das Thiosinamin und dessen Derivate nach, dass auch diesen Körpern die Eigenschaft zukommt, sich mit Cyangas zu verbinden, und Maly stellte auf diesem synthetischen Wege eine Reihe von meist prachtvoll krystallisirenden Verbindungen dar, die man in Folge ihres Verhaltens als substituirte Parabansäuren oder Oxalylharnstoffe betrachten muss.

In neuerer Zeit haben sich auch O. Landgrebe[3] und Fr. Berger[4] dieser Methode mit Erfolg zur Synthese der Ditolylparabansäuren bedient, wobei sie aber nicht vom Ditolylsulfoharnstoff, sondern von den entsprechenden Guanidinen ausgingen.

Nachdem es wahrscheinlich war, dass nicht allein die Allyl enthaltenden Sulfoharnstoffe, sondern überhaupt alle einfach oder zweifach (symmetrisch) substituirten Thioharnstoffe das gleiche

---

[1] Annal. Chem. Pharm. 66, pag. 129 und 73, pag. 180.

[2] Journ. f. pr. Chemie, 104, pag. 413 und 105, pag. 182.

[3] Berichte d. deutschen chem. Gesellschaft, X., pag. 1587 und XI, pag. 973.

[4] Daselbst, XI., pag. 1854.

Verhalten gegenüber dem Cyan zeigen würden, so wurde der Versuch zunächst in der Methylreihe gemacht, da gerade die methylirten Parabansäuren insoferne erhöhtes Interesse beanspruchen, als sie durch Oxydation von Caffeïn und Theobromin[1] erhalten werden.

Einwirkung von Cyan auf Methylthioharnstoff; Bildung von Methylthioparabansäure.

Der zu diesem Versuche verwendete Methylthioharnstoff wurde aus Methylsenföl und wässerigem Ammoniak dargestellt. Als nach mehrstündigem Stehen der Geruch des Senföles verschwunden war, dampfte man am Wasserbade ein. Der zurückbleibende Syrung erstarrte beim Erkalten alsbald zu prismatischen Krystallen des Methylsulfoharnstoffes. Dieselben sind in Wasser und Alkohol leicht, in Äther schwierig löslich und zeigen nach dem Umkrystallisiren den Schmelzpunkt 118° C.

In die gekühlte, alkoholische Lösung desselben wurde andauernd Cyangas geleitet, welches sehr rasch unter Dunkelfärbung der Flüssigkeit absorbirt wurde.

Nach mehrstündigem Stehen in der Kälte hatten sich aus der dunkelbraunen Lösung grünliche Krystallschuppen abgesetzt, die jedenfalls das gewünschte Cyanid darstellten. Da das Ausgangsmaterial schwierig zu beschaffen war, und die Reindarstellung des Cyanides überhaupt nicht im Zwecke der Arbeit lag, so wurde darauf verzichtet und die ganze Flüssigkeit sofort mit concentrirter Salzsäure versetzt und am Wasserbade verdampft.

Der braune, krystallinische Rückstand wurde in wenig Wasser aufgenommen und wiederholt mit Äther ausgeschüttelt. Häufig bemerkte man dabei, insbesondere wenn man frischen Äther zur Flüssigkeit brachte, eine intensive blaue Fluorescenz des Äthers, die aber beim Schütteln verschwand. Die goldgelb gefärbten Ätherauszüge hinterliessen einen gelben Krystallkuchen, den man aus heissem Wasser umkrystallisirte. Dabei zeigte sich, dass den Krystallen hartnäckig Verunreinigungen anhafteten, die auch die filtrirten Lösungen beim Erkalten stets

---

[1] Maly und Hinteregger, Monatshefte f. Chemie, II, pag. 87.

trübten. Erst nach wiederholtem Eindampfen, erneuertem Lösen, Filtriren und Hinstellen unter die Pumpe wurde ein reines Product erhalten; es bildete getrocknet centimerlange und etwa millimeterbreite, aber ungemein dünne Blättchen von hochgelber Farbe, die meist zu concentrischen Büscheln angeordnet waren.

Der vorliegende Körper musste, falls die Reactionen im erwünschten Sinne verlaufen, die Methylthioparabansäure oder den Methyloxalylthioharnstoff darstellen.

Die Stickstoff- und Schwefelbestimmung lieferte in der That für die Formel $C_4H_4N_2SO_2$ stimmende Zahlen.

1. 0·253 Grm. bei 60° getrockneter Substanz gaben nach dem Schmelzen mit Soda und Kaliumchlorat 0·4142 Grm. $BaSO_4$.
2. 0·25025 Grm. Substanz mit Natronkalk verbrannt, neutralisirten 12·4 CC. Säure, 1 CC. = 3·88 Mgrm. Stickstoff.

Oder in Procenten:

Berechnet für $C_4H_4N_2SO_2$	Gefunden
S.....22·22%	22·53%
N ....19·44%	19·23%

Es vollzieht sich also die Einwirkung des Cyans auf Methylthioharnstoff nach folgendem Schema:

$$CS\begin{matrix}\diagup NHCH_3 \\ \diagdown NH_2\end{matrix} + \begin{matrix}CN \\ | \\ CN\end{matrix} = CS\begin{matrix}\diagup NCH_3-C = NH \\ \qquad\quad | \\ \diagdown NH\ \ -C = NH\end{matrix}$$

Das entstandene Cyanid geht beim Erwärmen mit Salzsäure unter Wasseraufnahme und Ammoniakaustritt in die Methylthioparabansäure über:

$$CS\begin{matrix}\diagup NCH_3-C = NH \\ \qquad\quad | \\ \diagdown NH\ \ -C = NH\end{matrix} + 2H_2O + 2HCl =$$

$$= 2NH_4Cl + CS\begin{matrix}\diagup NCH_3-CO \\ \qquad\quad | \\ \diagdown NH\ \ -CO\end{matrix}$$

Das Ammoniak liess sich in der ausgeschüttelten Flüssigkeit in reichlicher Menge nachweisen.

Die Methylthioparabansäure ist in Wasser mit saurer Reaction löslich, auch von Weingeist und Äther wird sie leicht aufgenommen; im Glasröhrchen erhitzt, sublimirt sie zum grössten Theile unzersetzt. Der Schmelzpunkt liegt bei 105°C.

Einwirkung von Silbernitrat auf die Methylthioparabansäure. Bildung von Methylparabansäure.

Versetzt man die wässerige Lösung dieses Körpers mit Silbernitrat, so fällt ein schwach gelblicher, flockiger Niederschlag — vermuthlich eine Silberverbindung — der aber schon nach einigem Stehen, schneller noch beim Erwärmen, missfärbig wird und endlich in schwarzes Schwefelsilber übergeht. Zur Entschwefelung wurden ungefähr drei Gramme der Substanz in Wasser gelöst, vorsichtig mit Silbernitratsolution versetzt und längere Zeit am Wasserbade erwärmt. Dadurch wird die anfänglich trüb durch das Filter laufende Flüssigkeit vollständig klar, indem sich das Schwefelsilber zusammenballt. Das auf ein kleines Volum gebrachte Filtrat, wiederholt mit Äther ausgeschüttelt, gab einen krystallinischen Ätherrückstand, der nach dem Umkrystallisiren aus heissem Wasser farblose kurze Säulchen darstellte, die meist sternförmig angeordnet waren und ganz den Habitus der aus Theobromin erhaltenen Methylparabansäure[1] zeigten, mit der sie identisch waren.

1. 0·246 Grm. bei 80° getrockneter Substanz mit Natronkalk verbrannt, neutralisirten 13·6 CC. Säure à CC. = 3·88 Mgrm. Stickstoff.
2. 0·267 Grm. Substanz lieferten mit Kupferoxyd verbrannt 0·082 Grm. H_2O. (Die C-Bestimmung verunglückte.)
3. 0·2875 Grm. Substanz lieferten, im Bajonnetrohr verbrannt, 0·393 Grm. CO_2 und 0·083 Grm. H_2O.

Oder in 100 Theilen:

	Berechnet für $C_4H_4N_2O_3$	Gefunden I.	Gefunden II.	Gefunden III.
C_4 48	37·50	—	—	37·28
H_4 4	3·12	—	3·41	3·21
N_2 28	21·87	21·45	—	—
O_3 48	37.50	—	—	—
128	100·00			

[1] Maly und Hinteregger l. c.

Der Schmelzpunkt stimmte mit dem eines aus Theobromin dargestellten Präparates überein; er lag bei 149°.

Die Entschwefelung der Methylthioparabansäure verläuft also nach der Gleichung:

$$CS\begin{matrix}\diagup NCH_3-CO \\ \diagdown NH \quad -CO\end{matrix} + 2AgNO_3 + H_2O = CO\begin{matrix}\diagup NCH_3-CO \\ \diagdown NH \quad -CO\end{matrix} + 2HNO_3 + Ag_2S.$$

und ist dabei die Ausbeute an Methylparabansäure eine nahezu quantitative.

Einwirkung von Cyan auf Dimethylsulfoharnstoff; Bildung von Dimethylthioparabansäure.

Den Dimethylthioharnstoff, auf welchen die Reaction jetzt ausgedehnt wurde, erhielt ich durch Zusammenbringen von Methylsenföl mit alkoholischer Methylaminlösung; die Vereinigung findet unter Erwärmung statt und der gebildete Dimethylsulfoharnstoff bleibt nach dem Verdampfen am Wasserbade als dicker, farbloser Syrup zurück, der auch nach mehrtägigem Stehen unter der Luftpumpe nicht erstarrt.

Die alkoholische Lösung wurde wie oben mit Cyan behandelt und das Reactionsproduct nach längerem Stehen mit concentrirter Salzsäure durch einige Minuten gekocht. Nach dem Erkalten erstarrte die zur Verjagung des Alkohols eingeengte Flüssigkeit zu einem dicken Brei hübscher, bronzefarbener Schuppen, der mit etwas Wasser vermischt, mit Äther ausgeschüttelt wurde. Ein 6- bis 7-maliges Ausschütteln genügt, um die Flüssigkeit, in der sich leicht Ammoniak nachweisen lässt zu erschöpfen; die letzten Auszüge liefern überhaupt ein schwieriger zu reinigendes Product. Nach dem Abdestilliren des Äthers erstarrt der Kolbeninhalt fast ganz zu einem gelben Krystallkuchen, der durch Abpressen zwischen Filtrirpapier von der Mutterlauge befreit und nochmals aus siedendem Äther umkrystallisirt wird. Beim langsamen Erkalten der gelb gefärbten Lösung scheidet sich der Körper in sechsseitigen Täfelchen von der Farbe des neutralen Kaliumchromates aus.

Die Analyse zeigte, dass der gesuchte Körper, die Dimethylthioparabansäure oder das Thiocholestrophan, vorlag.

1. 0·2285 Grm. bei 50° getrockneter Substanz mit Natronkalk verbrannt, verbrauchten 10·3 CC. Säure, à CC. = 3·88 Mgrm. Stickstoff.
2. 0·237 Grm. Substanz gaben nach dem Glühen mit Soda und Kaliumchlorat 0·3467 Grm. $BaSO_4$.
3. 0·262 Grm. Substanz gaben, mit chromsaurem Blei im Bajonnetrohr verbrannt, 0·368 Grm. CO_2 und 0·099 Grm. H_2O.
4. 0·2425 Grm. Substanz neutralisirten, nach Will-Varrentrapp verbrannt 11·1 CC. Säure von obiger Stärke.

In Percenten ausgedrückt:

Dimethylthioparabansäure $C_5H_6N_2SO_2$			Gefunden I.	II.	III.	IV.
C_5	60	37·98	—	—	38·31	—
H_6	6	3·80	—	—	4·20	—
N_2	28	17·72	17·49	—	—	17·76
S	32	20.25	—	20·12	—	—
O_2	32	20·25	—	—	—	—
	158	100·00				

Die Bildung erfolgt gemäss den folgenden Gleichungen:

$$CS\begin{cases}NHCH_3\\NHCH_3\end{cases} + \begin{matrix}CN\\|\\CN\end{matrix} = CS\begin{cases}NCH_3 - C = NH\\ \qquad\quad | \\NCH_3 - C = NH\end{cases}$$

und

$$CS\begin{cases}NCH_3 - C = NH\\ \qquad\quad | \\NCH_3 - C = NH\end{cases} + 2H_2O + 2HCl = 2NH_4Cl +$$

$$+ CS\begin{cases}NCH_3 - CO\\ \qquad\quad | \\NCH_3 - CO\end{cases}$$

Das Thiocholestrophan ist in kaltem Wasser schwer, leicht in heissem, mit neutraler Reaction, löslich; Weingeist und Äther nehmen es sehr leicht mit goldgelber Farbe auf. Aus der wässrigen Lösung wurde es einige Male in grossen, äusserst dünnen, dem Cholestrophan ähnlichen Tafeln erhalten, während es aus Äther in wohlausgebildeten Krystallen anschiesst, über welche Herr Professor J. Rumpf folgende vorläufige Mittheilung zu machen die Freundlichkeit hatte:

„Es sind dünne, monokline Täfelchen mit vorwaltender Entwicklung des Endflächenpaares oP. Die Randbegrenzung erfolgt durch sehr schmale Flächen von ∞P und gewöhnlich auch solchen vom Orthopinakoid $\infty \bar{P} \infty$, weshalb die Tafeln meist sechsseitigen Umriss besitzen, wobei dann die Schnittlinien der Tafel mit den Orthopinakoidflächen parallel gehen zur kürzeren Diagonale des rhombischen Schnittes der Endfläche mit dem Prisma. Die Winkel vom Rhombus der Basis wurden durch mikroskopische Messung erhalten und betragen nahe 71° und 109°. Die Ebene der optischen Axen liegt in der Symmetrieebene, in welche auch die längere Diagonale des Rhombus der Basis fällt."

Erhitzt schmilzt das Thiocholestrophan bei 112·5° C. und sublimirt fast unzersetzt, wobei es sich zunächst in Form öliger Tropfen ansetzt, die aber alsbald zu feinen Nadeln erstarren. Durch Alkalien wird der Körper quantitativ in Oxalsäure und Dimethylthioharnstoff gespalten, wie folgender Titrirversuch zeigt.

0·191 Grm. Substanz in titrirter Natronlauge gelöst, einige Minuten zum Kochen erhitzt und dann zurücktitrirt, verbrauchten 8·7 CC. Lauge entsprechend 0·1085 Grm. Oxalsäure.

Berechnet für 100 Theile Thiocholestrophan	Gefunden
56·96% Oxalsäure	56·83%

Erhitzt man die Dimethylthioparabansäure mit in Wasser aufgeschlemmtem kohlensauren Baryt, so liesse sich, falls der Process analog der von Maly und Hinteregger[1] für das Cholestrophan aufgefundenen Gleichung abliefe, eine Spaltung in Dimethyloxamid und Kohlenoxysulfid erwarten:

$$\begin{matrix} CONCH_3 \\ | \\ CONCH_3 \end{matrix} > CS + O\,H_2 = CSO + \begin{matrix} CO - NHCH_3 \\ | \\ CO - NHCH_3 \end{matrix}$$

Unter den entwichenen Gasen konnten wohl Kohlensäure und Schwefelwasserstoff, nicht aber Kohlenoxysulfid mit Sicherheit nachgewiesen werden, dagegen hinterliess das Filtrat vom

[1] Monatshefte f. Chemie, II, pag. 132.

kohlensauren Baryt nach dem Eindampfen Krystalle von Dimethyloxamid, die durch ihr Verhalten leicht als solches zu erkennen waren.

Einwirkung von Silbernitrat auf die Dimethylthioparabansäure. Bildung von Cholestrophan.

Gegen Silbernitrat verhält sich das Thiocholestrophan in gleicher Weise wie die einfach methylirte Säure; nur scheint hier keine Silberverbindung zu existiren, was mit der neutralen Reaction und dem Fehler von ersetzbarem Wasserstoff übereinstimmt.

Die gemischten Lösungen bleiben anfangs klar, schwärzen sich aber bald, besonders rasch beim Erwärmen unter Abscheidung von Schwefelsilber. Dem Filtrate, aus welchem man das eventuell überschüssig vorhandene Silber durch vorsichtigen Salzsäurezusatz entfernt, lässt sich durch Äther der nun schwefelfreie Körper entziehen, welcher nach einmaligem Umkrystallisiren bereits vollkommen rein ist. Er stimmte in seinem Verhalten, nach Löslichkeit und Schmelzpunkt (105° C.) mit dem aus Caffeïn gewonnenen Cholestrophan, das mir vorlag, überein und bildete wie dieses grosse, farblose Tafeln, über die mir Herr Professor J. Rumpf Folgendes mitzutheilen die Güte hatte:

„Die ungemein dünnen, durchsichtigen, einzeln glasglänzenden, im Haufwerk aber seidenglänzenden Krystalltäfelchen, haben rhombische Umgrenzung, deren Winkel 62·5° und 117·5° messen. Mit den Diagonalen fallen optische Hauptschnitte zusammen, wovon einer die Ebene der optischen Axen ist.“

Eine Stickstoffbestimmung lieferte folgendes Resultat:

0·2035 Grm. Substanz mit Natronkalk verbrannt, neutralisirten 10·2CC. Säure, wovon 1CC. = 3·88 Mgrm. Stickstoff entspricht.

Berechnet für $C_5H_6N_2N_3$	Gefunden
19·72% N	19·45%

Es ist also auch hier die Einwirkung des Silbernitrats auf die geschwefelte Parabansäure ein sehr glatt verlaufender Process, indem sich einfach der Schwefel der letzteren gegen Sauerstoff umtauscht:

$$CS\langle{}^{NCH_3 - CO}_{NCH_3 - CO} + 2AgNO_3 + H_2O = CO\langle{}^{NCH_3 - CO}_{NCH_3 - CO} + 2HNO_3 + Ag_2S$$

Die Ausbeute ist eine fast theoretische.

Über Reactionen der Parabansäuren.

Herr Professor Maly hat mich auf einige Reactionen der Parabansäuren aufmerksam gemacht und die Güte gehabt, mir zu gestatten, das Folgende hier anschliessen zu können:

Die gewöhnliche, sowohl wie die einfach methylirte Parabansäure und das Cholestrophan werden nicht von Bleizucker, auch nicht von Bleiessig gefällt, wohl aber schon in verdünnter Lösung, wenn man Bleizucker und ein paar Tropfen Ammoniak zufügt. Der bei Anwendung von Cholestrophan durch diese Reaction entstehende Niederschlag ist grossflockig und so voluminös, dass er gesammelt und analysirt wurde, weil man anfänglich vermuthete, es sei eine Cholestrophanverbindung. So gaben z. B. 0·1423 Grm. Cholestrophan 1·06 Grm. der trockenen Bleiverbindung, die 86·8% Bleioxyd enthielt, aber nichts anders als ein basisches Bleioxalat war.

Die Empfindlichkeit der Fällung mit Ammoniak und Bleizucker ist so gross, dass sie immerhin als brauchbare Reaction auf die Parabansäuren verwendet werden kann, zumal man früher Oxalsäure und andere Substanzen durch Fällung mit Bleizucker oder Bleiessig entfernen kann.

So geben z. B. 0·098 Grm. Cholestrophan in 250 CC. Wasser gelöst, nach wenigen Sekunden einen reichlichen Niederschlag, wenn man 1 CC. davon mit Bleizucker und einen Tropfen Ammon versetzt. Diese Lösung auf das doppelte, vierfache und sechsfache verdünnt, gibt noch immer in 1 CC. nach einigen Secunden eine grossflockige Fällung. Also $^5/_{100}$ Milligramme in 1 CC. gelöst oder fünf Hunderttausendstel sind noch gut nachweisbar und damit ist die Grenze der Reaction nicht erreicht. Eine Verwechslung mit der Trübung, die Bleizuckerlösung für sich mit Ammon nach einiger Zeit gibt, ist nicht möglich, da diese ganz gleichförmig fein ist, während der Niederschlag des basischen Bleioxalates immer grobflockig ist.

Eine andere Reaction, die sich noch eleganter gestaltet und für alle Parabansäuren gilt, die darauf untersucht worden sind, ist folgende: Man löst die Probe in Wasser, setzt Chlorcalciumlösung und einige Tropfen Ammoniak hiezu. Die Flüssigkeit bleibt klar; so wie man aber erwärmt, scheidet sich ein reichlicher in Essigsäure unlöslicher Niederschlag — oxalsaures Calcium — ab. Durch diese Reaction kann man sich natürlich ebenfalls sehr leicht vor einer Täuschung mit schon vorhandener freier Oxalsäure bewahren, oder selbe vorher abtrennen. Die Reaction gilt auch für die Thioparabansäuren.

An folgenden Parabansäuren ist die Reaction geprüft und erhalten worden:

1. Einfache Parabansäure.
2. Monomethylparabansäure.
3. Cholestrophan.
4. Methylthioparabansäure.
5. Dimethylthioparabansäure.
6. Oxalylthiosinamin (Allylthioparabansäure) [1].
7. Oxalylphenylthiosinamin (Allylphenylthioparabansäure).[2]
8. Oxalylphenylallylcarbamid (Phenylallylparabansäure).[3]

[1 2 3] R. Maly. Derivate des Thiosinamins. Sitzungsber. der Wiener Akademie, Band 57, 2. Abth. 573.

Über Nitroolefine.

Von L. Haitinger.

(Aus dem Universitätslaboratorium des Prof. A. Lieben.)

Durch Behandlung von Trimethylcarbinol mit concentrirter Salpetersäure ist es mir gelungen einen Nitrokohlenwasserstoff, das Nitrobutylen,[1] darzustellen; seitdem habe ich mich mit der weiteren Untersuchung dieses Körpers sowohl als auch seiner Homologen beschäftigt, und obgleich selbe noch nicht abgeschlossen ist, sehe ich mich schon jetzt veranlasst, meine bisherigen Resultate zu veröffentlichen, da bereits ein längerer Zeitraum seit der Publication der citirten Abhandlung verflossen ist.

Darstellung von Nitrobutylen aus Isobutylen und Salpetersäure.

Ich habe schon früher angedeutet, dass Nitrobutylen auch durch directe Nitrirung des Isobutylens erhalten werden könne. Man verwendet zweckmässig einen Butlerow'schen Absorptionsthurm, durch welchen man das Gas im langsamen Strome leitet; gleichzeitig lässt man so viel ganz concentrirter Salpetersäure eintropfen, dass das abfliessende Product grün gefärbt ist. Das letztere verhält sich dann in allen Stücken genau so wie das aus Trimethylcarbinol und Salpetersäure erhaltene Rohproduct; nur ist demselben unter gewissen Umständen eine geringe Menge weisser Krystalle beigemengt, welche durch Abdecantiren beseitigt werden. Durch Waschen mit Wasser, Destillation mit Wasserdampf und fractionirte Destillation gelingt es leicht das Nitrobutylen mit allen seinen früher beschriebenen Eigen-

---

[1] Sitzungsberichte der k. k. Akademie der Wissenschaften, April-Heft 1878, auch Annalen der Chemie und Pharmacie 193. 366.

schaften zu isoliren; doch ist die Ausbeute durchaus keine befriedigende, da ein grosser Theil des Kohlenwasserstoffes unter Bildung von Kohlensäure, Fettsäure und Aceton (welches aus den Waschwässern abgeschieden und durch Siedpunkt, Bisulfitverbindung etc. genau identificirt wurde) oxydirt wird. Es dürfte sich daher mehr empfehlen, das Butylen erst in tertiären Butylalkohol zu verwandeln, zumal bei diesem auch der Nitrirungsprocess leichter zu controliren ist.

Verbindung $C_4H_8(NO_2)_2$ (Butylendinitrit?).

Die oben erwähnten, bei der Nitrirung des Isobutylens auftretenden Krystalle wurden, nachdem sie durch Absaugen auf einer porösen Thonplatte und Stehen im Vacuum von anhängender Mutterlauge befreit worden, direct der Analyse unterworfen.

0·2380 Substanz ergaben 0·2822 CO_2 und 0·1157 H_2O

	Gefunden	Berechnet für $C_4H_8(NO_2)_2$
C	32·34	32·43
H	5·40	5·41

Die gefundenen Zahlen stimmen recht gut mit den für $C_4H_8(NO_2)_2$ berechneten und ist die Substanz daher höchst wahrscheinlich mit dem von Guthrie aus Amylen und rauchender Salpetersäure[1] oder Untersalpetersäure[2] erhaltenen $C_5H_{10}(NO_2)_2$ sowie mit dem von Semenoff aus Aethylen und Untersalpetersäure erhaltenen $C_2H_4(NO_2)_2$ [3] homolog. Zu einer weiteren Untersuchung war die erhaltene Quantität zu geringfügig.

Einwirkung von Salzsäure auf Nitrobutylen.

Ich hatte Gelegenheit, die in meiner ersten Mittheilung nur vermuthungsweise mitgetheilten Resultate dieser Reaction durch Anwendung etwas grösserer Quantitäten Material zu verificiren. Nitrobutylen wurde mit dem 4—5fachen Volumen concentrirter

---

[1] Annalen 116, 248.

[2] Annalen 119, 84.

[3] Jahresbericht 1864, 480.

Salzsäure im zugeschmolzenen Rohre durch 12 Stunden auf 100° erhitzt. Beim Öffnen des Rohres machte sich ein nicht unbedeudender Druck bemerkbar, der von Kohlensäure herrührte; das Öl war bis auf einen kleinen Rest gelöst und in der Flüssigkeit hatten sich Krystalle abgeschieden. Der Rohrinhalt wurde wiederholt unter jeweiligem Nachgiessen von Wasser bis zur Trockene abdestillirt; der Rückstand bestand aus Salmiak, gemengt mit chlorwasserstoffsaurem Hydroxylamin, das an seinen charakteristischen Reactionen erkannt wurde. Die vereinigten Destillate wurden mit Bariumcarbonat am Rückflusskühler gekocht und eine geringe Menge neutraler flüchtiger Körper, wahrscheinlich Aceton und Condensationsproducte desselben, mit den Wasserdämpfen übergetrieben. Die eingetrocknete Lösung der Bariumsalze wurde mit Alkohol ausgezogen und so ein Bariumsalz erhalten, in welchem, da es noch etwas Chlorbarium enthielt, sowohl Barium als Chlor bestimmt wurden.

0·3113 der bei 100° getrockneten Substanz gaben 0·2264 $BaSO_4$ und 0·0378 $AgCl$; es gaben also nach Abzug der dem gefundenen Clorgehalte entsprechenden Menge Chlorbarium einerseits und Bariumsulfat andererseits 0·2839 des organischen Bariumsalzes 0·1957 $BaSO_4$.

Gefunden	Berechnet für $(C_4H_7O_3)_2Ba$
40·53% Ba	39·94% Ba

Der gefundene Percentgehalt weicht nicht sehr von dem für oxybuttersaures Barium berechneten ab. Andererseits wurde in dem in Alkohol ungelösten Theil der Bariumsalze die Gegenwart von Bariumformiat durch qualitative Reactionen sichergestellt, und es musste daher, da letzteres Salz in Alkohol nicht vollkommen unlöslich ist, der Bariumgehalt nothwendig etwas zu hoch gefunden werden. Der Rest des analysirten Bariumsalzes wurde in Zinksalz übergeführt, welches sich als in Wasser sehr schwer löslich erwies und aus diesem endlich durch Versetzen mit Schwefelsäure und Ausschütteln mit Aether die freie Säure isolirt, welche die für α Oxyisobuttersäure charakteristische Krystallisationsfähigkeit und den allerdings noch etwas zu niedrigen Schmelzpunkt von 65° (statt 75·7°) zeigte.

Bei der Zersetzung des Nitrobutylen durch Salzsäure waren also gebildet worden: Ammoniak, Hydroxylamin, Kohlensäure. Ameisensäure, α Oxyisobuttersäure und ein nicht näher definirter neutraler flüchtiger Körper. Die Reaction verläuft demnach einerseits wohl ähnlich wie bei den Nitroparaffinen, nur dass gleichzeitig Chlorwasserstoffsäure addirt und die hiedurch entstandene α Chlorisobuttersäure durch die weiteren Operationen (Kochen mit Wasser und Bariumcarbonat) in α Oxyisobuttersäure übergeführt wird. Andererseits wirkt aber auch das Wasser zerlegend; es entsteht Nitromethan, welches weiterhin Ameisensäure liefert und Aceton, welches durch die condensirende Wirkung der Salzsäure obenerwähnte neutrale Körper gibt. Bemerkenswerth ist die Bildung von Ammoniak, dessen Entstehung nach der gegebenen Erklärung eigentlich nicht zu erwarten ist.

Aethylen und Salpetersäure.

Nachdem die directe Nitrirung des Isobutylens gelungen war, lag es nahe, diese Reaction auch auf andere Glieder der Reihe $C_n H_{2n}$ auszudehnen. Über das erste Glied dieser Reihe des Aethylen liegen in dieser Beziehung Angaben vor, welche wenig Aussicht auf Erfolg versprechen. So wird nach Akestorides[1] Aethylen von rauchender Salpetersäure vollständig unter Bildung von Oxalsäure absorbirt. Kekulé[2] erhielt aus Aethylen und Salpeterschwefelsäure einen Körper von der Zusammensetzung $C_2 H_4 N_2 O_5$, also eine gesättigte Verbindung.

Es gelang mir zwar durch Absorption des Aethylens durch rauchende Salpetersäure im Butlerow'schen Rohre eine geringe Menge eines öligen Productes zu erhalten, aber dieses war äusserst zersetzlicher Natur, ja zerfiel manchmal sogar spontan, wobei es sich unter reichlicher Gasentwicklung in einen Brei von Oxalsäure - Krystallen verwandelte. Den von Kekulé beschriebenen Körper konnte ich nicht rein erhalten, sondern erhielt bei wiederholten Darstellungen verschiedene Analysen-

[1] J. f. praktische Chemie 15, 64.

[2] Berliner Berichte 2, 329.

resultate, was wohl auf ein Gemenge hinweist. Auch das Verhalten des Productes gegen Kalilauge spricht für diese Annahme, da durch dieses Reagens in der Kälte stets nur ein Theil (circa $^1/_2$—$^2/_3$) gelöst wird. Ein Versuch durch Destillation zu einer reinen Verbindung zu gelangen missglückte, indem plötzliche Gasentwickelung und Zertrümmerung des Apparates erfolgte. Auch beim längeren Aufbewahren trat manchmal schon in der Kälte totale Zersetzung ein, wobei Oxalsäure gebildet wurde.

Nitroamylen.

Unter den höheren Gliedern der Reihe C_nH_{2n} ist das Amylen am leichtesten zu beschaffen; da aber die im Handel vorkommenden Amylene nach den Untersuchungen von Wischnegradsky Gemenge sind, wählte ich auch zur Darstellung des Nitroamylens den tertiären Alkohol das Dimethylaethylcarbinol. Die Nitrirung geschah ganz in derselben Weise wie sie bei dem Trimethylcarbinol beschrieben wurde. Es treten dabei auch dieselben Erscheinungen wie dort auf, nur findet beim Waschen des Rohproductes eine weit geringere Gasentwickelung statt, manchmal unterblieb dieselbe gänzlich.

Bei der Destillation des mehrmals gewaschenen Reactionsproductes im Vacuum (14^{mm} Druck) geht die Hauptmenge (nachdem sie einmal von dem begleitenden Harze getrennt) unzersetzt bei 69°—73° über, doch gelang es selbst durch wiederholte sorgfältige Fractionirung nicht zu einer reinen Substanz zu gelangen. Mehrere Analysen zeigten, dass immer ein stickstoffreicherer und kohlenstoffärmerer Körper beigemengt war. Besser gelang die Reinigung durch Destillation bei gewöhnlichem Druck, wobei das Nitroamylen bei 166°—170° übergeht. Doch findet gleichzeitig eine starke Zersetzung statt, bei der neben Stickoxyden Aceton und vielleicht auch Nitroaethan auftreten. Die Analysen des so erhaltenen Körpers ergaben:

I. 0·2264 Grm. Substanz lieferten 0·1623 Grm. H_2O und 0·4337 Grm. CO_2

0·1634 Grm. Substanz lieferten 17 CCN bei 14° und einen auf 0° reducirten Barometerstand von 755·63

II. 0·1982 Grm. Substanz einer anderen Darstellung lieferten 0·1376 Grm. H_2O und 0·3815 Grm. CO_2

III. 0·3239 Grm. einer bei 170—174° siedenden Substanz lieferten 0·2256 Grm. H_2O und 0·6071 Grm. CO_2.

	Berechnet für $C_5H_9NO_2$	Gefunden		
		I	II	III
C	52·17	51·84	52·49	51·12
H	7·83	7·96	7·71	7·74
N	12·17	12·16		

Leider hatte ich durch die fortgesetzten Reinigungsversuche den grössten Theil meines Materiales eingebüsst, so dass mir schliesslich nur mehr wenige Cubikcentimeter davon zu Gebote standen. In Folge dessen sind die weiter unten zu beschreibenden Versuche nicht so vollständig durchgeführt worden wie es zu wünschen gewesen wäre.

Das Nitroamylen ist, in der oben dargelegten Weise bereitet, ein schwachgelb gefärbtes Öl von eigenthümlichem, starken Geruch, wenig schwerer als Wasser und in diesem unlöslich, mit Alkohol und Aether dagegen in jedem Verhältnisse mischbar. Von Ätzkali wird es nur sehr langsam gelöst und zeigt dann mit Kaliumnitrit und Schwefelsäure deutlich die blaue Farbenreaction V. Meyers gleichzeitig mit einer sehr schwachen rothen. Mit alkoholischem Natron gibt es einen gelben Niederschlag, der seine Entstehung wohl einer tiefergreifenden Zersetzung verdankt, da er weit mehr Natrium enthält als einem Natriumnitroamylen entspricht. Brom vereinigt sich mit Nitroamylen zu einem krystallinischen Bibromür, doch vollzieht sich die Reaction nicht vollkommen glatt, indem Bromwasserstoff gebildet wird. Bei der Behandlung mit Zinnchlorür scheint der Stickstoff des Nitroamylens hauptsächlich als Hydroxylamin abgespalten zu werden, doch liefert das Reductionsproduct mit Chloroform und alkoholischem Kali auch deutlich die Carbylaminreaction, was auf einen Amingehalt hinweist. Die nähere Untersuchung desselben musste ich wegen Mangels an Materal auf einen späteren Zeitpunkt verschieben.

Einwirkung von Wasser. Nach 30stündigem Erhitzen von Nitroamylen mit dem 20fachen Volumen Wasser im zugeschmolzenen Rohre auf 100° verschwand das ursprünglich als schwere Schichte zu Boden gesunkene Öl vollständig, an dessen Stelle waren einige braune Harzflecken ausgeschieden. Aus dem Rohrinhalt konnte durch successive Destillation und Behandlung mit Chlorcalcium ein leichtes Öl abgeschieden werden, das deutlich nach Aceton roch und mit Bisulfitlösung geschüttelt theilweise von dieser aufgenommen wurde und reichlich Krystalle einer Bisulfitverbindung gab. Der ungelöste Theil des Öles war in Wasser schwer, in Alkali leicht löslich und gab dann mit Kaliumnitrit deutlich die rothe Nitrolsäurereaction. Mit Eisenfeile und Essigsäure reducirt entstand ein Amin aus dessen salzsaurer Lösung mittels Platinchlorid mehrere Platindoppelsalzfractionen dargestellt wurden.

0·1511 Grm. der Fraction I gaben 0·0665 Grm. Pt.
0·2148 Grm. der Fraction III gaben 0·0851 Grm. Pt.
0·1312 Grm. der Fraction V gaben 0·0516 Grm. Pt.

Berechnet		Gefunden		
für $(NH_4Cl)_2PtCl_4$	für $(C_2H_5NH_3Cl)_2PtCl_4$	I	III	V
44·24%	39·29%	44·01%	39·61%	39·33%

Es war also Aethylamin gemengt, mit wenig Ammoniak, gebildet worden; Aussehen und Verhalten der Fractionen III—V waren übrigens vollkommen mit dem von Aethylaminchloroplatinat übereinstimmend.

Durch Einwirkung von Wasser auf Nitroamylen entsteht demnach Nitroaethan und ein Keton, das heisst, es tritt eine Spaltung an Stelle der doppelten Bindung ein.

Einwirkung von Salzsäure. Nitroamylen wurde mit dem 5—6fachen Volumen concentrirter Salzsäure durch 15 Stunden erhitzt, wobei sich ziemlich viel eines braunen Harzes abschied. Das Product wurde mit Wasser verdünnt und aus dem Ölbade bis zur Trockene abdestillirt. Durch mehrmals wiederholtes Abdestilliren von neuen Mengen Wasser, wurde der Rückstand von der flüchtigen Säure befreit. Er bestand dann im Wesentlichen aus Salmiak, zeigte aber auch, wenngleich nur sehr

schwach, die Reactionen des Hydroxylamins. Die vereinigten Destillate wurden mit Silbercarbonat digerirt, wodurch drei Fractionen eines Silbersalzes erhalten wurden.

0·1617 Grm. Silbersalz Fraction I lieferten 0·1041 Grm. Ag = 64·38%.

0·1951 Grm. Silbersalz Fraction III lieferten 0·1251 Grm. Ag = 64·12 %.

Für essigsaures Silber berechnet 64·67 %.

Es war also neben Essigsäure keine Säure von höherem Molekulargewichte gebildet worden und hat daher das Nitroamylen bei seiner Zersetzung durch Salzsäure eine vollständige Spaltung erlitten.

Was die anderen bei der Nitrirung des Dimethylaethylcarbinols auftretenden Producte anbelangt, so konnte (in den Waschwassern des rohen Nitroproductes) neben flüchtigen Fettsäuren, Oxalsäure und Dimethylketon auch eine geringe Menge Amylen nachgewiesen werden, welch' letzteres sich leicht in verdünnter Schwefelsäure ($1 Th. H_2O$, $2 Th. H_2SO_4$) löste und demnach wohl Trimethylaethylen war. Nachdem dieses überhaupt leicht aus dem zur Nitrirung verwendeten tertiären Amylalkohol entsteht, darf man es wohl als die Muttersubstanz des Nitroamylens ansehen und für dieses bleiben dann nur die drei Constitutionsformeln

$$
\begin{array}{ccc}
\text{I} & \text{II} & \text{III} \\
CH_3\ \ CH_3 & CH_3\ \ CH_2NO_2 & CH_3\ \ CH_3 \\
\diagdown\ \diagup & \diagdown\ \diagup & \diagdown\ \diagup \\
C & C & C \\
\| & \| & \| \\
CNO_2 & CH & CH \\
| & | & | \\
CH_3 & CH_3 & CH_2NO_2
\end{array}
$$

von welchen I jedenfalls die wahrscheinlichste ist, da substituirende Gruppen immer an das am wenigsten hydrogenisirte Kohlenstoffatom anzutreten pflegen. Eine weitere Bestätigung findet diese Formel in dem Verhalten des Nitroamylens gegen Natron in dem Auftreten der blauen Farbenreaction, welche nach Formel II und III nicht gedeutet werden kann (allerdings

bei I die Annahme einer Sprengung der doppelten Bindung voraussetzt) und schliesslich auch in den Spaltungen durch Wasser und Salzsäure.

Ich beabsichtige noch einige Reactionen des Nitroamylens weiter zu verfolgen, auch die Einwirkung von Salpetersäure auf Hexylen und substituirte Olefine zu studieren und möchte ich mir diesen Gegenstand noch auf kurze Zeit reserviren.

Schliesslich erübrigt mir noch die angenehme Pflicht, Herrn Prof. Lieben für den freundlichen Beistand, den er mir bei Ausführung der vorliegenden Arbeit in Rath und That angedeihen liess, meinen innigsten Dank auszusprechen.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LXXXIII. Band. V. Heft.

ZWEITE ABTHEILUNG.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Mechanik, Meteorologie und Astronomie.

XI. SITZUNG VOM 5. MAI 1881.

In Verhinderung des Vicepräsidenten übernimmt Herr Dr. L. J. Fitzinger den Vorsitz.

Das w. M. Herr Director Dr. Steindachner übersendet zwei Abhandlungen unter dem Titel: „Beiträge zur Kenntniss der Flussfische Südamerika's (III)“ und „Ichthyologische Beiträge (XI).“

Das c. M. Herr Oberbergrath D. Stur in Wien übersendet eine Abhandlung unter dem Titel: „Zur Morphologie der Calamarien“.

Das c. M. Herr Prof. Wiesner übersendet eine von Herrn Dr. Karl Richter im pflanzenphysiologischen Institute der Wiener Universität ausgeführte Arbeit, betitelt: „Beiträge zur genaueren Kenntniss der chemischen Beschaffenheit der Zellmembranen bei den Pilzen.“

Herr Prof. Dr. P. Weselsky übersendet zwei im Laboratorium für analytische Chemie an der technischen Hochschule in Wien ausgeführte Arbeiten:

1. „Über Dinitro- und Trinitroresorcin“, von den Herren Dr. R. Benedikt und Oberlieutenant A. Freiherrn v. Hübl.
2. „Über resorcinsulfosaure Salze“, von Herrn Heinr. Fischer.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. „Über Körper von vier Dimensionen“, von Herrn Prof. Dr. H. Durège in Prag.
2. „Der Strahl als kinematisches Element“, von Herrn F. Wittenbauer, diplom. Ingenieur und Privatdocent an der technischen Hochschule in Graz.

Das w. M. Herr Hofrath R. v. Hochstetter überreicht einen Bericht des Herrn Dr. Aristides Brezina: „Über die Meteoreisen von Bolson de Mapimi.“

Der Secretär Herr Prof. J. Stefan überreicht eine Abhandlung: „Über die Verdampfung aus einem kreisförmig oder elliptisch begrenzten Becken.“

Das w. M. Herr Professor Ad. Lieben überreicht eine von Herrn Dr. Julius Domac in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit „Über das Hexylen aus Mannit.“

Das w. M. Herr Prof. E. Weiss überreicht eine Abhandlung von Herrn Dr. H. Seeliger in Leipzig: „Über die Bewegungsverhältnisse in dem dreifachen Sternsysteme ζ Cancri.“

Herr Dr. J. Holetschek, Adjunct der Wiener Sternwarte, überreicht den zweiten Theil seiner „Bahnbestimmung des Planeten (118) Peitho.“

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Accademia, R. dei Lincei: Atti. Anno CCLXXVII. 1879 bis 1880. Serie terza. Memorie della classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. V, VI, VII & VIII. Roma, 1880; 4°.

Akademie der Wissenschaften, königl. preussische zu Berlin: Monatsbericht. December 1880. Berlin, 1881; 8°.

— kaiserliche Leopoldino-Carolinisch deutsche der Naturforscher: Leopoldina. Heft XVII. Nr. 5—6. Halle a. S. 1881; 4°.

— — Ungarische in Budapest: Almanach für 1881. Budapest, 1881; 8°. — Értesitö. 13. Jahrg. Nr. 7, 8. 14. Jahrg. Nr. 1—8. Budapest, 1879 & 1880; 8°. — Literarische Berichte aus Ungarn. IV. Band, Heft 1—4. Budapest, 1880; 8°. — Revue, Ungarische, 1881, Heft 1 und 2, Leipzig & Wien, 1881; 8°. — Évkönyvei. XVI. Band. 6. Heft. Budapest, 1880. Fol. Szász K., Gróf Széchenyi István és az Akademia megalapitása. Budapest, 1880; 8°.

— — — in Budapest: Értekezések a mathematikai tudományok köréből. VII. Band. Nr. 6—21. Budapest, 1879 & 1880; 8°. — Értekezések a természettudományok köreből. IX. Bd. Nr. 20—25, X. Band, Nr. 1—18. Budapest, 1880; 8°. — Értekezések a mathematikai tudományok köreből. VII. Band, Nr. 6—22. Budapest, 1879 & 1880; 8°.

Apotheker-Verein, allgem. österr.: Zeitschrift nebst Anzeigen-Blatt. XIX. Jahrgang, Nr. 11, 12 & 13. Wien, 1881; 8°.

Chemiker-Zeitung: Central-Organ. Jahrgang V. Nr. 13—17. Cöthen, 1881; 4°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome XCII. Nrs. 13—17. Paris, 1881; 4°.

Gesellschaft, deutsche chemische: Berichte. XIV. Jahrgang. Nr. 6 & 7. Berlin, 1881; 8°.

— deutsche entomologische: Zeitschrift. XXV. Jahrg. (1881.) I. Heft. Berlin, London, Paris, 1881; 8°.

— k. k. geographische in Wien: Mittheilungen. Band XXIV. (N. F. XIV.) Nr. 3. Wien, 1881; 8°.

— österreichische für Meteorologie: Zeitschrift. XVI. Band. April- & Mai-Heft. Wien, 1881; 8°.

— königl. der Wissenschaften zu Göttingen: Abhandlungen. XXVI. Band vom Jahre 1880. Göttingen, 1880; 4°.

— — Göttingische gelehrte Anzeigen. 1880, II. Band. Göttingen; kl. 8°.

— k. k. zoologisch-botanische in Wien: Verhandlungen. Jahrgang 1880. XXX. Band. Wien, 1881; 8°.

Gewerbe-Verein, nied.-österr.: Wochenschrift. XLII. Jahrgang. Nr. 14—17. Wien, 1881; 4°.

Ingenieur- und Architekten-Verein, österr.: Wochenschrift VI. Jahrgang, Nr. 14—17. Wien, 1881; 4°.

Jahresbericht über die Fortschritte der Chemie für 1879. I. und II. Heft. Giessen, 1880; 8°.

Militär-Comité, k. k. technisches u. administratives: Mittheilungen über Gegenstände des Artillerie- und Genie-Wesens. Jahrgang 1881. II. & III. Heft. Wien, 1881; 8°.

Nature. Vol. XXIII, Nos. 598 & 599. London, 1881; 8°.

Reichsanstalt, k. k. geologische: Verhandlungen. Nr. 5, 6 & 7. Wien, 1881; 8°.

— — Jahrbuch. Jahrgang 1881. XXXI. Band, Nr. 1. Januar, Februar, März. Wien, 1881; 8°.

Repertorium für Experimental-Physik, etc. von Dr. Ph. Carl. XVII. Band. 6. Heft. München und Leipzig, 1881; 8°.

Società adriatica di Scienze naturali in Trieste: Bollettino Vol. VI. Trieste, 1881; 8°.

Société Belge de Microscopie: Annales. Tome V. Année. 1878 bis 1879. Bruxelles, 1879; 8°.

Sternwarte, k. k. in Wien: Annalen. Dritte Folge. XXIX. Bd. Jahrgang 1879. Wien, 1880; 8°.

Wiener medizinische Wochenschrift. XXXI. Jahrgang. Nr. 15 bis 18. Wien, 1881; 4°.

Über die Verdampfung aus einem kreisförmig oder elliptisch begrenzten Becken.

Von dem w. M. J. Stefan.

In der Abhandlung: „Versuche über die Verdampfung“ [1] habe ich die Verdampfung einer Flüssigkeit aus einer Röhre untersucht. Auf diesen Fall lässt sich die Theorie der Diffusion der Gase in sehr einfacher Weise anwenden, wenn man annimmt, dass die Oberfläche der Flüssigkeit eben und dass an dem offenen Ende der Röhre der Partialdruck des Dampfes in allen Punkten des Röhrenquerschnittes derselbe ist.

Ist der Verdampfungsprocess stationär, so geht in der Zeiteinheit durch jeden Querschnitt der Röhre dieselbe Dampfmenge. Diese ist der Grösse des Querschnittes proportional. Die auf die Einheit des Querschnittes reducirte Dampfmenge v ist durch die Formel

$$v = -\frac{k}{P-p}\frac{dp}{dx} \qquad 1)$$

bestimmt. k ist der Diffusionscoëfficient des Dampfes und der Luft oder desjenigen Gases, in welchem die Verdampfung stattfindet. p bedeutet den Partialdruck des Dampfes in jenem Querschnitte, welcher durch die in der Richtung der Axe der Röhre gemessene Abscisse x definirt ist. P endlich ist der Gesammtdruck des Gases und Dampfes.

P hat sowohl innerhalb als ausserhalb der Röhre überall denselben Werth. Man kann daher die Gleichung 1) auch in die

[1] Sitzungsberichte LXVIII, 2. Abth. 1873.

Form

$$v = k \frac{d}{dx} \log (P - p) \qquad 2)$$

bringen, und da auch v und k unabhängig sind von x,

$$v = \frac{k}{h} \log \frac{P - p''}{P - p'} \qquad 3)$$

setzen. In dieser Formel bedeutet p' den Partialdruck des Dampfes an der Oberfläche der Flüssigkeit, p'' an dem freien Ende der Röhre, h den Abstand der Oberfläche der Flüssigkeit von dem offenen Ende der Röhre.

Die Formel 3) habe ich mit den Resultaten mehrerer Versuche verglichen und mit denselben in Übereinstimmung gefunden, damit also zugleich den experimentellen Nachweis für die Anwendbarkeit der Formel 1) auf den betrachteten Verdampfungsprocess gegeben.

Die Formel 1) bildet zugleich die Grundgleichung für die mathematische Behandlung der stationären Verdampfungsprocesse überhaupt. Wenn irgend eine Oberfläche einer Flüssigkeit in einer Atmosphäre sich befindet, welche mit dem Dampfe der Flüssigkeit nicht gesättigt ist, so wird aus der Oberfläche Dampf in die Atmosphäre eintreten, und wenn die äusseren Bedingungen es gestatten, auch ein stationärer Zustand der Verdampfung sich einstellen. Dieser wird folgende Eigenthümlichkeiten darbieten.

In der Oberfläche der Flüssigkeit wird der Partialdruck des Dampfes überall denselben Werth haben und zwar dem Sättigungsdrucke gleich sein. Von der Oberfläche nach auswärts wird der Partialdruck abnehmen, jedem bestimmten Werthe desselben wird als geometrischer Ort eine bestimmte Fläche entsprechen, eine Fläche gleichen Druckes oder eine Niveaufläche. Die Bewegung des Dampfes geschieht nach den orthogonalen Trajectorien dieser Flächen, nach den Strömungslinien. Wählt man in irgend einer Niveaufläche ein Element ω, so ist die durch dieses Element in der Zeiteinheit gehende Dampfmenge der Grösse des Elementes proportional und auf die Einheit des Querschnittes reducirt durch die Formel

$$v = -\frac{k}{P - p} \frac{dp}{dn} \qquad 4)$$

bestimmt. Die Differentiation nach n bedeutet die Differentiation nach der Richtung der Normale zur Niveaufläche.

Wenn innerhalb des zu betrachtenden Raumes P constant angenommen, also von der Wirkung äusserer Kräfte, wie der Schwere, abgesehen wird, so kann die Formel 4) durch

$$v = -k \frac{d}{dn} \log \frac{P - p_0}{P - p}$$

ersetzt werden. p_0 bedeutet in dieser Formel gleichfalls eine Constante, den Partialdruck des Dampfes an einer bestimmten Stelle des Raumes. Führt man noch die Bezeichnung

$$U = \log \frac{P - p_0}{P - p} \tag{5}$$

ein, so wird

$$v = -k \frac{dU}{dn}. \tag{6}$$

Aus dieser Formel und aus der Bedingung, dass im stationären Zustande für jedes Volumenelement die in dasselbe eintretende Dampfmenge der aus demselben austretenden gleich ist, ergibt sich nun in bekannter Weise die Gleichung

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{d^2 U}{dy^2} + \frac{d^2 U}{dz^2} = 0. \tag{7}$$

Die Gleichung 6) gilt auch für die Oberfläche der Flüssigkeit, es gibt v, mit einem Elemente dieser Oberfläche multiplicirt, die durch dieses Element ausgehende Dampfmenge und die über alle Elemente ausgedehnte Summe die gesammte Dampfmenge, welche von der Flüssigkeit in der Zeiteinheit ausgesandt wird.

Zu den Gleichungen 6) und 7) kommen noch andere Bedingungen hinzu, welche zur vollständigen Bestimmung von U nothwendig sind. Die erste ist die, dass U in allen Punkten der Oberfläche der Flüssigkeit einen und denselben Werth und zwar einen gegebenen Werth hat. Ist der Raum, in welchem die Diffusion des Dampfes vor sich geht, zum Theil von Wänden umgeben, welche keinen Dampf durchlassen und auch keinen absorbiren, so ist für diese Wände $\frac{dU}{dn} = 0$, wenn n die Richtung der Nor-

male der Wand bedeutet. Sind in dem Raume Flächen vorhanden, durch welche Dampf absorbirt wird, so wird für dieselben U einen bestimmten von der Natur des absorbirenden Körpers abhängigen Werth besitzen.

Die Gleichungen 6) und 7) kommen auch in der Theorie der Wärmeleitung und in der Elektrostatik vor. Ist ein Körper von constant bleibender Temperatur von einem wärmeleitenden Medium umgeben, so gilt für die stationäre Temperatur U in jedem Punkte dieses Mediums die Gleichung 7). In der Oberfläche des Körpers hat U einen constanten Werth. Die Gleichung 6) auf diese Oberfläche angewendet gibt die aus dem Körper austretende Wärmemenge, wenn k das Wärmeleitungsvermögen des Mediums bedeutet.

Befindet sich ein mit Elektricität geladener guter Leiter in einem nicht leitenden Medium, so genügt das Potential U der Ladung in jedem Punkte des Mediums der Gleichung 7). Auf der Oberfläche des Leiters ist dasselbe constant. Die Dichte der Elektricität auf dieser Oberfläche ist durch eine der Gleichung 6) analoge Gleichung bestimmt. Bezeichnet man die Dichte mit ρ, so ist

$$4\pi\rho = -\frac{dU}{dn}, \tag{8}$$

wenn die dielektrische Constante des Mediums der Einheit gleich angenommen wird. Ist diese Constante $= D$, so ist

$$4\pi\rho = -D\frac{dU}{dn}$$

zu setzen.

Die Analogie zwischen den Gleichungen der Theorie der Wärmeleitung und jenen der Elektrostatik ist auch zur Erläuterung der Gesetze der letzteren benützt worden. Die Vorgänge der Verdampfung bieten ein noch anschaulicheres Mittel zu solchen Erläuterungen.

Es können aber auch umgekehrt die Lösungen elektrostatischer Aufgaben zur Berechnung von Verdampfungsprocessen verwendet werden. Es ist dies jedoch nur in jenen Fällen möglich, in welchen ausser den Grundgleichungen auch die Grenzbedingungen in Übereinstimmung stehen.

Einen solchen Fall bietet die Verdampfung von dem benetzten Gefässe eines im freien Raume aufgestellten Psychrometers dar. Bei der Entwicklung der Theorie dieses Instrumentes ist auch von Maxwell zuerst die Analogie zwischen den Gleichungen der Elektrostatik und jenen der Diffusionstheorie zur Anwendung gebracht worden.

Ich muss hier bemerken, dass die von Maxwell benützten Gleichungen von den in dieser Abhandlung aufgestellten verschieden sind. Es liegt denselben nicht die Formel 1) zu Grunde, sondern die einfachere

$$v = -\frac{k}{P}\frac{dp}{dx}.$$

Diese Formel kommt bei der Berechnung der über die Diffusion der Gase angestellten Versuche zur Anwendung. Sie gilt jedoch nur für solche Diffusionsvorgänge, bei welchen zwei Gase so durcheinander sich bewegen, dass durch jede Ebene ebensoviele Moleküle des einen Gases nach der einen Seite hin treten, als Moleküle des anderen Gases nach der entgegengesetzten. Bei den Verdampfungsprocessen ist dies nicht der Fall, indem aus der Oberfläche der Flüssigkeit wohl Dampf austritt, aber nicht umgekehrt auch Luft oder ein anderes Gas in die Flüssigkeit eintritt. Bei der stationären Verdampfung ist nur der Dampf allein in Bewegung, die übrigen Bestandtheile der Atmosphäre sind in Ruhe. Letzterer Umstand hat zur Folge, dass die von der gewöhnlichen Diffusionsgleichung abweichende Formel 1) angewendet werden muss. Übrigens werden beide Formeln gleich, wenn man p gegen P vernachlässigt, was in den Fällen, in denen es sich um die Verdampfung des Wassers bei niedriger Temperatur und in der gewöhnlichen Atmosphäre handelt, wohl ohne merklichen Fehler geschehen darf.

Ich gehe nun zu der in der Überschrift dieser Abhandlung bezeichneten Aufgabe über. Ich will dieselbe noch näher in folgender Weise charakterisiren.

In einer unendlichen Ebene, welche keinen Dampf aussendet, auch keinen absorbirt oder durchlässt, befindet sich eine

Vertiefung, welche mit einer Flüssigkeit derart gefüllt ist, dass das Niveau der Flüssigkeit mit dieser Ebene zusammenfällt. Die Flüssigkeit verdampft in die oberhalb der Ebene befindliche, unbegrenzte Luft. Es soll die Dampfmenge berechnet werden, welche in der Zeiteinheit aus der Flüssigkeit in die Atmosphäre übergeht, vorausgesetzt, dass die Verdampfung im stationären Zustande sich befindet.

Das elektrostatische Analogon zu dieser Aufgabe bildet die Bestimmung der Vertheilung der Elektricität auf einer unendlich dünnen leitenden Platte im Zustande des Gleichgewichtes. Wird eine solche Platte mit einer Elektricitätsquelle von constantem Potential U_1 durch einen sehr dünnen Draht in leitende Verbindung gebracht, so geht auf dieselbe Elektricität über. Diese stellt sich ins Gleichgewicht, in dem sie auch nach Entfernung des Leitungsdrahtes bleibt. Das Potential hat auf der Platte den constanten Werth U_1. Diesem Werthe ist auch die von der Platte aufgenommene Elektricitätsmenge E proportional. Es ist

$$E = CU_1.$$

C ist die elektrische Capacität der Platte.

Denkt man sich nun eine solche aus einer Flüssigkeit bestehende Platte, welche in der allseitig unbegrenzten Luft schwebt, so wird in Folge der durch die Gleichungen 6) und 8) zwischen ρ und v gegebenen Beziehung, die aus der Platte austretende Dampfmenge V durch Multiplication von E mit $4\pi k$ gefunden. Dieselbe wird also durch

$$V = 4\pi k C U_1$$

gegeben sein. Darin bedeutet dann U_1 den Werth von $\log \frac{P-p_0}{P-p}$ an der Oberfläche der Flüssigkeit. Es ist also

$$U_1 = \log \frac{P-p_0}{P-p_1},$$

wenn p_1 den Sättigungsdruck des Dampfes bezeichnet.

Da das elektrische Potential der Platte die Eigenschaft hat, in unendlicher Entfernung von der Platte gegen Null zu convergiren, und diese Eigenschaft eine Art Grenzbedingung dar-

stellt, so ist auch die durch die Gleichung 5) definirte Grösse U so zu wählen, dass sie dieser Bedingung entspricht. Dies ist der Fall, wenn man für p_0 den Werth jenes Partialdruckes setzt, welchen der Dampf in sehr grosser Entfernung von der Platte besitzt. Gehört der Dampf nicht zu den Bestandtheilen der Atmosphäre, so ist $p_0 = 0$.

Legt man durch die Platte und parallel zu ihr eine Ebene, so scheidet diese den Raum in zwei bezüglich der in ihnen enthaltenen Dampfströmungen symmetrische Hälften. Durch diese Ebene selbst bewegt sich kein Dampf, sie kann also auch durch eine feste für den Dampf undurchdringliche Wand ersetzt werden, ohne dass dadurch die Verdampfung und Diffusion auf der einen, etwa der oberen Seite, gestört wird. Eine solche Störung tritt nun auch nicht ein, wenn man die Wand und die Flüssigkeitsschichte nach unten in beliebiger Weise verdickt und die letztere auch mit einer festen Wand umgibt.

Die aus der oberen Fläche der Flüssigkeit austretende Dampfmenge beträgt die Hälfte derjenigen, welche die nach beiden Seiten verdampfende Flüssigkeitsplatte aussendet. Es ist also

$$V = 2\pi k C U_1 = 2\pi k C \log \frac{P - p_0}{P - p_1}. \qquad 9)$$

Für eine kreisförmige Platte ist die elektrische Capacität

$$C = \frac{2a}{\pi}, \qquad 10)$$

wenn a den Radius des Kreises bedeutet. Es ist demnach die Verdampfungsmenge für ein kreisförmiges Becken durch

$$V = 4ak \log \frac{P - p_0}{P - p_1} \qquad 11)$$

oder, wenn p_0 und p_1 klein sind im Vergleiche zu P, durch

$$V = \frac{4ak(p_1 - p_0)}{P}. \qquad 12)$$

bestimmt. Die Verdampfungsmenge ist demnach nicht, wie gewöhnlich angenommen wird, dem Flächeninhalte des Beckens, sondern dem Umfange desselben proportional.

Die nahe dem Rande liegenden Theile der Oberfläche der Flüssigkeit senden viel mehr Dampf aus als die in der Mitte liegenden. Die Strömungslinien, welche aus den ersteren austreten, divergiren und die Flächen gleichen Druckes liegen hier näher aneinander als über der Mitte, aus welcher die Strömungslinien nahezu parallel zu einander austreten.

Man sollte nun erwarten, dass die Verdampfung aus einem elliptisch begrenzten Becken eine viel stärkere sein muss, als die aus einem kreisförmigen von gleichem Flächeninhalte. Es ist dies jedoch nur für solche Ellipsen der Fall, für welche die grosse Axe vielmal grösser ist als die kleine. Sonst ist die Verdampfung aus einer elliptisch begrenzten Fläche nur sehr wenig grösser als aus einer kreisförmigen. Der Grund davon liegt darin, dass die Krümmung der Ellipse in einem grossen Theile derselben eine kleinere und desshalb auch die Divergenz der Strömungslinien, welche aus den Randtheilen austreten, eine geringere ist als beim Kreise.

Die elektrische Capacität einer elliptischen Platte ist

$$C = \frac{a}{K}. \qquad 13)$$

a bedeutet die halbe grosse Axe der Ellipse, K aber das complete elliptische Integral erster Art, dessen Modul die numerische Excentricität der Ellipse ist. Es ist also

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2\varphi}}$$

und

$$\varepsilon^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2} = \frac{e^2}{a^2},$$

wenn b die halbe kleine Axe und e die halbe Entfernung der beiden Brennpunkte der Ellipse darstellt.

Für kleine Werthe von ε kann man zur Berechnung von K die Reihe

$$K = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{9\varepsilon^4}{64} + \frac{25\varepsilon^6}{256} + \ldots\right)$$

verwenden.

In den Ausdruck (13) für die Capacität der Ellipse will ich statt der grossen Axe den Flächeninhalt F der Ellipse einführen. Es ist

$$F = \pi ab = \pi a^2 \sqrt{1-\varepsilon^2}$$

und daraus

$$a = \sqrt{\frac{F}{\pi}} . (1 + \frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{5\varepsilon^4}{32} + \frac{15\varepsilon^6}{128} + \ldots)$$

und

$$C = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{F}{\pi}} (1 + \frac{\varepsilon^4}{64} + \frac{\varepsilon^6}{64} + \ldots).$$

Man kann also für kleine Werthe von ε in grosser Annäherung

$$C = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{F}{\pi}}$$

setzen. Dieser Ausdruck gibt aber zugleich, wie die Vergleichung mit der Formel 10) lehrt, die Capacität einer kreisförmigen Platte von dem Flächeninhalte F.

Für eine langgestreckte Ellipse kann man K nach der Formel

$$K = \frac{1}{\varepsilon} \log \frac{4e}{b}$$

berechnen. Was den Grad der Genauigkeit, den diese Formel bietet, anbetrifft, so ist zu bemerken, dass bei der Ableitung derselben $\frac{b^4}{a^4}$ gegen die Einheit vernachlässigt wurde. Berechnet man z. B. K und F für eine Ellipse, deren grosse Axe viermal länger ist als die kleine, so findet man die Capacität einer solchen elliptischen Platte 1·11mal so gross als die einer kreisförmigen von gleichem Inhalte. Daraus ist zu ersehen, dass in einem ziemlich weiten Intervalle die Capacität einer elliptischen Platte von jener einer gleich grossen kreisförmigen nur wenig verschieden ist.

In meinen Bemerkungen über die Theorie des Psychrometers [1] habe ich auf die analoge Beziehung zwischen der Capacität eines verlängerten Rotationsellipsoides und jener einer Kugel

[1] Meteorologische Zeitschrift 1881, Mai.

von gleicher Oberfläche hingewiesen. Dieselbe Beziehung besteht auch für abgeplattete Ellipsoide. Die Capacität einer kreisförmigen Platte verhält sich zu der Capacität einer Kugel von gleicher Oberfläche wie 9 zu 10.

Es mag hier noch bemerkt werden, dass die Grösse C für eine Platte von beliebiger Form auch experimentell bestimmt, dass also auch die Verdampfungsmenge für eine beliebig gestaltete Flüssigkeitsfläche durch einen elektrometrischen Versuch gefunden werden kann.

Im Vorhergehenden ist die Verdampfung für die ganze kreisförmig oder elliptisch begrenzte Oberfläche bestimmt worden. Es lässt sich dieselbe jedoch für jeden einzelnen Theil derselben berechnen.

Wenn sich auf einer kreisförmigen Platte Elektricität im Gleichgewichte befindet, so ist die Dichte derselben ρ in einem Punkte, dessen Entfernung vom Centrum $= r$ ist, gegeben durch

$$\rho = \frac{Q}{2\pi a \sqrt{a^2 - r^2}},$$

wenn Q die auf der einen Seite der Platte vorhandene Elektricitätsmenge bedeutet.

In analoger Weise ist die auf die Flächeneinheit bezogene Verdampfungsmenge v in der Entfernung r vom Mittelpunkte bestimmt durch

$$v = \frac{V}{2\pi a \sqrt{a^2 - r^2}},$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $2\pi r dr$ und integrirt sie sodann von $r = 0$ bis $r = r$, so erhält man die Dampfmenge V_1, welche aus dem inneren bis zum Radius r reichenden Theile der Scheibe aufsteigt. Es ist

$$V_1 = V\left(1 - \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}\right).$$

Die Strömungslinien, in welchen der Dampf aus der Flüssigkeit aufsteigt, sind Hyperbeln, deren gemeinschaftlicher Mittel-

punkt mit dem des Kreises zusammenfällt, deren Brennpunkte in der Peripherie des Kreises liegen. Die Strömungslinien, welche aus sämmtlichen Punkten der Peripherie des Kreises vom Radius r austreten, geben ein Rotationshyperboloid als Strömungsfläche. Diese hat wie alle Strömungsflächen die Eigenschaft, dass durch dieselbe kein Dampf von der einen auf die andere Seite tritt. Man kann also, ohne die Verdampfung aus der Fläche vom Radius r zu stören, diese Stromfläche durch eine feste Wand und auch den ganzen Raum ausserhalb derselben durch einen festen Körper ersetzen. Durch die obige Formel für V_1 ist also zugleich die Verdampfungsmenge für eine kreisförmig begrenzte Flüssigkeitsfläche, welche tiefer liegt, als die feste Umgebung, bestimmt. Diese Bestimmung gilt allerdings nur für den besonderen Fall, dass die feste Umgebung in der Form eines Hyperboloides aus der Flüssigkeit aufsteigt.

Setzt man den durch 11) gegebenen Werth von V in die Formel für V_1 ein, so erhält man

$$V_1 = 4k \log \frac{P-p_0}{P-p_1} \cdot (a - \sqrt{a^2 - r^2}). \qquad 14)$$

In dieser Formel bedeutet a die Entfernung eines Brennpunktes des Hyperboloides von dem Mittelpunkte desselben. Man kann dieser Formel noch eine andere Gestalt geben, wenn man statt a die halbe kleine Axe h der Hyperbel einführt. Es ist

$$a^2 = h^2 + r^2,$$

somit

$$V_1 = 4k \log \frac{P-p_0}{P-p_1} (\sqrt{h^2 + r^2} - h). \qquad 15)$$

Errichtet man im Scheitel der Hyperbel eine Senkrechte und zieht aus dem Mittelpunkte die Asymptote zur Hyperbel, so wird die Senkrechte in der Höhe h von der Asymptote geschnitten. Es bildet also h ein Mass für die Tiefe des Flüssigkeitsniveau's unter der festen Umgebung.

Ist h klein gegen r, so dass h^2 gegen r^2 vernachlässigt werden kann, so lässt sich die Formel 15) so aussprechen, dass durch die Vertiefung des Niveau's der Flüssigkeit um h die Verdampfung im Verhältnisse von $r-h$ zu r vermindert wird.

Zu bemerken ist noch, dass, wenn h sehr gross ist gegen r, die Verdampfungsmenge zu dem Quadrate von r im directen, zu h im verkehrten Verhältnisse steht, analog wie bei der Verdampfung einer Flüssigkeit aus einer Röhre.

Sowie bei einer kreisförmigen, lässt sich auch bei einer elliptischen Fläche die Verdampfungsmenge für die einzelnen Theile berechnen, da ja auch für diesen Fall das Gesetz bekannt ist, nach welchem die Elektricität auf einer elliptischen Platte im Zustande des Gleichgewichtes vertheilt ist.

Der Umstand, dass die Verdampfungsmenge für ein Becken nicht dem Flächeninhalte, sondern der Quadratwurzel aus diesem Flächeninhalte proportional ist, hat zur Folge, dass die Verdunstung grosser Wasserflächen eine relativ geringere ist, als jene der kleinen. Es mag hier noch hinzugefügt werden, dass dies nicht nur für die Verdunstung durch Diffusion, sondern auch für die Verdunstung durch Convection gilt. Bewegt sich ein Luftstrom über eine Wasserfläche, so wird er nur anfänglich, nachdem er über die Grenze derselben getreten ist, grössere Mengen Wasserdampf aufnehmen, bei seinem weiteren Fortschreiten aber die Verdunstung nicht mehr viel fördern können.

Elektrostatische Untersuchungen, insbesondere über die Verzweigung der Induction beim Differential-Inductometer und Elektrophor.

Von Dr. **James Moser.**

(Vorgelegt in der Sitzung am 7. April 1881.)

Das Differential-Inductometer.

Als Faraday im Jahre 1838 seine Versuche über die specifische Inductionscapacität durchgeführt und so im Wesentlichen die sechs Jahrzehnte älteren Forschungen von Cavendish wiederholt hatte, gab er am Schlusse seiner Abhandlung einen Apparat an zur Bestimmung dieser specifischen Inductionscapacität: das Differential-Inductometer.

Dieses soll zwar als Ausgangspunkt der vorliegenden Untersuchung dienen, doch wird zunächst und der Hauptsache nach nur von der elektrostatischen Induction in einem einzigen Medium, der Luft, also nicht von specifischer Induction, die erst bei der Vergleichung mehrerer Media in Frage kommen könnte, die Rede sein.

Den erwähnten Apparat beschreibt Faraday in den Experimental-Researches, §. 1307 „Drei kreisförmige Metallplatten von etwa 5 Zoll Durchmesser wurden parallel neben einander auf isolirenden Stützen aufgestellt. Die mittlere *A* war fest, die beiden äusseren *B* und *C* auf Schlitten beweglich, so dass sie mit ihren Seitenflächen fast zur Berührung oder in beliebige Entfernung gebracht werden konnten. Zwei Goldblättchen hingen an isolirten Drähten in einer Glasflasche; eine der äusseren Platten *B* war mit dem einen Goldblättchen, die andere mit dem anderen verbunden. Die äusseren Platten *B* und *C* waren in einem Abstand von $1^1/_4$ Zoll von der mittleren Platte *A* aufgestellt und die Goldblättchen 2 Zoll von einander entfernt. Die Mittelplatte *A* wurde

schwach elektrisch geladen, die äusseren Platten *B* und *C*, beide gleichzeitig zur Erde abgeleitet und dann dauernd isolirt. In diesem Stadium war *A* positiv geladen als Inductor und *B* und *C* negativ als Inducenden.[1] In beiden Zwischenräumen befand sich ein und dasselbe Dielektricum, Luft; die Goldblättchen hingen in relativ unelektrischem Zustande parallel herab.“

Während Faraday nun das Verhältniss der Induction von *A* auf *B* zu der Induction von *A* auf *C* durch Zwischenfügung verschiedener Dielektrica beeinflusste, liess ich dasselbe dadurch variiren, dass ich die Entfernung der Platten *B* und *C* von *A* vermehrte oder verminderte. Faraday brachte in den einen Raum zwischen der Mittelplatte *A* und der einen Aussenplatte *B* eine Schellackscheibe. Dann näherten sich die Goldblättchen einander und entfernten sich wieder beim Hinwegnehmen der Schellackscheibe. Diese Anziehung rührt nach seiner Auffassung daher, dass die Induction dort, wo der Schellack sich befindet, stärker ist, dass *A* auf der Platte *B* mehr negative Elektricität inducirt. Es wird daher *B* auf der *A* abgewandten Seite nebst seinem Goldblättchen positiv. Dagegen wird auf der anderen Aussenplatte *C* weniger negative Elektricität inducirt und diese daher auf ihrer Aussenseite nebst dem mit ihr verbundenen Goldblättchen negativ. So ziehen sich die Goldblättchen an.

Zu meinen Versuchen nahm ich drei Zinkplatten von 30 Ctm. Durchmesser und benutzte theils eine Glasflasche, wie die oben beschriebene mit den beiden isolirten Goldblättchen, zum Theil aber auch zwei Elektroskope. Von diesen Elektroskopen wurde das eine mit der einen, das andere mit der anderen Aussenplatte verbunden; dann liess sich die Art der Elektricität, welche sich auf der Platte befand, leicht bestimmen.

Von der Einrichtung dieser Elektroskope möchte ich einige Einzelheiten, die ich für elektrostatische Untersuchungen von Interesse halte, noch erwähnen. Die Isolation des Drahtes, der die Goldblättchen trug, bewirkte ich einfach dadurch, dass ich ihn durch ein Ebonitröhrchen von 5 Mm. äusserem Durchmesser und 1 Mm. Öffnung steckte. Um die Klemmschrauben zu ver-

---

[1] Ich übersetze Faraday's inductric body, den inducirenden Körper mit Inductor und Faraday's inducteous body, den inducirten Körper mit Inducendus Exp. Res. §. 1483.

meiden, deren zahlreiche Kanten bei elektrostatischen Versuchen störend sind, war zur Befestigung der Zuleitungsdrähte die Kugel jedes Elektroskopes konisch von $^3/_4$ auf $^1/_2$ Mm. durchbohrt; in diese Durchbohrung wurde der Draht einfach hineingesteckt. Auf dem Gefässe des Elektroskopes darf sich keine Elektricität festsetzen; ich nahm daher zwar ein gewöhnliches cylindrisches Glas, 15 Ctm. hoch, 10 Ctm. weit, legte aber einen 3 Ctm. breiten Stanniolstreifen um das Glas parallel der Fläche der Goldblättchen innen und aussen herum, so dass er also zur Erde abgeleitet war. So inducirte die Elektricität der Blättchen die entgegengesetzte hauptsächlich im Stanniolstreifen und bei zu starker Ladung flogen die Blättchen gegen letzteren Streifen, der sie entlud. Das Glas war durch einen Holzdeckel verschlossen; in diesem steckte das den Draht umschliessende Ebonitröhrchen. Jede Zinkscheibe war vertikal auf einem horizontalen rechtwinkeligen *Z* aus Siegellack befestigt. Die drei *Z* griffen in einander über, so dass die Scheiben bis auf 1, 5 Ctm. Entfernung einander genähert werden konnten.

Die drei Platten des Differential-Inductometers sind aufzufassen als zwei Condensatoren, welche eine Platte, die Collectorplatte, gemeinsam haben. Von dieser als Inductor beginnt die Induction und endet auf den beiden seitlichen Condensatorplatten als Inducenden.

Verzweigung der Induction.

Was für die fliessende Elektricität die Verzweigung des Stromes ist, das ist für die ruhende Elektricität diese Anordnung: eine V e r z w e i g u n g d e r I n d u c t i o n.

Doch will ich, ehe ich in der physikalischen Betrachtung fortfahre, die sonst hypothetisch erscheinen würde, das mathematische Gesetz aus der Potentialtheorie ableiten.

Wenn wir das Differential-Inductometer aus zwei Condensatoren gebildet betrachten, so stellt sich die gesammte Elektricitätsmenge E auf der Mittelplatte aus zwei Theilen e_1 und e_2 zusammengesetzt dar:

$$E = e_1 + e_2 \qquad 1)$$

so dass der eine Theil e_1 die Ladung des einen, e_2 die Ladung des zweiten Condensators ist.

Die Grösse jedes dieser Theile finden wir auf folgende Weise: Nach Green[1] ist die Ladung e eines ebenen Condensators, dessen Platten die Oberfläche S und den Abstand r haben, wenn auf der einen die Potentialfunction den Werth V annimmt und die andere zur Erde abgeleitet ist.

$$e = \frac{VS}{4\pi r}$$

Bei der Entwicklung dieser Formel ist vorausgesetzt, dass r klein ist gegen den Durchmesser der Platten, eine Voraussetzung, auf die ich nachher noch zurückkommen werde.

Diese Formel wenden wir auf die beiden Condensatoren des Differential-Inductometers an. Alle drei Platten haben gleiche Oberfläche S, die mittlere das Potentialniveau V, die beiden äusseren sind zur Erde abgeleitet. Der Plattenabstand des einen Condensators mit der Ladung e_1 sei r_1, der des anderen mit der Ladung e_2 sei r_2. Dann ist:

$$e_1 = \frac{VS}{4\pi r_1}$$

und

$$e_2 = \frac{VS}{4\pi r_2}.$$

Und es verhält sich demnach:

$$e_1 : e_2 = \frac{1}{r_1} : \frac{1}{r_2} \qquad 2)$$

d. h. es ist die Ladung umgekehrt proportional dem Plattenabstand. Die Grösse der beiden Ladungen ergibt sich unmittelbar aus den Gleichungen 1) und 2). Ihnen zufolge ist die Ladung des einen

$$e_1 = \frac{r_2}{r_1 + r_2} E \qquad 3)$$

und die des anderen

$$e_2 = \frac{r_1}{r_1 + r_2} E. \qquad 4)$$

---

[1] Green Essay, §. 8. Thomson Papers, §. 53.

Diese Formeln, welche mit den Formeln für die Verzweigung eines Stromes gleichlauten, sind nur streng richtig für unendlich grosse Platten. Dann besagen sie, dass die Inductionscapacitäten der beiden Condensatoren, welche das Differential-Inductometer bilden, sich umgekehrt wie die Plattenabstände verhalten. Wenn wir den umgekehrten Werth der Inductionscapacität mit Inductionswiderstand bezeichnen, wie die Leitungsfähigkeit der umgekehrte Werth des Leitungswiderstandes ist, dann wären in dem Falle unendlich grosser Platten die Inductionswiderstände den Abständen der Platten einfach proportional. In diesem Falle unendlich grosser Platten wären die Niveauflächen Ebenen, die den Platten parallel sind, und die Kraftfäden auf ihnen senkrechte Cylinder.

Dieser Fall der Elektrostatik würde in den entsprechenden der Elektrodynamik übergehen, wenn zwischen den Platten sich eine leitende Flüssigkeit befände. Würden dann die Platten auf den bisherigen Potentialniveaux etwa durch eine Batterie erhalten, so würde ein Strom von der Mittelplatte aus durch die Flüssigkeit zu den beiden Seitenplatten sich verzweigen, so dass die Mittelplatte Anode und die Seitenplatten Kathoden wären. Und zwar fände dann die Verzweigung so statt, dass die Stärken der beiden Zweigströme sich umgekehrt wie die Widerstände verhielten oder da diese den Abständen proportional wären, auch im umgekehrten Verhältniss der Abstände sein würden.[1] In dieselbe Ungenauigkeit, welche wir begehen, wenn wir den Satz, dass der Strom sich im umgekehrten Verhältniss der Plattenabstände verzweigt, von unendlich grossen Platten übertragen würden auf grosse Kreisplatten, die in leitender Flüssigkeit sich befinden — in dieselbe Ungenauigkeit verfallen wir in der Elektrostatik, wenn wir die für unendliche Platten abgeleiteten Gleichungen auf das Differential-Inductometer anwenden. Der Fall, welcher in der Elektrodynamik dem Differential-Inductometer entspricht, welches wir als einen Apparat zur Verzweigung der elektrostatischen Induction betrachteten, wäre also der der Stromverzweigung zwischen drei Kreisplatten. Denken wir uns das Differential-

[1] Vergl. Ströme zwischen Platten in Wiedemann, Galvanismus, S. 116.

Inductometer in eine leitende Flüssigkeit getaucht und die vorhandenen Potentiale dauernd unterhalten, dann flösse ein Strom von der Mittelplatte als Anode zu den Seitenplatten als Kathoden. Noch mehr, construirten wir in beiden Fällen das System der Flächen gleichen Potentiales, so müsste, wenn ihre Gleichung

$$V = \text{const.}$$

wäre, V in beiden Fällen bei der Stromverzweigung und bei dem Differential-Inductometer derselben Differentialgleichung genügen und dieselben Grenzbedingungen erfüllt werden. So bekommen wir in beiden Fällen dasselbe System von Niveauflächen und ihre selben Normalen sind das eine Mal als Kraftlinien, das andere Mal als Stromlinien aufzufassen. Je grösser die Platten werden, um so mehr nähert sich der Theil der Niveauflächen zwischen den Platten Ebenen, welche diesen parallel sind, und um so gerader werden die Kraftlinien.

In denselben Linien findet also Induction und Leitung statt. Nehmen wir, um eine bestimmte Vorstellung zu haben, als Zwischenschicht des Condensators, wie Faraday es that, Wallrath, so finden wir mit ihm, „dass Wallrath ein Dielektricum ist, durch welches Induction statt hat (Exp. Res., §. 1322), dass Wallrath aber auch ein Leiter, jedoch in so geringem Grade ist, dass durch seine Masse der Process der Leitung Schritt für Schritt verfolgt werden kann. Hier scheint die Induction eine nothwendige Vorbedingung der Leitung zu sein (§. 1323)“.

Und wenn Faraday auch nicht die Verzweigung der Induction, wie wir es eben gethan haben, in die Formeln fassen konnte, die mit denen der Verzweigung des Stromes übereinstimmen, so hat er doch diese Übereinstimmung in seiner Vorstellung gehabt. Dass er diese Vorstellung nicht formuliren konnte, das eben war die Ursache, dass er missverstanden wurde, und dies ist der Grund, der mich veranlasst, auf den Punkt näher einzugehen.

Faraday ersetzt in einem Falle elektrostatischer Induction, die durch Luft stattfindet, einen Theil der Luft durch Schwefel und findet, dass jetzt durch den Schwefel stärkere Induction statt hat, als bisher durch die Luft, welche der Schwefel verdrängt. Jetzt vergleicht er diesen Fall mit einer Stromverzweigung in

schlechten Leitern, deren einen er mit einem gut leitenden Draht vertauscht. Dann fliesst durch den Draht ein stärkerer Strom als bisher durch den schlechten Leiter, an dessen Stelle der Draht getreten ist und durch die an ihrem Platze gebliebenen schlechten Leiter strömt so viel Elektricität weniger, als mehr durch den Draht. Das ist der Sinn der Faraday'schen Worte: „amongst insulating dielectrics some lead away the lines of force from others, as the wire will do from worse conductors (§. 1331): unter isolirenden dielektrischen Medien leiten einige die Kraftlinien von anderen ab, wie der Draht es thun wird von schlechteren Leitern".

Von dieser Auffassung des Differential-Inductometers, als einer Verzweigung der elektrostatischen Induction will ich in Folgendem einige Anwendungen der Betrachtung unterziehen.

Methode zur Bestimmung der Inductionscapacität.

Die Methoden der Bestimmung des Leitungswiderstandes lassen sich, so weit sie auf Stromverzweigung beruhen, in elektrostatische Verfahren zur Messung der Inductionscapacität übertragen. Bei der zuerst von Christie angegebenen Wheatstone'schen Brücke z. B. bestimmen wir einen unbekannten Widerstand als vierte Proportionale zu drei bekannten Widerständen. Zu diesem Zweck wird der Strom verzweigt zwischen einer Stelle hohen Potentials und einer Stelle niederen Potentials, und zwei Punkte, je einer auf jedem der Zweige werden so bestimmt, dass diese beiden Punkte gleiches Potentialniveau haben, dass sie also die Widerstände der beiden Zweige in gleichem Verhältniss theilen. Dann fliesst durch ein, zwischen diese Punkte geschaltetes Galvanometer kein Strom. Bei dem Differential-Inductometer ist der Anfang der Verzweigung die mittlere Inductorplatte, deren Potentialniveau wir mit V bezeichneten und das Ende der Verzweigung sind die beiden seitlichen Inducendenplatten, auf welchen die Potentialfunction gleich Null ist. Zwischen die Inductorplatte und jede der Inducendenplatten schalten wir jetzt je eine metallische Zwischenplatte so ein, dass diese beiden Zwischenplatten gleiches Potentialniveau haben, dass also wieder vier Abschnitte entstehen. deren Inductionscapacitäten paarweise einander proportional sind. Wird die Inductionscapacität eines

dieser Abschnitte dadurch geändert, dass ein anderes Dielektricum als Luft eingefügt wird, so muss auch die Capacität eines zweiten geändert werden, damit die anfänglich vorhandene Proportion wieder hergestellt werde. Die Änderung der Capacität dieses zweiten Abschnittes bewirken wir, indem wir die Entfernung der ihn begrenzenden Platten variiren, bis die ursprüngliche Gleichheit der Potentialniveaux der beiden Zwischenplatten wieder erreicht ist, was wir daran erkennen, dass ein, zwischen letztere Platten gefügtes Quadranten-Elektrometer keinen Ausschlag aufweist. So ist die Bestimmung der Inductionscapacität auf eine Längenmessung zurückgeführt. Im Wesentlichen diese Methode, die sich mir bei dieser Untersuchung ergab, haben Maxwell und Sir William Thomson, wie ich aus dem neu erschienenen Werke des Herrn Gordon ersehe, ihm für seine im vorigen Jahre in den Philosophical Transactions veröffentlichten Messungen der Inductionscapacität empfohlen.

Theorie des Elektrophors.

Eine weitere Anwendung der Verzweigung der Induction finden wir im Elektrophor. Indem ich dessen Theorie jetzt ableiten und dabei namentlich in die Discussion über die Zahl der elektrisch wirksamen Schichten eintreten will, gehe ich von Faraday's Differential-Inductometer aus. Eine solche Theorie des Elektrophors, welche die Faraday'sche Auffassung berücksichtigt, ist noch nicht gegeben. Faraday entwickelt sie nicht und auch Maxwell, der den Elektrophor nicht symmetrisch als Ebonitplatte mit zwei beweglichen Metallbelegungen, sondern nur in der unsymmetrischen Form betrachtet, als aus einer Ebonitplatte, deren Rückseite mit Metall bekleidet ist, und aus nur einer beweglichen Metallplatte bestehend, tritt in die Frage, wie viel Schichten elektrisch wirksam sind, nicht ein.

Auf eigenem Wege erhalten wir so eine Theorie des Elektrophors und gelangen auf ihm zu einem festen Standpunkt den verschiedenen Theorien gegenüber, welche auf Grund der elektrischen Fernwirkung aufgestellt und in der Sprache dieser Influenztheorie ausgedrückt sind. Am meisten werden wir uns derjenigen dieser Theorien nähern, die in neuerer Zeit zuletzt von Herrn von Bezold (Pogg. Ann. 143) vertreten worden ist.

Der Elektrophor, wie ich ihn betrachte, ist also symmetrisch angeordnet, ist eine nicht leitende Platte mit zwei beweglichen Belegungen und könnte also auch als Franklin'sche Tafel, als Leydener Flasche oder als Condensator dienen. Mein Elektrophor bestand aus einer kreisförmigen Ebonitplatte von $1^1/_2$ Mm. Dicke und 30 Ctm. Durchmesser. Den gleichen Durchmesser hatten die Belegungen aus Zink, an deren einer ein Ebonitstiel befestigt war. (Zu weiteren Versuchen dienten noch drei gleiche und andere dünnere Platten von Ebonit, auch weitere von Zink in ähnlicher Grösse.)

Das Einfachste ist nun die Annahme, dass die Ebonitplatte, sobald sie, auf der einen abgeleiteten Metallbelegung ruhend, mit einem Fuchsschwanz gepeitscht wird, nur auf ihrer oberen Fläche negativ elektrisch werde. Dann beginnt die Induction von dieser negativen Schicht der Ebonitplatte als Inductor. Der Inducendus, auf welchem sie endet, ist die unten liegende abgeleitete Metallplatte. Nach Auflegung und Ableitung der oberen Metallplatte verzweigt sich aber die Induction wieder von der negativen oberen Schicht der Ebonitplatte als Inductor aus und erstreckt sich nach beiden Metallplatten als Inducenden.

Ist, wie wir angenommen haben, nur eine Inductorschicht beim Elektrophor, und zwar diese negative auf der oberen Fläche der Ebonitplatte vorhanden, so würde das Differential-Inductometer als Schema des Elektrophors betrachtet werden können. Die negative Schicht des Elektrophors würde die negativ geladene mittlere Inductorplatte des Differential-Inductometers darstellen und die beiden Metallbelegungen des einen Apparates den beiden Metallbelegungen des anderen entsprechen. Noch mehr, diese Übereinstimmung der beiden Apparate erscheint vollständiger, wenn wir das Differential-Inductometer als Elektrophor zur Elektricitätserzeugung benutzen. Wir können die eine Platte des Differential-Inductometers dauernd zur Erde ableiten, die andere nähern aus ihr einen negativen, sie dann entfernen und aus ihr einen positiven Funken ziehen.

Aber ein Unterschied zeigt sich jetzt und beweist die Unzulänglichkeit unseres bisherigen Schemas.

Beim Differential-Inductometer ist es vollständig gleichgiltig, ob wir die rechte Seitenplatte zur Erde ableiten und die linke

isoliren und entladen, oder ob wir diese ableiten und jene rechte ihre Entfernung ändern lassen. Immer bekommen wir von derjenigen Seitenplatte, welche wir von der negativen mittleren Platte entfernt haben, positive Entladung. Dasselbe, also nur positive Entladung nach der Entfernung, müsste beim Elektrophor der Fall sein, wenn nur eine Inductorschicht vorhanden wäre. Dann ist schon nach Faraday (§. 1255) kein Unterschied in der Art der Induction durch die Luft oder den Ebonit und es müsste daher, wenn die Ebonitscheibe umgewandt worden ist, die obere Metallbelegung, welche jetzt aber auf der ungeriebenen Seite aufliegt, wieder beim Abheben vom Ebonit, wie vorhin die Platte, positive Elektricität liefern.

Das ist aber nicht der Fall. Wenden wir die Ebonitplatte um, so liefert die obere Metallbelegung, wenn wir sie abheben, negative Elektricität, während sie vorhin positive gab.

Das Differential-Inductometer, welches in beiden Fällen positive Entladung liefert, ist also kein genügendes Schema, um zu erklären, dass wir so:

1. Wenn die geriebene Fläche oben ist, vom abgehobenen Metall einen positiven Funken,
2. wenn die geriebene Fläche unten ist, einen negativen Funken vom abgehobenen Metall erhalten.

Als einfachste Ergänzung des Differential-Inductometers, bei welchem nur eine Inductorplatte vorhanden ist, zu einem vollständigen Schema des Elektrophors, ergibt sich die Hinzufügung einer zweiten Inductorplatte, und zwar einer positiv geladenen, die der unteren Seite der Ebonitscheibe entsprechen würde.

In der That haftete in Folge des Peitschens die Ebonitplatte so fest an der Metallunterlage, dass ich diese vertical stellen konnte, ohne dass die Platte hinabglitt. Es inducirte zunächst die negative Schicht der geriebenen Seite positive Elektricität im metallischen Boden. Der Induction folgt Leitung und Entladung, es wird also ein Theil der positiven Elektricität vom Boden auf die untere Seite der Ebonitplatte übergehen, andererseits aber auch die negative Elektricität von der geriebenen Seite aus weiter in die Ebonitplatte eindringen, so dass sich auf der Ebonitplatte zwei Schichten, oben eine negative, unten eine positive finden.

Für das Verständniss der in Rede stehenden Erscheinungen genügt es hier, die Frage der Dicke der Schicht nicht zu discutiren, sondern diese Schichten als eben zu betrachten.

Mit Hilfe dieser beiden Schichten müssen wir jetzt die beiden Erscheinungen erklären:

1. Den positiven Funken, wenn die Metallplatte von der geriebenen Seite,
2. den negativen Funken, wenn die Metallplatte von der ungeriebenen Seite abgehoben wird.

Zur Prüfung dieser Theorie werden wir dann weitere Folgerungen aus ihr zu ziehen und diese durch die Erfahrung zu bestätigen haben.

Das vollständige Schema des Elektrophors besteht also aus vier Platten:

1. einer negativ geladenen,
2. einer positiv geladenen, diesen beiden als Inductoren,
3. und 4. aus den beiden Metallbelegungen als Inducenden.

Der Kürze wegen wollen wir die Belegung auf der geriebenen negativen Seite der Ebonitplatte „Deckel“, die auf der anderen ungeriebenen positiven Seite „Boden“ nennen, so dass also:

Deckel,
negative Schicht,
positive Schicht,
Boden,

auf einander folgen würden. Und zwar sei:

$$b$$

die Entfernung des Bodens von der positiven Fläche, und

$$d$$

die Entfernung des Deckels von der negativen Fläche. Ist ausserdem

$$c$$

die Dicke der Ebonitplatte, so würde ihr eine im Verhältniss der Inductionscapacität des Ebonits ($2._2$) dünnere Luftschicht also von der Dicke

$$\frac{c}{2._2} = c'$$

entsprechen, so dass im Schema die vier Metallplatten in den Entfernungen

$$b \quad c' \quad d$$

zu stehen kämen.

Die geriebene Seite der Ebonitscheibe enthalte die Elektricitätsmenge

$$-E$$

und vom Boden sei der Theil

$$+\alpha E$$

der inducirten Menge auf die ungeriebene Fläche übergegangen.

	b		c'		d	
Boden		$+\alpha E$		$-E$		Deckel

Die Menge $-E$ inducirt dann nach den Gleichungen 1), 3) und 4) im Ganzen $+E$, und zwar:

auf dem Boden	auf dem Deckel
$\frac{+d}{b+c'+d} E$	$\frac{+b+c'}{b+c'+d} E.$

Ebenso inducirt die $+\alpha E$ der unteren Seite im Ganzen $-\alpha E$, und zwar:

auf dem Boden	auf dem Deckel
$\frac{-\alpha c'-\alpha d}{b+c'+d} E$	$\frac{+\alpha b}{b+c'+d} E,$

so dass im Ganzen:

auf dem Boden	auf dem Deckel
$\frac{+d-\alpha c'-\alpha d}{b+c'+d} E$	$\frac{+b+c'-\alpha b}{b+c'+d} E$

inducirt wird.

Der Zähler der Elektricitätsmenge des Deckels

$$+b+c'-\alpha b$$

ist immer positiv, d. h. es wird in der Metallbelegung auf Seite der geriebenen Fläche immer positive Elektricität inducirt und wir erhalten bei der Entfernung der Platte einen positiven Funken.

Dagegen erkennen wir, dass der Zähler der Elektricitätsmenge des Bodens

$$+d-\alpha c'-\alpha d = d\,(1-\alpha)-\alpha c',$$

da $\alpha c'$ constant ist, mit wachsendem d sein Vorzeichen wechselt. Und zwar wird bei kleinem d bei kleiner Entfernung des Deckels im Boden negative Elektricität inducirt und wir bekommen beim Abheben des Bodens aus ihm negative Entladung. Diese Entfernung d ist aber klein, fast 0, wenn wir die Ebonitscheibe umdrehen und mit der geriebenen Seite dicht auf die Metallplatte auflegen. Dann erhalten wir von der oberen Metallplatte, dem Boden, beim Abheben negative Entladung. Somit wären die beiden Erscheinungen, welche wir erklären wollten:

1. positive Entladung bei der ursprünglichen Lage,
2. negative Entladung bei der umgekehrten Lage

der Ebonitscheibe aus der Theorie abgeleitet.

Der Elektrophor enthält also zwei Inductorschichten, eine negative auf der oberen, eine positive auf der unteren Seite der Ebonitscheibe.

Versuche am Elektrophor.

Ist die Theorie, welche wir entwickelt haben, richtig, so muss sich die Folgerung, welche wir jetzt ziehen, experimentell bestätigen. Nach letzterer Formel für den Zähler der Elektricitätsmenge des Bodens muss nämlich, wenn d, das ist: die Entfernung der geriebenen Fläche vom Deckel wächst, so dass

$$d(1-\alpha) > \alpha c'$$

wird, im Boden positive Elektricität inducirt werden. Dies ist in der That der Fall, wie wir erkennen, wenn wir die umgewandte Ebonitplatte nicht unmittelbar auf den Deckel legen, sondern in einiger Höhe über demselben, wie schon Herr von Bezold es that, isolirt anbringen. Wenn wir jetzt die andere Platte, den Boden, auf die ungeriebene Fläche auflegen, ableiten und abheben, so gibt sie uns einen positiven Funken.

Während also das Vorzeichen der Elektricität des Deckels, der Platte, welche sich auf der Seite der geriebenen Fläche befindet, immer positiv ist, ändert sich das Vorzeichen der Elek-

tricitätsmenge des Bodens, der Platte, welche sich auf der Seite der ungeriebenen Fläche befindet. Es ist positiv, wenn die Entfernung der anderen Metallplatte, des Deckels, von der geriebenen Schicht klein, dagegen negativ, wenn diese Entfernung gross ist.

Mit anderen Worten: Im Deckel, der sich auf der Seite der stärkeren, negativen Inductorschicht des Ebonits befindet, überwiegt immer deren Induction; in ihm ist positive Elektricität inducirt.

Im Boden inducirt die nähere, aber schwächere positive Schicht negative Elektricität. Zu dieser negativen Elektricität kommt die positive Elektricität, welche von der ferneren, aber stärkeren negativen Schicht inducirt wird. Es kommt desto mehr positive Elektricität hinzu, je ferner der Deckel ist, so dass bei grosser Entfernung des Deckels die positive Elektricität im Boden überwiegen kann.

Auf beiden Seiten der Ebonitplatte findet also ein verschiedenes Verhalten des Vorzeichenwechsels der Entladung statt.

1. Ruht die Ebonitplatte auf der Metallplatte unmittelbar dicht auf, so erhalten wir in der abgehobenen Metallplatte:
   a) wenn die geriebene Seite oben ist, positive Ladung;
   b) wenn die ungeriebene Seite oben ist, negative Ladung.
2. Ruht die Ebonitplatte in einiger Höhe über der Metallplatte, so bekommen wir dagegen, ganz gleichgiltig, ob
   a) die geriebene Seite oben ist, oder
   b) die ungeriebene,

in beiden Fällen positive Ladung.

So haben wir Mittel, nicht nur festzustellen:

1. auf welcher Seite eine Ebonitplatte positiv,
2. auf welcher Seite sie negativ beladen ist, sondern auch zu erfahren,
3. ob sie auf der einen Seite ursprünglich negative Ladung, oder
4. ob sie auf der anderen Seite ursprünglich positive Ladung erhalten hatte.

Zu diesem Zwecke legen wir die zu untersuchende Ebonitscheibe dicht auf eine abgeleitete Metallplatte, dann wird eine zweite Metallplatte auf die Ebonitscheibe gelegt, abgeleitet und an einem Elektroskop die in ihr inducirte Elektricität untersucht.

Die entgegengesetzte findet sich auf der oberen Seite der Ebonitscheibe.

Die Ebonitscheibe wird jetzt umgedreht, wieder dicht auf die abgeleitete Metallplatte gelegt und in derselben Weise die Art der Elektricität der anderen Seite der Ebonitscheibe bestimmt. Dadurch erfahren wir, welche Art der Elektricität jede Fläche der Ebonitscheibe enthält.

Jetzt wird die Ebonitscheibe in einiger Höhe über der Metallplatte erst in der ursprünglichen, dann in der umgewandten Lage untersucht, und zwar ist sie so hoch zu heben, dass beide Male die gleiche Art Elektricität inducirt wird. Dann enthält die Platte die entgegengesetzte Art im Überschuss und ist mit dieser ursprünglich auf der Seite, welche diese Art nach unserer ersten Ermittlung enthält, geladen worden.

Addiren wir die beiden Elektricitätsmengen, welche wir auf dem Boden und auf dem Deckel inducirt gefunden haben, so erhalten wir in Übereinstimmung mit der Voraussetzung

$$-E(1-\alpha).$$

Was auf dem Deckel mehr inducirt wird, das wird auf dem Boden weniger inducirt und umgekehrt.

Verbinden wir den Deckel mit einem Elektroskop, den Boden mit einem anderen, so divergiren bei einer Bewegung einer der Platten beide Elektroskope, und zwar beide in entgegengesetztem Sinne, durch eine Drahtleitung vom Deckel zum Boden geht bei der Bewegung einer der Platten ein Strom, so dass dem Boden das zufliesst, was vom Deckel abströmt, während zwischen Boden und Deckel im Elektrophor selbst also im übrigen Theil des Kreises Änderungen der Induction stattfinden. Bei den gewöhnlichen Elektrophorversuchen ist diese Drahtleitung dadurch, dass der Boden zur Erde abgeleitet wird, durch eine Erdleitung ersetzt und wir können von einem Stromkreise hier nur mit demselben Rechte, wie bei einer Telegraphenbatterie mit Erdleitung sprechen. Wird die Leitung unterbrochen dadurch, dass wir den Boden, nachdem wir ihn abgeleitet hatten, isoliren, dann ist der Elektrophor wirkungslos. Bezüglich der Änderungen der Induction im Innern des Elektrophors (die wir als eine Polarisation des Dielektricums auffassen können), will ich hier noch an folgende Versuche erinnern:

Wird die Ebonitplatte auf die abgeleitete Bodenplatte aufgelegt und stark erregt, so haftet sie am Boden, wird alsdann der Deckel aufgelegt und beide Metallplatten gleichzeitig abgeleitet, so haftet sie jetzt am Deckel, so dass ich sie mit diesem in die Höhe heben konnte. Ein Strom positiver Elektricität ist bei der gleichzeitigen Ableitung vom Boden durch die äussere Leitung zum Deckel geflossen; vor dem Eintritte des Stromes ging die Induction (Polarisation) ganz durch die Ebonitplatte, nach dem Strome geht die inducirende (polarisirende) Wirkung der erregten Schicht zum grössten Theil durch die dünne Luftschicht zum Deckel und nur zum kleineren Theil durch die dickere Ebonitplatte zum Boden.

Schliesslich will ich noch einen Versuch mittheilen, bei welchem sich leicht Verzweigung der Induction, wie auch Verzweigung der Leitung beobachten lässt. Ich peitschte die auf dem abgeleiteten Metallboden ruhende Ebonitscheibe, legte auf die erregte Fläche eine gleiche aber unerregte Ebonitscheibe und erst dann den Metalldeckel. Wurde dieser abgeleitet und isolirt gehoben, so gab er positive Funken, ganz so, als wenn sich an Stelle der oberen Ebonitplatte eine entsprechende Luftschicht befunden hätte. Ich prüfte gleich darauf die obere Ebonitplatte und versuchte sie allein als Scheibe eines anderen Elektrophors zu verwenden. Dies gelang nicht, die Scheibe war unwirksam.

Nun wiederholte ich den Versuch, legte dieselbe Scheibe wieder auf die geriebene Fläche der ersten Ebonitscheibe, bedeckte sie wiederum mit dem Deckel, den ich ableitete und liess sie jetzt zwölf Stunden liegen. Es befindet sich in diesem Falle zu beiden Seiten der Inductorschicht der Ebonitplatte Ebonit; es geht die Induction durch diesen nach beiden Seiten zum Boden und zum Deckel. Ebenso muss auch das Eindringen der Elektricität, die Leitung nach beiden Seiten statthaben, und ich erwartete, dass die negative Elektricität nicht nur in die untere Ebonitplatte eindringen, sondern auch auf die obere übergehen würde. Dies geschah in der That. Nach zwölf Stunden war auch die obere Scheibe als Elektrophorplatte zu benützen. Beide Platten gaben jetzt kräftige, anscheinend gleiche Wirkungen. Die obere Platte war, wie hiernach vorauszusehen, auf der unteren

Seite, mit welcher sie auf der Inductorschicht auflag, negativ beladen, musste also umgewandt werden, um gleichnamige Entladungen, wie die erste Platte, zu liefern.

Fassen wir insbesondere bei diesem Versuch die obere Ebonitplatte ins Auge, so sehen wir:

1. dass die Wirkung der Induction durch sie nahezu momentan eintrat, denn wir konnten gleich, nachdem wir diese obere Ebonitplatte auf die erregte, untere gelegt hatten, sofort den Deckel des Elektrophors auflegen, abheben und entladen,

   dass diese Wirkung der Induction aber ebenso fast augenblicklich verschwunden war, als wir die Platte allein als Elektrophor benutzen wollten. Wir sahen aber ferner

2. dass noch ausserdem langsam eine andere inhärente Änderung, ein Eindringen der Elektricität erfolgte, welche die Platte dauernder als Elektrophorplatte wirken liess.

Über Deviationsmomente.

Von Dip. Ing. **Ferdinand Wittenbauer,**
Privat-Docent an der k. k. techn. Hochschule in Graz.

(Mit 21 Holzschnitten.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 7. April 1881.)

1.

Vorliegende Abhandlung beschäftigt sich mit der Untersuchung der Deviationsmomente einer und mehrerer in derselben Ebene gelegenen Flächen bezüglich der in dieser Ebene gelegenen rechtwinkeligen Axenpaare. Hiebei seien die Flächen als gleichförmig mit Masse belegt vorausgesetzt.

Der allgemeine Ausdruck des Deviationsmomentes höherer Ordnung einer ebenen Fläche bezüglich eines in ihrer Ebene gelegenen Axenpaares YOX ist bekanntlich

$$D = \int y^m x^n d\mu,$$

worin $d\mu$ das Massenelement bedeutet, das obiger Voraussetzung zufolge als proportional dem Flächenelemente angesehen werden kann. Die Integration hat sich naturgemäss über die ganze betrachtete Fläche zu erstrecken.

Der Ausdruck des Deviationsmomentes bezüglich anderer als der Coordinatenaxen OY, OX kann in folgender Weise leicht ermittelt werden.

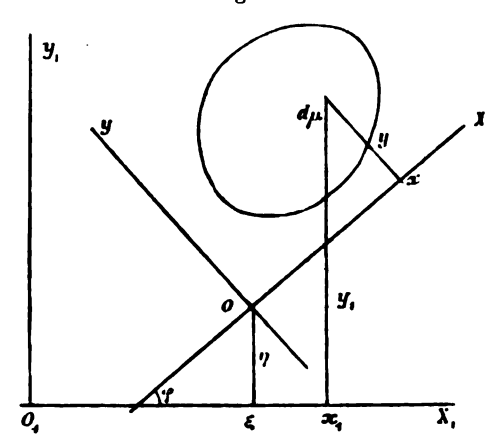
Wählt man nämlich (Fig. 1) die Axen OY_1, OX_1 als eigentliche Coordinatenaxen, hingegen OY, OX als jene, bezüglich welcher das Deviationsmoment zu nehmen sei, so wird, wenn man mit η und ξ die Coordinaten des Punktes O und mit φ den Neigungswinkel der Axe OX gegen OX_1 bezeichnet:

$$y = (y_1 - \eta)\cos\varphi - (x_1 - \xi)\sin\varphi$$
$$x = (x_1 - \xi)\cos\varphi + (y_1 - \eta)\sin\varphi$$

Der Ausdruck für das Deviationsmoment nimmt sodann die Form an:

$$D = \int [(y_1 - \eta)\cos\varphi - (x_1 - \xi)\sin\varphi]^m [(x_1 - \xi)\cos\varphi + (y_1 - \eta)\sin\varphi]^n \, d\mu.$$

Fig. 1.



Führt man die Operationen unter dem Integralzeichen aus, so erhält man eine Reihe von Gliedern der Form

$$y_1^a x_1^b \eta^c \xi^d \sin^e\varphi \cos^f\varphi \, d\mu,$$

wobei stets

$$a + b + c + d = m + n$$
$$e + f = m + n$$

ist. Nach Integration übergehen diese Glieder in

$$\eta^c \xi^d \sin^e\varphi \cos^f\varphi \int y_1^a x_1^b \, d\mu$$

und wenn man das durch den Integralfactor dieses Ausdruckes gekennzeichnete Moment der Fläche in folgender Weise bezeichnet

$$\int y_1^a x_1^b \, d\mu = \mathfrak{M}^{a,b},$$

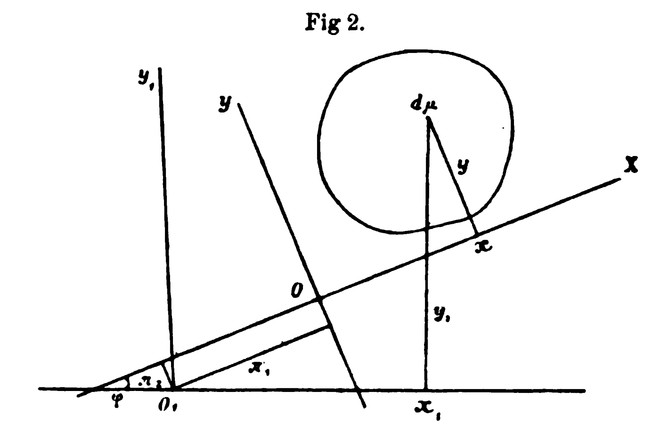
so erhält man schliesslich das Deviationsmoment in der Form

$$D = \Sigma \eta^c \xi^d \sin^e\varphi \cos^f\varphi \, \mathfrak{M}^{a,b}. \qquad \text{I)}$$

Für besondere Zwecke ist noch eine andere Ausdrucksweise des Deviationsmomentes zu empfehlen. Bezieht man nämlich (Fig. 2) die neuen Axen OY und OX mittelst ihrer senkrechten

Abstände π_2 und π_1 von O_1, sowie mittelst des Winkels φ auf die ursprünglichen Axen OY_1, OX_1, so lauten die Transformations-

Fig 2.



gleichungen für y und x

$$y = y_1 \cos\varphi - x_1 \sin\varphi - \pi_2$$
$$x = x_1 \cos\varphi + y_1 \sin\varphi - \pi_1 .$$

Das Deviationsmoment nimmt dann den Ausdruck an:

$$D = \int [y_1 \cos\varphi - x_1 \sin\varphi - \pi_2]^m [x_1 \cos\varphi + y_1 \sin\varphi - \pi_1]^n d\mu .$$

Durch Ausführung der Operationen unter dem Integralzeichen erhält man auch hier eine Reihe von Gliedern von der Form

$$y_1^\alpha x_1^\beta \pi_1^\gamma \pi_2^\delta \sin^\varepsilon\varphi \cos^\lambda\varphi \, d\mu ,$$

worin

$$\gamma + \delta + \varepsilon + \lambda = m + n$$
$$\alpha + \beta \gtreqless m + n .$$

Nach Integration übergeht dieses allgemeine Glied in

$$\pi_1^\gamma \pi_2^\delta \sin^\varepsilon\varphi \cos^\lambda\varphi \int y_1^\alpha x_1^\beta d\mu$$

und bei Einführung oberwähnter Bezeichnung für den Integralfactor

$$\pi_1^\gamma \pi_2^\delta \sin^\varepsilon\varphi \cos^\lambda\varphi \, \mathfrak{M}^{\alpha,\beta} ,$$

so dass das Deviationsmoment die Form erhält:

$$D = \Sigma \pi_1^\gamma \pi_2^\delta \sin^\varepsilon\varphi \cos^\lambda\varphi \, \mathfrak{M}^{\alpha,\beta} . \qquad \text{II)}$$

Diese beiden Ausdrucksweisen I) und II) des Deviationsmomentes sollen dazu dienen, den folgenden Untersuchungen als Grundlage zu dienen.

2.

Eine ebene Fläche F sei gegeben und ein Punkt $O(\eta, \xi)$ in ihrer Ebene; es sollen jene durch O gehenden Axenpaare ermittelt werden, bezüglich welcher das Deviationsmoment $D = \int y^m x^n d\mu$ der Fläche dieselbe Grösse erreicht.

Man benütze hiezu die Form I):

$$D = \Sigma \eta^c \xi^d \sin^e\varphi \cos^f\varphi \, \mathfrak{M}^{a,b},$$

wobei $e+f = m+n$ und worin der Aufgabe zufolge η, ξ und sämmtliche Momente $\mathfrak{M}$ als bekannt, der Winkel φ hingegen als unbekannt anzusehen sind.

Schreibt man diesen Ausdruck in der Form

$$D(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)^{\frac{m+n}{2}} = \Sigma \eta^c \xi^d \sin^e\varphi \cos^f\varphi \, \mathfrak{M}^{a,b},$$

falls $m+n$ gerade ist, anderseits

$$D(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)^{m+n} = \{\Sigma \eta^c \xi^d \sin^e\varphi \cos^f\varphi \, \mathfrak{M}^{a,b}\}^2,$$

falls $m+n$ ungerade ist, und dividirt die erste dieser Gleichungen durch $\cos^{m+n}\varphi$, die zweite durch $\cos^{2(m+n)}\varphi$, so erhält man in jedem Falle eine Gleichung für $\operatorname{tang}\varphi$, und zwar die erste vom Grade $m+n$, die zweite vom Grade $2(m+n)$.

Man erhält also entweder $(m+n)$ oder $2(m+n)$ Axenpaare, welche der Aufgabe entsprechen, je nachdem $m+n$ gerade oder ungerade ist.

Deviationsmomente zweiter Ordnung.

In diesem Falle wird

$$D = \int yx d\mu.$$

Wählt man den gegebenen Punkt O als Coordinatenanfang, so wird

$$y = y_1 \cos\varphi - x_1 \sin\varphi$$
$$x = x_1 \cos\varphi + y_1 \sin\varphi$$

und

$$D = (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\,\mathfrak{M}^{1,1} + \sin\varphi\,\cos\varphi\,(\mathfrak{M}^{2,0} - \mathfrak{M}^{0,2}).$$

Schreibt man dies in der Form

$$D(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\,\mathfrak{M}^{1,1} + \sin\varphi\cos\varphi\,(\mathfrak{M}^{2,0} - \mathfrak{M}^{0,2})$$

und dividirt durch $\cos^2\varphi$, so erhält man die Gleichung

$$\operatorname{tang}^2\varphi\,[D + \mathfrak{M}^{1,1}] - \operatorname{tang}\varphi\,[\mathfrak{M}^{2,0} - \mathfrak{M}^{0,2}] + [D - \mathfrak{M}^{1,1}] = 0, \quad 1)$$

woraus

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{[\mathfrak{M}^{2,0} - \mathfrak{M}^{0,2}] \pm \sqrt{[\mathfrak{M}^{2,0} - \mathfrak{M}^{0,2}]^2 - 4[D^2 - (\mathfrak{M}^{1,1})^2]}}{2[D + \mathfrak{M}^{1,1}]}.$$

Es fragt sich nun, ob für einen bestimmten Werth von D die beiden der Gleichung 1) entsprechenden Geraden aufeinander senkrecht stehen. Für diesen Fall müsste, wie aus der Gleichung ersichtlich ist

$$\frac{D - \mathfrak{M}^{1,1}}{D + \mathfrak{M}^{1,1}} = -1$$

sein, d. h.

$$D = 0.$$

Da demzufolge die beiden aus der Rechnung resultirenden Axenpaare zusammenfallen, so kann man sagen: es gibt nur ein Axenpaar für einen bestimmten Punkt O, bezüglich welchem das Deviationsmoment zweiter Ordnung der Fläche gleich Null wird.

Wählt man dieses Axenpaar als Coordinatensystem, so übergeht die allgemeine Gleichung 1) in

$$\operatorname{tang}^2\varphi - \operatorname{tang}\varphi\,\frac{\mathfrak{M}^{2,0} - \mathfrak{M}^{0,2}}{D} + 1 = 0,$$

worin natürlich $\mathfrak{M}^{2,0}$, $\mathfrak{M}^{0,2}$ die auf die neuen Coordinatenaxen bezogenen Trägheitsmomente bezeichnen. Nennt man die aus dieser Gleichung resultirenden Winkel φ_1 und φ_2, so ist

$$\operatorname{tang}\varphi_1 \,.\, \operatorname{tang}\varphi_2 = 1$$

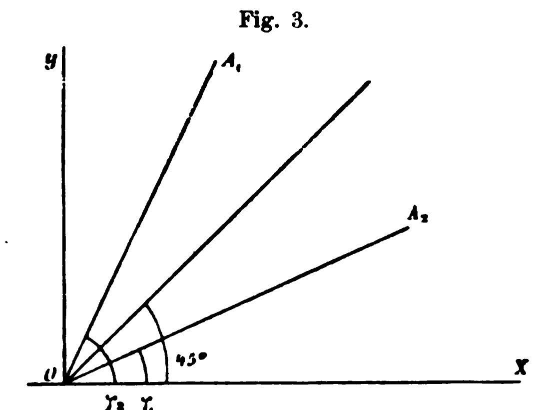
oder

$$\varphi_1 = 90 - \varphi_2,$$

d. h. wenn die Deviationsmomente der Fläche bezüglich zweier

Axenpaare gleich sein sollen, so müssen die gleichnamigen Axen OA_1 und OA_2 (Fig. 3) gegen die Halbirungslinien der Quadranten des Coordinatensystems gleiche Neigung besitzen.

Fig. 3.



Die Grösse des Deviationsmomentes zweiter Ordnung ergibt sich nach obiger Gleichung mit

$$D = (\mathfrak{M}^{2,0} - \mathfrak{M}^{0,2}) \sin\varphi \cos\varphi$$

und das Maximum desselben für $\varphi = 45°$ mit

$$D = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{M}^{2,0} - \mathfrak{M}^{0,2}).$$

Deviationsmomente dritter Ordnung.

Hiefür sei zur Untersuchung gewählt:

$$D = \int y^2 x \, d\mu.$$

Wird wieder der Punkt O als Coordinatenanfang angenommen, so wird

$$\begin{aligned} y^2 x &= (y_1 \cos\varphi - x_1 \sin\varphi)^2 (x_1 \cos\varphi + y_1 \sin\varphi) \\ &= \cos^3\varphi \, y_1^2 x_1 + \cos^2\varphi \sin\varphi \, (y_1^3 - 2 y_1 x_1^2) + \\ &\quad + \cos\varphi \sin^2\varphi \, (x_1^3 - 2 y_1^2 x_1) + \sin^3\varphi \, . \, y_1 x_1^2, \end{aligned}$$

somit

$$\begin{aligned} D = \cos^3\varphi \, \mathfrak{M}^{2,1} &+ \cos^2\varphi \sin\varphi \, [\mathfrak{M}^{3,0} - 2\mathfrak{M}^{1,2}] + \\ &+ \cos\varphi \sin^2\varphi \, [\mathfrak{M}^{0,3} - 2\mathfrak{M}^{2,1}] + \sin^3\varphi \, . \, \mathfrak{M}^{1,2}, \end{aligned} \qquad 2)$$

woraus die Werthe von φ auf dem oben angegebenen Wege ermittelt werden können.

Es ist von Interesse, jene Axenpaare näher zu untersuchen, bezüglich welcher die Deviationsmomente dritter Ordnung Null werden. In diesem Falle übergeht die Gleichung 2) in

$$0 = \mathfrak{M}^{2,1} + \operatorname{tang}\varphi[\mathfrak{M}^{3,0} - 2\mathfrak{M}^{1,2}] + \operatorname{tang}^2\varphi[\mathfrak{M}^{0,3} - 2\mathfrak{M}^{2,1}] + \\ + \operatorname{tang}^3\varphi \,.\, \mathfrak{M}^{1,2} \qquad 3)$$

und man erhält hieraus drei Axenpaare als der Aufgabe entsprechend. Wählt man eines derselben als Coordinatensystem und bezieht hierauf die Momente $\mathfrak{M}$, so wird

$$\mathfrak{M}^{2,1} = 0$$

und die Gleichung 3) übergeht in

$$0 = [\mathfrak{M}^{3,0} - 2\mathfrak{M}^{1,2}] + \operatorname{tang}\varphi \,.\, \mathfrak{M}^{0,3} + \operatorname{tang}^2\varphi \,.\, \mathfrak{M}^{1,2},$$

woraus man für die der Gleichung entsprechenden Winkelwerthe φ_1 und φ_2 findet

$$\operatorname{tang}\varphi_1 + \operatorname{tang}\varphi_2 = -\frac{\mathfrak{M}^{0,3}}{\mathfrak{M}^{1,2}}$$

$$\operatorname{tang}\varphi_1 \,.\, \operatorname{tang}\varphi_2 = \frac{\mathfrak{M}^{3,0}}{\mathfrak{M}^{1,2}} - 2$$

oder wenn man hieraus $\mathfrak{M}^{1,2}$ eliminirt

$$(\operatorname{tang}\varphi_1 + \operatorname{tang}\varphi_2)\mathfrak{M}^{3,0} + (\operatorname{tang}\varphi_1 \,.\, \operatorname{tang}\varphi_2 + 2)\mathfrak{M}^{0,3} = 0. \qquad 4)$$

Bezeichnet man die drei Axenpaare, bezüglich welcher das Deviationsmoment Null wird, mit I, II, III, so kann die letzterhaltene Relation offenbar für jedes dieser Axenpaare als Coordinatensystem aufgestellt werden. Nennt man nämlich α_1, α_2, α_3 die Winkel, welche die gleichnamigen Axen dieser Paare untereinander einschliessen, wobei, der cyclischen Anordnung halber, α_2 im entgegengesetzten Sinne wie die beiden anderen Winkel gezählt werden mag (Fig. 4), und fügt man den Momenten $\mathfrak{M}$ die das Axenpaar bezeichnenden Stellenzeiger I, II, III bei, so lassen sich nach dem Muster der Relation 4) folgende Gleichungen bilden:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{I}^{3,0}(\operatorname{tang}\alpha_2 - \operatorname{tang}\alpha_3) + \mathfrak{M}_{I}^{0,3}(\operatorname{tang}\alpha_2 \,.\, \operatorname{tang}\alpha_3 - 2) &= 0 \\ \mathfrak{M}_{II}^{3,0}(\operatorname{tang}\alpha_3 - \operatorname{tang}\alpha_1) + \mathfrak{M}_{II}^{0,3}(\operatorname{tang}\alpha_3 \,.\, \operatorname{tang}\alpha_1 - 2) &= 0 \qquad 5) \\ \mathfrak{M}_{III}^{3,0}(\operatorname{tang}\alpha_1 - \operatorname{tang}\alpha_2) + \mathfrak{M}_{III}^{0,3}(\operatorname{tang}\alpha_1 \,.\, \operatorname{tang}\alpha_2 - 2) &= 0, \end{aligned}$$

Da überdies noch die Relation gilt

$$\operatorname{tang}\alpha_1 . \operatorname{tang}\alpha_2 . \operatorname{tang}\alpha_3 = \operatorname{tang}\alpha_1 + \operatorname{tang}\alpha_2 + \operatorname{tang}\alpha_3,$$

so muss in den Gleichungen 5) unter den Coëfficienten $\mathfrak{M}$ eine gewisse Abhängigkeit herrschen und man findet diese durch

Fig. 4.

Auflösung der Gleichungen in folgender Weise:

$$\frac{\mathfrak{M}_{\rm I}^{0,3}}{\mathfrak{M}_{\rm I}^{3,0}} + \frac{\mathfrak{M}_{\rm II}^{0,3}}{\mathfrak{M}_{\rm II}^{3,0}} + \frac{\mathfrak{M}_{\rm III}^{0,3}}{\mathfrak{M}_{\rm III}^{3,0}} = -2 . \frac{\mathfrak{M}_{\rm I}^{0,3}}{\mathfrak{M}_{\rm I}^{3,0}} . \frac{\mathfrak{M}_{\rm II}^{0,3}}{\mathfrak{M}_{\rm II}^{3,0}} . \frac{\mathfrak{M}_{\rm III}^{0,3}}{\mathfrak{M}_{\rm III}^{3,0}} .$$

Die Summe der Verhältnisse der Momente dritter Ordnung jener drei Axenpaare, bezüglich welcher das Deviationsmoment dritter Ordnung Null wird, ist demnach gleich dem negativen doppelten Producte dieser Verhältnisse.

3.

Eine ebene Fläche F sei gegeben und eine Axe X in ihrer Ebene durch die Coordinaten π_2 und φ; man suche jene zu X senkrechten Axen Y, bezüglich welcher das Deviationsmoment $D = \int y^m x^n d\mu$ der Fläche dieselbe Grösse erreicht. Zur Lösung dieser Aufgabe benütze man die Form II

$$D = \Sigma \pi_1^\gamma \pi_2^\delta \sin^\epsilon \varphi \cos^\lambda \varphi \, \mathfrak{M}^{\alpha,\beta}.$$

Hierin sind π_2 und φ, sowie sämmtliche Momente $\mathfrak{M}$ bekannt, hingegen π_1 unbekannt. Für einen bestimmten Werth von D wird

obiger Ausdruck eine Bestimmungsgleichung für π_1, und zwar vom Grade n, wie aus der bereits angeführten Formel

$$D = \int y^m x^n d\mu$$
$$= \int [y_1 \cos\varphi - x_1 \sin\varphi - \pi_2]^m [x_1 \cos\varphi + y_1 \sin\varphi - \pi_1]^n d\mu$$

zu ersehen ist.

Der gestellten Aufgabe entsprechen somit n-Axen.

Deviationsmomente zweiter Ordnung.

Man wähle die gegebene Axe X zur Axe eines Coordinatensystems (π, φ), dann wird

$$\pi_2 = 0, \quad \varphi = 0,$$

somit

$$y = y_1, \quad x = x_1 - \pi_1$$

und

$$D = \int yx d\mu = \int y_1(x_1 - \pi_1) d\mu = \mathfrak{M}^{1,1} - \pi_1 \mathfrak{M}^{1,0},$$

woraus

$$\pi_1 = \frac{\mathfrak{M}^{1,1} - D}{\mathfrak{M}^{1,0}},$$

Fig. 5.

Geht die gegebene Axe X durch den Schwerpunkt der Fläche, so wird

$$\mathfrak{M}^{1,0} = 0,$$

mithin

$$\pi_1 = \infty,$$

d. h. für jeden von $\mathfrak{M}^{1,1}$ verschiedenen Werth des Deviationsmomentes D liegt die entsprechende Axe Y in unendlicher Entfernung. Hingegen sind die Deviationsmomente bezüglich sämmtlicher in endlicher Entfernung gelegenen Axen Y einander gleich, denn für $D = \mathfrak{M}^{1,1}$ wird

$$\pi_1 = \frac{0}{0}.$$

Deviationsmomente dritter Ordnung.

Das Deviationsmoment dritter Ordnung, erster Gattung

$$D_1 = \int y^2 x d\mu$$

wird bei der Wahl der gegebenen Axen X zur Coordinatenaxe

$$D_1 = \int y_1^2 (x_1 - \pi_1) d\mu = \mathfrak{M}^{2,1} - \pi_1 \mathfrak{M}^{2,0},$$

woraus

$$\pi_1 = \frac{\mathfrak{M}^{2,1} - D_1}{\mathfrak{M}^{2,0}}.$$

Das Deviationsmoment dritter Ordnung, zweiter Gattung

$$D_2 = \int y x^2 d\mu$$

erhält bei gleicher Annahme wie vorhin die Form

$$D_2 = \int y_1 (x_1 - \pi_1)^2 d\mu = \mathfrak{M}^{1,2} - 2\pi_1 \mathfrak{M}^{1,1} + \pi_1^2 \mathfrak{M}^{1,0}$$

und es lautet somit die Bestimmungsgleichung für π_1

$$\pi_1^2 - 2\pi_1 \cdot \frac{\mathfrak{M}^{1,1}}{\mathfrak{M}^{1,0}} + \frac{\mathfrak{M}^{1,2} - D_2}{\mathfrak{M}^{1,0}} = 0.$$

Nennt man die hieraus resultirenden Axen I und II, und wählt die erste als Ordinatenaxe, kennzeichnet man ferner die auf sie bezüglichen Momente mit dem Stellenzeiger I, so wird

$$\mathfrak{M}_{\mathrm{I}}^{1,2} = D_2$$

und

$$\pi_{\mathrm{I}} = 2\,\frac{\mathfrak{M}_{\mathrm{I}}^{1,1}}{\mathfrak{M}^{1,0}}.$$

Wählt man die Axe II als Ordinatenaxe, so wird

$$\mathfrak{M}_{\mathrm{II}}^{1,2} = D_2$$

und

$$\pi_{\mathrm{II}} = 2\,\frac{\mathfrak{M}_{\mathrm{II}}^{1,1}}{\mathfrak{M}^{1,0}}.$$

Nun ist aber, wie aus der Figur ersichtlich, $\pi_{\mathrm{I}} = -\pi_{\mathrm{II}}$, somit ist

$$\mathfrak{M}_{\mathrm{I}}^{1,1} = -\,\mathfrak{M}_{\mathrm{II}}^{1,1}.$$

Während also die Deviationsmomente dritter Ordnung, zweiter Gattung bezüglich der Axen I und II einander gleich sind, werden die Deviationsmomente zweiter Ordnung bezüglich derselben Axen einander gleich mit entgegengesetzten Zeichen.

4.

Es sei eine Fläche F und ihr Deviationsmoment $D = \int y^m x^n d\mu$ bezüglich eines Axenpaares YOX gegeben; welches ist der geometrische Ort der Anfangspunkte O aller Axenpaare, welche mit dem gegebenen gleiche Richtung besitzen, wenn das Deviationsmoment der Fläche in Bezug auf sie das gleiche bleiben soll?

In dem Ausdrucke I) für das Deviationsmoment

$$D = \Sigma \eta^c \xi^d \sin^e \varphi \cos^f \varphi\, \mathfrak{M}^{a,b}$$

ist der Aufgabe gemäss der Winkel φ, sowie das gegebene Deviationsmoment D und die Momente $\mathfrak{M}$ bezüglich der Coordinatenaxen als bekannt anzusehen, hingegen repräsentiren η und ξ die Coordinaten des Punktes, nach dessen Ort gefragt wird. Hierin erreicht die Summe $c+d$ im äussersten Falle den Werth $m+n$. Obiger Ausdruck für das Deviationsmoment ist zugleich die Ortsgleichung des Punktes; dieser Ort besteht somit für ein Deviationsmoment $(m+n)^{\text{ter}}$ Ordnung aus einer Curve $(m+n)^{\text{ter}}$ Ordnung.

Deviationsmomente zweiter Ordnung.

Führt man in den Ausdruck für das Deviationsmoment zweiter Ordnung

$$D = \int yx d\mu,$$

für y und x die Werthe ein

$$y = (y_1 - \eta)\cos\varphi - (x_1 - \xi)\sin\varphi$$
$$x = (x_1 - \xi)\cos\varphi + (y_1 - \eta)\sin\varphi,$$

so erhält man

$$D = (B\mathfrak{M}^{2,0} + A\mathfrak{M}^{1,1} - B\mathfrak{M}^{0,2}) - \eta(A\mathfrak{M}^{0,1} + 2B\mathfrak{M}^{1,0}) -$$
$$-\xi(A\mathfrak{M}^{1,0} - 2B\mathfrak{M}^{0,1}) + AF\eta\xi + BF\eta^2 - BF\xi^2,$$

wenn der Massencoëfficient der Fläche gleich der Einheit genommen und ferner der Kürze wegen

$$\cos^2\varphi - \sin^2\varphi = A, \quad \sin\varphi\cos\varphi = B$$

gesetzt wird. — Die so erhaltene Ortsgleichung ist die einer gleichseitigen Hyperbel; um sie auf einfachere Form zu bringen, wählen wir als Anfangspunkt des Coordinatensystems den Schwerpunkt der Fläche und als Abscissenaxe jene Gerade, welche einen Winkel von 45° mit der gegebenen Axenrichtung einschliesst. Es ist dann

$$\mathfrak{M}^{1,0} = 0, \quad \mathfrak{M}^{0,1} = 0; \quad A = 0, \quad B = \tfrac{1}{2}$$

und

$$D = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{M}^{2,0} - \mathfrak{M}^{0,2}) + \tfrac{1}{2}F(\eta^2 - \xi^2)$$

oder

$$\eta^2 - \xi^2 = \frac{2D - \mathfrak{M}^{2,0} + \mathfrak{M}^{0,2}}{F} \tag{6)}$$

die Mittelpunktsgleichung des gesuchten Ortes.

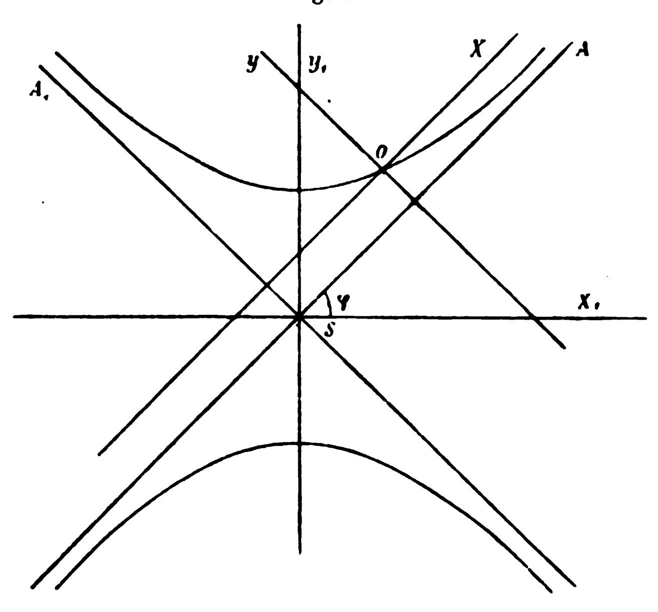
Gleitet also ein Axenpaar OY, OX derart in der Ebene der Fläche F, dass seine Richtungen stets dieselben bleiben und sein Anfangspunkt O auf einer gleichseitigen Hyperbel fortrückt, deren Mittelpunkt der Schwerpunkt der Fläche und deren Assymptoten parallel zu den Axenrichtungen sind, so besitzt das Deviationsmoment zweiter Ordnung der Fläche bezüglich jeder der Lagen dieses Axenpaares dieselbe Grösse.

Hiebei ist in der Gleichung 6) wohl zu beachten, dass die Momente $\mathfrak{M}$ nicht auf dieselben Axen wie das Deviationsmoment, sondern auf die festliegenden Coordinatenaxen Y_1S, X_1S bezogen sind.

Für $D=0$ wird die Gleichung des Ortes

$$\eta^2-\xi^2=\frac{\mathfrak{M}^{0,2}-\mathfrak{M}^{2,0}}{F}$$

Fig. 6.



oder wenn man

$$\mathfrak{M}^{0,2}=F.X_1^2,\quad \mathfrak{M}^{2,0}=F.Y_1^2$$

setzt, worin X_1 und Y_1 die Trägheitsradien der Fläche F bezüglich der X_1 und Y_1 Axe bezeichnen, so wird

$$\eta^2-\xi^2=X_1^2-Y_1^2.$$

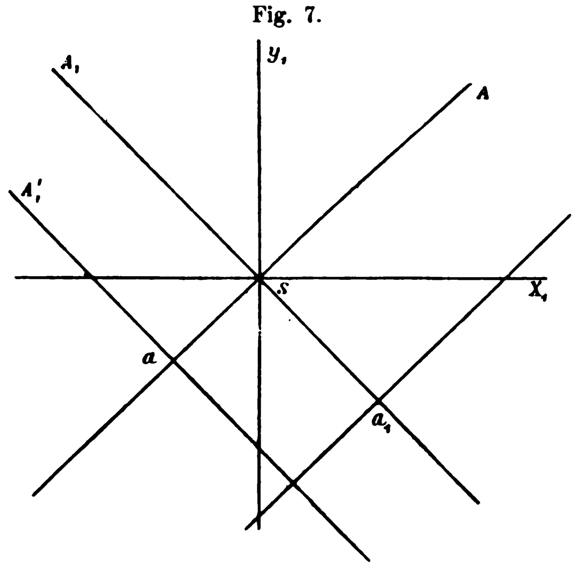
Für $D=\frac{1}{2}(\mathfrak{M}^{2,0}-\mathfrak{M}^{0,2})$ übergeht die Ortsgleichung 6) in

$$\eta^2-\xi^2=0$$

und dies sind die Assymptoten SA, SA_1 der Hyperbel. Jeder beliebige Punkt a der Assymptoten (Fig. 7) hat sonach die Eigenschaft, dass das Deviationsmoment der Fläche bezüglich der durch ihn gehenden zu den Assymptoten parallelen Axen dieselbe Grösse besitzt. Dies stimmt auch mit der in Nr. 3 gemachten Bemerkung überein.

Mit Hilfe der soeben untersuchten Hyperbel lässt sich übrigens für die in Nr. 3 gelöste Aufgabe (bezüglich der Deviationsmomente zweiter Ordnung) eine anschauliche Lösung geben. Soll

Fig. 7.



nämlich zu einer gegebenen Axe X die zu ihr senkrechte gesucht werden, so dass das Deviationsmoment der Fläche F bezüglich dieser beiden Axen eine bestimmte Grösse erreicht, so ziehe man durch den Schwerpunkt der Fläche (Fig. 6) eine Parallele SA_1 und eine Senkrechte SA zu der gegebenen Axe, betrachte SA_1 und SA als Assymptoten einer Hyperbel, deren Gleichung nach Vorigem bekannt ist, und suche den Schnitt O dieser Hyperbel mit der gegebenen Axe X. Man erhält dann in OY die gesuchte Axe.

Deviationsmomente dritter Ordnung.

Werden die Richtungen des gegebenen Axenpaares als Coordinatenrichtungen angenommen, so wird $\varphi = 0$, und

$$x = x_1 - \xi$$
$$y = y_1 - \eta,$$

somit

$$D = \int y^2 x d\mu$$
$$= \mathfrak{M}^{2,1} - \xi\mathfrak{M}^{2,0} - 2\eta\mathfrak{M}^{1,1} + 2\eta\xi\mathfrak{M}^{1,0} + \eta^2\mathfrak{M}^{0,1} - \eta^2\xi F,$$

und wenn noch der Schwerpunkt der Fläche als Coordinatenanfang gewählt wird, wofür

$$\mathfrak{M}^{1,0} = 0, \quad \mathfrak{M}^{0,1} = 0$$

ist, so wird

$$D = \mathfrak{M}^{2,1} - \xi \mathfrak{M}^{2,0} - 2\eta \mathfrak{M}^{1,1} - \eta^2 \xi F.$$

Dies ist die Ortsgleichung des Punktes O. Sie kennzeichnet eine Curve dritten Grades; ihre Schnittpunkte mit den Coordinatenaxen ergeben sich durch die Coordinaten

$$\eta_1 = 0, \quad \xi_1 = \frac{\mathfrak{M}^{2,1} - D}{\mathfrak{M}^{2,0}}$$

$$\xi_2 = 0, \quad \eta_2' = \frac{\mathfrak{M}^{2,1} - D}{2\mathfrak{M}^{1,1}} \text{ und } \eta_2'' = \pm \infty.$$

Die Curve besitzt sonach mit jeder der Coordinatenaxen einen Punkt in endlicher Entfernung gemein und berührt die Ordinatenaxe in unendlicher Entfernung.

Besonders charakteristisch ist jene unter diesen den verschiedenen Deviationsmomenten entsprechenden Curven, für welche

$$D = \mathfrak{M}^{2,1}$$

wird. Die Schnittpunkte derselben mit den Coordinatenaxen fallen naturgemäss mit dem Coordinatenanfang zusammen; ihre Gleichung ist

$$0 = \xi \mathfrak{M}^{2,0} + 2\eta \mathfrak{M}^{1,1} + \eta^2 \xi F.$$

Man findet hieraus

$$\frac{d\xi}{d\eta} = 2\mathfrak{M}^{1,1} \frac{\eta^2 F - \mathfrak{M}^{2,0}}{(\eta^2 F + \mathfrak{M}^{2,0})^2}$$

$$\frac{d^2\xi}{d\eta^2} = 4\mathfrak{M}^{1,1} F \eta \frac{3\mathfrak{M}^{2,0} - \eta^2 F}{(\eta^2 F + \mathfrak{M}^{2,0})^3}.$$

Für $\frac{d\xi}{d\eta} = 0$ wird

$$\left.\begin{aligned} \eta_3 &= \pm \sqrt{\frac{\mathfrak{M}^{2,0}}{F}} \\ \xi_3' &= \mp \frac{\mathfrak{M}^{1,1}}{\sqrt{\mathfrak{M}^{2,0} . F}} \end{aligned}\right\} \text{Punkt } a$$

und für die Wendepunkte wird $\frac{d^2\xi}{d\eta^2} = 0$, woraus

$$\left.\begin{array}{l}\eta'_4 = 0 \\ \xi'_4 = 0\end{array}\right\} \text{Punkt } S \text{ und } \quad \left.\begin{array}{l}\eta''_4 = \pm\sqrt{\dfrac{3\,\mathfrak{M}^{2,0}}{F}} \\ \xi''_4 = \mp\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\mathfrak{M}^{1,1}}{\sqrt{\mathfrak{M}^{2,0}\,.\,F}}\end{array}\right\} \text{Punkt } b.$$

Fig. 8.

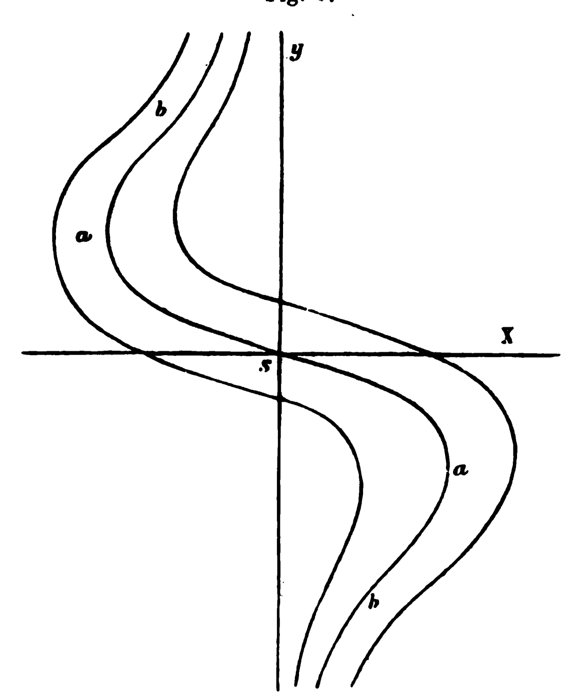


Fig. 8 gibt ein Bild des Verlaufes der betrachteten Curven. Bezüglich der Neigungswinkel der Tangenten in S und b mit der Axe X findet man

$$\left(\frac{d\xi}{d\eta}\right)_S = \text{cotang}\,\tau_S = -2\,\frac{\mathfrak{M}^{1,1}}{\mathfrak{M}^{2,0}}$$

$$\left(\frac{d\xi}{d\eta}\right)_b = \text{cotang}\,\tau_b = \frac{1}{4}\,\frac{\mathfrak{M}^{1,1}}{\mathfrak{M}^{2,0}}.$$

Für die specielle Annahme der Richtung φ, bei welcher $\mathfrak{M}^{1,1} = 0$ ist, so dass das durch den Schwerpunkt S gehende

Axenpaar YOX das Hauptaxenpaar der Fläche ist, wird die Ortsgleichung der gesuchten Curve

$$D = \mathfrak{M}^{2,1} - \xi \mathfrak{M}^{2,0} - \eta^2 \xi F.$$

Die Durchschnitte dieser Curve mit den Coordinatenaxen besitzen die Coordinaten

$$\eta_1 = 0, \quad \xi_1 = \frac{\mathfrak{M}^{2,1} - D}{\mathfrak{M}^{2,0}}$$

$$\xi_2 = 0, \quad \eta_2 = \pm \infty.$$

Ferner findet man

$$\frac{d\xi}{d\eta} = -2F(\mathfrak{M}^{2,1} - D)\frac{\eta}{(\mathfrak{M}^{2,0} + \eta^2 F)^2}$$

$$\frac{d^2\xi}{d\eta^2} = 2F(\mathfrak{M}^{2,1} - D)\frac{3\eta^2 F - \mathfrak{M}^{2,0}}{(\mathfrak{M}^{2,0} + \eta^2 F)^3}$$

Fig. 9.

Es ist hieraus ersichtlich, dass für

$$\frac{d\xi}{d\eta} = 0, \quad \eta_1 = 0, \quad \eta_2 = \pm \infty$$

und für den Wendepunkt

$$\frac{d^2\xi}{d\eta^2}=0, \quad \eta_3=\pm\sqrt{\frac{\mathfrak{M}^{2,0}}{3F}}$$

$$\xi_3=\frac{3}{4}\cdot\frac{\mathfrak{M}^{2,1}-D}{\mathfrak{M}^{2,0}}=\frac{3}{4}\xi_1.$$

Die Wendepunkte sämmtlicher Curven liegen demnach in einer Parallelen zur Axe X. — Für $D=\mathfrak{M}^{2,1}$ übergeht die Curve in die Ordinatenaxe. — Fig. 9 gibt ein Bild dieser für $\mathfrak{M}^{1,1}=0$ abgeleiteten Curvenschaar.

Für das Deviationsmoment dritter Ordnung, zweiter Gattung $D=\int yx^2 d\mu$ gelten ähnliche Gesetze; die beiden Axen vertauschen nur die Rollen.

5.

Es seien zwei in einer Ebene gelegene Flächen F_1 und F_2 und ein Punkt $O\{\eta,\xi\}$ in ihrer Ebene gegeben; man suche jene durch O gehenden Axenpaare, in Bezug auf welche die Deviationsmomente $D=\int y^m x^n d\mu$ beider Flächen gleich sind, und bestimme die Grösse dieser Momente.

Bei Verwendung der Form I für das Deviationsmoment ergibt sich für die Fläche F_1

$$D_1=\Sigma\eta^c\xi^d\sin^e\varphi\cos^f\varphi\,\mathfrak{M}_1^{a,b}$$

und für die Fläche F_2

$$D_2=\Sigma\,\eta^c\xi^d\sin^e\varphi\cos^f\varphi\,\mathfrak{M}_2^{a,b},$$

worin stets $e+f=m+n$ ist.

Soll nun $D_1=D_2$ werden, so muss

$$\Sigma\eta^c\xi^d\sin^e\varphi\cos^f\varphi\,\mathfrak{M}_1^{a,b}=\Sigma\eta^c\xi^d\sin^e\varphi\cos^f\varphi\,\mathfrak{M}_2^{a,b}$$

sein. Dies ist zugleich die Bestimmungsgleichung für den gesuchten Winkel φ. Dividirt man die ganze Gleichung durch $\cos^{m+n}\varphi$, so erhält man eine Gleichung für $\operatorname{tang}\varphi$ und zwar vom Grade $m+n$. Man erhält somit $m+n$ Axenpaare, welche der Aufgabe entsprechen.

Durch Substitution der so erhaltenen Werthe von φ in den Ausdruck für D_1 oder D_2 erhält man die entsprechenden Werthe des Deviationsmomentes.

Deviationsmomente zweiter Ordnung.

Man wähle hiefür den gegebenen Punkt als Coordinatenanfang, so wird übereinstimmend wie in Nr. 2

$$D_1 = (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\mathfrak{M}_1^{1,1} + \sin\varphi\cos\varphi(\mathfrak{M}_1^{2,0} - \mathfrak{M}_1^{0,2})$$

$$D_2 = (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\mathfrak{M}_2^{1,1} + \sin\varphi\cos\varphi(\mathfrak{M}_2^{2,0} - \mathfrak{M}_2^{0,2}),$$

mithin für $D_1 = D_2$

$$\cos 2\varphi(\mathfrak{M}_1^{1,1} - \mathfrak{M}_2^{1,1}) + \tfrac{1}{2}\sin 2\varphi[(\mathfrak{M}_1^{2,0} - \mathfrak{M}_1^{0,2}) - (\mathfrak{M}_2^{2,0} - \mathfrak{M}_2^{0,2})] = 0,$$

woraus

$$\operatorname{tang} 2\varphi = -\frac{2(\mathfrak{M}_1^{1,1} - \mathfrak{M}_2^{1,1})}{(\mathfrak{M}_1^{2,0} - \mathfrak{M}_1^{0,2}) - (\mathfrak{M}_2^{2,0} - \mathfrak{M}_2^{0,2})}$$

und für das gemeinsame Deviationsmoment

$$D = \mp\frac{\mathfrak{M}_1^{1,1}(\mathfrak{M}_2^{2,0} - \mathfrak{M}_2^{0,2}) - \mathfrak{M}_2^{1,1}(\mathfrak{M}_1^{2,0} - \mathfrak{M}_1^{0,2})}{\sqrt{[(\mathfrak{M}_1^{2,0} - \mathfrak{M}_1^{0,2}) - (\mathfrak{M}_2^{2,0} - \mathfrak{M}_2^{0,2})]^2 + 4(\mathfrak{M}_1^{1,1} - \mathfrak{M}_2^{1,1})^2}}.$$

Aus diesen Ausdrücken für tang 2φ und D folgt, dass die der Aufgabe entsprechenden beiden Axenpaare um 90° gegeneinander verdreht sind, mithin die Deviationsmomente für beide Paare einander numerisch gleich und nur durch das Zeichen verschieden sind.

Sind die Coordinatenaxen oder eine von ihnen Symmetrieaxen beider Flächen, so wird

$$\mathfrak{M}_1^{1,1} = 0, \quad \mathfrak{M}_2^{1,1} = 0,$$

mithin die Werthe für den Winkel φ

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 90°.$$

Es sind in diesem Falle die Coordinatenaxen zugleich die einzigen, welche der gestellten Aufgabe genügen.

Deviationsmomente dritter Ordnung.

Bei der Wahl des gegebenen Punktes O zum Coordinatenanfang nimmt das Deviationsmoment dritter Ordnung, erster Gattung

$$D = \int y^2 x\,d\mu$$

nach Nr. 2 folgende Formen an, und zwar für die Fläche F_1

$$D_1 = \cos^3\varphi\, \mathfrak{M}_1^{2,1} + \cos^2\varphi \sin\varphi\, [\mathfrak{M}_1^{3,0} - 2\mathfrak{M}_1^{1,2}] + \cos\varphi \sin^2\varphi\, [\mathfrak{M}_1^{0,3} - 2\mathfrak{M}_1^{2,1}] + \sin^3\varphi\,.\,\mathfrak{M}_1^{1,2}$$

und für die Fläche F_2

$$D_2 = \cos^3\varphi\,.\,\mathfrak{M}_2^{2,1} + \cos^2\varphi \sin\varphi\, [\mathfrak{M}_2^{3,0} - 2\mathfrak{M}_2^{1,2}] + \cos\varphi \sin^2\varphi\, [\mathfrak{M}_2^{0,3} - 2\mathfrak{M}_2^{2,1}] + \sin^3\varphi\, \mathfrak{M}_2^{1,2}.$$

Soll der Aufgabe gemäss $D_1 = D_2$ sein, so erhält man durch Gleichsetzung obiger Ausdrücke und nach Division durch $\cos^3\varphi$

$$\operatorname{tang}^3\varphi [\mathfrak{M}_1^{1,2} - \mathfrak{M}_2^{1,2}] + \operatorname{tang}^2\varphi [(\mathfrak{M}_1^{0,3} - 2\mathfrak{M}_1^{2,1}) - (\mathfrak{M}_2^{0,3} - 2\mathfrak{M}_2^{2,1})] + \\ + \operatorname{tang}\varphi [(\mathfrak{M}_1^{3,0} - 2\mathfrak{M}_1^{1,2}) - (\mathfrak{M}_2^{3,0} - 2\mathfrak{M}_2^{1,2})] + [\mathfrak{M}_1^{2,1} - \mathfrak{M}_2^{2,1}] = 0. \quad 7)$$

Man erhält hieraus drei der Aufgabe entsprechende Axenpaare. Wählt man eines derselben als Coordinatensystem, so wird $\mathfrak{M}_1^{2,1} = \mathfrak{M}_2^{2,1}$, und es übergeht obige Bestimmungsgleichung für die beiden anderen Axenpaare in

$$\operatorname{tang}^2\varphi [\mathfrak{M}_1^{1,2} - \mathfrak{M}_2^{1,2}] + \operatorname{tang}\varphi [\mathfrak{M}_1^{0,3} - \mathfrak{M}_2^{0,3}] + [(\mathfrak{M}_1^{3,0} - 2\mathfrak{M}_1^{1,2}) - \\ (\mathfrak{M}_2^{3,0} - 2\mathfrak{M}_2^{1,2})] = 0.$$

Nennt man die dieser Gleichung entsprechenden Winkelwerthe φ_1 und φ_2, so wird

$$\operatorname{tang}\varphi_1 + \operatorname{tang}\varphi_2 = -\frac{\mathfrak{M}_1^{0,3} - \mathfrak{M}_2^{0,3}}{\mathfrak{M}_1^{1,2} - \mathfrak{M}_2^{1,2}}$$

$$\operatorname{tang}\varphi_1\,.\,\operatorname{tang}\varphi_2 = \frac{\mathfrak{M}_1^{3,0} - \mathfrak{M}_2^{3,0}}{\mathfrak{M}_1^{1,2} - \mathfrak{M}_1^{1,2}} - 2$$

und durch Elimination von $\mathfrak{M}_1^{1,2} - \mathfrak{M}_2^{1,2}$

$$(\operatorname{tang}\varphi_1 + \operatorname{tang}\varphi_2)(\mathfrak{M}_1^{3,0} - \mathfrak{M}_2^{3,0}) + (\operatorname{tang}\varphi_1\,.\,\operatorname{tang}\varphi_2 + 2) \\ (\mathfrak{M}_1^{0,3} - \mathfrak{M}_2^{0,3}) = 0.$$

Es kann hier ein ähnlicher Weg eingeschlagen werden, wie zum Schlusse von Nr. 2. — Obige Relation darf nämlich für jedes der beiden anderen Axenpaare, welche aus der Gleichung 7) resultiren, als Coordinatensystem betrachtet, aufgestellt werden.

Nennt man jene drei Axenpaare wieder I, II, III; die Winkel, welche ihre gleichnamigen Axen miteinander bilden, α_1, α_2, α_3, wobei α_2 der cyclischen Anordnung halber im entgegengesetzten

Sinne der beiden anderen Winkel gezählt werden mag, und führt man endlich, um eine Überhäufung von Stellenzeigern in den Symbolen zu vermeiden, noch die kürzere Bezeichnung ein

$$\left.\begin{array}{l} \text{statt } \mathfrak{M}_1^{3,0} \ldots\ldots M_1^{\mathrm{I}},\ M_1^{\mathrm{II}},\ M_1^{\mathrm{III}} \\ \text{,, } \mathfrak{M}_2^{3,0} \ldots\ldots M_2^{\mathrm{I}},\ M_2^{\mathrm{II}},\ M_2^{\mathrm{III}} \\ \text{,, } \mathfrak{M}_1^{0,3} \ldots\ldots m_1^{\mathrm{I}},\ m_1^{\mathrm{II}},\ m_1^{\mathrm{III}} \\ \text{,, } \mathfrak{M}_2^{0,3} \ldots\ldots m_2^{\mathrm{I}},\ m_2^{\mathrm{II}},\ m_2^{\mathrm{III}} \end{array}\right\} \text{für die Axenpaare I, II, III,}$$

so lautet die zuletzt angeführte Relation, auf die drei Axenpaare angewendet

$$(M_1^{\mathrm{I}} - M_2^{\mathrm{I}})(\operatorname{tang}\alpha_2 - \operatorname{tang}\alpha_3) + (m_1^{\mathrm{I}} - m_2^{\mathrm{I}})(\operatorname{tang}\alpha_2 . \operatorname{tang}\alpha_3 - 2) = 0$$
$$(M_1^{\mathrm{II}} - M_2^{\mathrm{II}})(\operatorname{tang}\alpha_3 - \operatorname{tang}\alpha_1) + (m_1^{\mathrm{II}} - m_2^{\mathrm{II}})(\operatorname{tang}\alpha_3 . \operatorname{tang}\alpha_1 - 2) = 0$$
$$(M_1^{\mathrm{III}} - M_2^{\mathrm{III}})(\operatorname{tang}\alpha_1 - \operatorname{tang}\alpha_2) + (m_1^{\mathrm{III}} - m_2^{\mathrm{III}})(\operatorname{tang}\alpha_1 . \operatorname{tang}\alpha_2 - 2) = 0$$

Hiezu kommt noch die bekannte Relation

$$\operatorname{tang}\alpha_1 . \operatorname{tang}\alpha_2 . \operatorname{tang}\alpha_3 = \operatorname{tang}\alpha_1 + \operatorname{tang}\alpha_2 + \operatorname{tang}\alpha_3.$$

Es herrscht demnach zwischen den Coëfficienten M und m der obigen drei Gleichungen eine gewisse Abhängigkeit und dieselbe ergibt sich durch Elimination der Winkel α_1, α_2, α_3 in folgender Weise:

$$\frac{m_1^{\mathrm{I}} - m_2^{\mathrm{I}}}{M_1^{\mathrm{I}} - M_2^{\mathrm{I}}} + \frac{m_1^{\mathrm{II}} - m_2^{\mathrm{II}}}{M_1^{\mathrm{II}} - M_2^{\mathrm{II}}} + \frac{m_1^{\mathrm{III}} - m_2^{\mathrm{III}}}{M_1^{\mathrm{III}} - M_2^{\mathrm{III}}} =$$
$$= -2 . \frac{m_1^{\mathrm{I}} - m_2^{\mathrm{I}}}{M_1^{\mathrm{I}} - M_2^{\mathrm{I}}} . \frac{m_1^{\mathrm{II}} - m_2^{\mathrm{II}}}{M_1^{\mathrm{II}} - M_2^{\mathrm{II}}} . \frac{m_1^{\mathrm{III}} - m_2^{\mathrm{III}}}{M_1^{\mathrm{III}} - M_2^{\mathrm{III}}}.$$

6.

Es seien zwei in einer Ebene gelegene Flächen F_1 und F_2 und eine in derselben Ebene gelegene Gerade $X(\pi_2, \varphi)$ gegeben. Man suche jene zu dieser Axe senkrechten Axen Y, bezüglich welcher das Deviationsmoment $D = \int y^m x^n d\mu$ für beide Flächen dieselbe Grösse erreicht, und bestimme die Grösse dieses gemeinsamen Deviationsmomentes.

Der Ausdruck für das Deviationsmoment lautet nach der Form II, und zwar für die Fläche F_1

$$D_1 = \Sigma \pi_1^{\gamma} \pi_2^{\delta} \sin^{\epsilon}\varphi \cos^{\lambda}\varphi\, \mathfrak{M}_1^{\alpha,\beta}$$

und für die Fläche F_2

$$D_2 = \Sigma \pi_1^{\gamma} \pi_2^{\delta} \sin^{\varepsilon}\varphi \cos^{\lambda}\varphi \, \mathfrak{M}_2^{\alpha,\beta},$$

worin π_2 und φ, sowie die Momente $\mathfrak{M}$ bekannt sind. Soll nun $D_1 = D_2$ sein, so folgt

$$\Sigma \pi_1^{\gamma} \pi_2^{\delta} \sin^{\varepsilon}\varphi \cos^{\lambda}\varphi \, \mathfrak{M}_1^{\alpha,\beta} = \Sigma \pi_1^{\gamma} \pi_2^{\delta} \sin^{\varepsilon}\varphi \cos^{\lambda}\varphi \, \mathfrak{M}_2^{\alpha,\beta}$$

als Bestimmungsgleichung für π_1. Es ist eine Gleichung n^{ten} Grades, da $\gamma \gtreqless n$ wird; man erhält somit n Gerade, welche der Aufgabe entsprechen. Durch Substitution der gefundenen Werthe für π_1 in einen der obigen Ausdrücke für D_1 oder D_2 erhält man die entsprechenden n-Werthe des Deviationsmomentes.

Deviationsmomente zweiter Ordnung.

Wählt man die gegebene Gerade zur Axe des Coordinatensystems (π, φ), so ist

$$\pi_2 = O, \quad \varphi = 0$$

und

$$D_1 = \int yx d\mu_1 = \int y_1 (x_1 - \pi_1) d\mu_1 = \mathfrak{M}_1^{1,1} - \pi_1 \mathfrak{M}_1^{1,0}$$
$$D_2 = \int yx d\mu_2 = \int y_1 (x_1 - \pi_1) d\mu_2 = \mathfrak{M}_2^{1,1} - \pi_1 \mathfrak{M}_2^{1,0},$$

woraus für $D_1 = D_2$ folgt

$$\pi_1 = \frac{\mathfrak{M}_1^{1,1} - \mathfrak{M}_2^{1,1}}{\mathfrak{M}_1^{1,0} - \mathfrak{M}_2^{1,0}}$$

als Abstand der gesuchten Axe vom Coordinatenanfang.

Bemerkenswerth ist hier der specielle Fall, in welchem die gegebene Gerade durch den Punkt Σ_1 geht, d. i. der von dem

Fig. 10.

Schwerpunkte Σ der als zusammengehörig betrachteten Flächen durch die Schwerpunkte S_1 und S_2 dieser Flächen harmonisch getrennte Punkt. In diesem Falle ist bekanntlich

$$\mathfrak{M}_1^{1,0} = \mathfrak{M}_2^{1,0}$$

für alle durch Σ_1 gehenden Geraden, mithin wird

$$\pi_1 = \infty,$$

d. h. die der Aufgabe entsprechende zweite Axe Y liegt in unendlicher Entfernung. Nur für jenes durch Σ_1 gehende Axenpaar, für welches (nach Nr. 5) die Deviationsmomente beider Flächen gleich sind, d. i.

$$\mathfrak{M}_1^{1,1} = \mathfrak{M}_2^{1,1}$$

wird π_1 unbestimmt. Jede Gerade, die dann zu X senkrecht gezogen wird, entspricht der Bedingung, dass die Deviationsmomente beider Flächen gleich sind.

Der Ausdruck für das Deviationsmoment zweiter Ordnung ergibt sich mit Benützung des für π_1 gefundenen Werthes

$$D = \frac{\mathfrak{M}_1^{1,0}\mathfrak{M}_2^{1,1} - \mathfrak{M}_2^{1,0}\mathfrak{M}_1^{1,1}}{\mathfrak{M}_1^{1,0} - \mathfrak{M}_2^{1,0}}.$$

Deviationsmomente dritter Ordnung.

Bei der Wahl der gegebenen Geraden X zur Coordinatenaxe wird das Deviationsmoment dritter Ordnung, erster Gattung nach Nr. 3

$$D_1 = \int y^2 x d\mu = \int y_1^2 (x_1 - \pi_1) d\mu = \mathfrak{M}^{2,1} - \pi_1 \mathfrak{M}^{2,0}$$

und bei Verwendung dieses Ausdruckes für beide Flächen F und F_2 und nach Gleichsetzung der Deviationsmomente

$$\mathfrak{M}_1^{2,1} - \pi_1 \mathfrak{M}_1^{2,0} = \mathfrak{M}_2^{2,1} - \pi_1 \mathfrak{M}_2^{2,0},$$

woraus

$$\pi_1 = \frac{\mathfrak{M}_1^{2,1} - \mathfrak{M}_2^{2,1}}{\mathfrak{M}_1^{2,0} - \mathfrak{M}_2^{2,0}}.$$

Auch hier ist ein specieller Fall von Interesse. Wie nämlich in einer früheren Abhandlung gezeigt wurde („Momente höherer Ordnung"), gibt es in der Ebene der beiden Flächen eine Curve

zweiter Classe, deren Tangenten die Eigenschaft besitzen, dass in Bezug auf sie die Trägheitsmomente der beiden Flächen einander gleich sind. Ist in vorliegendem Falle die gegebene Axe X eine Tangente dieser Curve zweiter Classe, so wird

$$\mathfrak{M}_1^{2,0} = \mathfrak{M}_2^{2,0}$$

und

$$\pi_1 = \infty,$$

d. h. die gesuchte Axe Y liegt in unendlicher Entfernung. Für das Deviationsmoment dritter Ordnung, zweiter Gattung

$$D_2 = \int yx^2 d\mu$$

wird nach derselben Vorgangsweise und mit Hinweis auf den bereits in Nr. 3 gegebenen Ausdruck

$$\mathfrak{M}_1^{1,2} - 2\pi_1 \mathfrak{M}_1^{1,1} + \pi_1^2 \mathfrak{M}_1^{1,0} = \mathfrak{M}_2^{1,2} - 2\pi_1 \mathfrak{M}_2^{1,1} + \pi_1^2 \mathfrak{M}_2^{1,0},$$

woraus sich für π_1 die Bestimmungsgleichung ergibt

$$\pi_1^2 - 2\pi_1 \cdot \frac{\mathfrak{M}_1^{1,1} - \mathfrak{M}_2^{1,1}}{\mathfrak{M}_1^{1,0} - \mathfrak{M}_2^{1,0}} + \frac{\mathfrak{M}_1^{1,2} - \mathfrak{M}_2^{1,2}}{\mathfrak{M}_1^{1,0} - \mathfrak{M}_2^{1,0}} = 0. \qquad 8)$$

Wählt man eine der beiden Axen, welche dieser Gleichung entsprechen, zur Ordinatenaxe, so wird

$$\mathfrak{M}_1^{1,2} = \mathfrak{M}_2^{1,2}$$

und die quadratische Gleichung 8) übergeht in

$$\pi_1 - 2\,\frac{\mathfrak{M}_1^{1,1} - \mathfrak{M}_2^{1,1}}{\mathfrak{M}_1^{1,0} - \mathfrak{M}_2^{1,0}} = 0.$$

Nennt man nun die beiden der Aufgabe laut Gleichung 8) entsprechenden Geraden I und II, die auf sie bezogenen Deviationsmomente zweiter Ordnung M^{I} und M^{II}, so wird, wenn I zur Ordinatenaxe gewählt wird,

$$\pi_{1,I} = 2\,\frac{M_1 - M_2^{I}}{\mathfrak{M}_1^{1,0} - \mathfrak{M}_2^{1,0}}$$

und für II als Ordinatenaxe

$$\pi_{1,II} = 2\,\frac{M_1^{II} - M_2^{II}}{\mathfrak{M}_1^{1,0} - \mathfrak{M}_2^{1,0}}.$$

Da nun

$$\pi_{1,I} = -\pi_{1,II}$$

ist, so resultirt

$$M_1^{\mathrm{I}} - M_2^{\mathrm{I}} = M_1^{\mathrm{II}} - M_2^{\mathrm{II}}.$$

Für den speciellen Fall, in dem die gegebene Axe durch den Punkt Σ_1 geht, wird $\mathfrak{M}_1^{1,0} = \mathfrak{M}_2^{1,0}$, und die Gleichung 8) gibt für π_1 die beiden Werthe

$$\pi_1' = \frac{\mathfrak{M}_1^{1,2} - \mathfrak{M}_1^{1,2}}{\mathfrak{M}_1^{1,1} - \mathfrak{M}_2^{1,1}} \text{ und } \pi_2' = \infty.$$

7.

Es seien zwei Flächen F_1 und F_2 gegeben und ein in ihrer Ebene gelegenes Axenpaar YOX mit der Axenrichtung φ; es soll der geometrische Ort der Punkte O ermittelt werden, wenn die durch sie hindurchgehenden, mit dem gegebenen gleichgerichteten Axenpaare die Eigenschaft besitzen sollen, dass die Deviationsmomente $D = \int y^m x^n d\mu$ beider Flächen in Bezug auf sie gleiche Grösse erreichen.

Sind D_1 und D_2 die beiden Deviationsmomente der Flächen F_1 und F_2, so lautet die Bedingungsgleichung der Aufgabe unter Benützung der Form I

$$\Sigma \eta^c \xi^d \sin^e\varphi \cos^f\varphi \, \mathfrak{M}_1^{a,b} = \Sigma \eta^c \xi^d \sin^e\varphi \cos^f\varphi \, \mathfrak{M}_2^{a,b},$$

worin $c+d$ als höchsten Werth $m+n$ erreicht.

Da φ und die Momente $\mathfrak{M}$ als bekannt vorauszusetzen sind, repräsentirt obige Gleichung zwischen η und ξ die gesuchte Ortsgleichung. Der geometrische Ort ist somit eine Curve $(m+n)^{\text{ter}}$ Ordnung.

Betrachtet man φ als veränderlichen Parameter, und stellt für jeden Werth desselben die Gleichung der Curve her, so erhält man eine Curvenschaar in der Ebene der beiden Flächen. Nach Nr. 5) ist sofort klar, dass durch jeden Punkt dieser Ebene $(m+n)$ jener Curven gehen.

Deviationsmomente zweiter Ordnung.

Es ist

$$D = \int yx\,d\mu = \int [(y_1 - \eta)\cos\varphi - (x_1 - \xi)\sin\varphi][(x_1 - \xi)\cos\varphi + \\ + (y_1 - y)\sin\varphi]\,d\mu$$

und nach Ausführung

$$D = \eta^2 FB - \xi^2 FB + \eta\xi FA - \eta(A\mathfrak{M}^{0,1} + 2B\mathfrak{M}^{1,0}) -$$
$$-\xi(A\mathfrak{M}^{1,0} - 2B\mathfrak{M}^{0,1}) + B(\mathfrak{M}^{2,0} - \mathfrak{M}^{0,2}) + A\mathfrak{M}^{1,1},$$

wenn wieder der Massencoëfficient der Fläche gleich der Einheit, und ferner der Kürze wegen

$$\cos^2\varphi - \sin^2\varphi = A, \quad \sin\varphi\cos\varphi = B$$

gesetzt wird. Stellt man diesen Ausdruck für jede der beiden Flächen auf, und setzt die Deviationsmomente einander gleich, so erhält man als Gleichung des gesuchten geometrischen Ortes

$$\eta^2 B(F_1 - F_2) - \xi^2 B(F_1 - F_2) + \eta\xi A(F_1 - F_2) - \eta[A(\mathfrak{M}_1^{0,1} - \mathfrak{M}_2^{0,1}) +$$
$$+ 2B(\mathfrak{M}_1^{1,0} - \mathfrak{M}_2^{1,0})] - \xi[A(\mathfrak{M}_1^{1,0} - \mathfrak{M}_2^{1,0}) - 2B(\mathfrak{M}_1^{0,1} - \mathfrak{M}_2^{0,1})] +$$
$$+ B[(\mathfrak{M}_1^{2,0} - \mathfrak{M}_2^{2,0}) - (\mathfrak{M}_1^{0,2} - \mathfrak{M}_2^{0,2})] + A[\mathfrak{M}_1^{1,1} - \mathfrak{M}_2^{1,1}] = 0.$$

Wählt man nun als Coordinatenanfang den schon mehrfach erwähnten Punkt Σ_1 (Fig. 10), so wird

$$\mathfrak{M}_1^{0,1} - \mathfrak{M}_2^{0,1} = 0, \quad \mathfrak{M}_1^{1,0} - \mathfrak{M}_2^{1,0} = 0$$

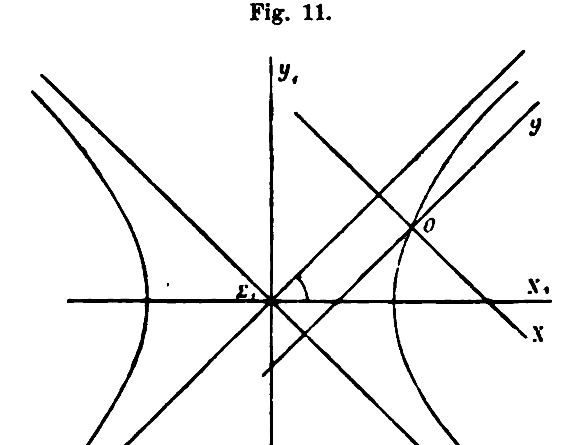
und obige Gleichung übergeht in die einfachere

$$\eta^2 - \xi^2 + \eta\xi\frac{A}{B} + \frac{B[(\mathfrak{M}_1^{2,0} - \mathfrak{M}_2^{2,0}) - (\mathfrak{M}_1^{0,2} - \mathfrak{M}_2^{0,2})] + A[\mathfrak{M}_1^{1,1} - \mathfrak{M}_2^{1,1}]}{B(F_1 - F_2).} \qquad 9)$$

Der geometrische Ort des Anfangspunktes O des Axenpaares YOX für gleiche Deviationsmomente zweiter Ordnung ist somit eine gleichseitige Hyperbel, deren Mittelpunkt Σ_1 ist. Für $A = 0$ wird $\varphi = 45°$; es erscheint dann die Gleichung der Hyperbel auf deren Axen bezogen; man ersieht hieraus, dass die Richtung des Axenpaares YOX für gleiche Deviationsmomente übereinstimmend ist mit der Richtung der Assymptoten der Hyberbel. Für einen anderen Werth von φ, d. h. für eine andere Richtung des Axenpaares ändern sich A und B allein in Gleichung 9); es bleibt also der geometrische Ort des Punktes O auch dann eine gleichseitige Hyperbel mit dem Mittelpunkte Σ_1, nur die Axen derselben werden andere, der Grösse und Richtung nach. Betrachtet man also φ als veränderlichen Parameter, so repräsentirt Gleichung 9) eine Schaar gleichseitiger Hyperbeln mit dem gemeinsamen Mittelpunkte Σ_1; jeder ihrer Punkte besitzt

die Eigenschaft, dass die durch ihn zu den Assymptoten der Hyperbel gezogenen Parallelen ein Axenpaar bilden, bezüglich

Fig. 11.



dessen die Deviationsmomente zweiter Ordnung der gegebenen Flächen einander gleich sind. — Durch jeden Punkt der Ebene gehen zwei dieser Hyperbeln; man erhält also für jeden Punkt der Ebene zwei Axenpaare von erwähnter Eigenschaft, was mit der Betrachtung in Nr. 2 übereinstimmt.

Um ein Bild der Anordnung dieser Hyperbeln zu erhalten. soll der Ort ihrer Scheiteln ausgemittelt werden.

Schreibt man die Gleichung 9) in der Form

$$\eta^2 - \xi^2 + \eta\xi \cdot \frac{A}{B} + P + \frac{A}{B} Q = 0, \qquad 10)$$

worin der Kürze wegen

$$\frac{1}{F_1 - F_2}\left[(\mathfrak{M}_1^{2,0} - \mathfrak{M}_2^{2,0}) - (\mathfrak{M}_1^{0,2} - \mathfrak{M}_2^{0,2})\right] = P$$

$$\frac{1}{F_1 - F_2}\left[\mathfrak{M}_1^{1,1} - \mathfrak{M}_2^{1,1}\right] = Q$$

gesetzt wurde, so erhält man, wie leicht zu ersehen, und übrigens

aus einer oben gemachten Bemerkung klar ist, die Scheitel jeder Hyperbel in ihrem Schnitte mit der Geraden

$$\eta = \xi \,.\, \mathrm{tang}(\varphi - 45).$$

Aus dieser und der Gleichung 10) mag nun φ eliminirt werden. Es ist

$$\frac{\eta}{\xi} = \mathrm{tang}(\varphi - 45) = \frac{\mathrm{tang}\,\varphi - 1}{1 + \mathrm{tang}\,\varphi},$$

woraus

$$\mathrm{tang}\,\varphi = \frac{\xi + \eta}{\xi - \eta}, \qquad 11)$$

ferner

$$\frac{A}{B} = \frac{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi}{\sin\varphi\,\cos\varphi} = 2\,\mathrm{cotang}\,2\varphi = \frac{1 - \mathrm{tang}^2\,\varphi}{\mathrm{tang}\,\varphi}$$

und nach Substitution des Werthes von $\mathrm{tang}\,\varphi$ aus 11)

$$\frac{A}{B} = \frac{4\eta\xi}{\eta^2 - \xi^2}.$$

Bei Verwendung dieses Ausdruckes übergeht Gleichung 10) in

$$(\eta^2 + \xi^2)^2 + P(\eta^2 - \xi^2) + 4Q\eta\xi = 0.$$

Nimmt man als Coordinatensystem jenes eine durch Σ_1 gehende Axenpaar an, bezüglich dessen

$$\mathfrak{M}_1^{1,1} = \mathfrak{M}_2^{1,1}$$

gilt, so wird $Q = 0$, und die Gleichung des Ortes der Hyperbelscheitel lautet dann

$$(\eta^2 + \xi^2)^2 + P(\eta^2 - \xi^2) = 0.$$

Er ist somit eine Lemniscate. Jede durch Σ_1 gehende Gerade schneidet dieselbe ausser in Σ_1 selbst noch in zwei Punkten A und A_1, welche die Scheitel einer gleichseitigen Hyperbel aus jener oben besprochenen Schaar sind. Die Schnittpunkte der unter 45° gegen die Coordinatenaxen geneigten Geraden aa_1 mit der Lemniscate fallen in Σ_1 zusammen; die gleichseitige Hyperbel reducirt sich in diesem Falle auf die Axen $Y_1\Sigma_1X_1$. Jeder Punkt O

dieser Axen ist somit Mittelpunkt eines Axenpaares (Fig. 13) $Y_1^1 O X_1$ oder $Y_1 O X_1^1$, parallel zu $Y_1 \Sigma_1 X_1$, bezüglich dessen die

Fig. 12.

Fig. 13.

Deviationsmomente zweiter Ordnung der beiden Flächen einander gleich sind. Diese Eigenschaft wurde schon an anderer Stelle gezeigt.

8.

Die Betrachtungen der vorigen Nummer hatten zum Zwecke, ein möglichst anschauliches Bild von der Gruppirung jener Axenpaare in der Ebene zu geben, bezüglich welcher die Deviationsmomente zweier Flächen gleiche Grösse erreichen.

Derselbe Zweck kann jedoch noch auf andere Weise erreicht werden. Man kann nämlich von der Form II für das Deviationsmoment $D = \int y^m x^n d\mu$ ausgehen und durch Gleichsetzung der Deviationsmomente beider Flächen die Gleichung erhalten

$$\Sigma \pi] \pi_2^{\delta} \sin^{\epsilon} \varphi \cos^{\lambda} \varphi \mathfrak{M}_1^{\alpha, \beta} = \Sigma \pi] \pi_2^{\delta} \sin^{\epsilon} \varphi \cos^{\lambda} \varphi \mathfrak{M}_2^{\alpha, \beta},$$

worin nur die Momente $\mathfrak{M}$ als bekannt vorauszusetzen sind. Ebenso wie in voriger Nummer der Winkel φ als veränderlicher Parameter der Curvenschaar gewählt wurde, kann es hier mit π_1 geschehen. Ertheilt man nämlich diesem einen bestimmten Werth

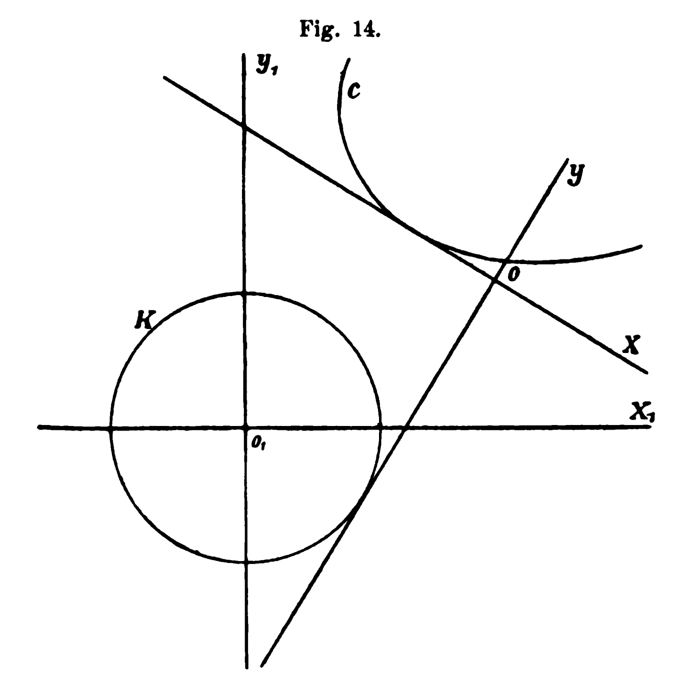
$$\pi_1 = p, \tag{12}$$

so übergeht obige Gleichung in

$$F(\pi_2, \varphi) = 0 \tag{13}$$

eine Gleichung vom Grade $(m+n)$ zwischen den Liniencoordinaten π_2 und φ; die Gleichungen 12) und 13) repräsentiren dann einen Kreis K und eine Curve C, und die Wechselbeziehung zwischen beiden ist folgende (Fig. 14):

Fig. 14.

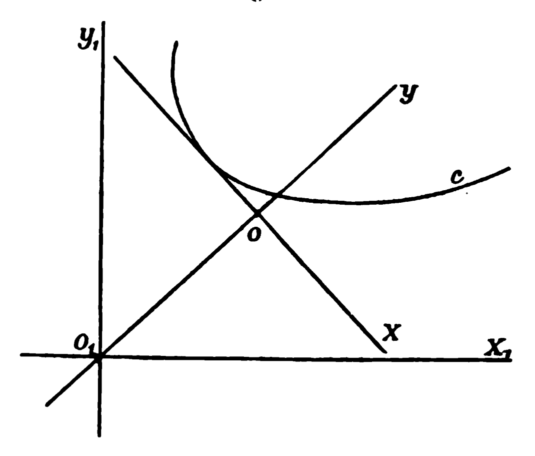


Je zwei Tangenten der einen und der anderen Curve, welche aufeinander senkrecht stehen, bilden ein Axenpaar YOX, bezüglich dessen die Deviationsmomente beider gegebenen Flächen einander gleich sind. Durch Veränderung des Kreishalbmessers oder Parameters p entsteht eine Schaar von Kreisen und eine ihr

entsprechende Schaar von Curven, welche sämmtlich die oben angeführte Wechselbeziehung aufweisen.

Wählt man den Halbmesser des Kreises K gleich Null, und sucht die zugehörige Curve C, so findet man zu jedem Strahl O_1X

Fig. 15.



des Strahlenbüschels O_1 die entsprechende Axe OY, indem man senkrecht zu jenem Strahl die Tangente an die Curve C führt. (Fig. 15.) Das so erhaltene Axenpaar YOX besitzt dann die verlangte Eigenschaft gleicher Deviationsmomente.

Deviationsmomente zweiter Ordnung.

Unter Benützung der in Nr. 1 aufgestellten Ausdrücke für y und x wird das Deviationsmoment zweiter Ordnung

$$D = \int yx d\mu = \int [y_1 \cos\varphi - x_1 \sin\varphi - \pi_2][x_1 \cos\varphi + y_1 \sin\varphi - \pi_1] d\mu$$

und nach Ausführung und Ersetzung von π_1 durch p

$$D = \pi_2 p F - \pi_2 \sin\varphi\, \mathfrak{M}^{1,0} - \pi_2 \cos\varphi\, \mathfrak{M}^{0,1} + p \sin\varphi\, \mathfrak{M}^{0,1} - \\ - p\cos\varphi\, \mathfrak{M}^{1,0} + \sin\varphi \cos\varphi (\mathfrak{M}^{2,0} - \mathfrak{M}^{0,2}) + (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\mathfrak{M}^{1,1}.$$

Stellt man diesen Ausdruck für jede der Flächen F_1 und F_2 auf, so erhält man nach Gleichsetzung ihrer Deviationsmomente

$$\pi_2 p(F_1 - F_2) - \pi_2 \sin\varphi (\mathfrak{M}_1^{1,0} - \mathfrak{M}_2^{1,0}) - \pi_2 \cos\varphi (\mathfrak{M}_1^{0,1} - \mathfrak{M}_2^{0,1}) + \\ + p \sin\varphi (\mathfrak{M}_1^{0,1} - \mathfrak{M}_2^{0,1}) - p\cos\varphi (\mathfrak{M}_1^{1,0} - \mathfrak{M}_2^{1,0}) + \\ + \sin\varphi \cos\varphi [(\mathfrak{M}_1^{2,0} - \mathfrak{M}_2^{2,0}) - (\mathfrak{M}_1^{0,2} - \mathfrak{M}_2^{0,2})] + \\ + (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)(\mathfrak{M}_1^{1,1} - \mathfrak{M}_2^{1,1}) = 0. \quad 14)$$

Es empfiehlt sich, auch hier als Anfangspunkt des Coordinatensystems den Punkt Σ_1 zu wählen, für dessen Axen

$$\mathfrak{M}_1^{1,0} - \mathfrak{M}_2^{1,0} = 0, \quad \mathfrak{M}_1^{0,1} - \mathfrak{M}_2^{0,1} = 0$$

werden, und als Coordinatenaxenpaar jenes anzunehmen, für welches

$$\mathfrak{M}_1^{1,1} = \mathfrak{M}_2^{1,1}$$

gilt. Es übergeht dann Gleichung 14) in

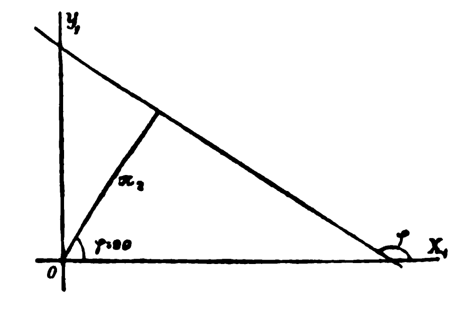
$$\pi_2 p + \sin\varphi \cos\varphi \,.\, P = 0, \tag{15}$$

worin wieder der Kürze wegen

$$\frac{1}{F_1 - F_2}[(\mathfrak{M}_1^{2,0} - \mathfrak{M}_2^{2,0}) - (\mathfrak{M}_1^{0,2} - \mathfrak{M}_2^{0,2})] = P$$

gesetzt wurde. Gleichung 15) repräsentirt dann die Gleichung der gesuchten Curve in Liniencoordinaten.

Fig. 16.



Schreibt man diese Gleichung in der Form

$$\frac{\pi_2}{\sin\varphi . \cos\varphi} = -\frac{P}{p}$$

und berücksichtigt, dass nach Fig. 16

$$\frac{\pi_2}{\cos\varphi} = -\overline{O'A}$$

und

$$\frac{\pi_2}{\cos\varphi \sin\varphi} = -\frac{\overline{O'A}}{\sin\varphi} = -\overline{AB},$$

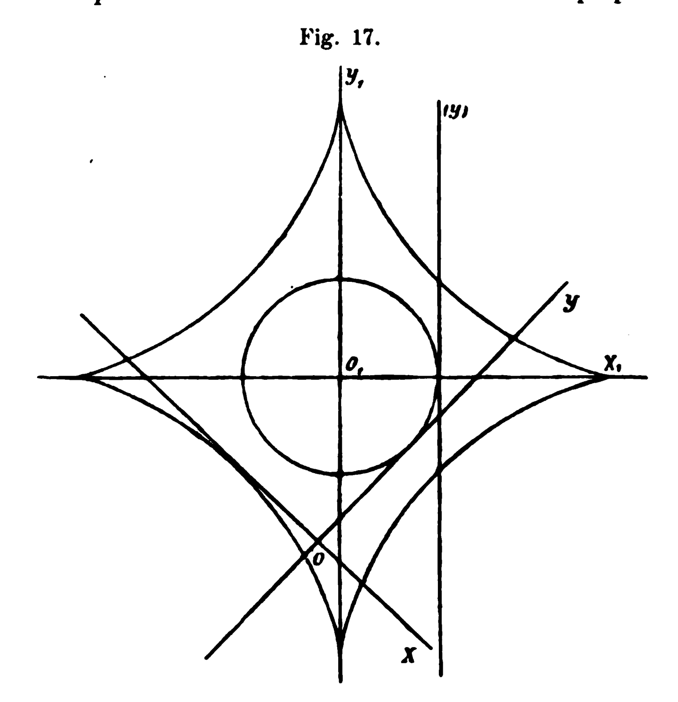
so ist

$$\overline{AB} = \frac{P}{p} = \text{Constant}$$

eine Eigenschaft der abgeleiteten Curve. Sie umhüllt mithin alle Lagen der constanten Strecke AB, deren Endpunkte in je einer Coordinatenaxe gleiten. Diese Curve ist eine Astroïde. (Fig. 17.)

Jedem Kreise vom Halbmesser p entspricht eine bestimmte Grösse der Strecke $\overline{AB}$ und mithin auch eine bestimmte Curve. Kreisradius p und Strecke $\overline{AB}$ sind einander verkehrt proportional.

Fig. 17.



Jede Tangente OY an den Kreis bildet mit der ihr zugehörigen, zu ihr senkrechten Tangente OX an die Curve ein Axenpaar YOX, bezüglich dessen die Deviationsmomente zweiter Ordnung beider Flächen einander gleich sind. Für die Kreistangente (Y) wird O_1X_1 die zugehörige Axe, und dasselbe gilt für alle anderen Kreise mit beliebigem Halbmesser p, denn O_1X_1 und O_1Y_1 gehören allen Astroïden als Tangenten an. Man findet also auch hier die Eigenschaft bestätigt, dass (unter Voraussetzung obiger Annahme der Coordinatenaxen O_1Y_1, O_1X_1) für jedes Axenpaar, welches aus einer dieser Coordinatenaxen und einer zu ihr senkrechten, sonst beliebig gelegenen Axe besteht, die Deviationsmomente zweiter Ordnung der beiden Flächen einander gleich sind. Für $p=0$ wird $AB=\infty$; die entsprechende Astroïde liegt dann in unendlicher Entfernung, nur ihre Tangenten O_1Y_1, O_1X_1 liegen im Endlichen und diese bilden als durch O_1

gehende Axen das einzige Axenpaar mit gleichen Deviationsmomenten für beide Flächen.

Schliesslich sei hier noch folgende Betrachtung angeknüpft. Ein Strahlenbüschel s sei gegeben. Jeder Strahl dieses Büschels, als Axe betrachtet, bildet mit einer zu ihm senkrechten Geraden in der Ebene der beiden Flächen ein Axenpaar, bezüglich dessen die Deviationsmomente zweiter Ordnung der beiden Flächen F_1 und F_2 einander gleich sind. Man suche den geometrischen Ort jener dem Strahlenbüschel zugeordneten Axen.

Die Lösung dieser Aufgabe ist nach Vorhergehendem leicht. Es ist nur nöthig, in die Gleichung 14) des geometrischen Ortes der zugeordneten Axen $p = 0$ einzusetzen, wodurch man die Gleichung des gesuchten Ortes erhält:

$$\begin{aligned}&\pi_2 \sin\varphi\,(\mathfrak{M}_1^{1,0}-\mathfrak{M}_2^{1,0}) + \pi_2 \cos\varphi\,(\mathfrak{M}_1^{0,1}-\mathfrak{M}_2^{0,1}) -\\ &-\sin\varphi\cos\varphi[(\mathfrak{M}_1^{2,0}-\mathfrak{M}_2^{2,0})-(\mathfrak{M}_1^{0,2}-\mathfrak{M}_2^{0,2})]-\\ &-(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)(\mathfrak{M}_1^{1,1}-\mathfrak{M}_2^{1,1}) = 0,\end{aligned}$$

oder wenn man sie auf jenes Strahlenpaar des Büschels s als Coordinatenaxenpaar bezieht, bezüglich welchem

$$\mathfrak{M}_1^{1,1} = \mathfrak{M}_2^{1,1}$$

gilt, so wird

$$\begin{aligned}&\pi_2 \sin\varphi\,(\mathfrak{M}_1^{1,0}-\mathfrak{M}_2^{1,0}) + \pi_2 \cos\varphi\,(\mathfrak{M}_1^{0,1}-\mathfrak{M}_2^{0,1}) -\\ &\qquad -\sin\varphi\cos\varphi[(\mathfrak{M}_1^{2,0}-\mathfrak{M}_2^{2,0})-(\mathfrak{M}_1^{0,2}-\mathfrak{M}_2^{0,2})] = 0.\end{aligned}$$

Dieser Ort ist ein Strahlenbüschel zweiter Ordnung und zwar eine Parabel, welche die Coordinatenaxen tangirt, denn für $\varphi = 0$, $\varphi = 90^\circ$ wird $\pi_2 = 0$.

Für $\pi_2 = \infty$ wird

$$\operatorname{cotang}\varphi = -\frac{\mathfrak{M}_1^{1,0}-\mathfrak{M}_2^{1,0}}{\mathfrak{M}_1^{0,1}-\mathfrak{M}_2^{0,1}},$$

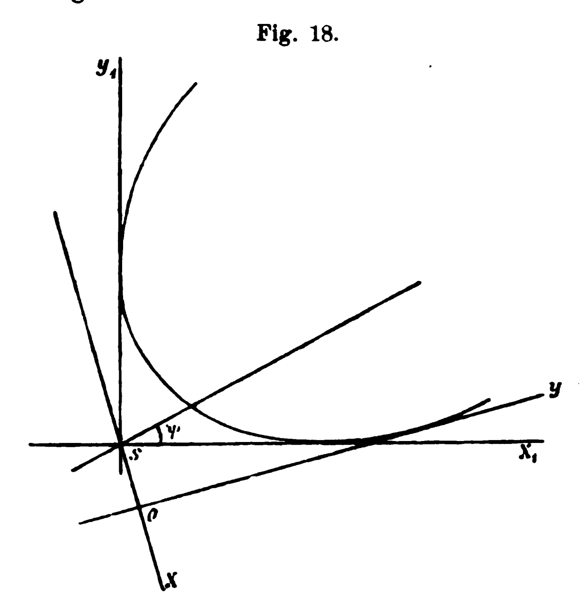
woraus sich die Richtung der Parabelaxe mit

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{\mathfrak{M}_1^{1,0}-\mathfrak{M}_2^{1,0}}{\mathfrak{M}_1^{0,1}-\mathfrak{M}_2^{0,1}}$$

ergibt. — Jeder Strahl sX des Büschels bildet mit der zu ihm

senkrechten Tangente OY der Parabel ein Axenpaar von der verlangten Eigenschaft.

Fig. 18.



9.

Es seien drei Flächen F_1, F_2, F_3 in einer Ebene gegeben. Man stelle die Gruppirung jener Axenpaare in dieser Ebene dar, in Bezug auf welche das Deviationsmoment $D = \int y^m x^n d\mu$ jeder der drei Flächen dieselbe Grösse erreicht.

Die Deviationsmomente der drei Flächen, bezogen auf ein gemeinsames Coordinatensystem, lassen sich nach Form II in folgender Weise darstellen:

$$D_1 = \Sigma \pi] \pi_2^\delta \sin^\varepsilon \varphi \cos^\lambda \varphi \, \mathfrak{M}_1^{\alpha, \beta}$$
$$D_2 = \Sigma \pi] \pi_2^\delta \sin^\varepsilon \varphi \cos^\lambda \varphi \, \mathfrak{M}_2^{\alpha, \beta}$$
$$D_3 = \Sigma \pi] \pi_2^\delta \sin^\varepsilon \varphi \cos^\lambda \varphi \, \mathfrak{M}_3^{\alpha, \beta},$$

worin die Momente $\mathfrak{M}$ aller drei Flächen als bekannt angesehen werden dürfen. Soll nun

$$D_1 = D_2 = D_3$$

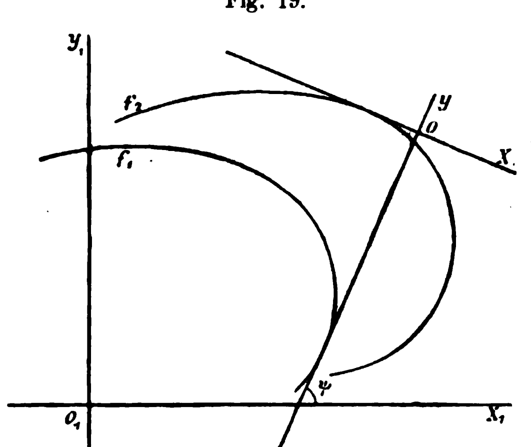
sein, so können die rechten Seiten obiger drei Ausdrücke einander gleichgesetzt werden, wodurch man zwei Gleichungen zwischen

π_1, π_2 und φ erhält; eliminirt man aus einer derselben π_2, aus der anderen π_1, so erhält man zwei neue Gleichungen zwischen π_1 und φ einerseits, π_2 und φ anderseits, welche auch in die Form gebracht werden können:

$$f_1(\pi_1, \psi) = 0$$
$$f_2(\pi_2, \varphi) = 0,$$

worin ψ statt $\varphi + 90°$ gesetzt wurde. Diese Gleichungen repräsentiren zwei Curven f_1 und f_2 (Fig. 19); jede Tangente der einen

Fig. 19.



Curve bildet mit der ihr zugehörigen senkrechten Tangente der anderen Curve ein Axenpaar *YOX*, bezüglich dessen die Deviationsmomente zweiter Ordnung der drei gegebenen Flächen einander gleich sind.

Deviationsmomente zweiter Ordnung.

Der allgemeine Ausdruck für das Deviationsmoment zweiter Ordnung einer Fläche ist nach voriger Nummer:

$$D = \pi_1 \pi_2 F - \pi_2 \sin\varphi\, \mathfrak{M}^{1,0} - \pi_2 \cos\varphi\, \mathfrak{M}^{0,1} + \pi_1 \sin\varphi\, \mathfrak{M}^{0,1} -$$
$$- \pi_1 \cos\varphi\, \mathfrak{M}^{1,0} + \sin\varphi \cos\varphi\, (\mathfrak{M}^{2,0} - \mathfrak{M}^{0,2}) + (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\, \mathfrak{M}^{1,1}.$$

Stellt man diesen Ausdruck für jede der drei gegebenen Flächen auf, so erhält man nach Gleichsetzung der Deviationsmomente

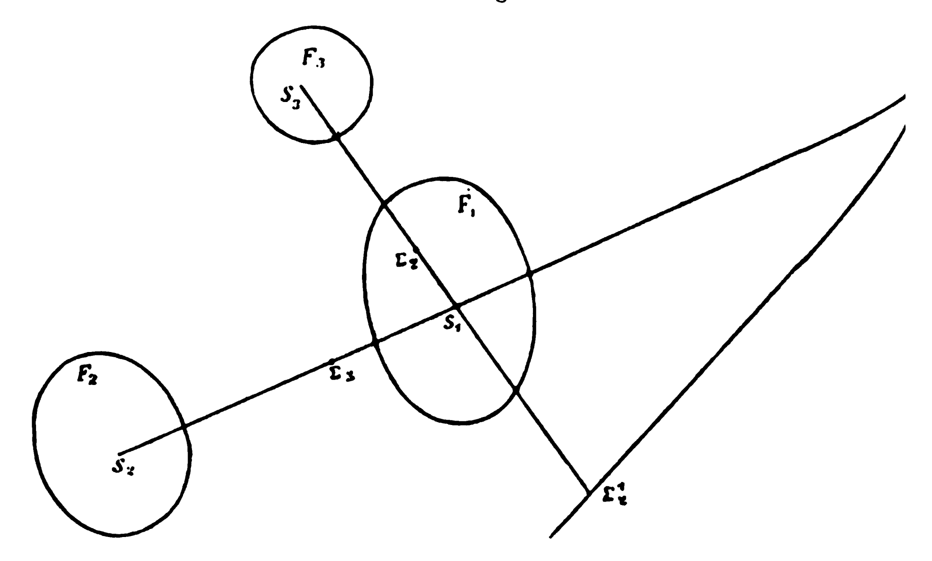
die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned}\pi_1\pi_2(F_1-F_2) &- \pi_2 \sin\varphi(\mathfrak{M}_1^{1,0}-\mathfrak{M}_2^{1,0}) - \pi_2\cos\varphi(\mathfrak{M}_1^{0,1}-\mathfrak{M}_2^{0,1}) + \\ &+ \pi_1\sin\varphi(\mathfrak{M}_1^{0,1}-\mathfrak{M}_2^{0,1}) - \pi_1\cos\varphi(\mathfrak{M}_1^{1,0}-\mathfrak{M}_2^{1,0}) + \\ &+ \sin\varphi\cos\varphi[(\mathfrak{M}_1^{2,0}-\mathfrak{M}_2^{2,0}) - (\mathfrak{M}_1^{0,2}-\mathfrak{M}_2^{0,2})] + \\ &+ (\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)(\mathfrak{M}_1^{1,1}-\mathfrak{M}_2^{1,1}) = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi_1\pi_2(F_1-F_3) &- \pi_2 \sin\varphi(\mathfrak{M}_1^{1,0}-\mathfrak{M}_3^{1,0}) - \pi_2\cos\varphi(\mathfrak{M}_1^{0,1}-\mathfrak{M}_3^{0,1}) + \\ &+ \pi_1\sin\varphi(\mathfrak{M}_1^{0,1}-\mathfrak{M}_3^{0,1}) - \pi_1\cos\varphi(\mathfrak{M}_1^{1,0}-\mathfrak{M}_3^{1,0}) + \\ &+ \sin\varphi\cos\varphi[(\mathfrak{M}_1^{2,0}-\mathfrak{M}_3^{2,0}) - (\mathfrak{M}_1^{0,2}-\mathfrak{M}_3^{0,2})] + \\ &+ (\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)(\mathfrak{M}_1^{1,1}-\mathfrak{M}_3^{1,1}) = 0.\end{aligned}$$

Sind F_1, F_2, F_3 (Fig. 20) die drei gegebenen Flächen; S_1, S_2, S_3 ihre Schwerpunkte; Σ_3 der Schwerpunkt von F_1 und F_2 zusammengenommen, Σ_2 jener von F_1 und F_3 zusammengenommen; endlich Σ_3' der von Σ_3 durch S_1 und S_2 harmonisch getrennte Punkt und ebenso Σ_2' jener von Σ_2 durch S_1 und S_3 harmonisch getrennte, so ist bekanntlich $\Sigma_2'\Sigma_3'$ eine Gerade, bezüglich welcher die Momente erster Ordnung der drei Flächen einander gleich sind.

Fig. 20.



Wählt man diese Gerade zur Abscissenaxe, so wird

$$\mathfrak{M}_1^{1,0} = \mathfrak{M}_2^{1,0} = \mathfrak{M}_3^{1,0}$$

und die beiden obigen Gleichungen übergehen in

$$\pi_1\pi_2 a_{12} - \pi_2 \cos\varphi\, b_{12} + \pi_1 \sin\varphi\, b_{12} + \sin\varphi \cos\varphi\, c_{12} + \\ + (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\, d_{12} = 0, \qquad 16)$$

$$\pi_1\pi_2 a_{13} - \pi_2 \cos\varphi\, b_{13} + \pi_1 \sin\varphi\, b_{13} + \sin\varphi \cos\varphi\, c_{13} + \\ + (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\, d_{13} = 0, \qquad 17)$$

wenn man der Kürze wegen die Bezeichnungen einführt:

$$F_1 - F_2 = a_{12}, \quad F_1 - F_3 = a_{13}$$
$$\mathfrak{M}_1^{0,1} - \mathfrak{M}_2^{0,1} = b_{12}, \quad \mathfrak{M}_1^{0,1} - \mathfrak{M}_3^{0,1} = b_{13}$$
$$(\mathfrak{M}_1^{2,0} - \mathfrak{M}_2^{2,0}) - (\mathfrak{M}_1^{0,2} - \mathfrak{M}_2^{0,2}) = c_{12},$$
$$(\mathfrak{M}_1^{2,0} - \mathfrak{M}_3^{2,0}) - (\mathfrak{M}_1^{0,2} - \mathfrak{M}_3^{0,2}) = c_{13}$$
$$\mathfrak{M}_1^{1,1} - \mathfrak{M}_2^{1,1} = d_{12}, \quad \mathfrak{M}_1^{1,1} - \mathfrak{M}_3^{1,1} = d_{13}.$$

Aus Gleichung 16) findet man nun

$$\pi_1 = \frac{\pi_2 \cos\varphi\, b_{12} - \sin\varphi \cos\varphi\, c_{12} - (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\, d_{12}}{\pi_2 a_{12} + \sin\varphi\, b_{12}}$$

und durch Substitution dieses Ausdruckes in 17) .

$$\pi_2^2 \cos\varphi\, S_{ab} - \pi_2 [\sin\varphi \cos\varphi\, S_{ac} + (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\, S_{ad}] - \\ - \sin^2\varphi \cos\varphi\, S_{bc} - \sin\varphi (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\, S_{bd} = 0, \quad 18)$$

worin der Kürze wegen

$$\left.\begin{aligned} a_{12} b_{13} - a_{13} b_{12} &= S_{ab} \\ a_{12} c_{13} - a_{13} c_{12} &= S_{ac} \\ a_{12} d_{13} - a_{13} d_{12} &= S_{ad} \\ b_{12} c_{13} - b_{13} c_{12} &= S_{bc} \\ b_{12} d_{13} - b_{13} d_{12} &= S_{bd} \end{aligned}\right\} \quad 19)$$

gesetzt wurde.

Die Gleichung 18) zwischen π_2 und φ repräsentirt die Curve f_2, von welcher zu Beginn dieser Nummer gesprochen wurde. Die Gleichung der Curve f_1 wird auf ähnliche Weise gefunden. Durch Elimination von π_2 aus den Gleichungen 16) und 17) erhält man nämlich die neue Gleichung:

$$\pi_1^2 \sin\varphi\, S_{ab} + \pi_1 [\sin\varphi \cos\varphi\, S_{ac} + (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\, S_{ad}] -$$
$$- \sin\varphi \cos^2\varphi\, S_{bc} - \cos\varphi (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\, S_{bd} = 0,$$

und wenn man hierin den Winkel $\psi = \varphi + 90°$ einführt, so wird wegen

$$\sin\varphi = -\cos\psi, \quad \cos\varphi = \sin\psi$$

$$\pi_1^2 \cos\psi\, S_{ab} + \pi_1 [\sin\psi \cos\psi\, S_{ac} + (\cos^2\psi - \sin^2\psi)\, S_{ad}] - \sin^2\psi \cos\psi\, S_{bc} -$$
$$- \sin\psi (\cos^2\psi - \sin^2\psi)\, S_{bd} = 0. \qquad 20)$$

Diese Gleichung repräsentirt die Curve f_1. — Die durch die Gleichungen 18) und 20) gegebenen Curven besitzen, wie aus dem Eingange klar ist, die Eigenschaft, dass eine beliebige Tangente der einen Curve und die ihr entsprechende, zu ihr senkrechte Tangente der anderen Curve ein Axenpaar bilden, bezüglich dessen die Deviationsmomente zweiter Ordnung der drei gegebenen Flächen einander gleich sind.

Bei Verwendung der gebräuchlichen Liniencoordinaten u und v, welche mit den oben angewandten π und φ in der Relation stehen

$$\frac{\cos\varphi}{\pi} = v, \quad \frac{\sin\varphi}{\pi} = -u,$$

übergehen die Gleichungen 18) und 20) in die folgenden

$$(v^2 - u^2)(u S_{bd} - S_{ad}) - uv(u S_{bc} - S_{ac}) - v \,.\, S_{ab} = 0$$
$$(v^2 - u^2)(u S_{bd} + S_{ad}) - uv(u S_{bc} + S_{ac}) + v S_{ab} = 0.$$

Es erübrigt noch, den geometrischen Ort der Mittelpunkte aller jener Axenpaare aufzufinden, welche der Aufgabe entsprechen. Benützt man hiezu die Ausdrucksform I des Deviationsmomentes, so wird dasselbe für jede der drei Flächen nach Nr. 7

$$D_1 = \eta^2 F_1 B - \xi^2 F_1 B + \eta\xi F_1 A - \eta(A\mathfrak{M}_1^{0,1} + 2B\mathfrak{M}_1^{1,0}) -$$
$$- \xi(A\mathfrak{M}_1^{1,0} - 2B\mathfrak{M}_1^{0,1}) + B(\mathfrak{M}_1^{2,0} - \mathfrak{M}_1^{0,2}) + A\mathfrak{M}_1^{1,1}$$

$$D_2 = \eta^2 F_2 B - \xi^2 F_2 B + \eta\xi F_2 A - \eta(A\mathfrak{M}_2^{0,1} + 2B\mathfrak{M}_2^{1,0}) - $$
$$ - \xi(A\mathfrak{M}_2^{1,0} - 2B\mathfrak{M}_2^{0,1}) + B(\mathfrak{M}_2^{2,0} - \mathfrak{M}_2^{0,2}) + A\mathfrak{M}_2^{1,1}$$

$$D_3 = \eta^2 F_3 B - \xi^2 F_3 B + \eta\xi F_3 A - \eta(A\mathfrak{M}_3^{0,1} + 2B\mathfrak{M}_3^{1,0}) - $$
$$ - \xi(A\mathfrak{M}_3^{1,0} - 2B\mathfrak{M}_3^{0,1}) + B(\mathfrak{M}_3^{2,0} - \mathfrak{M}_3^{0,2}) + A\mathfrak{M}_3^{1,1}.$$

Durch Gleichsetzung dieser Momente und für die Annahme der Geraden Σ'_2 Σ'_3 als Abscissenaxe, in welchem Falle $\mathfrak{M}_1^{1,0} = \mathfrak{M}_2^{1,0} = \mathfrak{M}_3^{1,0}$ wird, erhält man die beiden Gleichungen

$$\eta^2 B(F_1 - F_2) - \xi^2 B(F_1 - F_2) + \eta\xi A(F_1 - F_2) - \eta A(\mathfrak{M}_1^{0,1} - \mathfrak{M}_2^{0,1}) + $$
$$ + 2\xi B(\mathfrak{M}_1^{0,1} - \mathfrak{M}_2^{0,1}) + B[(\mathfrak{M}_1^{2,0} - \mathfrak{M}_2^{2,0}) - (\mathfrak{M}_1^{0,2} - \mathfrak{M}_2^{0,2})] + $$
$$ + A(\mathfrak{M}_1^{1,1} - \mathfrak{M}_2^{1,1}) = 0$$

$$\eta^2 B(F_1 - F_3) - \xi^2 B(F_1 - F_3) + \eta\xi A(F_1 - F_3) - \eta A(\mathfrak{M}_1^{0,1} - \mathfrak{M}_3^{0,1}) + $$
$$ + 2\xi B(\mathfrak{M}_1^{0,1} - \mathfrak{M}_3^{0,1}) + B[(\mathfrak{M}_1^{2,0} - \mathfrak{M}_3^{2,0}) - (\mathfrak{M}_1^{0,2} - \mathfrak{M}_3^{0,2})] + $$
$$ + A(\mathfrak{M}_1^{1,1} - \mathfrak{M}_3^{1,1}) = 0$$

oder durch Einführung der schon oben gebrauchten abkürzenden Bezeichnung

$$\eta^2 Ba_{12} - \xi^2 Ba_{12} + \eta\xi Aa_{12} - \eta Ab_{12} + 2\xi Bb_{12} + Bc_{12} + Ad_{12} = 0$$
$$\eta^2 Ba_{13} - \xi^2 Ba_{13} + \eta\xi Aa_{13} - \eta Ab_{13} + 2\xi Bb_{13} + Bc_{13} + Ad_{13} = 0,$$

welche Gleichungen auch in der Form geschrieben werden können:

$$\eta^2 a_{12} - \xi^2 a_{12} + 2\xi b_{12} + c_{12} + \frac{A}{B}(\eta\xi a_{12} - \eta b_{12} + d_{12}) = 0$$

$$\eta^2 a_{13} - \xi^2 a_{13} + 2\xi b_{13} + c_{13} + \frac{A}{B}(\eta\xi a_{13} - \eta b_{13} + d_{13}) = 0,$$

woraus man durch Elimination von $\frac{A}{B}$ erhält

$$\eta^3 S_{ab} + \eta\xi^2 S_{ab} + \xi^2 S_{ad} - \eta^2 S_{ad} + \eta\xi S_{ac} - \eta S_{bc} - 2\xi S_{bd} - S_{cd} = 0, \quad 21)$$

worin die Coëfficienten S_{ab}, S_{ac}, S_{ad}, S_{bc}, S_{bd} die schon oben (Gleichung 19) angegebene Bedeutung haben und ihnen analog

$$S_{cd} = c_{12} d_{13} - c_{13} d_{12}$$

ist. Es kann nun zweckmässig die Ordinatenaxe so gewählt werden, dass

$$S_{bd} = b_{12} d_{13} - b_{13} d_{12} = 0$$

wird, das heisst

$$\frac{\mathfrak{M}_1^{0,1}-\mathfrak{M}_2^{0,1}}{\mathfrak{M}_1^{0,1}-\mathfrak{M}_3^{0,1}}=\frac{\mathfrak{M}_1^{1,1}-\mathfrak{M}_2^{1,1}}{\mathfrak{M}_1^{1,1}-\mathfrak{M}_3^{1,1}}.$$

Die Gleichung 21) übergeht dann in

$$\eta(\eta^2+\xi^2)S_{ab}-(\eta^2-\xi^2)S_{ad}+\eta\xi S_{ac}-\eta S_{bc}-S_{cd}=0. \qquad 22)$$

Dies ist die Gleichung des geometrischen Ortes der Anfangspunkte der Axenpaare in der Ebene, bezüglich deren die Deviationsmomente zweiter Ordnung der drei gegebenen Flächen einander gleich werden.

Für $\eta=0$ wird

$$\xi^2 S_{ad}-S_{cd}=0$$

oder

$$\xi_A=\pm\sqrt{\frac{S_{cd}}{S_{ad}}}.$$

Die Curve schneidet somit die Abscissenaxe in zwei vom Coordinatenanfang gleich weit entfernten Punkten A_1 und A_2. Für $\xi=0$ wird

$$\eta^3 S_{ab}-\eta^2 S_{ad}-\eta S_{bc}-S_{cd}=0 \qquad 23)$$

Nun ist

$$S_{ad}=a_{12}d_{13}-a_{13}d_{12}=d_{13}(a_{12}-a_{13}\frac{d_{12}}{d_{13}}),$$

und da wegen $S_{bd}=0$

$$\frac{d_{12}}{d_{13}}=\frac{b_{12}}{b_{13}}$$

wird, so ist auch

$$S_{ad}=d_{13}(a_{12}-a_{13}\frac{b_{12}}{b_{13}})=\frac{d_{13}}{b_{13}}S_{ab}.$$

Ebenso ist

$$S_{cd}=c_{12}d_{13}-c_{13}d_{12}=d_{13}(c_{12}-c_{13}\cdot\frac{d_{12}}{d_{13}})=-\frac{d_{13}}{b_{13}}S_{bc}.$$

Durch Einsetzen dieser Werthe von S_{ad} und S_{cd} in 23) wird diese Gleichung

$$\eta^3 S_{ab}-\eta^2 S_{ab}\frac{d_{13}}{b_{13}}-\eta S_{bc}+S_{bc}\cdot\frac{d_{13}}{b_{13}}=0$$

oder

$$(\eta^2 S_{ab} - S_{bc})(\eta - \frac{d_{13}}{b_{13}}) = 0,$$

woraus

$$\eta_B = \pm \sqrt{\frac{S_{bc}}{S_{ab}}}, \quad \eta_C = \frac{d_{13}}{b_{13}}.$$

Die Curve durchschneidet also die Ordinatenaxe in drei Punkten, von denen zwei, B_1 und B_2, gleichweit vom Coordinatenanfang abstehen.

Wie man sich leicht überzeugen kann, ist jedoch nur der dritte dieser Durchschnittspunkte, C, stets reell, während die beiden anderen imaginär werden können. Insbesondere ist es ersichtlich, dass die Durchschnittspunkte A_1 und A_2 der Curve mit der Abscissenaxe und jene B_1 und B_2 mit der Ordinatenaxe nie gleichzeitig reell sein können, denn eine einfache Rechnung lehrt, dass

$$\begin{aligned} S_{ab} S_{cd} + S_{ad} S_{bc} &= (a_{12} b_{13} - a_{13} b_{12})(c_{12} d_{13} - c_{13} d_{12}) + \\ &\quad + (a_{12} d_{13} - a_{13} d_{12})(b_{12} c_{13} - b_{13} c_{12}) \\ &= (a_{12} c_{13} - a_{13} c_{12})(b_{12} d_{13} - b_{13} d_{12}) \\ &= S_{ac} S_{bd} \end{aligned}$$

wird, und da $S_{bd} = 0$ ist, so muss

$$S_{ab} S_{cd} + S_{ad} S_{bc} = 0$$

oder

$$\frac{S_{cd}}{S_{ad}} = - \frac{S_{bc}}{S_{ab}},$$

mithin stets

$$\xi_A = \eta_B \sqrt{-1}$$

sein, was obige Behauptung beweist.

Für $\eta = -\frac{d_{13}}{b_{13}}$ wird

$$\xi = \infty \text{ und } \xi = 2 \frac{S_{ab} S_{bc} - S_{ad}^2}{S_{ab} S_{ac}}.$$

Die Gerade $\eta = -\frac{d_{13}}{b_{13}}$ ist eine Assymptote der Curve, und schneidet dieselbe im Abstande

$$\xi = 2\,\frac{S_{ab}S_{bc} - S_{ad}^2}{S_{ab}\,S_{ac}}$$

von der Ordinatenaxe.

Man findet ferner aus Gleichung 22):

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{2\eta\xi S_{ab} + \eta\,S_{ac} + 2\xi\,S_{ad}}{3\eta^2 S_{ab} + \xi^2 S_{ab} + \xi S_{ac} - 2\eta S_{ad} - S_{bc}}.$$

Für jene Punkte der Curve, deren Tangenten parallel zur Abscissenaxe werden, bekommt man

$$2\eta\xi S_{ab} + \eta\,S_{ac} + 2\xi S_{ad} = 0$$

oder

$$\xi = -\frac{\eta\,S_{ac}}{2\eta\,S_{ab} + 2\,S_{ad}},$$

welcher Ausdruck in Gleichung 22) substituirt gibt:

$$\eta^4 S_{ab}^2 - \eta^2(S_{ab}S_{bc} + S_{ad}^2 + \tfrac{1}{4}S_{ac}^2) - \eta(S_{ab}S_{cd} + S_{ad}S_{bc}) - S_{ab}S_{cd} = 0,$$

und da nach oben

$$S_{ab}\,S_{cd} + S_{ad}\,S_{bc} = 0$$

ist, so wird

$$\eta^4\,S_{ab}^2 - \eta^2(S_{ab}S_{bc} + S_{ad}^2 + \tfrac{1}{4}S_{ac}^2) - S_{ab}\,S_{cd} = 0,$$

woraus η leicht gerechnet werden kann, und zwar:

$$\eta = \pm\sqrt{\frac{[S_{ab}S_{bc} + S_{ad}^2 + \tfrac{1}{4}S_{ac}^2] \pm \sqrt{[S_{ab}S_{bc} + S_{ad}^2 + \tfrac{1}{4}S_{ac}^2]^2 + 4S_{ab}^3 S_{cd}}}{2\,S_{ab}^2}}.$$

Es gibt also im Allgemeinen (und mit Ausnahme des unendlich fernen Punktes) vier Punkte der Curve, deren Tangenten parallel zur Abscissenaxe sind. Den beiläufigen Verlauf der hier betrachteten Curve in ihren verschiedenen Stadien zeigt Fig. 21.

Die Curve nimmt, der vorhergehenden Discussion zufolge, die Gestalt I an, wenn S_{ab} und S_{bc} entgegengesetzte Zeichen besitzen, hingegen die Gestalt II bei gleichem Zeichen. An der

Grenze dieser beiden liegt die Gestalt III; für dieselbe ist $S_{bc} = 0$.

In der That setzt man den Werth $S_{bc} = 0$ in die Gleichung 22) der Curve ein, und bedenkt, dass hier wegen

$$S_{ab} S_{cd} + S_{ad} S_{bc} = 0$$

auch $S_{cd} = 0$ werden muss, so reducirt sich die Gleichung der Curve auf

$$\eta(\eta^2 + \xi^2) S_{ab} - (\eta^2 - \xi^2) S_{ad} + \eta \xi S_{ac} = 0$$

und dies ist die Gleichung der Curve III. (Fig. 21.) Dieselbe geht durch den Coordinatenanfang.

Fig. 21.

Man findet in diesem Falle

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{2\eta\xi S_{ab} + \eta S_{ac} + 2\xi S_{ad}}{3\eta^2 S_{ab} + \xi^2 S_{ab} + \xi S_{ac} - 2\eta S_{ad}}$$

und für $\eta = 0$, $\xi = 0$ wird

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{0}{0}.$$

In den Coordinatenanfang fällt somit ein Doppelpunkt der Curve. Die Tangenten an die Curve im Doppelpunkte stehen aufeinander senkrecht. Denn durch Differentiiren des Zählers und Nenners der illusorischen Form von $\frac{d\eta}{d\xi}$ erhält man:

$$\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)_0 = \eta' = -\frac{2\eta'\xi S_{ab} + 2\eta S_{ab} + \eta' S_{ac} + 2S_{ad}}{6\eta\eta' S_{ab} + 2\xi S_{ab} + S_{ac} - 2\eta' S_{ad}},$$

woraus für $\eta = 0$, $\xi = 0$

$$\eta' = -\frac{\eta' S_{ac} + 2S_{ad}}{S_{ac} - 2\eta' S_{ad}}$$

und

$$(\eta')^2 - \eta' \cdot \frac{S_{ac}}{S_{ad}} - 1 = 0.$$

Das Product der Wurzeln dieser Gleichung ist

$$\eta'_1 \cdot \eta'_2 = -1,$$

daher stehen die Tangenten im Doppelpunkte aufeinander senkrecht.

10.

Es seien vier Flächen F_1, F_2, F_3, F_4 in derselben Ebene gegeben; man suche jene Axenpaare in dieser Ebene, bezüglich welcher die Deviationsmomente $D = \int y^m x^n d\mu$ der vier Flächen einander gleich sind.

Mit Benützung der Form I für das Deviationsmoment erhält dasselbe für die gegebenen vier Flächen die Werthe

$$D_1 = \Sigma \eta^c \xi^d \sin^e\varphi \cos^f\varphi \mathfrak{M}_1^{a,b}$$
$$D_2 = \Sigma \eta^c \xi^d \sin^e\varphi \cos^f\varphi \mathfrak{M}_2^{a,b}$$
$$D_3 = \Sigma \eta^c \xi^d \sin^e\varphi \cos^f\varphi \mathfrak{M}_3^{a,b}$$
$$D_4 = \Sigma \eta^c \xi^d \sin^e\varphi \cos^f\varphi \mathfrak{M}_4^{a,b}.$$

Durch Gleichsetzung dieser Werthe

$$D_1 = D_2 = D_3 = D_4$$

erhält man drei Gleichungen zwischen den Unbekannten η, ξ und φ. Da in jedem der obigen vier Ausdrücke die Ordnungszahlen

$$e+f = m+n$$

und

$$c+d \gtreqless m+n$$

sind, so ist jede der drei aus ihnen abgeleiteten Gleichungen vom $2(m+n)^{\text{ten}}$ Grade; man erhält somit im Allgemeinen $8(m+n)^3$ Axenpaare, welche der gestellten Aufgabe genügen.

Über die Bewegungsverhältnisse in dem dreifachen Sternsytem ζ Cancri.

Von **Hugo Seeliger** in Leipzig.

(Auszug aus einer für die Denkschriften bestimmten Abhandlung.)

Von den dreifachen Sternsystemen, welche durch mehrere Jahrzehnte hindurch genügend oft beobachtet worden sind, ist ζ Cancri (Σ 1196) das einzige, welches innerhalb des von den Beobachtungen erfüllten Zeitraumes eine so bedeutende Bewegung gezeigt hat, dass man hier ein ausgebildetes Specimen des Problemes der drei Körper und ausserdem das erste ausserhalb des Sonnensystems überhaupt, vorzufinden hoffen darf. Ist dies schon ein gewiss triftiger Grund, welcher zu einer eingehenden Untersuchung der Bewegungsverhältnisse in diesem Systeme auffordert, so werden Eigenthümlichkeiten anderer Art, die hier auftreten, diese Aufforderung nur noch dringlicher machen.

Ich habe nun die genannte Untersuchung durchzuführen versucht und erlaube mir, hier nur ein kurzes Resumé der erlangten Resultate mitzutheilen, indem ich der Kürze wegen, nirgends auf eine Begründung der ausgesprochenen Ansichten oder eine Ableitung der gebrauchten Rechenvorschriften eingehe.

Die drei Sterne des fraglichen Systemes bezeichne ich in genau derselben Weise, wie W. Struve, mit *A*, *B* und *C* und bespreche zuerst die Bewegung des Sternes *B* um *A*; daran wird sich die Auseinandersetzung der eigenthümlichen Erscheinungen in der Bewegung des dritten Sternes *C* schliessen.

Der Stern *B*.

Es wurden aus dem benützten Beobachtungsmateriale Jahresmittel gebildet. Diese erstrecken sich in fast ununterbrochener

Reihenfolge vom Jahre 1828 bis 1880. Ausserdem liegt noch das Mittel aus drei W. Struve'schen Beobachtungen aus dem Jahre 1826 vor, während W. Herschel's Messung von 1781 aus bekannten Gründen nicht berücksichtigt worden ist.

Zunächst wurde nun der Versuch gemacht, diese Jahresmittel durch eine rein elliptische Bewegung darzustellen. Es zeigte sich dabei, dass man schon durch diese Annahme den Beobachtungen recht nahe genügen kann, und zwar wurden nach mehrfachen Verbesserungen folgende Elemente (in bekannter Bezeichnung) gefunden:

$$\left.\begin{aligned} T &= 1870\cdot393 \\ \lambda = \pi - \Omega &= 113^\circ 872 \\ \Omega &= 71\cdot532 \\ i &= 10\cdot888 \\ \varphi &= 20\cdot076 \\ n &= -5\cdot8867 \\ a &= 0''8515 \end{aligned}\right\} IV_a.$$

Eine Vergleichung dieser Elemente mit den Jahresmitteln ergab die mittlere Abweichung im Positionswinkel zu $\pm 3^\circ 03$ in Distanz zu $\pm 0''058$. Ferner waren im Positionswinkel 26 positive und 25 negative Fehler so angeordnet, dass 13 Zeichenwechsel stattfanden, während dieselben Zahlen bei den Distanzen der Reihe nach waren: 24, 23 und 17. Im Ganzen ist die von den Elementen IV_a gelieferte Darstellung der Beobachtungen eine solche, dass man bei ihr stehen bleiben dürfte, wenn sich nicht ganz von selbst Bedenken herausstellten, welche zu einem weiteren Versuche auffordern, die Abweichungen zwischen Rechnung und Beobachtung, namentlich was die Anordnung ihrer Vorzeichen betrifft, günstiger zu gestalten. Diese Bedenken sind aber:

1. Bei Bildung der benützten Jahresmittel sind die Messungen der verschiedenen Beobachter mit ganz willkürlichen Gewichten herangezogen worden; es muss also einer definitiven Vergleichung eine bessere Abschätzung der relativen Gewichtszahlen, welche die Jahresmittel nicht unbeträchtlich ändern kann, vorhergehen.

2. Die constanten Fehler der Beobachter wurden provisorischen, jedenfalls nicht genügend verbürgten Daten entnommen.

3. Stellt sich schon aus den bis jetzt erwähnten Rechnungen heraus, und wird im Folgenden durchweg bestätigt, dass das

W. Struve'sche Jahresmittel von 1826 einen viel zu kleinen Positionswinkel gibt, also zweckmässig bei weiteren Rechnungen auszuschliessen sei.

4. Ist bis jetzt von der störenden Einwirkung des Sternes *C* auf die Bewegung von *B* noch nicht die Rede gewesen. Nun sind aber die Fehler, welche die Elemente IV_a übrig lassen, ihrer Grösse nach, im Ganzen nicht sehr weit von der Grenze entfernt, welche man für Beobachtungsfehler zulassen darf. Man könnte demnach auf den ersten Blick den Schluss zu ziehen geneigt sein, dass die Einwirkung des Sternes *C* auf *B* sehr klein sei. Es ist aber noch ein zweiter Fall denkbar. Es können nämlich die von *C* ausgeübten Störungen so beschaffen sein, dass dieselben sich während des von den Beobachtungen erfüllten Zeitraumes durch eine passende Änderung der sieben Bahnelemente zum allergrössten Theile compensiren lassen; es tritt dann der interessante Fall ein, dass sich die Bewegung in der Projectionsebene trotz bedeutender Einwirkungen des dritten Körpers, doch nahe den Kepler'schen Gesetzen gemäss gestaltet. Dieses findet nun bei ζ Cancri in der That statt. Es ergibt sich nämlich, dass man für den Stern *C* sehr bedeutende Massenwerthe annehmen kann, ohne die Übereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung zu gefährden, und dass man ziemlich bedeutende annehmen muss, um die beste Darstellung im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate zu erlangen.

Die unter 3 und 4 angedeuteten Bedenken habe ich noch auf eine andere, völlig unabhängige Weise prüfen können.

Ist nämlich die störende Einwirkung von *C* gering oder hat sie die eben besprochene Eigenschaft, so wird in der Bewegung von *B* um *A* annäherungsweise der Flächensatz gelten. Ich habe nun mit Hilfe eines gewissen Interpolationsverfahrens die Constante des Flächensatzes bestimmt und aus dieser die Distanzen für die verschiedenen Zeiten, für welche Beobachtungen der Distanz vorlagen, berechnet. Es ergab sich dann, dass diese berechneten Distanzen von den beobachteten nur wenig abwichen, wenn auch die ungünstige Vertheilung der Vorzeichen der Abweichungen auf irgend einen anderen nicht zufälligen Einfluss hindeutete. Es geht also in der That die Bewegung sehr nahe dem

Kepler'schen Flächensatze gemäss vor sich. Diese neue Rechnung war aber noch in einer anderen, schon erwähnten Beziehung von Wichtigkeit. Die Berechnung der Differentialquotienten des Positionswinkels nach der Zeit war nämlich auf eine Interpolationsformel gegründet, welche das unter 3 aufgeführte Jahresmittel so gut wie vollständig darstellte. Nun unterscheidet sich gerade für diese Messung die berechnete Distanz von der beobachteten um 0″44, während die entsprechenden Differenzen bei den anderen Jahresmitteln nur in seltenen Fällen die Grösse 0″1 überschreiten. Eine Differenz von 0″44 noch als Messungsfehler aufzufassen, dürfte nicht wohl zulässig sein, sie findet aber ihre vollständigste Erklärung, wenn angenommen wird, dass der zugehörige Struve'sche Positionswinkel um ein Beträchtliches zu klein ist. Ich betrachte diese Bemerkung als eine wesentliche Stütze für die Behauptung, dass es zweckmässig und gerechtfertigt ist, bei der Untersuchung der Bewegung des Sternes *B* jenes Jahresmittel von 1826 ganz auszuschliessen. Ich habe übrigens diese Ausschliessung erst später eintreten lassen, als es vielleicht vortheilhaft gewesen wäre.

Ehe nun die Bedenken 1 und 2 und im Sinne der letzten Bemerkung auch 3 beseitigt werden konnten, mussten zuerst, zur Vermeidung eines logischen Zirkelschlusses, die störenden Einwirkungen von *C* auf *B* berechnet werden. Das Problem, welches zur Aufstellung der nöthigen Formeln zu lösen ist, ist desshalb ziemlich complicirt, weil der Stern *C* während der Zeit, welche seit der ersten zuverlässigen Beobachtung von W. Struve verflossen ist, nicht mehr als etwa 30 Grad im Positionswinkel beschrieben hat. Es ist desshalb nicht daran zu denken, selbst nur rohe Näherungswerthe für die Bewegungselemente des Sternes *C* aus den Beobachtungen abzuleiten und muss desshalb der Versuch gewagt werden, diese aus den Störungen, welche *B* von *C* erfährt, zu bestimmen.

In welcher Weise ich nun dieses indirecte Störungsproblem entwickelt habe, kann ich hier in der erwünschten Kürze nicht anführen. Ich bemerke nur, dass diese Entwickelung nicht ganz frei von gewissen Annahmen ist, deren Bedeutung und Berechtigung allerdings in der ausführlichen Abhandlung genügend

begründet erscheinen. Ich habe nämlich angenommen, dass r', welches die Entfernung von C von einem die Strecke AB in einem constanten Verhältnisse theilenden Punkte bedeutet, innerhalb der relativ kurzen, in Frage kommenden Zeit als constant zu betrachten ist. Dann lassen sich die Störungen mit genügender Genauigkeit entwickeln als Function von drei Unbekannten. Bezeichnet nämlich 1, m und m' die Massen der drei Sterne A, B und C, Ω' und i' Knoten und Neigung der Ebene der Bahn, in welcher sich C um den oben genannten Punkt nährungsweise bewegen muss, und setzt man:

$$\alpha = \frac{m'}{1+m}\left(\frac{6''}{r'}\right)^5;\ t = -tgi' \sin \Omega';\ u = +tgi' \cos \Omega',$$

so lassen sich die Störungen im Positionswinkel p, welchen B mit A bildet, so darstellen:

$$\delta p = \alpha[\mathrm{I} + \mathrm{II}.t + \mathrm{III}.u + \mathrm{IV}t^2 + \mathrm{V}u^2 + \mathrm{VI}.2tu\}.$$

Die Coëfficienten I bis VI habe ich nun mit Hilfe von mechanischen Quadraturen gewonnen, ein Verfahren, welches nöthig macht, von einem festen Osculationspunkte auszugehen. Ich habe diesen auf die Zeit 1836.2 gelegt. Nachdem so δp berechnet war, lag nun die Aufgabe vor, die 3 Unbekannten α, t und u und die 6 Correctionen der Bahnelemente IVa zu bestimmen, so dass die neuen Elemente für den angegebenen Zeitpunkt osculiren.

Übrigens wurde die verwickelte und zeitraubende Berechnung der Coëfficienten I bis VI ausgeführt, ehe die Elemente IVa abgeleitet worden sind. Es wurden dazu vielmehr andere Elemente benützt, welche die Beobachtungen allerdings weniger gut darstellten.

Durch das im Vorigen Erwähnte war also das Problem auf die Bestimmung von 9 Unbekannten zurückgeführt, wenn bei diesen Rechnungen nur die Positionswinkel benützt werden, wie dies in der That geschehen ist, und zwar aus Gründen, deren Stichhaltigkeit wohl kaum bezweifelt werden dürfte. Als erste Näherung ergab nun die Auflösung der betreffenden Bedingungsgleichungen, und zwar mit Hilfe eines nicht genügend sicheren graphischen Verfahrens, folgende Elemente:

Oscul. 1836·2

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= 3{\cdot}23 \\ t &= +0{\cdot}6 \\ u &= +1 \\ T &= 1868{\cdot}00 \\ \lambda &= 106{\cdot}01 \\ \Omega &= 88{\cdot}13 \\ i &= 20{\cdot}50 \\ \varphi &= 21{\cdot}85 \\ n &= -5^{\circ}8428 \end{aligned}\right\} \text{III.}$$

Wie nicht anders zu erwarten war, sind die gefundenen Werthe für t und u nur höchst unsicher und ausserdem ergibt sich, dass es ziemlich gleichgiltig ist, ob man die obigen Werthe für t und u annimmt oder ob man $t = u = o$ setzt, also den Stern C sich in der Projectionssehne bewegen lässt.

Ich habe desshalb zunächst beide Annahmen verfolgt, also gesetzt:

1. $\alpha = 3{\cdot}2 \quad t = u = o$
2. $\alpha = 3{\cdot}2;\; t = +0{\cdot}6;\; u = +1.$

Die benützte Entwicklung des Störungsproblemes ist nur als ein Näherungsverfahren zu betrachten. Benützt man dieses zur Berechnung der Störungen δp in den beiden namhaft gemachten Fällen, so findet sich, dass in der That gegenwärtig nicht entschieden werden kann, ob die Annahme 1. oder 2. der Wahrheit mehr entspricht. Dazu tritt noch eine andere Unbestimmtheit. Sucht man nämlich die unter 1. und 2. angeführten Näherungswerthe zu verbessern, so stellt sich heraus, dass sich die beiden Unbekannten dt und du nicht von einander trennen lassen, indem die Coëfficienten beider sehr nahe proportional sind. Führt man desshalb als neue Unbekannte die Differenz $dt\text{-}du$ ein, so ergibt die Auflösung der betreffenden Bedingungsgleichungen einen kleinen Werth für die genannte Differenz und ausserdem mit grosser Unsicherheit, so dass es vollständig erlaubt erscheint, die obigen Näherungswerthe als die wahrscheinlichsten zu betrachten; α ergibt sich in den beiden Fällen $= 3{\cdot}812$.

Ich habe aus diesen Gründen, die hier nur kurz angedeutet werden konnten, nun einfach $t = u = o$ gesetzt und durch eine

neue Auflösung der Normalgleichungen folgende Elemente gefunden:

Oscul. 1836·2

$$\text{VI.}\begin{cases}\dfrac{m'}{1+m} = 2\cdot368 \pm 1\cdot56\,(m.F)\\ T = 1868\cdot590\\ \lambda = 99°604\\ \Omega = 88\cdot130\\ i = 15\cdot247\\ \varphi = 22\cdot284\\ n = -6\cdot1232\\ a = 0''851.\end{cases}$$

Dieses, sowie die anderen angeführten Elementssysteme bezeichne ich mit derselben Nummer, welche sie in der ausführlichen Abhandlung erhalten haben.

Alle diese Rechnungen beruhen, wie dies schon hervorgehoben worden ist, auf Formeln, welche nur als Näherungen zu betrachten sind. Die Berechnung nach denselben ist aber so complicirt, dass nicht leicht zu übersehen ist, wie gross die Vernachlässigungen sind, welche dieselben mit sich führen. Es ist desshalb sehr wichtig, ja geradezu nothwendig, jetzt ein strenges Verfahren, welches auf Grundlage der gefundenen Näherungen möglich ist, eintreten zu lassen. Ich habe desshalb nun mit Hilfe der Elemente VI die Störungen noch einmal nach der Methode der speciellen Störungen in rechtwinkeligen Coordinaten berechnet und im Ganzen eine genügende Übereinstimmung mit dem früheren gefunden.

Mit den neuen Störungsmethoden wurden die Bedingungsgleichungen noch einmal behandelt, wobei sich ergab, dass die Masse $\mu = \frac{m'}{1+m}$ nicht unbeträchtlich vergrössert werden muss, wenn man den wahrscheinlichsten Werth für μ annehmen will. Da diese Vergrösserung aber mit grosser Unsicherheit behaftet ist, habe ich mich damit begnügt, den früher gefundenen Werth beizubehalten, und auf diese Weise folgende Elemente erhalten:

$$\left.\begin{aligned} \frac{m'}{1+m} &= 2\cdot368 \\ T &= 1868\cdot145 \\ \lambda &= 101\cdot817 \\ \Omega &= 88\cdot130 \\ i &= 13\cdot408 \\ \varphi &= 22\cdot608 \\ n &= -6\cdot0756 \end{aligned}\right\} \text{VII.}$$

Die zuletzt erwähnte Rechnung wurde nun noch einmal durchgeführt, nachdem die W. Struve'sche Beobachtung von 1826 ausgeschlossen worden war. Auch hier ergab sich eine beträchtliche Vergrösserung von μ und zwar mit einer viel grösseren Sicherheit wie früher, indem gefunden wurde:

$$\frac{d\mu}{\mu} = 1\cdot264;\ m.F \pm 0\cdot451.$$

Es wäre jetzt, da für so grosse Änderungen die angewandten Differentialformeln nicht mehr giltig sind, nothwendig, die Störungen mit einem vergrösserten Werthe von μ zu berechnen und die Bedingungsgleichungen noch einmal zu behandeln. Ich habe aber diese nicht bedeutende Arbeit nicht ausgeführt, indem es mir zweifelhaft ist, ob man dadurch wirklich der Wahrheit näher kommt. Jedenfalls liegen die Sachen gegenwärtig so, dass man kaum eine sichere Massenbestimmung zu erwarten hat, während voraussichtlich die nächsten Jahrzehnte die Störungen soweit entwickeln werden, dass man hoffen darf, nicht nur einen mehr verbürgten Werth für μ zu erlangen, sondern auch möglicherweise einigen Aufschluss über t und u. Jedenfalls darf ich aber als Resultat der Untersuchung die Behauptung aufstellen:

Die Bewegung von B ist sehr gut mit einem grossen Massenwerthe zu vereinigen, und zwar ist der im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate wahrscheinlichste Werth von m' grösser als $2\cdot368(1+m)$.

Bei dieser Sachlage scheint es genügend gerechtfertigt, wenn ich einfach auch nach Ausschluss des oft genannten Jahresmittels denselben Werth für μ, wie früher, nämlich $\mu = 2\cdot368$ angenommen habe. Dann ergeben sich die Elemente:

$$\left.\begin{aligned} &\text{Oscul. } 1836\cdot2 \\ \frac{m'}{1+m} &= 2\cdot368 \\ T &= 1868\cdot022 \\ \lambda &= 109\cdot735 \\ \Omega &= 81\cdot550 \\ i &= 15\cdot530 \\ \varphi &= 23\cdot007 \\ n &= -5^\circ9675 \\ a &= 0''853 \end{aligned}\right\} \text{VIII.}$$

Ich habe gleich hier die oben als wünschenswerth bezeichnete Bestimmung einer ungestörten Ellipse nachgeholt, welche ebenfalls auf dem Ausschlusse des Jahresmittels von 1826 beruht. Es ergaben sich bei Vernachlässigung der störenden Wirkung von *C* die Elemente:

$$\left.\begin{aligned} m' &= 0 \\ T &= 1870\cdot0817 \\ \lambda &= 125^\circ405 \\ \Omega &= 63\cdot260 \\ \varphi &= 20\cdot774 \\ i &= 15\cdot643 \\ n &= -5\cdot6939 \end{aligned}\right\} \text{IV}_b.$$

Mit Hilfe der Elemente VIII konnten nun die beiden ersten Bedenken, welche oben gegen eine Zulässigkeit der ungestörten Ellipse IV_a ausgesprochen wurden, und welche natürlich in gleicher Weise gegen alle anderen Rechnungen erhoben werden können, beseitigt werden. Es wurde zu diesem Zwecke mit VIII eine ausführliche Ephemeride gerechnet und diese mit den einzelnen Beobachtungen verglichen. Dadurch ergaben sich die Eigenthümlichkeiten der Messungen für diejenigen Beobachter, für welche genügend grosse Messungsreihen vorlagen, und es war jetzt weiter die Möglichkeit gegeben, die relativen Gewichtszahlen genauer abzuschätzen. Indem ich die Einzelnheiten dieser Vergleichungen übergehe, erwähne ich nur, dass eine genauere Untersuchung nur bei sieben Beobachtern durchführbar war, nämlich bei Dawes, Dembowski, Dunér, Mädler, Secchi, W. Struve und O. Struve. Die übrigen Beobachter, welche nur vereinzelte Messungen beigesteuert hatten, mussten wie früher mit

Hilfe von provisorischen Correctionen und willkürlichen Gewichtszahlen herangezogen werden. Auf diese Weise entstanden nun neue Jahresmittel, welche ich sowohl mit den Elementen VIII als auch mit IV_b verglichen habe. Ich führe das Resultat dieser Vergleichung hier an. In der folgenden Zusammenstellung steht neben der Zeit, welche dem betreffenden Jahresmittel entspricht, das Gewicht, dann der beobachtete Positionswinkel, darauf folgen die Differenzen im Sinne Beobachtung-Rechnung für die Elemente VIII und IV_b. Für IV_b habe ich die grosse Halbaxe nicht von Neuem abgeleitet, und es finden sich also dafür keine Vergleichungen in Distanz vor.

	g	beob. p	B.—R.			g	beob. ρ	VIII
			VIII	IV_b				
1826·22	—	57°63	+10°21	+10°20	1826·22	2	1"144	+0"091
28·80	1	39 38	+ 0·46	+ 0·62	28·80	1	1 044	—0·055
30·39	1	35·35	+ 1·39	+ 1·65	31·28	4	1·049	—0·082
31·27	4	30·85	— 0·44	— 0 12	32·25	3	1·173	+0·034
32·19	6	28·51	— 0·01	+ 0·35	33 24	3	1·153	+0·006
33·22	4	25·16	— 0·30	+ 0·10	35·31	3	1·140	—0·017
35·31	3	21·15	+ 1·81	+ 2 26	36·27	2	1 201	+0·042
36·65	3	16 61	+ 1 18	+ 1·64	40·20	6	1 132	—0·020
37·23	2	12·49	— 1·24	— 0·76	41 23	4	1·115	—0·030
38·30	0	11·34	+ 0·74	+ 1·20	42·22	5	1 133	—0·006
40·23	9	5·36	+ 0·47	+ 0·90	43·18	7	1·111	—0·020
41·21	4	1·11	— 0·83	— 0 44	44·37	4	1·106	—0·014
42·39	8	357·74	— 0·60	— 0·24	45·31	1	1·058	- 0·051
43·21	6	356·15	+ 0·34	+ 0·67	46 25	1	1·082	—0·015
44·33	4	352·47	+ 0·20	+ 0 47	47·31	2	1·062	—0·021
45·39	2	350·03	+ 1 18	+ 1·38	48·26	6	1·058	—0·011
46·26	2	346·92	+ 0 94	+ 1·09	49·30	3	1·062	+0·009
47·30	3	343·36	+ 0·89	+ 0·98	50·43	1	1·049	+0·016
48·27	7	338·97	— 0·14	— 0·12	51·24	6	1 037	+0·018
49·30	3	334·93	— 0·48	— 0 52	52·25	4	0·981	—0·017
50·40	1	330·82	— 0·51	— 0·61	53·30	5	0·950	—0·025
51·24	6	328·10	— 0 04	— 0·16	54 25	4	0·946	—0·008
52·23	3	324·37	+ 0 15	— 0·02	55·29	5	0·900	—0·031
53·31	3	320·88	+ 1·16	+ 0 93	56·25	2	0·980	+0·071
54·25	4	816·48	+ 0·83	+ 0·55	57·29	4	0 927	+0·045
55·17	6	311·52	+ 0·01	— 0·27	58·25	2	0·932	+0·075
56·29	7	306·38	+ 0·20	— 0·08	59·28	4	0·838	+0·010

	g	beob. p	B.—R.			g	beob. ρ	VIII
			VIII	IV$_b$				
1857·36	2	300°61	−0·16	−0·43	1860·28	3	0″814	+0″016
58·20	4	296·76	+0·47	+0·22	61·27	4	0·800	+0·032
59·28	3	291·17	+1·05	+0·82	62 31	3	0 711	−0·025
60·28	3	283 39	−0·59	−0·79	63·14	1	0·742	+0 032
61·27	2	277·44	0	−0 17	64·24	3	0 610	−0·065
62·31	2	270 01	+0 03	−0·15	65 48	3	0·640	+0·004
63·13	6	263·31	−0·34	−0·24	66·26	3	0·613	0
64·18	5	254·66	−0 15	−0·42	68·28	2	0·626	+0·063
65·36	8	244·05	+0·30	−0·17	69·34	3	0·528	−0·021
66·24	6	236·98	+2·08	+1·58	70 28	5	0·542	+0·001
67·22	3	224·46	+0 25	−0·34	71·31	4	0·556	+0·014
68 22	4	212·28	−0 24	−0·89	72·30	4	9·584	+0·028
69·35	3	199 53	+1·03	+0 34	73·24	7	0·573	−0·002
70·28	7	185·42	−1 36	−1·83	74·25	4	0·621	+0·019
71·25	6	173 97	−0·38	−0·71	75·26	6	0·646	+0·012
72·25	6	162·68	+0 93	+0·74	76·24	4	0·692	+0·024
73·22	6	150·70	+0·70	+0·56	77·24	4	0·705	+0·001
74·17	4	140·33	+1·21	+1·01	78·25	6	0·701	−0·040
75·23	7	128·28	+0·09	0	79·29	3	0·737	−0·042
76·20	3	118·20	−0·72	−0·89	80·22	1	0·829	+0·018
77·21	4	108·96	−1·30	−1·50				
78 23	5	100·82	−1·41	−1·78				
79·29	2	93·33	−1·39	−1·88				
80·22	1	89·64	+0 88	+0 39				

Zu bemerken ist noch, dass die Distanzen nicht mit dem unter VIII angeführten Werthe für a berechnet worden sind, vielmehr wurde aus den corrigirten Jahresmitteln das neue osculirende $a = 0''8608$ abgeleitet und damit die Vergleichung ausgeführt. Was nun die unter der Rubrik VIII stehenden Fehler im Positionswinkel betrifft, so ergibt sich, dass 28 positive, 22 negative Abweichungen so angeordnet sind, dass 20 Zeichenwechsel vorkommen. Ferner ergibt sich die m. Abweichung der Gewichtseinheit, welche die Genauigkeit des Mittels aus 2 W. Struve'schen Abenden hat, zu $\pm$ 1°62. In der Distanz hat man entweder
25 positive und 22 negative Fehler mit 18 Zeichenwechsel oder
24 „ „ 23 „ „ „ 20 „ je nachdem der Fehler 0 als positiv oder negativ genommen wird.

Die Elemente IV_c lassen dagegen 24 positive und 21 negative Fehler übrig, in einer Anordnung, dass 18 Zeichenwechsel entstehen und die mittlere Abweichung der Gewichtseinheit ist $\pm 1°91$.

Beide Criterien für die Güte der Darstellung, die Grösse und Anordnung der übrig bleibenden Fehler sprechen zu Gunsten der angenommenen bedeutenden störenden Einwirkung von *C*. Es darf aber daraus nicht zu viel geschlossen werden, indem es selbstverständlich ist, dass das Problem mit 7 Unbekannten sich den Beobachtungen mehr anschmiegen muss, als wenn man nur 6 Unbekannte in Rechnung zieht. Beide Darstellungen aber dürften im Ganzen den Beobachtungen ziemlich entsprechen, so dass das bereits oben ausgesprochene Resultat auch jetzt eine völlige Bestätigung findet.

Indessen können, wenn dies auch nicht wahrscheinlich ist, die Verhältnisse beträchtliche Veränderungen erfahren, wenn eine neue Ausgleichung mit Zugrundelegung der corrigirten Jahresmittel ausgeführt und dann vielleicht noch einmal die constanten Correctionen für die einzelnen Beobachter abgeleitet werden. Ich glaube aber nicht, dass sich dadurch die Darstellung wesentlich anders gestalten wird, und zwar aus dem Grunde, weil von allem Anfange an die übrig bleibenden Fehler im Grossen und Ganzen auch nach den verschiedenen Ausgleichungen immer nach derselben Seite hin fielen, also die Abweichungen grösstentheils aus den nicht zu beseitigenden Incongruenzen im Beobachtungsmateriale zu entstehen scheinen, nicht aus einer Unvollkommenheit der Rechnungsresultate. Aus diesem Grunde habe ich mich mit dem Mitgetheilten begnügt, indem weitere Untersuchungen der Zukunft vorbehalten werden müssen.

Der Stern *C*.

Zunächst habe ich, ganz ähnlich wie bei dem Sterne *B*, provisorische Jahresmittel gebildet und mit Hilfe vorläufiger Rechnungen zuverlässige Daten geschaffen, welche die auf einen der beiden Sterne *A* und *B* oder auch auf die Mitte $\frac{A+B}{2}$ beider bezogene Positionswinkel und Distanzen von *C* auf einander zu reduciren gestatten. Dadurch ergab das vorliegende Beobachtungsmaterial folgende Grundlage für die weitere Betrachtung. Ich

führe hier nur die Positionswinkel an, beziehe diese aber auf alle drei genannten Punkte.

	$\frac{A+B}{2}$	A	B
1826·22	159°59	154°67	164°25
28·99	156·15	151·37	160·55
31·17	154·31	149·67	158·52
32·22	153·46	148·88	157·58
33·25	152·98	148·47	157·02
35·31	149·80	145·44	153·65
36·27	148·40	144·13	152·14
40·25	149·00	145·35	152·08
41·07	149·00	145·59	151·87
42·32	148·23	145·20	150·75
43·29	149·73	147·03:	151·96:
44·28	151·18	148·80:	153·14:
45·37	151·56	149·54:	153·23:
46·26	150·43	148·70:	151·86:
47·33	149·70	148·28	150·87
48·24	147·75	146·59	148·71
49·32	146·86	145·98	147·60
50·29	146·71	146·06	147·25
51·28	143·79	143·40	144·11
52·32	143·04	142·95	143·11
53·29	140·64	140·85	140·45
54·07	140·00	140·47	139·60
55·22	140·17	141·05	139·43
56·32	140·34	141·63	139·25
57·31	139·76	141·42	138·24
58·19	139·64	141·64:	137·91:
59·30	141·65	144·02:	139·57:
60·27	141·36	144·03:	138·99:
61·27	141·14	144·03:	138·54:
62·23	140·33	143·39:	137·52:
63·06	139·64	142·78:	136·72:
64·30	140·41	143·60:	137·38:
65·28	138·56	141·73	135·49
66·51	137·26	141·71	134·23
68·25	135·56	138·33	132·73
69·35	134·16	136·65	131·57
70·45	133·63	135·75	131·38
71·30	133·61	135·41	131·67
72·55	132·35	133·70	130·89

	$\frac{A+B}{2}$	A	B
1873·27	133·74	134·63	132 75
74·51	131·35	131·60	131·07
75·30	131·28	131·10	131·47
76·83	130·81	129·78	131·95
78 24	131·09	129·32	133 08
79 45	132·36	130·00	135·00

Überblickt man diese durch die Beobachtungen angezeigten Veränderungen des Positionswinkels p und verdeutlicht sich dieselben vielleicht durch eine graphische Darstellung, so sieht man, dass im Allgemeinen p mit Wachsen der Zeit abnimmt, dass diese Abnahme aber keineswegs gleichförmig vor sich geht, sondern sich sogar mehrmals in eine Zunahme verwandelt. Die Curve also, welche den Positionswinkel als Function der Zeit darstellt, wird eine Art Schlangenlinie sein. Fragen wir aber, ob diese letztere Eigenschaft wirklich verbürgt ist, so kann darüber, nach meiner Meinung, kaum ein Zweifel obwalten, indem die Umkehrung der Abnahme in eine Zunahme jedes Mal durch mehrere Jahresmittel in der unzweideutigsten Weise angezeigt wird. Wir haben nun zuzusehen, welche Erklärung für diese Form der fraglichen Curve am plausibelsten ist. Ich muss mich dabei begnügen, einfach die Resultate, welche in der ausführlichen Abhandlung eingehend erörtert werden, anzuführen.

Am nächsten liegt der Gedanke, dass die genannte Schlangenlinie als eine Bewegungsform in dem hier thatsächlich vorhandenen Systeme von 3 Körpern anzusehen ist. Mir ist aber aus den Grundgleichungen der Mechanik der strenge Nachweis gelungen, dass eine Curve der genannten Art in dem Systeme ζ Cancri nicht auf diese Weise erklärt werden kann, und dass Veränderungen, wie sie namentlich an den durch verticale Striche kenntlich gemachten Stellen der obigen Zahlenzusammenstellung vorkommen, nach den Grundsätzen der Mechanik nicht vorkommen können. Die nächste Vermuthung würde in der Form der Curve nichts anderes sehen, als eine merkwürdige Accumulation von Beobachtungsfehlern. Ich glaube es aber, wenn auch vielleicht nicht bewiesen, so doch im höchsten Grade wahrscheinlich gemacht zu haben, dass eine solche Annahme ebenfalls nicht zuläs-

sig ist. Der Beweis beruht hauptsächlich auf der Bemerkung, dass die Umkehr der Abnahme des Positionswinkels in eine Zunahme in periodischer Weise auftritt, dass sich weiter die Periode sehr determinirt ausspricht und ihrer Länge nach keinen Zusammenhang mit der Umlaufszeit von *B* um *A* verräth, was bei den constanten Beobachtungsfehlern sicher der Fall sein müsste.

Es bleibt auf diese Weise nur noch eine Erklärung übrig, welche bereits von O. Struve[1] aus seinen eigenen Messungen entdeckt worden ist, und die hier um so sicherer hervorgeht, als die einzelnen Jahresmittel aus den Messungen verschiedener Astronomen zusammengesetzt sind. Es ist dies die Annahme, dass sich *C* um einen dunklen Begleiter, der sich in seiner Nähe befindet, bewegt. In der That lässt diese Hypothese, was die Darstellung der Beobachtungen betrifft, kaum etwas zu wünschen übrig.

Es wird sich bei der weiteren Verfolguug dieser Annahme aus leicht ersichtlichen Gründen nur darum handeln können, den einfachsten Fall einer solchen Revolutionsbewegung in's Auge zu fassen. Ich habe desshalb angenommen, dass sich *C* um den dunklen Körper (besser um den Schwerpunkt beider) in einer Curve mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegt, welche in der Projectionsebene sich als Kreis darstellt. Die Elemente dieser Kreisbewegung habe ich aus den Positionswinkeln allein berechnet, diese dann zur Darstellung der Distanzen benützt und so eine Controle erhalten, welche für die Sicherheit der Hypothese, wie ich glaube, sehr wichtig ist. Bezeichnet nämlich p_0 und ρ_0, p und ρ, Positionswechsel und Distanz, respective des Centrums der Bewegung und des Sternes *C*, so wird sich die Beziehung ableiten lassen:

$$\left.\begin{aligned} p &= p_0 + A \sin bt + B \cos bt \\ \rho &= \rho_0 \pm (A\rho_0 \cos bt + B\rho_0 \sin bt) \end{aligned}\right\}$$

Es wird sich demnach zunächst um die Bestimmung der Grössen A, B, t und p_0 handeln. p_0 wird aber nicht constant sein, vielmehr habe ich für dasselbe die Form angenommen:

$$p_0 = \text{Const} + \gamma t + f.x.$$

---

[1] Mésures micrométriques de l'étoile triple ζ Cancri Compt. rend. Bd. 79, pag. 1463—1471.

Das Glied $f.x$ entsteht daraus, dass man anzunehmen berechtigt ist, dass sich der Schwerpunkt von C und dem dunklen Begleiter nahe in einem Kegelschnitt um den Schwerpunkt von A und B, also um einen die Strecke $\overline{AB}$ in einem constanten Verhältnisse theilenden Punkt bewegen muss. Bezieht man also p auf die Mitte von A und B, so wird x das Verhältniss der Entfernung des Schwerpunktes von A und B von ihrer Mitte zu der Strecke $\overline{AB}$ bedeuten, wenn der Factor f darnach gewählt wird. Es hat sich nun herausgestellt, dass x sehr klein ist, d. h. die Beobachtungen sind am besten zu vereinigen mit der Annahme, dass die Sterne A und B nahe gleiche Massen haben. Sehr sicher ist dieses Resultat desshalb nicht, weil es von einem Reste der Einwirkung der constanten Fehler beeinflusst werden kann, indem sowohl f als auch jene Einwirkung von einer Periode abhängt, welche in einfacher Weise mit der Umlaufszeit des Sternes B um A zusammenhängen muss.

Indem ich also x direct gleich Null setzte, erhielt ich für p die mit den Beobachtungen gut harmonirende Formel:

$$\text{II.} \quad p = 145^\circ 172 - 0^\circ 492\, t - 2^\circ 376 \sin 20^\circ t + 0^\circ 197 \cos 20^\circ t.$$

worin die Zeit t von 1830·0 zu zählen ist.

Diese Formel habe ich nun mit den einzelnen Beobachtungen verglichen und die constanten Fehler und die relativen Gewichtszahlen zu bestimmen gesucht. Das Unternehmen war diesmal nicht von gewissen Willkürlichkeiten frei, weil sich, wie vorauszusehen war, die persönlichen Fehler nicht durch constante Correctionen genügend beseitigen lassen. Indessen blieb, ohne neue Willkürlichkeiten einzuführen, kein anderer Ausweg übrig.

Aus den corrigirten Beobachtungen wurden nun neue Jahresmittel gebildet und die Formel (II) denselben nach der Methode der kleinsten Quadrate angepasst. Es ergab sich so die definitive Formel:

$$\text{III.} \quad p = 145^\circ 074 - 0^\circ 523 t + 0^\circ 001400 t^2 - 2^\circ 040 \sin 20^\circ t + \\ + 0^\circ 100 \cos 20^\circ t.$$

Die Vergleichung dieser Formel mit den corrigirten Jahresmitteln führe ich am Schlusse der vorliegenden Mittheilung an.

Durch den periodischen Theil der Formel (III) sind zugleich, wie erwähnt, die periodischen Glieder in ρ_0 gegeben. Und zwar findet man dafür:

$$\rho = \rho_0 + \frac{\rho_0}{5''610} \left\{ 0''196 \cos 20^\circ t + 0''010 \sin 20^\circ t \right\},$$

(A) indem sich das Vorzeichen des zweiten Gliedes auf den ersten Blick feststellen lässt. Weiter ergaben die zu Jahresmitteln vereinigten Distanzmessungen:

$$\rho_0 = 5''578 - 0''0277 \left(\frac{t}{10}\right) + 0''02719 \left(\frac{t}{10}\right)^2.$$

Mit Hilfe von A wurden nun die constanten Correctionen der Distanzmessungen abgeleitet und corrigirte Jahresmittel gebildet. Die übrig bleibenden Fehler wurden durch eine Formel von der Form:

$$d\rho = a + bt + ct^2 + d \cos 20^\circ t$$

dargestellt.

Der Sinn dieses Versuches ist folgender. Das von $\sin 20^\circ t$ abhängige Glied ist sehr klein und wurde nur aus Bequemlichkeitsrücksichten fortgelassen. Dagegen sollte auf eine von dem früheren unabhängige Weise das grössere periodische Glied $0''196 \cos 20^\circ t$ nachgewiesen werden. Wenn demnach die aus den Positionswinkeln sich ergebenden Bestimmungsstücke der Revolutionsbewegung eine reelle Bedeutung haben, so muss aus der jetzt vorzunehmenden Ausgleichung ein sehr kleiner Werth für d hervorgehen. In der That findet sich

$$d\rho = +0''0172 + 0''0023\left(\frac{t}{10}\right) - 0''00965 \left(\frac{t}{10}\right)^2 - 0''025 \cos 20^\circ t$$

so dass also durch die Distanzen die Hypothese der Revolution des Sternes C um einen dunklen Begleiter vollständig bestätigt wird. Fügt man den gefundenen Ausdruck für $d\rho$ zu der Formel A, so findet man:

$$\rho = 5''595 - 0''0253\left(\frac{t}{10}\right) + 0''01754\left(\frac{t}{10}\right)^2 + \left(0''171\cos 20^\circ t + \right.$$
$$\left. + 0''010\sin 20^\circ t\right)\frac{\rho}{5''610}. \qquad (B)$$

Dieses ist also die definitive Formel.

Ich lasse nun die angekündigte Vergleichung von *(A)* und *(B)* mit den Jahresmitteln folgen. Positionswinkel und Distanzen beziehen sich auf die Mitte $\frac{A+B}{2}$.

	g	$\frac{A+B}{2}$ beob. p	$B-R$ (III)		g	$\frac{A+B}{2}$ beob. ρ	$B-R$ (B)
1781 89	—	181°73	−4°34	—	—	—	—
1802·11	—	171·78	+0·23	—	—	—	—
21·98	1	160·03	+0·01	1821 93 [2]	1	5''564	−0''079
23·97	1	160·42	+0·20	26·22 [2]	2	5·578	−0·091
26·22	2	160·55	+0·48	28·99 [2]	2	5·679	−0·128
28·99	2	157·11	−1·39	31·27	3	5·825	−0·052
31·19	4	155·04	−1·02	32 20	5	5·905	+0·027
32·20	8	153·80	−0·97	33·27	2	5·925	+0·068
33·25	2	153·83	+0·37	35·31 [4]	3	5·816	+0·064
35·31	3	150·76	−0·50	36·27 [4]	2	5·750	+0·062
36·27	2	149·36	−1·22	40·26	5	5·440	−0·036
40·25	4	148·81	−0·87	41·07	2	5·458	−0·004
41·12	8	149·68	−0·13	42·31	3	5·498	+0·028
42·34	4	148·56	−1·41	43·29	4	5·539	+0·044
43·25	6	150·18	+0·17	44·28	2	5·552	+0·017
44·32	5	150·84	+0·95	45·31	2	5·498	−0·091
45·39	2	151·25	+1·73	46·26	2	5·588	−0·055
46·25	1	150·06	+1·04	47·33 [1]	2	5·662	−0·039
47 32	2	149·07	+0·93	48·23 [1]	6	5·614	−0·125
48·20	10	147·68	+0·39	49·32 [1]	4	5·720	−0·047
49·32	3	146·47	+0·47	50·29 [1]	3	5·696	−0·076
50·29	2	146·32	+1·50	51·28 [1]	3	5·889	+0·133
51·25	4	143·67	0	52·32	3	5·671	−0 048
52·29	4	142·43	−0·08	53·29	2	5·660	−0·010
53·27	5	140·70	−0·89	54·07	0	5·612	−0·012
54·23	4	141·73	+0·84	55·22	7	5·573	+0·019
55·22	8	140·30	−0·11	56·32	4	5·471	−0·021

	g	$\frac{A+B}{2}$ beob. p	$B-R$ (III)		g	$\frac{A+B}{2}$ beob. ρ	$B-R$ (B)
1856·31	4	140·60	+0·45	1857·29	5	5·545	+0·093
57·28	5	139·76	−0·37	58·19	4	5·361	−0·068
58·19	4	140·07	−0·16	59·30 [1]	2	5·526	+0·105
59·28	4	140·15	−0·29	60·27 [1]	3	5·514	+0·080
60·28	3	140·97	+0·34	61·27	4	5·582	+0·118
61·27	4	141·02	+0·30	62·33 [1]	1	5·388	−0·126
62·31	2	139·63	−1·02	63·06	5	5·626	+0·070
63·06	5	140·09	−0·39	64·30 [1]	2	5·369	−0·264
64·30	1	140·02	+0·17	65·28	7	5·699	+0·007
65·26	5	138·95	−0·18	66·53	9	5·747	−0·005
66·55	8	137·50	−0·36	68·24	3	5·720	−0·066
68·25	4	135·71	−0·21	69·34	2	5·643	−0·130
69·35	2	134·32	−0·33	70·52	5	5·755	+0·023
70·47	7	133·68	+0·18	71·31	2	5·681	−0·020
71·30	2	133·58	+0·66	72·54	5	5·637	+0·002
72·55	5	132·58	+0·59	73·28 [1]	2	5·497	−0·098
73·26	2	133·33	+1·62	74·54	6	5·582	+0·048
74·51	6	131·79	+0·28	75·29	4	5·643	+0·135
75·30	4	131·75	+0·21	76·89	7	5·492	+0·007
76·85	7	130·90	−0·94	78·23	7	5·489	−0·017
78·23	6	131·13	−1·04	79·45	4	5·480	−0·074
79·48	3	132·03	−0·31				

Die in dieser Tabelle enthaltenen Fehler lassen, was die Positionswinkel betrifft, vielleicht noch zu wünschen übrig, indem bei 25 positiven und 24 negativen Fehlern nur 16 Zeichenwechsel vorkommen. Der mittlere Fehler der Gewichtseinheit, welche also einem Mittel aus 2 Struve'schen Beobachtungen gleichkommt, ist $\pm 1°34$. Gegen die Grösse dieses Fehlers dürfte kaum etwas einzuwenden sein. Was weiter die nicht günstige Vertheilung der Vorzeichen betrifft, so scheint nichts anderes übrig zu bleiben, als dieselbe durch die Unmöglichkeit zu erklären, die systematischen Fehler vollständig zu beseitigen und die relativen Gewichte der Messungen verschiedener Beobachter genügend zuverlässig zu bestimmen.

In Distanz dagegen gestaltet sich die Sachlage sehr, man kann beinahe sagen auffallend günstig. Es sind hier 20 positive und 26 negative Fehler so angeordnet, dass 22 Zeichenwechsel erscheinen. Der mittlere Fehler der Gewichtseinheit ergibt sich zu $\pm 0''135$. Die Vertheilung der Vorzeichen lässt nichts zu wünschen übrig und selbst die kleineren Abweichungen von einer zufälligen Vertheilung sind nicht auffallend, wenn man bedenkt, dass einige der Jahresmittel nur auf den Messungen eines Beobachters beruhen. So sind die mit 1 bezeichneten allein aus Beobachtungen von O. Struve, die mit 2 bezeichneten nur aus solchen von W. Struve zusammengesetzt.

Die befriedigende Darstellung der Distanzen ist aber, wie ich glaube, eine sehr werthvolle Stütze für die angenommene Hypothese und dürfte die Annahme, dass der Stern *C* sich um einen dunklen Begleiter bewegt, sehr wahrscheinlich gemacht sein.

Über das Hexylen aus Mannit.

Von Dr. **Julius Domac.**

(Aus dem Universitätslaboratorium des Prof. A. Lieben.)

Von den bis nun dargestellten Kohlenwasserstoffen der Fettkörperreihe von der Formel C_6H_{12} ist wohl das Hexylen aus Mannit der am besten bekannte Körper und dennoch scheint die Frage nach seiner chemischen Constitution noch nicht endgiltig entschieden zu sein; denn wenn auch einerseits Erlenmeyer und Wanklyn[1], sowie Schorlemmer[2] und O. Hecht[3] auf Grund ihrer Arbeiten diesem Hexylen eine normale Constitution (d. h. ohne Seitenketten) zuerkennen, so stehen wieder anderseits dieser Ansicht die Resultate der Oxydationsversuche dieses Körpers von Chapman und Thorp[4], sowie die Arbeiten von Bouchardat und Pabst[5] über den Mannit selbst gegenüber, welche mit dieser Annahme nicht in Einklang zu bringen sind.

Diesen Thatsachen gegenüber schien mir eine erneuerte Untersuchung über die chemische Constitution des Hexylens aus Mannit nicht unwichtig zu sein.

Bevor ich jedoch zur Darlegung meiner Versuche und deren Resultate übergehe, sei es mir gestattet, meine Darstellungsmethode des Hexylens kurz zu beschreiben, da dieselbe in einigen Momenten von der von Erlenmeyer und Wanklyn und O. Hecht[6] angegebenen nicht unbedeutend abweicht.

Erlenmeyer und Wanklyn wählen die Menge von Jod, respective Jodwasserstoff zur Reduction des Mannits folgender

---

[1] Annal. d. Pharm. CXXXV, p. 149.
[2] Annal. d. Chem. und Pharm. CLXI, p. 275.
[3] Berichte d. deutschen chem. Gesellschaft 1878, p. 1420 und 1152.
[4] Annal. d. Chem. und Pharm. CXLII, p. 182.
[5] Compt. rend. XCI, 728.
[6] Jahresber. 1873, 337.

Formelgleichung entsprechend:

$$C_6H_{14}O_6 + 11JH = C_6H_{13}J + 6H_6O + 10J,$$

wonach diese Autoren zur Zersetzung von 50 G·m. Mannit 383·8 Grm. Jod, oder entsprechend Jodwasserstoffsäure benöthigen und trotzdem dieselben stets Phosphor mit einwirken lassen, so ist es dennoch bei so grossen Jodmengen fast unmöglich, die Ausscheidung desselben und die dadurch bedingte Verkohlung des Mannits zu verhindern, was auch die Ursache war, warum nie mehr als 24 Grm. Mannit in einer Operation ohne die Ausbeute an Jodür zu verringern, zersetzt werden konnten. O. Hecht wendet zwar bei der Reduction des Melampyrits oder Mannits bedeutend geringere Jodmengen an, doch scheint es mir vortheilhaft zu sein, noch weniger Jod in Action treten zu lassen, hingegen aber das Wasserquantum etwas grösser zu wählen; auch kann der von O. Hecht angewandte amorphe Phosphor gänzlich weggelassen werden, da derselbe nur unnöthiger Weise das Destillat verunreinigt.

Ich brachte für 50 Grm. Mannit nur 75 Grm. Jod in Reaction, ein Quantum, welches dem Verhältnisse von einem Moleküle Mannit auf zwei Moleküle Jodwasserstoff, welches eigentlich nur 69·7 Grm. Jod erfordern würde, annähernd entspricht, dazu 130 CC. Wasser und so viel gewöhnlichen Phosphor als nothwendig erscheint, um die Ausscheidung von Jod zu verhindern.

Ich operirte in der Weise, dass ich in eine tubulirte Retorte die genannte Menge Jod und Wasser brachte, und hierauf unter gelindem Erwärmen so lange Phosphor zusetzte, bis sämmtliches Jod in farblosen Jodwasserstoff übergeführt war. Hierauf setzte ich 25 Grm. Mannit zu und führte die Destillation, während durch den Tubus der Retorte ein rascher Kohlensäurestrom durch die Flüssigkeit durchgeleitet wurde, so lange fort, als noch Hexyljodür überging. Nach dem Erkalten wurden nun weitere 25 Grm. Mannit in die Retorte gebracht, die in die Vorlage übergegangene Jodwasserstoffsäure wieder hinzugefügt und die Destillation in derselben Weise zu Ende geführt. Trat während der Destillation eine Braunfärbung des Retorteninhaltes von ausgeschiedenem Jod ein, so wurde sofort etwas Phosphor zugesetzt, so dass derselbe stets im Ueberschusse vorhanden war.

Ich konnte in dieser Weise auch 100 Grm. Mannit in einer Operation zersetzen, ohne dass die Ausbeute an Jodür unter 85 bis 95% der theoretischen Menge herabsank, während ich nach der Methode der angeführten Autoren viel weniger befriedigende Resultate erhielt, besonders nach dem Erlenmeyer und Wanklyn'schen Verfahren mit dem Verhältnisse von einem Moleküle Mannit auf 11 Moleküle Jodwasserstoff trat stets gänzliche Verkohlung des Mannits ein.

Neben Hexyljodür entsteht stets eine kleine Menge eines lichtgelb gefärbten äusserst dickflüssigen Körpers, welcher im Rückstand bleibt, in Äther und Alkohol leicht, in Wasser jedoch gänzlich unlöslich ist. Möglicherweise ist derselbe ein Phosphorsäureäther, auf dessen nähere Untersuchung ich jedoch nicht einging.

Das in der beschriebenen Weise gewonnene Jodür wurde nun, nachdem es durch Eintragen von Jod von Phosphor befreit war, mit alkalischem Wasser gewaschen, im Wasserdampfstrome destillirt und so rein erhalten.

Die chemischen und physikalischen Eigenschaften des Hexyljodürs aus Mannit wurden von seinen Entdeckern Erlenmeyer und Wanklyn hinreichend beschrieben, ich will nur noch erwähnen, dass dasselbe der Victor Meyer'schen Reaction unterworfen, die für die secundären Jodide charakteristische Blaufärbung zeigt, und dass sich dasselbe mit Quecksilber nicht verbindet, wodurch der Beweis hergestellt ist, dass nebenher kein ungesättigtes Jodür entsteht.

Zur Überführung des Hexyljodürs in Hexylen wurde dasselbe in Partien von 200 Grm. der Zersetzung mit alkoholischer Kalilauge am Rückflusskühler unterworfen. Nach zweistündiger Einwirkung wurde die alkoholische Lösung von Hexylen und des bei der Reaction in geringer Menge entstandenen Hexyläthyläthers abdestillirt und mit einer concentrirten Chlorcalciumlösung versetzt, wodurch das Hexylen und der Äther abgeschieden wurden. Hierauf wurde mit dem Scheidetrichter getrennt, über Chlorcalcium getrocknet, fractionirt, destillirt und so das Hexylen leicht vom Äther und von den Spuren des der Zersetzung entgangenen Jodürs getrennt und ganz rein erhalten.

Der Elementaranalyse unterworfen, gab mein Product ganz befriedigende Zahlen und ebenso bewies ein quantitativ durch-

geführter Bromadditionsversuch die Reinheit desselben 1·023 Grm. Hexylen addirten 2·041 Grm. Brom, während die Theorie 1·948 Grm. verlangt.

Additionsversuch von Chlorwasserstoff zu C_6H_{12}.

Schorlemmer[1] fand schon, dass die beiden Heptylene aus amerikanischem Petroleum sich gegen Chlorwasserstoff verschieden verhalten. Eines derselben addirt sich damit bei gewöhnlicher Temperatur, das andere erst bei stärkerem Erhitzen. Morgan[2] stellte hierauf aus dem gechlorten Hexan des Petroleums zwei Hexylene dar, deren sonst unmögliche Trennung ihm auf diesem Wege gelang. Die aus diesen beiden Hexylenen dargestellten Hexylalkohole lieferten in der That auch bei der Oxydation verschiedene Producte. Le Bel[3] stellte ähnliche Versuche mit dem Hexylen aus Erdpech an.

Um zu untersuchen, ob bei der Reduction des Mannits mit Jodwasserstoff nicht ebenfalls zwei Jodüre und dem entsprechend auch bei der Zersetzung derselben zwei Hexylene entstehen, die vielleicht auf diesem Wege getrennt werden könnten, sowie um überhaupt Aufschluss über das Verhalten des Hexylens aus Mannit gegen Chlorwasserstoff zu erhalten, wurde nachstehender Versuch angestellt:

10 Grm. Hexylen wurden mit bei 0° C. gesättigter Chlorwasserstoffsäure in ein Rohr eingeschlossen und in einem kühlen Raume wochenlang sich selbst überlassen. Hierauf wurde das Rohr geöffnet und die oben schwimmende Schichte, welche sich, ausser dem Geruche nach, nicht merklich verändert hatte, abgehoben, mit Wasser von anhängender Chlorwasserstoffsäure gewaschen, hievon getrennt, über Chlorcalcium getrocknet und der Destillation unterworfen. Der Siedepunkt zeigte sogleich, dass eine Addition von Chlorwasserstoff stattgefunden hatte, denn er lag dem Monochlorhexan Schorlemmer's[4] aus Petroleum sehr nahe. Die Entstehungsweise dieses Additionsproductes liess wohl

---

[1] Annal. d. Chem. und Pharm. CLXVI, p. 177.
[2] Liebig's Annal. CLXXVII, p. 304.
[3] Bull. soc. chim. XVIII, p. 147.
[4] Annal. d. Chem. und Pharm. CLXI, p. 275.

über seine Natur keinen Zweifel und eine Chlorbestimmung, ausgeführt mit Natriumäthylat in alkoholischer Lösung ergab auch die erwarteten Zahlen.

0.7953 Grm. Substanz gaben 0·952 Grm. Chlorsilber oder procentisch:

Gefunden	Berechnet
29·58	29·46.

Das aus dem Hexylen des Mannits durch Addition von Chlorwasserstoff dargestellte Monochlorhexan ist eine farblose, leicht bewegliche Flüssigkeit, welche dem Petroleum ähnlich riecht, bei 123·5° C. (uncorrigirt) siedet und ein specifisches Gewicht von 0·871 bei einer Temperatur von 24° C. zeigt, bezogen auf Wasser von derselben Temperatur.

Die Addition von Chlorwasserstoff zu dem Hexylen aus Mannit geht bei gewöhnlicher Temperatur in oben beschriebener Weise so glatt und vollständig vor sich, dass dieses Verfahren eine sehr zweckmässige Darstellungsmethode für das Monochlorhexan abgibt.

Dieser Versuch beweist, dass die Bildung zweier Hexylene nicht stattgefunden hat, und dass somit das aus dem Hexyljodür des Mannits in beschriebener Weise gewonnene Hexylen ein vollständig einheitlicher Körper ist.

Oxydationsversuche.

Auf die nun zu beschreibenden Oxydationsversuche legte ich besonderes Gewicht, da es vollkommen gerechtfertigt erscheint, aus den hiebei erhaltenen Producten einen Schluss auf die chemische Constitution des Hexylens aus Mannit zu ziehen. Es wurden daher diese Versuche unter verschiedenen Bedingungen und stets mit einer grösseren Menge Hexylens durchgeführt, um die Producte der Oxydation sicher constatiren zu können.

Ich verwendete zu jedem Versuche 8 bis 10 Grm. Hexylen, welche zu je 2 Grm. mit der entsprechenden Menge des Oxydationsmittels in Röhren eingeschlossen wurden. Als oxydirende Agentien benützte ich der Reihe nach freie Chromsäure, Kaliumdichromat und Schwefelsäure, übermangansaures Kalium in

saurer und alkalischer Lösung, und schliesslich Salpetersäure. Die Menge des angewandten Oxydationsmittels wurde stets in dem Verhältnisse gewählt, dass auf ein Molekül Hexylen vier Sauerstoffatome zur Einwirkung kamen. Gegen freie Chromsäure sowie gegen Kaliumdichromat und Schwefelsäure erweist sich das Hexylen ziemlich resistenzfähig, und musste bis zur vollständigen Reduction des Oxydationsmittels 60 bis 70 Stunden auf 120° C. im Luftbade erhitzt werden.

Anders verhält sich das Hexylen gegen Kaliumpermanganat. Dieses äussert seine oxydirende Wirkung schon bei gewöhnlicher Temperatur unter nicht unbeträchtlicher Wärmeentwicklung, und nach ein- bis zweitägigem Stehen der Rohre war die Einwirkung stets vollständig beendigt. Salpetersäure, welche ich von der Dichte 1·25 anwandte, wirkte bei gewöhnlicher Temperatur selbst nach vielen Tagen nicht merklich ein. Jedoch schon nach zweistündigem Erhitzen im Luftbade auf 85 bis 90° C. war das Hexylen in einen grünlich gefärbten Nitrokörper verwandelt, welcher sich am Boden der Rohre absetzte. Ich öffnete hierauf die Rohre, liess die entstandene Kohlensäure austreten, und erhitzte weiter im Luftbade durch 8 Stunden auf 90° C., nach welcher Zeit die Oxydation vollständig beendet war, was sich dadurch bemerkbar machte, dass weder mehr unverändertes Hexylen noch Nitrokörper in den Rohren vorhanden war.

Bei allen Versuchen wurde das beim Öffnen der Rohre austretende Gas durch seine Einwirkung auf vorgelegtes Barytwasser als Kohlensäure erkannt. Der Röhreninhalt wurde hierauf mit Schwefelsäure stark angesäuert und der Destillation unterworfen. Das schwefelsäurefreie sauer reagirende Destillat wurde mit Silberoxyd am Rückflusskühler bis zur neutralen Reaction behandelt, hernach eingedampft und die Silbersalze der durch die Oxydation entstandenen Säuren fractionirt krystallisiren gelassen. Im Destillationsrückstande wurde auf fixe Säuren geprüft, doch konnte keine von denselben nachgewiesen werden. Bei der Oxydation mit Salpetersäure wurden die flüchtigen Säuren in ähnlicher Weise gewonnen und ihre Silbersalze dargestellt. Bei diesem Versuche konnte überdies von fixen Säuren Bernsteinsäure sicher nachgewiesen und auch frei isolirt werden; dieselbe wurde an allen ihren charakteristischen Reactionen, hauptsächlich

nach ihrer bekannten Eisenreaction erkannt. Oxalsäure konnte nicht nachgewiesen werden. Die Abwesenheit dieser Säure erklärt sich wohl dadurch, dass ich mit keinem Überschusse an Salpetersäure oxydirte, und dass daher vorzüglich nur die bei der Oxydation entstandene Buttersäure zu Bernsteinsäure weiter oxydirt wurde, während die mitentstehende Essigsäure doch resistenzfähiger ist.

Zur Analyse wurden die Silbersalze zuerst im Vacuum und dann im Trockenschranke bei 100° C. getrocknet, und hierauf durch Glühen die Menge des zurückgebliebenen metallischen Silbers bestimmt. Ich muss noch bemerken, dass die erste Fraction bei allen Oxydationsversuchen beim directen Herauskrystallisiren gewöhnlich nahe an 60$^0/_0$ Silber enthielt, und dass dieselbe stets erst nach wiederholtem Umkrystallisiren oder nach öfterer Behandlung mit zur Lösung ungenügenden Mengen von Wasser ein Salz ergab, welches den angegebenen Silbergehalt zeigte. Es erklärt sich dadurch die verhältnissmässig grosse Differenz des Silbergehaltes zwischen der ersten und zweiten Fraction bei allen Oxydationsversuchen.

Nachdem sich bei allen Oxydationsversuchen dieselben Säuren als Producte der Einwirkung der Oxydationsmittel nachweisen liessen, mit Ausnahme bei der Oxydation mit Salpetersäure, bei welcher noch Bernsteinsäure gefunden wurde, so gibt umstehende Tabelle die kürzeste Übersicht derselben.

Aus dieser Tabelle ergibt sich, dass bei der Oxydation des Hexylens Buttersäure und Essigsäure entstanden sind, wie dies auch O. Hecht in seiner eingangs citirten Arbeit gefunden hatte. Es steht dies im Widerspruche mit den Angaben Chapmann und Thorp's, welche neben Essigsäure und Kohlensäure Propionsäure finden.

Neben der Trennung der entstandenen flüchtigen Säuren durch fractionirte Krystallisation ihrer Silbersalze, wurde noch in zwei Fällen, nämlich bei einer Oxydation mit Kaliumdichromat und Schwefelsäure und bei einer mit Kaliumpermanganat in saurer Lösung die Trennung der Säuren durch fractionirte Absättigung mit kohlensaurem Natrium durchgeführt. Bei der erstgenannten Oxydation wurden 10, bei der letzteren 9 Natriumsalzfractionen erhalten. Die erste Fraction wurde in beiden

Oxydationsmittel	Fraction	Analysirte Menge des Salzes	Silberrück-stand	Silbergehalt in Percenten
Freie Chromsäure .	1	0·242	0.1345	55·57
	2	0 4802	0·2955	61·53
	3	0·2595	0·163	62·81
	4	0·2685	0·169	62·94
	5	0·407	0·257	63·14
	6	0·340	0·215	63·23
	7	0·259	0·166	64·09
Kaliumdichromat und Schwefelsäure	1	0·318	0·177	55·66
	2	0·3745	0·2285	61·01
	3	0 4695	0·2875	61·25
	4	0·3225	0·201	62·32
	5	0·355	0·2215	62·39
	6	0·1825	0·115	63·01
	7	0·2054	0·1315	64·02
Kaliumpermanganat in saurer Lösung .	1	0·221	0·123	55·65
	2	0·2057	0·129	62·71
	3	0 1836	0·1156	62·96
	4	0·344	0·2168	63·02
	5	0·1635	0·1034	63·24
	6	0·2543	0·1643	64·60
Kaliumpermanganat in alkalischer Lösung	1	0·3165	0·1769	55·89
	2	0·266	0 165	62·03
	3	0 227	0·141	62·11
	4	0·3175	0·1975	62.20
	5	0·254	0·1595	62·79
	6	0·1815	0·115	63·36
	7	0·1935	0·124	64·08
Salpetersäure	1	0·325	0·186	57·20
	2	0·3625	0·221	60·96
	3	0.2123	0·132	62·17
	4	0·339	0·214	63·12
	5	0·182	0·1157	63·57
	6	0·2044	0·1311	64·13

Fällen als schwefelsaures Natron, die letzte hingegen wieder als Silbersalz bestimmt.

Die Analysen gaben die gleichen Zahlen wie die äussersten Fractionen in obiger Tabelle.

Oxydation mit Kaliumdichromat und Schwefelsäure.

1. Fraction. 0·3113 Grm. Substanz gaben 0·2685 Grm. schwefelsaures Natrium; in Percenten 27·94 Natrium.

10. Fraction. 0·222 Grm. Substanz gaben 0·123 Grm. metallisches Silber; in Percenten 55·40.

Oxydation mit Kaliumpermanganat in saurer Lösung.

1. Fraction. 0·4539 Grm. Substanz gaben 0·3941 Grm. schwefelsaures Natrium; in Percenten 28·11 Natrium.

9. Fraction. 0·2585 Grm. Substanz gaben 0·144 Grm. metallisches Silber; in Percenten 55·70.

Für Natriumacetat verlangt die Theorie 28·05% Natrium und für buttersaures Silber 55·38% Silber.

Es blieb nun nur noch zu ermitteln, ob nicht bei diesen Oxydationsversuchen ausser den genannten zwei flüchtigen Säuren auch noch Propionsäure entstanden sei. Zu diesem Zwecke wurden die Natriumsalze in Silbersalze übergeführt, diese mit allen Mittelfractionen der Silbersalze der ersteren Oxydationen vereinigt und ihre Lösung wieder fractionirt krystallisirt.

Die Analysen der in dieser Weise erhaltenen 10 Fractionen sind in folgender Tabelle verzeichnet.

Fraction	Analysirte Menge des Salzes	Silberrückstand	Silbergehalt in Percenten
1	0·2525	0.1513	59·92
2	0·218	0·1313	60·22
3	0·247	0·151	61·13
4	0·2529	0·1574	62·27
5	0·3050	0·194	63·27
6	0·242	0·154	63·63
7	0·3138	0·200	63·76
8	0·2515	0·1605	63·81
9	0·3265	0·2085	63·85
10	0·2539	0·1638	64·51

Die ersten vier Fractionen, welche nach ihrem Silbergehalte, wie ihn obige Tabelle zeigt, möglicherweise Propionsäure enthalten konnten, wurden durch weitere fractionirte Krystallisation wieder in mehrere Fractionen zerlegt, deren Silbergehalt die Vermuthung der Anwesenheit dieser Säure wohl gänzlich ausschliesst.

Es zerfällt die Fraction		Analysirte Menge des Salzes	Silberrückstand	Silbergehalt in Percenten
1	I	0·191	0·1099	57·53
	II	0·1898	0·111	58·48
	III	0·2121	0·1275	60·11
	IV	0·2475	0·152	61·41
2	I	0·1975	0·115	58·22
	II	0·2035	0·1236	60·73
	III	0·2845	0·1748	61·44
3	I	0·2365	0·1425	60·25
	II	0·2605	0·160	61·42
	III	0·2125	0·1337	62·91
4	I	0·235	0·1431	60·89
	II	0·2065	0·1285	62·22
	III	0·2335	0·1475	63·16
	IV	0·224	0·1428	63·75

Aus allen diesen angeführten analytischen Daten geht wohl mit Gewissheit hervor, dass die Oxydationsproducte des Hexylens aus Mannit Buttersäure und Essigsäure sind. Für das Silbersalz der ersteren verlangt die Theorie 55·38 und für das der letzteren 64·67% metallisches Silber.

Die Bernsteinsäure, welche bei der Oxydation mit Salpetersäure, und die Kohlensäure, welche in allen Fällen nachgewiesen wurde, sind gewiss nur Producte einer tiefer greifenden Oxydation der entstandenen fetten Säuren.

Um nun zu constatiren, ob die bei den Oxydationen des Hexylens entstehende Buttersäure normale oder Isobuttersäure ist, wurden die Silbersalze aller Oxydationen, deren Silbergehalt für Buttersäure stimmte, vereinigt, in das Kalksalz übergeführt, und eine kalt gesättigte Lösung desselben in ein Röhrchen eingeschmolzen. Beim Erhitzen schied diese Lösung eine nicht unbedeutende Menge von Krystallschuppen aus, welche sich beim Erkalten wieder vollständig auflösten. Nachdem dieses Verhalten eine charakteristische Eigenschaft des normalen buttersauren Kalkes ist, so besteht kein Zweifel, dass die bei der Oxydation des Hexylens aus Mannit entstandene Buttersäure die normale Constitution besitzt.

Eine Krystallwasserbestimmung dieses Salzes konnte ich nicht vornehmen, da dasselbe mit etwas Chlorcalcium verunreinigt war.

Additionsversuch von unterchloriger Säure zu C_6H_{12}. Darstellung und Oxydation des secundären Hexylalkohols.

Zu einer nach den Angaben von Butlerow[1] frisch bereiteten Lösung von unterchloriger Säure, welche über Asbest klar filtrirt war, wurden 40 Grm. Hexylen hinzugefügt. Anfangs schwamm das Hexylen als leichtere Schichte obenauf, beim Schütteln vereinigte sich dasselbe jedoch rasch und vollständig unter leichter Erwärmung mit der unterchlorigen Säure zu einem Chlorhydrin, welches bald als schwere ölige Schichte zu Boden sank.

Das in dieser Weise erhaltene Chlorhydrin wurde mit Wasser gewaschen, um es von anhängender unterchloriger Säure zu befreien, im Wasserdampfstrome destillirt, vom Wasser getrennt, über Chlorcalcium getrocknet und so rein erhalten.

Das Chlorhydrin des Hexylens aus Mannit ist ein farbloses Liquidum, schwerer als Wasser und besitzt einen eigenthümlichen nicht unangenehmen Geruch, für welchen sich kein Analogon anführen lässt. In Wasser ist dasselbe nahezu unlöslich, in Essigsäure löst es sich jedoch gut auf. Ein Versuch, dasselbe unter

---

[1] Annal. d. Chem. und Pharm. CXLIV, p. 24.

gewöhnlichen Umständen zu destilliren, endete mit der vollständigen Zersetzung des Körpers. Bei 85° C. warf es einige Blasen und färbte sich gelb, während das Thermometer rapid bis 140° C. und darüber stieg, wobei jedoch unter Entwicklung von Chlorwasserstoff vollständige Decomposition eintrat.

Eine Chlorbestimmung ergab folgende Zahlen:

0·3605 Grm. Chlorhydrin geben 0·3802 Grm. ClAg; in Percenten:

Gefunden	Berechnet
26·08	26·007.

Das Chlorhydrin wurde nun mit Essigsäure und Eisenfeile reducirt und der hiebei gewonnene Hexylalkohol mit Kaliumdichromat und Schwefelsäure der Oxydation unterworfen.

Zu dem Behufe wurde das Chlorhydrin in 50percentiger Essigsäure gelöst, Eisenfeile in doppelter Menge als zur vollständigen Reduction nothwendig ist hinzugefügt und circa 14 Tage unter häufigem Umschütteln stehen gelassen. Hierauf wurde zur Beendigung der Reaction durch einige Stunden am Rückflusskühler erwärmt und dann abdestillirt. Bei der nun folgenden Übersättigung des Destillates mit Ätzkali und kohlensaurem Alkali schied sich schon der grösste Theil des Hexylalkohols aus. Dieser wurde abgehoben und die wässerige Lösung nochmals der Destillation unterworfen, wobei aus den zuerst übergegangenen Partien noch etwas Hexylalkohol gewonnen wurde. Dieser Hexylalkohol wurde nun, um etwa mitentstandenes essigsaures Hexyl zu zerlegen, mit Kalilauge anhaltend gekocht, hierauf von der Lauge getrennt, mit Wasser gewaschen, über Chlorcalcium getrocknet und dann fractionirt destillirt. Nach zweimaliger fractionirter Destillation siedete der bei weitem grösste Theil bei 136—138° C. Unter 136° C. gingen nur wenige Tropfen und über 138° C. auch nur eine ganz kleine Menge über.

Der in beschriebener Weise dargestellte Hexylalkohol ist eine farblose Flüssigkeit von äusserst angenehmem an Pfeffermünze erinnernden Geruch, zeigt den Siedepunkt von 136 bis 138° C. und gibt mit Natrium unter Wasserstoffentwicklung ein festes Hexylat.

Obwohl über die alkoholische Natur dieses Körpers kein Zweifel obwalten konnte, so wurde derselbe dennoch der Elementaranalyse unterworfen, welche die für Hexylalkohol berechneten Zahlen im Kohlenstoff und Wasserstoff ergab, und so gleichzeitig einen Beweis für die Reinheit des Productes lieferte.

0·2529 Grm. Substanz gaben 0·6515 Grm. CO_2 und 0·313 Grm. H_2O. In 100 Theilen:

	Gefunden	Berechnet
C	....70·22	70·58
H	....13·95	13·72.

Zur Oxydation wurden 6 Grm. Hexylalkohol in zwei Rohre mit einer Lösung von Kaliumdichromat und Schwefelsäure eingeschlossen und bis zur vollständigen Reduction des Oxydationsgemisches durch 36 Stunden hindurch im Luftbade auf 100 bis 120° C. erhitzt. Hierauf wurden die Rohre geöffnet und das austretende Gas durch vorgelegtes Barytwasser als Kohlensäure erkannt. Der Röhreninhalt wurde abdestillirt, das schwefelsäurefreie, sauer reagirende Destillat mit überschüssigem Silberoxyd am Rückflusskühler bis zur neutralen Reaction behandelt, und hierauf die Silbersalze der durch die Oxydation entstandenen Säuren durch fractionirtes Krystallisiren erhalten.

Die Analysen dieser Silbersalze enthält folgende Tabelle:

Fraction	Analysirte Menge des Salzes	Silberrückstand	Silbergehalt in Percenten
1	0·2995	0·167	55·75
2	0·191	0·1098	57·48
3	0·215	0·126	58·60
4	0·2665	0·157	58·91
5	0·231	0·143	61·90
6	0·2275	0·1455	63·95

Aus obigen Zahlen geht ohne Zweifel hervor, dass die Oxydationsproducte dieses Hexylalkohols Buttersäure und Essigsäure sind, dass also dieser Alkohol seiner Natur nach ein secundärer ist, aus welchem bei der Behandlung desselben mit Oxydationsmitteln zuerst Methylbuthylketon entsteht, welches unter der weiteren Einwirkung der oxydirenden Agentien endgiltig in die beiden genannten Säuren zerfällt, wie dies schon Erlenmeyer und Wanklyn für einen aus dem β-Hexyljodür des Mannits in anderer Weise dargestellten Hexylalkohol constatirt haben. Dieser aus dem Chlorhydrin des Hexylens durch Reduction gewonnene Alkohol ist somit, da er den gleichen Siedepunkt zeigt und dieselben Oxydationsproducte wie der secundäre Hexylalkohol Erlenmeyer's und Wanklyn's liefert, mit demselben identisch.

Fasst man nun die Ergebnisse obiger Versuche in Kürze zusammen, so ist, wie ich glaube, in Anbetracht der Thatsache, dass das Hexylen aus Mannit mit allen Oxydationsmitteln behandelt, normale Buttersäure und Essigsäure liefert, ferner in Anbetracht dessen, dass der aus dem Additionsproducte der unterchlorigen Säure gewonnene Hexylalkohol bei seiner Oxydation ebenso wie der aus dem Hexyljodür directe dargestellte, ebenfalls Buttersäure und Essigsäure ergibt, sowie endlich in Anbetracht dessen, dass das β-Hexyljodür das für die secundären Jodide charakteristische Verhalten bei der Victor Meyer'schen Reaction zeigt, der Schluss wohl gerechtfertigt, dass die chemische Constitution dieses Hexylens eine normale ist. Im Hexyljodür aus Mannit ist das Jod an das zweite Kohlenstoffatom der Kette gebunden und für das daraus resultirende Hexylen wird demnach die aufgelöste Formel endgiltig:

$$CH_3-CH_2-CH_2-CH=CH-CH_3$$

zu schreiben sein.

Über Dinitro- und Trinitroresorcin.

Von R. Benedikt und Oberlieutenant A. Freih. v. Hübl.

(Aus dem Laboratorium für analytische Chemie an der k. k. technischen Hochschule.)

Fitz [1] hat sich vergeblich bemüht, das von ihm entdeckte Dinitrosoresorcin durch Oxydation in Dinitroresorcin überzuführen. „Man erhält mit Salpetersäure, selbst mit ganz verdünnter, Trinitroresorcin; von übermangansaurem Kali und Ferridcyankalium wird das Binitrosoresorcin schon in der Kälte höher oxydirt und verbrannt."

Weselsky und Benedikt [2] haben in der Einwirkung der Dämpfe der salpetrigen Säure auf in Äther aufgeschlämmte Nitrosoverbindungen ein neues Mittel gefunden, dieselben zu Nitroverbindungen zu oxydiren, und bereits darauf hingewiesen, dass dieses Verfahren auch beim Dinitrosoresorcin anwendbar sei.

Wir haben nun diese Reaction genauer studirt und grössere Mengen Dinitroresorcin dargestellt.

Zur Bereitung des Dinitrosoresorcins verfuhren wir genau nach der Angabe von Stenhouse und Groves.[3] Man erhält es dabei in Form eines schweren, feinpulverigen Niederschlages, der nach dem Waschen mit Wasser, Alkohol und Äther etwa in zehn Gewichtstheilen Äther aufgeschlämmt wird. Die zur Oxydation benützten Salpetrigsäuredämpfe entwickelten wir aus arseniger Säure und Salpetersäure von der Dichte 1·40. Die Umwandlung der Nitroso- in die Nitroverbindung ist erst nach mehrstündigem Einleiten des Gases vollzogen. Die Reaction ist beendet, wenn das Nitrosoproduct vollständig in Lösung gegangen ist.

Man schüttelt nun zur Entfernung der in Äther gelösten Oxyde und Säuren des Stickstoffes wiederholt mit Wasser aus,

[1] Berl. Ber. Bd. 8, pag. 631.

[2] Monatshefte f. Chemie, 1, pag. 897.

[3] Ann. Chem. Pharm., Bd. 188, pag. 360.

Dasselbe nimmt reichlich Salpetersäure auf, gleichzeitig findet eine lebhafte Entwicklung von Stickoxyd statt.

Der Äther wird nicht bis auf den letzten Rest abdestillirt, weil sonst durch eine, trotz des Ausschüttelns mit Wasser im Äther verbliebene geringe Menge Salpetersäure eine weitere Nitrirung zu Trinitroresorcin eintreten würde. Man giesst auf ein Schälchen aus, lässt den Äther bei gewöhnlicher Temperatur verdunsten, zerreibt den Rückstand und wäscht ihn mit kaltem Wasser gut aus. Erst jetzt kann man ihn, ohne eine weitere Nitrirung befürchten zu müssen, aus verdünntem Alkohol umkrystallisiren.

Die Ausbeute ist eine sehr befriedigende, wenn man die angegebenen Vorsichtsmassregeln befolgt.

Das Dinitroresorcin krystallisirt in hellgelben Blättchen. Es schmilzt bei 142°, ist theilweise sublimirbar und verpufft bei starkem Erhitzen.

Eine Stickstoffbestimmung ergab:

	Gefunden	Berechnet für $C_6H_2(NO_2)_2(OH)_2$
N	14·51 %	14·00 %

Das Kaliumsalz krystallisirt in orangegelben, leicht löslichen Prismen.

Das Ammonsalz bildet rothgelbe, sammtglänzende Drusen. Kocht man Dinitroresorcin mit Baryumcarbonat, so erhält man das neutrale Barytsalz $C_6H_2(NO_2)_2(O_2Ba)$. Dasselbe krystallisirt beim Erkalten der filtrirten Lösung in kleinen, gelben Nadeln aus, die zu Drusen vereinigt sind. In kaltem Wasser ist es fast unlöslich.

	Gefunden	Berechnet für $C_6H_2(NO_2)_2(O_2Ba)$
Ba	41·26 %	40·89 %

Das Dinitroresorcin geht schon beim Erwärmen mit stark verdünnter Salpetersäure (z. B. 1 : 10) vollständig in Trinitroresorcin über.

Nitroamidoresorcin. 50 Gr. Dinitroresorcin werden in einem Kolben in 350 CC. absoluten Alkohols gelöst, sodann

150 CC. wässeriges Ammon zugefügt und im Wasserbade auf circa 70° erwärmt; dann leitet man Schwefelwasserstoff ein. Der anfangs durch ausgeschiedenes Ammonsalz breiartige gelbe Inhalt des Kolbens löst sich langsam zu einer vollständig klaren dunkelrothen Flüssigkeit. Sobald dieser Moment eingetreten ist, unterbricht man den Schwefelwasserstoffstrom, lässt erkalten und zwölf Stunden stehen. Dann hat sich das Ammonsalz des Nitroamidoresorcins in Form dunkler, die ganze Flüssigkeit durchsetzender Nadeln ausgeschieden. Man entfernt die Mutterlauge durch Absaugen, löst die Krystalle in Wasser auf, filtrirt den Schwefel ab und versetzt nun vorsichtig so lange mit verdünnter Schwefelsäure, als noch ein Niederschlag entsteht. Ein Überschuss an Schwefelsäure ist sorgfältig zu vermeiden, da das Nitroamidoresorcin sich in freien Säuren leicht löst. Den erhaltenen braunen krystallinischen Niederschlag reinigt man durch Umkrystallisiren aus verdünntem Alkohol.

Eine Stickstoffbestimmung ergab:



	Gefunden	Berechnet für $C_6H_2(NO)_2(NH)_2(OH)_2$
N	16·46	16·47

Das Nitroamidoresorcin stellt schwarzbraune Krystalle dar, die in Wasser schwer, in Alkohol und Äther leicht löslich sind. Der Schmelzpunkt liegt bei circa 170°.

In Säuren und Alcalien löst es sich leicht auf. Die Salze der Alcalien reduciren schon in der Kälte ammoniakalische Silberlösungen, und geben mit Bleisalzen einen rothbraunen flockigen, mit löslichen Barytsalzen nach einiger Zeit einen schwarzen, krystallinischen Niederschlag. Das Ammonsalz scheidet sich, wie oben erwähnt, bei der Reduction des Dinitroresorcins in alkoholischer Lösung neben Schwefel in schönen Nadeln aus. Es gelingt leicht, den Schwefel durch Waschen mit Schwefelkohlenstoff zu entfernen. Das Ammonsalz stellt nach dieser Behandlung kleine, zarte, dunkelviolette Krystalle dar, die einen wechselnden Ammongehalt besitzen.

Frisch dargestellt, hat es wahrscheinlich die normale Zusammensetzung, $C_6H_2(NO_2)(NH_2)(ONH_4)_2$, doch verliert es schon beim Liegen an der Luft einen Theil des Ammons; nach mehrstündigem Trocknen bei 100° ist es vollständig in freies Nitro-

amidoresorcin übergegangen. In wässeriger Lösung ist das Ammonsalz sehr veränderlich, beim Erwärmen tritt vollständige Zersetzung unter Bildung harziger Producte ein.

Ein frisch dargestelltes Ammonsalz, durch Schwefelkohlenstoff vom Schwefel befreit, zeigte nach 12 Stunden einen Gehalt von 12·93% NH_3, während dem normalen Salz 16·67, dem sauren 9·09% NH_3 zukommen.

Das schwefelsaure Nitroamidoresorcin bildet feine, bräunliche, nadelförmige Krystalle, die im Wasser leicht löslich sind. Sie zersetzen sich beim Erwärmen auf 100°. Die Schwefelsäurebestimmung ergab folgendes Resultat:

	Gefunden	Berechnet für $[C_6H_2(OH)_2(NH_2)(NO_2)]_2SO_4H_2$
SO_4H_2	22·22%	22·37%

Dinitroamidoresorcin. Man erhält dieses der Pikraminsäure entsprechende Derivat des Resorcins, wenn man Styphninsäure [1] in Alkohol löst und mit Schwefelammonium längere Zeit erwärmt. Die erhaltene Lösung wird mit Essigsäure angesäuert und wiederholt mit Äther ausgeschüttelt. Nach dem Abdestilliren des Äthers reinigt man das Rohproduct durch Umkrystallisiren aus absolutem Alkohol. Die Ausbeute war stets eine sehr unbefriedigende, der grösste Theil des Trinitroresorcins verwandelte sich in unkrystallisirbare, dunkel gefärbte Substanzen.

Die Styphnaminsäure stellt kupferrothe, glänzende Blättchen dar, die in Wasser fast unlöslich, in Alkohol ziemlich schwer löslich sind. In Alcalien ist sie leicht löslich. In verdünnten Säuren tritt erst in der Siedehitze Lösung ein. In concentrirter Schwefelsäure löst sich die Styphnaminsäure leicht zu einer farblosen Flüssigkeit auf, die beim Verdünnen mit Wasser, die ursprüngliche Verbindung wieder in Form kupferrother Blättchen abscheidet.

Beim Erhitzen zersetzt sie sich und schmilzt bei circa 190°.

---

[1] V. Merz und G. Zetter haben vor Kurzem eine Darstellungsmethode des Trinitroresorcins angegeben (Berl. Ber., Bd. 12, pag. 3035). Uns scheint es noch weit einfacher, nach der Methode von Stenhouse und Groves bereitetes Dinitrosoresorcin mit ganz verdünnter Salpetersäure zu erwärmen. Wir erhielten dann sofort eine fast theoretische Ausbeute an reiner Styphninsäure.

Die Analyse ergab:

	Gefunden	Berechnet für $C_6H(OH)_2(NO_2)_2(NH_2)$
C	34·09	33·49
H	2·53	2·33
N	19·60	19·53
O	—	44·65

Dinitrodiazoresorcin. Diese Diazoverbindung, welche dem Dinitroamidoresorcin entspricht, kann ebenso leicht aus dem Mononitroamidoresorcin wie aus dem Dinitroamidoresorcin dargestellt werden. In ersterem Falle bewirkt die salpetrige Säure neben der Umwandlung der Amidogruppe auch noch die Nitrirung. Man löst 5 Grm. Nitro- oder Dinitroamidoresorcin in 150 CC., mit 5 Volumtheilen Wasser verdünnter Schwefelsäure auf, setzt überschüssiges Kaliumnitrit in wässeriger Lösung zu und kocht, bis die Flüssigkeit hell grünlichgelb geworden ist. Beim Erkalten erstarrt die ganze Flüssigkeit zu einer hellgelben Krystallmasse, die durch Umkrystallisiren gereinigt werden kann.

Die so erhaltene Verbindung ist nicht freies Dinitrodiazoresorcin, sondern sein Kalisalz. Dasselbe krystallisirt aus sehr concentrirten wässerigen Lösungen, ferner aus verdünnter Schwefelsäure und beim Vermischen seiner Lösung mit Alkohol wasserfrei und bildet dann feine, lange, schön gelbe Nadeln ohne Flächenschimmer.

Eine Kaliumbestimmung ergab:

	Gefunden	Berechnet für $C_6HN_4O_6K$
K	14·80%	14·81%

Beim langsamen Auskrystallisiren aus verdünnter wässeriger Lösung erhält man das Kalisalz in Form compacter brauner Prismen mit blauem Flächenschimmer, welche Ein Molekül Krystallwasser enthalten:

	Gefunden		Berechnet für $C_6HO_6N_4K+H_2O$
C	25.45	25·55	25·52
H	1·37	1·10	1·06
N	19·93	20·01	19·85
K	14 10	—	13·86
O	—	—	39·72

Es gelingt nicht, mehr als Ein Atom Kalium in das Dinitrodiazoresorcin einzuführen. Bringt man das beschriebene Kalisalz mit der berechneten Menge kohlensauren Kalis in Lösung, so krystallisirt es unverändert aus, es enthält also keine freie Hydroxylgruppe, und entspricht somit der Formel:

$$C_6H \begin{cases} NO_2 \\ NO_2 \\ N = N \\ O \diagup \\ OK \end{cases}$$

Die Kaliumsalze des Dinitrodiazoresorcins sind äusserst explosive Körper. Sie zersetzen sich beim Erhitzen, ferner durch Schlag, Druck und Stoss unter sehr heftiger Detonation. Sie sind in heissem Wasser sehr leicht, in kaltem schwer löslich.

Das freie Dinitrodiazoresorcin erhält man, wenn man das Kaliumsalz in concentrirter Schwefelsäure löst. Die farblose Flüssigkeit setzt bei längerem Stehen an der Luft gelbe Krystalle ab, die beim Erhitzen verpuffen.

Herr Dr. Brezina hatte die Freundlichkeit ihre Krystallform zu bestimmen:

Krystallsystem triklin

Elemente $a:b:c = 1 \cdot 677 : 1 : 2 \cdot 530$

$$\xi = 90°9'; \; \eta = 100°57'; \; \varphi = 90°10'$$

Formen: *a* (100) *c* (001) *d* (101) *e* ($\bar{1}$01) *m* (110) *n* (1$\bar{1}$0) *p* ($\bar{1}$11).

Habitus: Säulenförmig nach Zone *adce*. Spaltbarkeit nicht wahrnehmbar. Winkel:

		Rechg.	Messung			Rechg.	Messung
ac	(100) (001)	79°3	78°51	*cm*	(001) (110)	84°10	83°58
ad	(100) (101)	30 2	30 3	*cn*	(001) (1$\bar{1}$0)	84 30	84 27
a$\bar{e}$	(100) (10$\bar{1}$)	36 41	36 59	*cp*	(001) ($\bar{1}$11)	75 56	76 3
am	(100) (110)	58 28	58 24	*p$\bar{n}$*	($\bar{1}$11) ($\bar{1}$10)	19 34	19 31
an	(100) (1$\bar{1}$0)	59 0	59 2	*pe*	($\bar{1}$11) ($\bar{1}$01)	56 39	56 32

Das Mononitrodiazoresorcin erhält man, indem man zu der Lösung des Nitroamidoresorcins in verdünnter Schwefelsäure die berechnete Menge Nitrit in concentrirter wässeriger Lösung in der Kälte zusetzt.

Es scheidet sich dann als brauner, krystallinischer Niederschlag aus, der sich aus Alkohol umkrystallisiren lässt.

Einwirkung von Ätzkali auf Dinitrodiazoresorcin. Erwärmt man eine Lösung des beschriebenen Kaliumsalzes mit Kalilauge, so geht ihre Farbe von Lichtgelb rasch in Roth über. Zugleich findet eine reichliche Entwicklung von Stickgas statt, dessen Messung folgende Zahlen ergab:

	Gefunden		Berechnet für Abspaltung von N_2 aus $C_6H_3N_4O_7K$
N....	9·81	9·56%	9·92%

In der Lösung hofften wir ein Dinitrotrioxybenzol zu finden, dessen Bildung nach der Gleichung:

$$C_6H_2N_4O_6+H_2O = C_6H(NO_2)_2(OH)_3+N_2$$

zu erwarten gewesen wäre.

Der grösste Theil des Reactionsproductes fällt beim Ansäuern der Flüssigkeit als flockiger Niederschlag heraus.

Das Filtrat erhält eine geringe Menge amorpher Zersetzungsproducte. Aus dem Niederschlage wurden durch wiederholtes Umkrystallisiren aus absolutem Alkohol zwei Körper gewonnen:

Der eine (A) krystallisirt in Form körniger, glänzender Krystalle zuerst aus, er bildet das Hauptproduct der Reaction, der andere (B) scheidet sich aus den Mutterlaugen in Form hellbrauner Blättchen ab. Letzterer entsteht ausschliesslich, wenn man die Zersetzung nicht in wässeriger, sondern in alkoholischer Lösung vornimmt. Zu seiner Gewinnung wird dann die alkoholische Flüssigkeit mit Wasser verdünnt, mit Schwefelsäure angesäuert und mit Äther ausgeschüttelt. Das Extrahirte krystallisirt man aus starkem Alkohol um.

Keine der beiden Verbindungen ist das erwartete Trioxybenzolderivat, die Zersetzung in wässeriger Lösung ist offenbar keine glatte.

Der Körper A ist wenig gefärbt, in Wasser fast unlöslich, schwer löslich in Alkohol, leicht in Äther und concentrirter Essigsäure. Er schmilzt bei 268°.

Wir halten ihn für ein Tetranitrodiresorcin:

$$\begin{array}{l} C_6H(NO_2)_2(OH)_2 \\ | \\ C_6H(NO_2)_2(OH)_2 \end{array}$$

Die Analyse ergab folgendes Resultat:

	Gefunden		Berechnet für $C_{12}H_6N_4O_{12}$
C....	36·13	35·87%	36·18
H....	1·76	1·69%	1·50
N....	14·41	14·04%	14·08
O....	—	—	48·24

Ausser der Analyse sprechen für die Ansicht, dass der vorliegende Körper ein Diphenylderivat sei, sein hoher Schmelzpunkt sowie der Umstand, dass es sich nicht weiter nitriren lässt. Er krystallisirt aus kochender Salpetersäure unverändert aus.

Kalisalze. Bringt man das Tetranitrodiresorcin mit kohlensaurem Kali in Lösung, so krystallisirt beim Erkalten das schön roth gefärbte saure Salz in glänzenden Nadeln aus.

	Gefunden	Berechnet für $C_{12}H_4N_4O_{12}K_2$
K.....	17·50%	16·49%

Versetzt man dessen Lösung mit Ätzkali, so erhält man das neutrale Salz in dunkelgrünen, metallglänzenden Krystallnadeln.

Den mit alkoholischer Kalilauge aus dem Dinitrodiazoresorcin erhaltenen Körper B müssten wir seiner Entstehung und den Analysen nach für ein neues Dinitroresorcin halten.

	Gefunden		Berechnet für $C_6H_2(NO_2)_2(OH)_2$
C....	36·09	35·93	36·00
H....	2·18	2·50	2·00
N....	13·72	13·64	14·00
O....	—	—	48·00

Dagegen spricht aber der Umstand, dass concentrirte kochende Salpetersäure auf ihn vollständig ohne Wirkung ist, während man doch die Bildung von Styphninsäure erwarten müsste.

Er bildet hellbraune, grosse, glänzende Blättchen, schmilzt bei 210° und ist sublimirbar. Er ist in siedendem Wasser sehr schwer, in Alkohol leichter löslich.

Über resorcinsulfosaure Salze.

Von **Heinrich Fischer.**

(Mit 9 Holzschnitten.)

(Aus dem Laboratorium der analytischen Chemie an der k. k. technischen Hochschule in Wien.)

Herr Professor P. Weselsky veranlasste mich, ein einfacheres Verfahren zur Darstellung der resorcindisulfosauren Salze als das von J. Piccard und A. Humbert in den Berliner Berichten Bd. IX, S. 1479 veröffentlichte, zu finden.

Da ich gegenwärtig durch anderweitige Berufsgeschäfte verhindert bin, die Arbeit zu Ende zu führen, so theile ich nur das mit, was ich bis jetzt gefunden habe.

Als Ausgangspunkt für die Darstellung der resorcinsulfosauren Salze wählte ich die Barytverbindung, welche ich auf die folgende Weise erzeugte: In einer Porzellanschale wird bei gewöhnlicher Temperatur in vier Theile englischer Schwefelsäure ein Theil fein zerriebenes Resorcin unter stetem Umrühren eingetragen und das Ganze der Ruhe überlassen.

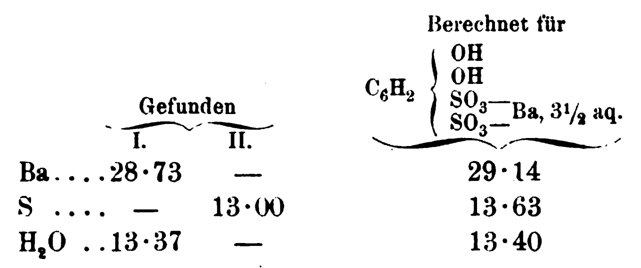
Nach Verlauf von 15 Minuten erwärmt sich die syrupöse Flüssigkeit von selbst, die Temperatur steigt auf 90° C., und es erstarrt die Masse nach kurzer Zeit zu einem compacten Krystallbrei; man entfernt die überschüssige Schwefelsäure durch Zerdrücken des Breies und Streichen auf poröse Thonplatten.

Den hygroskopischen Rückstand löst man in warmem Wasser, sättiget die stark saure Flüssigkeit mit aufgeschlämmtem kohlensaurem Baryt, filtrirt heiss und concentrirt im Wasserbade, wo bald beim Abkühlen das Barytsalz krystallisirt. Es ist fast reiner neutraler resorcindisulfosaurer Baryt; die Ausbeute davon ist nahezu die theoretische.

Der resorcindisulfosaure Baryt krystallisirt in fast farblosen Krystallen, er ist an der Luft unveränderlich und in heissem Wasser leicht löslich.

I. 2·6808 Grm. Substanz gaben bei 150° C. behandelt, 0·3586 Grm. Wasser; ferner 1·311 Grm. schwefelsaurem Baryt.

II. 1·773 Grm. desselben Salzes gaben bei der Oxydation mit Ätzkali und Salpeter 1·679 Grm. schwefelsauren Baryt.



	Gefunden I.	Gefunden II.	Berechnet für $C_6H_2\begin{cases}OH\\OH\\SO_3-\\SO_3-\end{cases}Ba, 3^1/_2$ aq.
Ba	28·73	—	29·14
S	—	13·00	13·63
H_2O	13·37	—	13·40

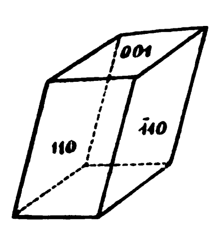
Herr Professor Ditscheiner hatte die Güte, die Krystallform dieser, sowie die der anderen Verbindungen zu bestimmen.

Schiefprismatisch:

$$a : b = 1·0777 : 1 \quad XZ = 105° \; 44'$$

Beobachtete Flächen:

110·001.



110·1̄10 =	92° 6′	—
110·1̄10 =	—	87° 54′
110·001 =	79° 9′	—
1̄10·001 =	—	100 51

Die Flächen 110 sind stets so stark gekrümmt, dass eine grosse Genauigkeit der angegebenen Winkelmessung nicht möglich war. Die einzelnen Goniometerablesungen schwanken um Grade, so dass selbst das Krystallsystem als ein anderes sich herausstellen könnte.

Versetzt man eine verdünnte Lösung des resorcindisulfosauren Barytes mit Ätzbaryt, so scheiden sich nach kurzer Zeit atlasglänzende Nadeln aus, welche das von Piccard und Humbert beschriebene unlösliche basische Barytsalz sind; denn ich fand bei angewandten 1·1465 Grm. Substanz 0·848 Grm. schwefelsauren Baryt, und bei 2·3414 Grm. Substanz, welche bei 200° C. getrocknet wurde, 0·2833 Grm. Wasser.

Gefunden	Berechnet für $C_6H_2 \left\{ \begin{matrix} O- \\ O- \\ SO_3- \\ SO_3- \end{matrix} \right. \begin{matrix} Ba \\ \\ Ba, 4\ aq. \end{matrix}$
Ba. . . 44·51	44·77
H_2O . . 12·10	11·71

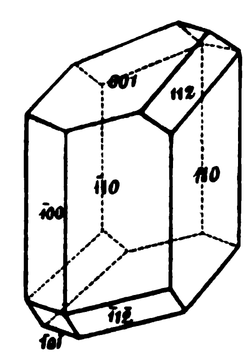
Resorcindisulfosaures Kali.

Es existiren zwei Kalisalze, wovon das eine mit 4 Mol. und das andere mit 1 Mol. Wasser krystallisirt. Sie werden durch Versetzen einer Lösung des resorcindisulfosauren Barytes mit schwefelsaurem Kali erhalten.

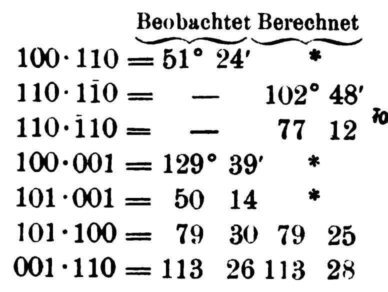
Man engt das nach Beseitignng des schwefelsauren Barytes erhaltene Filtrat ein, wo aus der heiss gesättigten Lösung das Salz mit 1 Mol. Wasser krystallisirt. Es ist farblos, in warmem Wasser mit Leichtigkeit löslich und luftbeständig.

1·3892 Grm. Substanz gaben bei 200° C. 0·68 Grm. Wasser ab.
1·9103 Grm. gaben 0·9035 Grm. schwefelsaures Kali.

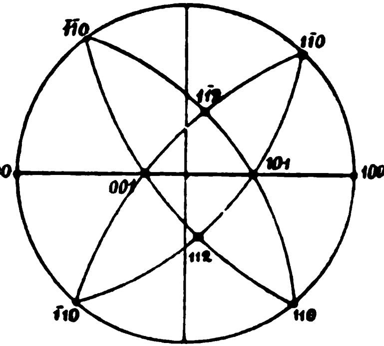
Gefunden	Berechnet für $C_6H_2 \left\{ \begin{matrix} OH \\ OH \\ SO_3K \\ SO_3K, aq. \end{matrix} \right.$
K . . . 21·23	21·46
H_2O 4·89	4·94



Schiefprismatisch:
$a:b:c = 1\cdot6648:1:1\cdot2790$
$XZ = 50°\ 21'$.
Beobachtete Flächen:
100, 001, 110, 101, 112.



	Beobachtet	Berechnet
100·110 =	51° 24′	*
110·1$\bar{1}$0 =	—	102° 48′
110·$\bar{1}$10 =	—	77 12
100·001 =	129° 39′	*
101·001 =	50 14	*
101·100 =	79 30	79 25
001·110 =	113 26	113 28



	Beobachtet	Berechnet
101·110 =	—	83° 25′
101·$\bar{1}$10 =	96° 42′	96 35
101·112 =	41 20	41 30
001·112 =	37 25	37 29
112·1$\bar{1}$2 =	—	62 50
112·$\bar{1}$00 =	—	74 40
112·100 =	—	105 20

Wird die Krystallisation des resorcindisulfosauren Kalis in der Kälte vorgenommen, so erhält man die Verbindung mit 4 Mol. Wasser; sie ist verwitterbar und verliert an trockener Luft 13 Procente Wasser, welche Menge 3 Mol. Wasser entspricht.

0·561 Grm. Substanz auf diese Weise behandelt, gaben 0·0734 Grm. Wasser; bei dem Erhitzen auf 200° C. verlor die Substanz noch weitere 0·024 Grm., was im Ganzen 17·35 Procente Wasser beträgt.

Die Formel

$$C_6H_2 \begin{cases} OH \\ OH \\ SO_3K \\ SO_3K, \text{ 4 aq.} \end{cases}$$

erfordert 17·21 Procente Wasser.

Resorcindisulfosaures Natron.

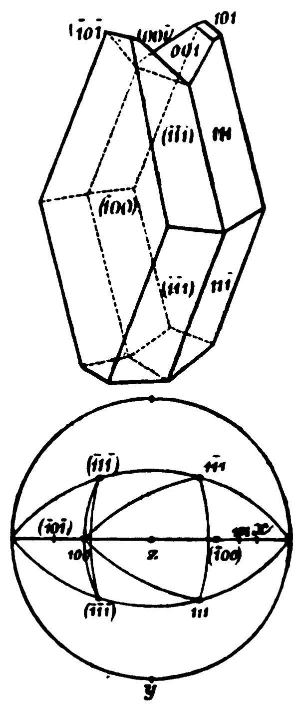
Dieses Salz, wie das Kalisalz dargestellt, ist hinsichtlich der Farbe und der Löslichkeit in warmem Wasser dem Kalisalze mit 1 Mol. Wasser ähnlich; es ist ebenfalls luftbeständig.

1·3328 Grm. Substanz gaben bei 180° C. 0·0719 Grm. Wasser und 0·5928 Grm. schwefelsaures Natron.

	Gefunden	Berechnet für $C_6H_2 \begin{cases} OH \\ OH \\ SO_3\,Na \\ SO_3\,Na, \text{ aq.} \end{cases}$
Na....	14·40	14·19
H_2O...	5·39	5·54.

Schiefprismatisch:

$a:b:c = 1\cdot8080:1:1\cdot2742 \quad XZ = 82°\ 50'$.



Beobachtete Flächen:
111, 001, 101, 100.

Letztere Fläche so stark gekrümmt, dass keine Messung der Winkel dieser Fläche mit den übrigen auftretenden Flächen gemacht werden können. Es erscheinen keine einzelnen Individuen, sondern nur Zwillinge, Drusen bildend, aus welchen bloss der den einspringenden Winkel enthaltende Theil herausragt. Die beiden Individuen des Zwillings setzen sich in der Fläche 100 zusammen, und erscheint das eine gegen das andere um 180° gedreht.

Es wurden an einem solchen Zwillinge gemessen (die in runden Klammern eingeschlossenen Flächensymbole gehören den zweiten, um 180° gedrehten Individuen an):

	Beobachtet	Berechnet
$111 \cdot 1\bar{1}1$ =	102° 2′	*
$111 \cdot (\bar{1}\bar{1}\bar{1})$ =	27° 10′	*
$111 \cdot (001)$ =	14 20	*[1]
$111 \cdot 001$ =	55 30	55° 22′
$(\bar{1}\bar{1}\bar{1}) \cdot (001)$ =	51 25	51 20′
$111 \cdot (11\bar{1})$ =	106 12	106 4′
$001 \cdot (101)$ =	27 46	27 48′.

Resorcindisulfosaures Kupfer.

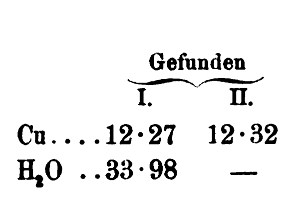
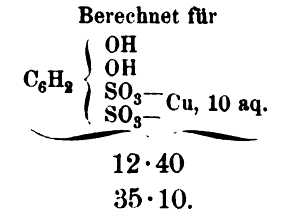
Das Kupfersalz wurde ebenfalls wie die vorhergehenden beiden Salze, durch wechselseitige Zersetzung des resorcindisulfosauren Barytes mit Kupfervitriol erhalten. Es besitzt die Farbe des Kupferchlorides, und verliert an der Luft theilweise das

[1] Einspringender Winkel.

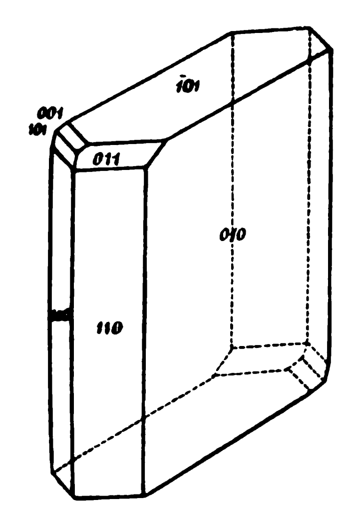
Wasser; bei 170° C. fängt es an sich zu zersetzen, ohne den letzten Rest des Wassers abzugeben.

0·1621 Grm. Substanz gaben 0·0551 Grm. Wasser und 0·050 Grm. Kupfersulfat.

0·5248 Grm. Substanz gaben 0·1624 Grm. Kupfersulfat.

	Gefunden I.	Gefunden II.	Berechnet für $C_6H_2 \begin{cases} OH \\ OH \\ SO_3- \\ SO_3- \end{cases} Cu$, 10 aq.
Cu	12·27	12·32	12·40
H_2O	33·98	—	35·10.



Triklin (zweifach schiefprismatisch):

$a : b : c = 1 : 1·0487 : 0·6288$

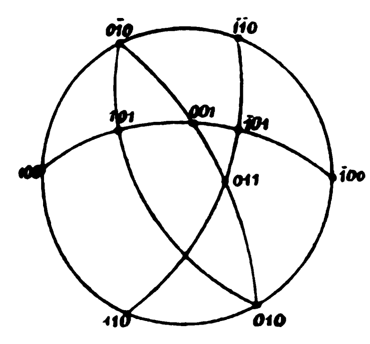
$YZ = 71° 9'$, $XZ = 87° 1'$,

$XG = 79° 8'$.

Beobachtete Flächen:

100, 010, 001, 101, $\bar{1}01$, 110, 011.

	Beobachtet	Berechnet
100·110 =	55° 46′	*
110·010 =	55 15	*
010·011 =	73 13	*
010·001 =	109 2	*
100·001 =	85 54	*
100·010 =	—	111° 1′
010·$\bar{1}$00 =	68 59	68 59
$\bar{1}$00·110 =	124 14	124 14
011·110 =	83 10	82 54
011·$\bar{1}$01 =	36 40	37 5
110·$\bar{1}$01 =	119 55	119 59
001·$\bar{1}$01 =	32 10	32 15
100·$\bar{1}$01 =	118 2	118 9
110·001 =	—	103 5
101·001 =	29 57	29 26
010·101 =	—	116 52
100·101 =	55 48	55 58



Resorcindisulfosaures Blei.

Versetzt man eine verdünnte, heiss gemachte Lösung von resorcindisulfosaurem Kali mit einer ebenfalls heiss gemachten Lösung von Bleizucker, so krystallisirt beim Abkühlen ein Bleisalz in schönen farblosen Schuppen. Dasselbe ist dann in Wasser unlöslich, und kann, durch Auswaschen mit dem letzteren, vollkommen rein erhalten werden; es ist das basisch resorcindisulfosaure Blei. Die eingedampfte Mutterlauge enthält neben unverändertem Kalisalz der Resorcindisulfosäure, essigsaures Kali und freie Essigsäure, welche letztere einen Theil des Bleisalzes in Lösung erhält; denn neutralisirt man dieselbe vorsichtig mit kohlensaurem Kali, so fällt neuerdings ein Theil des obigen Salzes.

Ein neutrales Bleisalz konnte ich nicht erhalten.

2·0605 Grm. des Salzes gaben bei 250° C. erhitzt 0·1960 Grm. Wasser.

0·9936 Grm. Substanz gaben 0·802 Grm. schwefelsaures Blei.

$$C_6H_2\left\{\begin{matrix}O- \\ O-\end{matrix}\right\rangle Pb \quad \begin{matrix}SO_3- \\ SO_3-\end{matrix}\Big\rangle Pb, 4\,aq.$$

	Gefunden	Berechnet für $C_6H_2(O_2Pb)(SO_3)_2Pb, 4\,aq.$
Pb	55·14	55·05
H_2O	9·51	9·57.

Nach allen diesen Beobachtungen, und nach den von dem Herrn V. Tedeschi (Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie, Bd. LXXI., S. 627) gemachten Erfahrungen ist der Beweis erbracht, dass es bis jetzt nicht möglich war, eine andere als die bereits von J. Piccard und A. Humbert gefundene Resorcindisulfosäure zu erhalten.

Einwirkung von ätzenden Alkalien auf resorcindisulfosaure Salze.

Schmilzt man einen Theil resorcindisulfosaures Kali mit vier Theilen Ätzkali so lange, bis eine starke Wasserstoffgasentwicklung eintritt, unterbricht hierauf die Operation, wenn das Schäumen aufgehört hat, so findet sich in der mit Wasser ausgelaugten Schmelze resorcinmonosulfosaures neben unzersetztem resorcin-

disulfosaurem Alkali; überdies ist noch schwefligsaures Kali darin enthalten.

Zur Gewinnung der resorcinsulfosauren Salze sättiget man das freie Alkali mit Essigsäure und entfernt aus der klaren Lösung die unzersetzte Resorcindisulfosäure, sowie die schwefelige Säure mit einem kleinen Überschuss von Ätzbaryt — die Resorcinsulfosäure wird unter diesen Umständen nicht gefällt — filtrirt ab, und leitet zur Entfernung des Barytüberschusses unter Erwärmen Kohlensäure ein; schliesslich behandelt man mit basisch-essigsaurem Blei, wodurch das basische Bleisalz der Resorcinsulfosäure vollständig niederfällt. Man wäscht mit warmem Wasser gut aus und zersetzt das Salz mit Schwefelwasserstoff; nach Entfernung des Schwefelbleies wird die Sulfosäure mit kohlensaurem Kali gesättiget, die Lauge im Wasserbade eingedampft, der völlig trockene Rückstand mit reinem Quarzsand innig gemengt und aus dem Gemische mit absolutem Alkohol das resorcinsulfosaure Kali extrahirt. Nach dem Abdunsten des Alkohols und durch einmaliges Umkrystallisiren aus Wasser, erhält man es im vollkommen reinem Zustande.

So dargestellt, ist das Salz von schwach gelber Farbe, verliert an trockener Luft theilweise das Wasser, den letzten Rest erst bei 170° C. Bleizucker, essigsaurer Baryt und Ätzbaryt erzeugen in der wässerigen Lösung keinen Niederschlag.

1·3846 Grm. Substanz gaben bei 170° C. 0·1898 Grm. Wasser ab.

0·4146 Grm. Substanz gaben 0 0566 Grm. Wasser und nach Oxydation des Schwefels mit Ätzkali und Salpeter 0·370 Grm. schwefelsauren Baryt.

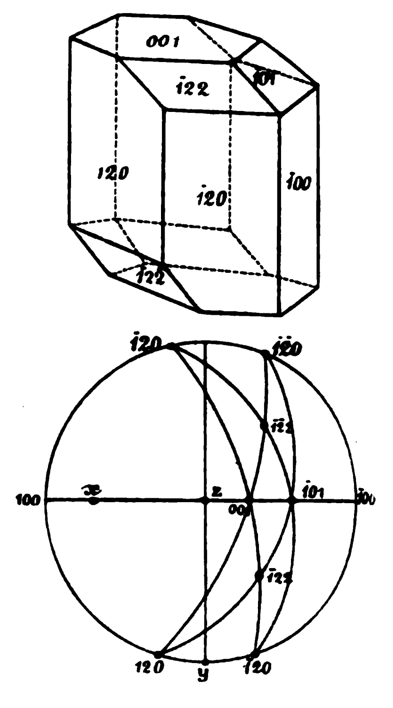
0·5225 Grm. gaben ferner 0·1737 Grm. schwefelsaures Kali.

	Gefunden		Berechnet für $C_6H_3 \begin{cases} OH \\ OH \\ SO_3K, 2\text{ aq.} \end{cases}$
K	14·92	—	14·80
S	12·25	—	12·11
H_2O	13·76	13·65	13·63.

Schiefprismatisch:

$$a : b : c = 2·3718 : 1 : 2·1979 \quad XZ = 78° 40'.$$

Beobachtete Flächen:
001, 100, $\bar{1}22$, $\bar{1}01$.



	Beobachtet	Berechnet
$\bar{1}00 \cdot 001 =$	78° 40′*	—
$100 \cdot 120 =$	77 44*	—
$\bar{1}20 \cdot 001 =$	87 35	87° 36′
$001 \cdot \bar{1}22 =$	63 21*	—
$\bar{1}20 \cdot \bar{1}22 =$	24 12	24 15
$\bar{1}22 \cdot \bar{1}\bar{2}2 =$	—	121 54
$\bar{1}22 \cdot 120 =$	37 30	38 16
$\bar{1}22 \cdot \bar{1}01 =$	61 50	62 7
$001 \cdot \bar{1}01 =$	38 0	38 21
$\bar{1}00 \cdot \bar{1}01 =$	40 40	40 19
$\bar{1}00 \cdot \bar{1}22 =$	—	74 19

Wird jedoch, ohne auf die Resorcinsulfosäure Rücksicht zu nehmen, das Schmelzen bei verstärkter Hitze fortgesetzt, so tritt neuerdings eine Gasentwicklung ein. Die Erhitzung in diesem Stadium setzt man so lange fort, bis die Masse eine gelbbraune Farbe angenommen hat; man löst dann die abgekühlte Schmelze in Wasser, säuert mit Schwefelsäure an und schüttelt die filtrirte Lösung mit Äther. Nach dem Abdunsten des Äthers bleibt ein krystallisirter Körper zurück, welcher sich durch den Schmelzpunkt, den Wassergehalt und durch die Weselsky'sche Reaction als Phloroglucin erwies.

In ähnlicher Weise wurde das Natronsalz der Resorcindisulfosäure mit Ätznatron verschmolzen; die Ausbeute an Phloroglucin war jedoch eine ganz und gar nicht befriedigende.

Ein ebenso ungünstiges Resultat ergaben die von Herrn V. Tedeschi angestellten Versuche.

Einwirkung von Jod auf die resorcinsulfosauren Salze.

Die Jodirung des resorcindisulfosauren Kali gelingt nicht so leicht nach der Methode von Hlasiwetz und Weselsky mittelst Jod und Quecksilberoxyd; dagegen liess sich das Salz am besten auf folgende Weise jodiren.

Man verreibt innig resorcindisulfosaures Kali mit 2 Mol. Jod (30 Grm. Salz und 22 Grm. Jod) bringt das Gemisch in eine gut verschliessbare Flasche, giesst etwa 200—300 Cc. mit einem gleichen Volumen Wasser versetzten Weingeist hinzu und digerirt durch sechs Stunden im Wasserbade. Nach dem Erkalten scheidet sich das Jodproduct in Krystallen ab, welche mit Jod gemengt sind; das letztere entfernt man durch Behandlung mit Alkohol-Äther, löst den Rückstand in heissem Wasser, wo dann die Verbindung in oft 1 Ctm. langen, fast farblosen Nadeln krystallisirt, sie ist jodresorcindisulfosaures Kali und ist wasserfrei.

I. 0·7138 Grm. Substanz gaben mit Ätzkalk geglüht 0·358 Grm. Jodsilber.

II. 0·589 Grm. derselben Substanz mit Natriumamalgam behandelt, lieferten 0·289 Grm. Jodsilber.

	Gefunden I.	Gefunden II.	Berechnet für $C_6HJ\begin{cases}OH\\OH\\SO_3K\\SO_3K\end{cases}$
J	26·83	26·53	26·83.

In ähnlicher Weise jodirte ich das resorcindisulfosaure Kali. Wegen der leichten Löslichkeit des Jodproductes in Wasser und in verdünntem Weingeist ist die Reinigung desselben eine überaus mühsame; aus der syrupösen Flüssigkeit scheiden sich schwer Krystalle ab.

Das reine Product bildet weisse, mikroskopische Krystalle, welche bei 150° C. unzersetzt erhitzt werden können.

0·4448 Grm. Substanz gaben 0·057 Grm. Wasser; ferner mit Natriumamalgam behandelt 0·2625 Grm. Jodsilber.

	Gefunden	Berechnet für $C_6H_2J\begin{cases}OH\\OH\\SO_3K, 3\,aq\end{cases}$
J	31·87	31·12
H_2O	12·80	13·23.

Einwirkung von salpetrigsaurem Kali auf das resorcindisulfosaure Kali.

Eine kalt gesättigte Lösung von resorcindisulfosaurem Kali mit einer Lösung von salpetrigsaurem Kali versetzt, wird nach kurzer Zeit lichtviolett, später dunkler gefärbt, ohne dass eine Abscheidung stattfindet.

Werden jedoch zu dem Gemische einige Tropfen Essigsäure zugesetzt, so tritt eine langsame Gasentwickelung ein und nach einiger Zeit krystallisirt ein dunkelviolettes Salz in wohl ausgebildeten Krystallen.

Nach mehreren in dieser Richtung angestellten Versuchen lieferte das folgende Verfahren die grösste Ausbeute an dem neuen Salze:

63 Grm. resorcindisulfosaures Kali wurden in 500 Cc. Wasser von 50° C. gelöst, zu dieser Flüssigkeit 40 Cc. einer Lösung von salpetrigsaurem Kali, wovon 1 Cc. 0·029 Grm. Salpetrigsäure-Anhydrid entsprach, hinzugefügt, wohl gemischt und hierauf 10 Cc. Eisessig unter langsamem Umrühren eingetröpfelt. Zum Schlusse digerirt man das Ganze bei 50° C. durch eine Stunde und stellt es dann in mit Eis gekühltes Wasser. Nach einigen Stunden setzt sich die Verbindung in kleinen Nadeln ab, die man auf porösen Platten absaugen lässt und aus heissem Wasser umkrystallisirt. Durch Eindampfen der Mutterlauge erhält man noch einen Theil des Salzes.

Ich erhielt aus der obigen Quantität resorcindisulfosauren Kalis 69 Grm.; bei einem zweiten Versuche aus 30 Grm. 33·5 Grm. des neuen Productes.

Das Salz ist stickstoffhältig, besitzt die Gruppen SO_3 intact und enthält Kali; es ist in heissem Wasser leichter löslich als in kaltem. Rasch erhitzt, verpufft es, concentrirte Salzsäure und verdünnte Schwefelsäure entziehen diesem Salze einen Theil des Kalis. Es verliert über Schwefelsäure neun Procente Wasser, welche es an der Luft wieder aufnimmt. Reducirende Mittel entfärben die violette Lösung. Mit einigen Metallsalzen entstehen krystallinische Ausscheidungen, die meist in Wasser schwer löslich sind; so gibt salpetersaures Quecksilberoxydul einen anfangs flockigen, nach einigen Tagen krystallinisch werdenden Nieder-

schlag von schwarzer Farbe. Mit Kupferchlorid entsteht ein krystallinischer Niederschlag, der in kaltem Wasser schwer, in heissem leichter löslich ist; Eisenchlorid erzeugt eine smaragdgrüne Lösung.

I. 0·7922 Grm. Substanz gaben 0·448 Grm. Kohlensäure und 0·1525 Grm. Wasser.

II. 0·8227 Grm. Substanz gaben 0·4705 Grm. Kohlensäure und 0·1667 Grm. Wasser.

III. 1·4525 Grm. Substanz gaben bei 150° C. erhitzt, 0·1878 Grm. Wasser.

IV. 1·8565 Grm. gaben bei derselben Temperatur behandelt, 0·2450 Grm. Wasser.

V. 0·6483 Grm. Substanz gaben 0·352 Grm. schwefelsaures Kali.

VI. 1·1362 Grm. Substanz gaben 0·6225 Grm. schwefelsaures Kali.

VII. 1·0428 Grm. Substanz gaben mit salpetersaurem Kali und Ätzkali oxydirt 1·024 Grm. schwefelsauren Baryt.

VIII. 0·5386 Grm. Substanz gaben bei 15° C. und bei dem Bar. 757·9 Mm. 19·3 Cc. Stickstoff.

IX. 1·22 Grm. Substanz lieferten bei 17° C. und Bar. 745·3 Mm. 34·5 Cc. Stickstoff.

	Gefunden								
	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.
C....	15·42	15·59	—	—	—	—	—	—	—
H....	2·13	2·25	—	—	—	—	—	—	—
S....	—	—	—	—	—	—	13·47	—	—
N....	—	—	—	—	—	—	—	4·19	3·21
K....	—	—	—	—	24·34	24·55	—	—	—
H_2O..	—	—	12·92	13·14	—	—	—	—	—

Behandelt man eine kalt gesättigte Lösung des Kalisalzes mit concentrirter Salzsäure, zu welcher ein gleiches Volumen absoluten Alkohols zugesetzt wurde, so erhält man ein in stark glänzenden Schuppen krystallisirtes Kalisalz.

Folgendes Verfahren gab mir die günstigste Ausbeute: 10 Grm. des vorher beschriebenen Salzes werden in 130 Cc. Wasser gelöst, zu dieser Lösung etwa 60 Cc. eines Gemisches aus gleichen Volumtheilen concentrirter Salzsäure und absolutem

Alkohol zugesetzt, gut geschüttelt, mit noch weiteren 120 Cc. absolutem Alkohole gemischt, und die so vorbereitete Flüssigkeit in Eiswasser gestellt. In kurzer Zeit scheidet sich die Verbindung in Schuppen aus, welche je nach ihrer Dicke gelb bis dunkelbronzeartig aussehen; sie werden anfangs mit 20-, später mit 30-procentigem Weingeiste — in diesem ist die Verbindung unlöslich — so lange gewaschen, bis salpetersaures Silber in dem Filtrate keine Fällung von Chlorsilber erzeugt, und dann aus heissem verdünntem Weingeist umkrystallisirt.

I. 0·4208 Grm. Substanz gaben bei 150° C. erhitzt 0·0318 Grm. Wasser und 0·1750 Grm. schwefelsaures Kali.

II. 0·527 Grm. gaben 0·0425 Grm. Wasser und 0·2235 Grm. schwefelsaures Kali.

III. 1·8233 Grm. Substanz gaben 0·1370 Grm. Wasser.

IV. 0·4325 Grm. Substanz gaben 0·180 Grm. schwefelsaures Kali.

V. 0·7081 Grm. Substanz nach der Liebig'schen Methode oxydirt, gaben 0·81 Grm. schwefelsauren Baryt.

VI. 0·411 Grm. Substanz gaben auf dieselbe Weise behandelt, 0·4725 Grm. schwefelsauren Baryt.

VII. 0·3715 Grm. Substanz nach der Sauer'schen Methode behandelt, gaben 0·4245 Grm. schwefelsauren Baryt.

	Gefunden						
	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.
K	18·64	18·55	—	18·52	—	—	—
S	—	—	—	—	15·49	15·57	15·69
H_2O	7·55	8·06	7·58	—	—	—	—

Auf dieselbe Art, wie ich durch Einwirkung des salpetrigsauren Kalis bei Gegenwart von Essigsäure auf resorcindisulfosaures Kali ein stickstoffhaltiges Kalisalz erhielt, habe ich auch die Barynmverbindung dargestellt. Wegen der schweren Löslichkeit des neuen Baryumsalzes in Wasser, musste ich jedoch, den resorcindisulfosauren Baryt mit dem salpetrigsauren Baryt in sehr verdünnten Lösungen versetzen. Beim ruhigen Stehen des Gemisches, erhält man dann warzenförmige Krystalle von schwarzer Farbe, welche mit kaltem Wasser einigemal gewaschen, die Verbindung in vollkommen reinem Zustande geben.



Ich will noch zum Schlusse erwähnen, dass ich bei der Behandlung des resorcinsulfosauren Kali mit salpetrigsaurem Kali und Essigsäure ebenfalls eine Verbindung erhielt, welche in hellgrünen, seidenglänzenden Nadeln krystallisirt.

Über die Constitution der oberwähnten Stickstoffverbindungen werde ich berichten, bis weitere Reactionen dieser Körper studirt sein werden.

Da voraussichtlich die Sulfosäuren anderer Phenole mit salpetrigsaurem Kali und Essigsäure parallele Verbindungen geben, so möchte ich mir das Recht zur Ausführung dieser Arbeit, sowie die Fortsetzung des Studiums der Einwirkung von ätzenden Alkalien auf die Jodproducte der Resorcinsulfosäure und der Resorcindisulfosäure vorbehalten.

XII. SITZUNG VOM 12. MAI 1881.

Der Vicepräsident eröffnet die Sitzung mit der Mittheilung, dass die Deputation zur Überreichung der Adresse der Akademie Montag den 9. Mai, um 3 Uhr, von Seiner kaiserlichen Hoheit dem Kronprinzen und dessen durchlauchtigster Braut in der Hofburg huldvollst empfangen wurde.

Das Präsidium der k. k. Polizei-Direction in Wien übermittelt ein Exemplar des Polizei-Verwaltungsberichtes für das Jahr 1881.

Das c. M. Herr Prof. J. Wiesner übersendet eine von Herrn E. Ráthay, Professor an der k. k. önologisch-pomologischen Lehranstalt in Klosterneuburg, ausgeführte Arbeit: „Über Austrocknungs- und Imbibitionserscheinungen der Cynareen-Involucren."

Das c. M. Herr Prof. C. Claus in Wien übersendet eine Abhandlung: „Über die Gattungen *Temora* und *Temorella* nebst den zugehörigen Arten."

Das c. M. Herr Prof. L. Ditscheiner in Wien übersendet eine Abhandlung: „Über die Aufsuchung der Störungsstellen an nicht vollkommen isolirten Leitungen."

Herr Prof. Dr. Rich. Maly in Graz übersendet eine Untersuchung: „Über die Dotterpigmente."

Herr Jacob Zimels, derzeit in Balta (Russland), übersendet eine Notiz: „Berechnung der Seite eines im Kreise eingeschriebenen regelmässigen Neuneckes."

Das w. M. Herr Director E. Weiss macht eine Mittheilung über die Entdeckung eines teleskopischen Kometen durch L. Swift in Rochester (U. S.) am 1. Mai d. J.

Ferner überreicht Herr Director Weiss eine vorläufige im akademischen Anzeiger zu veröffentlichende Mittheilung: „Über eine neue Methode zur Berechnung der wahren Anomalie in stark excentrischen Bahnen.“

Das w. M. Herr Prof. A. Lieben überreicht eine in seinem Laboratorium von Herrn Dr. Zd. H. Skraup ausgeführte Arbeit, betitelt: „Über Cinchonidin und Homocinchonidin.“

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Academia, Real de Ciencias medicas, fisicas y naturales de la Habana: Anales. Entrega 199, 200 & 201. Tomo XVII Febrero 15—Abril 15. Habana, 1881; 8°.

Académie de Médecine: Bulletin. 2e série. Tome X. 45e année. Nos. 14—18. Paris, 1881; 8°.

— Impériale des sciences de St. Pétersbourg: Bulletin. Tome XXVII. St. Pétersbourg, 1881; 4°.

Akademie, koninklijke van Wetenschappen gevestigd te Amsterdam: Jaarboek voor 1879. Amsterdam; 8°.

— Verhandelingen. 20. Deel. Amsterdam. 1889; 4° — Naamen Zaakregister op de Verslagen en Mededeelingen. Deel. I—XVII. Amsterdam, 1880; 8°.

— Verslagen en Mededeelingen. II. Reeks, 15. Deel. Amsterdam, 1880; 8°.

— Processen-verbaal van de gewone Vergaderingen; van mei 1879 tot en met April, 1880, Amsterdam; 8°.

Astor Library: Thirty-second Annual Report of the Trustees for the year ending December 31, 1880. Albany, 1881; 8°.

Bibliothèque universelle: Archives des sciences physiques et naturelles. IIIe période. Tome V. Nos. 3 & 4. 15 Mars & 15 Avril 1881. Genève, Lausanne, Paris, 1881; 8°.

Chemiker-Zeitung: Central-Organ. Jahrgang V., Nr. 18. Cöthen, den 15. Mai 1881.

Elektrotechnischer Verein: Elektrotechnische Zeitschrift. II. Jahrgang 1881. Heft 4, April. Berlin; 4°.

Gesellschaft, österreichische, zur Förderung der chemischen Industrie: Berichte. III. Jahrgang. 1881. Nr. 1. Prag; 8°.

— medicinisch-naturwissenschaftliche zu Jena: Denkschriften. I. Band, 2. Abtheilung mit Atlas. Jena, 1880; 4°.

Gesellschaft, deutsche geologische: Zeitschrift. XXXII. Band, 4. Heft, October bis December 1880. Berlin, 1881; 8°.

— oberhessische für Natur- und Heilkunde: Neunzehnter Bericht. Giessen, 1880; 8°.

— Oberlausitzische der Wissenschaften: Neues Lausitzisches Magazin. LVI. Band, 2. Heft. Görlitz, 1880; 8°.

Institute, the Anthropological of Great-Britain and Ireland: The Journal. Vol. X. No. 11. November 1880. London; 8°.

Institution, the Royal of Great Britain: Proceedings. Vol. IX. — part. III. London, 1880; 8°. List of the Members, Officers and Professors in 1879, London, 1880; 8°.

Instituut, koninklijk voor de Taal- Land- en Volkenkunde van Nederlandsch-Indië: Bijdragen. IV. Volgreeks, 4. Deel, 3. & 4. Stuk. S'Gravenhage, 1880; 8°.

Kiel, Universität: Schriften aus dem Jahre 1879—80. Band XXVI. Kiel, 1880; 4°.

Mittheilungen aus Justus Perthes' geographischer Anstalt von Dr. A. Petermann. XXVII. Band, 1881. V. Gotha; 4°.

Museum of comparative Zoology at Harvard College: Memoirs. Vol. VI, No. 1. Cambridge, 1880; 4°. — Vol. VII, No. 2, part 1. Cambridge, 1880; 4°.

— Annual Report of the Curator to the President and fellows of Harvard College for 1879—80. Cambridge, 1880; 8°.

— Bulletin. Vol. VI. Nos. 8—11. Cambridge, 1880; 8°.

Nuovo Cimento: 3ª serie. Tomo IX. 1881. Pisa; 8°.

Observatory, The: A monthly review of Astronomy. No. 49. 1881, May 2. London; 8°.

Pickering, Edward, C.: Variable Stars of short period. Cambridge, 1881; 8°.

Societät, physikalisch-medicinische zu Erlangen: Sitzungsberichte. 12. Heft. November 1879 bis August 1880. Erlangen, 1880; 8°.

Société de Physique et d'Histoire naturelle de Genève: Mémoires. Tome XXVII. 1ᵉ partie. Genève. Bâle, Paris, 1880; 4°.

— botanique de France: Bulletin. Tome XXVII. (2ᵉ série, tome IIᵉ). Revue bibliographique. D—E. Paris, 1880; 8°.

— des Ingénieurs civils: Mémoires et Compte rendu des travaux. 4ᵉ série, 34ᵉ année, 2ᵉ cahier. Février 1881. Paris; 8°.

Société mathématique de France: Bulletin. Tome IX, No. 2. Paris, 1880; 8°.

Society, the American geographical: Buletin. 1880 No. 3—1881 Nr. 1. New-York, 1881; 8°.

— the Royal astronomical: Memoirs. Vol. XLV, 1879—80. London. 1880; 8°.

— Monthly Notices. Vol. XLI, Nr. 5. March 1881. London; 8°.

— the royal geographical: Proceedings and monthly Record of Geography. Vol. III. No. 4. April 1881. London; 8°.

— the Linnean of London: The Transactions 2nd Ser. Botany. Vol. I, parts VII—IX. London, 1880; 4°.

— — The Journal. Botany. Vol. XVII. No. 103—105. London, 1879—80; 8°. — Vol. XVIII. Nos. 106—107. London, 1880; 8°.

— — The Transactions; 2nd Ser. Zoology. Vol. II, Part 1. London, 1879; 4°.

— — The Journal. Vol. XIV. No. 80. — Vol. XV, Nos. 81—8. London, 1879—80; 8°.

— — The List. November 1st, 1879; 8°

United-States: Report of the Superintendent of the Coast Survey showing the Progress of the work for the fiscal year ending with June. 1877. Washington, 1880; 4°.

— — Methods and Results, Meteorological Researches for the use of the coast pilot. Part. II. Report for 1878. Washington, 1880; 4°.

— — Bulletin of the geological and geographical Survey of the Territories: Vol. VI, No. 1. Washington, 1881; 8°.

Verein, naturwissenschaftlicher für Schleswig-Holstein: Schriften. Band IV, 1. Heft. Kiel, 1881; 8°.

Wiener Medizinische Wochenschrift. XXXI. Jahrgang. Nr. 19. Wien, 1881; 4°.

Über Cinchonidin und Homocinchonidin.

Von Zd. H. Skraup.

(Aus dem Universitätslaboratorium des Prof. Lieben.

Seit mehreren Jahren besteht eine Controverse über Identität oder Isomerie der unter dem Namen Cinchonidin und Homocinchonidin begriffenen Alkaloide.

Die endgiltige Lösung dieser strittigen Frage hat nicht bloss die Bedeutung, dass in der grossen Zahl organischer Verbindungen eine verbleiben oder gestrichen werden soll, sie ist für künftige Untersuchungen über Constitution der Chinaalkaloide von einiger Bedeutung. Es dürften die constituirenden Gruppen in den zwei Isomeren Cinchonin und Cinchonidin dieselben sein und wenn dieser Umstand es nichts weniger wie leicht machen wird, den Grund der Verschiedenheit dieser zwei Basen zu erkennen, muss diese Schwierigkeit nur gesteigert werden, gesellt sich zu diesem Paar noch eine dritte Verbindung, die, nach O. Hesse's neuesten Untersuchungen dieselben Umwandlungsproducte liefern soll.

Von diesem Gesichtspunkte schien mir eine neuerliche Untersuchung wünschenswerth und ich muss Herrn O. Hesse meinen besonderen Dank aussprechen, dass er eine solche durch Zusendung seiner Präparate ermöglicht hat.

Vor Beschreibung der angestellten Versuche sei eine Bemerkung über die von O. Hesse gebrauchte Nomenclatur schon desshalb gestattet, um die bei der heutigen Sachlage sonst ganz unvermeidlichen Missverständnisse zu verhüten.

Hesse nimmt neben dem Cinchonin noch zwei nach der Formel $C_{19}H_{22}N_2O$ zusammengesetzte Alkaloide an, von denen,

wie schon erwähnt, das eine Cinchonidin, das zweite Homocinchonidin heisst. Die unter dem letzteren Namen beschriebene Base ist aber selbst nach Hesse's neuester Beschreibung[1] unstreitig identisch mit jenem Alkaloid, das bis vor kurzem ganz allgemein unter dem Namen Cinchonidin verstanden wurde, und wenn daher Herr Hesse meint, ich musste im Gegensatz zu ihm Homocinchonidin und Cinchonidin identisch finden, weil mein Cinchonidin nicht solches, sondern die Homobase war, steht er sachlich ganz auf meinem Standpunkt, gebraucht nur ohne jede Motivirung plötzlich ganz andere Namen.

Es sei zur Begründung dessen bloss angeführt, dass nach v. Lang's Messungen die Krystallform des „Homocinchonidin's" sowie dessen Chlorhydrates identisch sind mit jenen, die in der älteren Literatur für Cinchonidin vorfindlich sind, dass Schmelzpunkt, Löslichkeitsverhältnisse, wie sie von mir ermittelt wurden, nur unerheblich von früheren Angaben abweichen, dass endlich das Verhalten des Sulfats genau so ist, wie es für das Cinchonidinsalz wiederholt wahrgenommen wurde.

Selbstverständlich kommt hierbei weiter nicht in Betracht, ob ältere Beobachter das Cinchonidin in demselben Reinheitsgrade unter den Händen hatten, wie es Herr Hesse als Homocinchonidin besitzt, was in Hinblick auf dessen mühevolle Nach weise bezüglich der richtigen Anwendung des Namens Chinidin zu erklären nicht überflüssig ist.

Es kann sich demnach nur darum handeln, ob der Körper den Hesse jetzt als Cinchonidin bezeichnet, in der That ein neues Isomeres des Cinchonins oder aber wie es nach seinen dem bisherigen Cinchonidin (Hesse's Homocinchonidin) überaus naheliegenden Eigenschaften fast scheint, nicht doch mit dem letztgenannten identisch ist. Nachdem die „Homocinchonidinpräparate", die Herr Hesse mir gleichfalls zu senden die Güte hatte, sich überdies vollständig identisch mit meinen Cinchonidin präparaten erwiesen, habe ich vorwiegend sein „Cinchonidin" untersucht.

Hesse's Cinchonidin- und Homocinchonidinsulfat nach seiner Vorschrift, die er privatim noch besonders zu beschreiben die

---

[1] Liebig's Ann. 205, 194.

Freundlichkeit hatte, in der 50fachen Menge heissen Wassers gelöst, zeigten beim Krystallisiren ein verschiedenes, u. zw. genau das von Hesse beschriebene Verhalten. Als aber das erstere durch rasches Erhitzen wieder gelöst und nach dem Erkalten ein Stäubchen Homosulfat eingeworfen wurde, mischten sich den durchsichtigen Prismen weisse haarfeine Nadeln bei, die genau das Ansehen des nach Hesse isomeren Homocinchonidinsulfates hatten.

Eine kleine Menge (0·9 Grm.) des freien Cinchonidins in Form blättriger Krystalle zeigte den Schmelzpunkt 200—201, Homocinchonidin, das sich im Äusseren nur unwesentlich von dem ersteren unterschied, schmolz bei 205 bis 206. Ersteres behielt seinen Schmelzpunkt, als es in das Chloroplatinat verwandelt und nach Zersetzung dieses mit Schwefelwasserstoff (Chlorkalium wirkt auf das Platindoppelsalz so gut wie nicht ein) wieder in Freiheit gesetzt und aus Alkohol umkrystallisirt worden war. Der Schmelzpunkt erhob sich auf 202, als die Base im Wege des Chlorhydrates gereinigt, und auf 203, als noch aus letzterem das neutrale Tartrat und aus diesem wieder die freie Base bereitet wurde. Während anfänglich beim Krystallisiren aus Alkohol lange schmale Blätter, gänzlich verschieden von den Prismen des „Homocinchonidins“ anschossen, nahmen diese im Verlauf der beschriebenen Umwandlungen mehr und mehr die Formen der nach Hesse isomeren Homobase an.

Herr Prof. v. Lang hatte die Güte, obiges Chlorhydrat krystallografisch zu untersuchen, und fand dasselbe identisch mit dem von mir untersuchten Salze, das Hesse als Homocinchonidinchlorhydrat auffasst.

Alle diese Erscheinungen machen es wahrscheinlich, dass Hesse's Cinchonidin der Wesenheit sein Homocinchonidin, gemengt mit einer schwer abscheidbaren Verunreinigung ist, über deren Natur die folgenden Versuche mit Hesse's „Cinchonidinsulfat“ Aufschluss geben dürften.

Das von Herrn Hesse freundlichst zur Verfügung gestellte Material (6 Grm.) stellte glänzende Nadeln dar, die im Äusseren vollkommen verschieden von dem „Homocinchonidinsulfat“ waren. Die aufeinanderfolgende Verwandlung desselben in das Tartrat und in das Chlorhydrat lieferte Fractionen der freien Base vom

Schmelzpunkt 200 bis 203, es konnte aber ein differentes Verhalten der einzelnen Fractionen nicht beobachtet werden. Dies war aber deutlich wahrnehmbar, als die vereinigte Base oftmals aus Alkohol krystallisirt wurde, es zeigte sich hier abermals die oben beschriebene Formänderung und die schliesslich erhaltenen tafelförmigen Krystalle zeigen nach Prof. v. Lang's Messungen genau dieselben Formen wie das „Homocinchonidin.“ Der schwerlöslichste Theil der Base in das neutrale Sulfat verwandelt, zeigte beim Erkalten der heissen Lösung nur mehr vereinzelte nadlige Krystalle, die von diesen rasch abgegossene noch warme Lauge erstarrte vollständig zu einer Gallerte äusserst feiner Nadeln, die vom Sulfat des Homocinchonidins nicht mehr zu unterscheiden waren, und nach dem Absaugen mit Ammoniak zersetzt, eine Base lieferte, die aus Alkohol krystallisirt, bei 200° erweichte, erst bei 205° aber vollständig geschmolzen war, also den Schmelzpunkt eines nicht absolut reinen „Homocinchonidins“ besass.

Die Base der gesammten alkoholischen Mutterlaugen, gleichfalls in das neutrale Sulfat übergeführt und einer sehr oftmaligen, systematischen fractionellen Krystallisation aus Wasser unterworfen, zeigte, dass die glashellen Nadeln, die anfänglich sich zeigen, einer Zerlegung fähig sind in weisse, lange, weiche Prismen, die schwerer löslich sind und stets vereinzelt anschiessen und in leichter lösliche Krystallisationen, die das Aussehen des Homocinchonidinsulfates besitzen.

Bald zeigten die schwerer löslichen Krystallisationen beim Wiederauflösen in Wasser eine schwache blaue Fluoreszenz, die durch Schwefelsäurezusatz wesentlich stärker wurde, welche Erscheinung nach wiederholter Krystallisation immer mehr zunahm, schliesslich resultirten circa 0·1 Grm. eines Sulfates des mit Chlor und Ammoniak die Chininreaction deutlich zeigte.

Andererseits lieferten die leichtlöslichsten Antheile endlich ein gallertartig erstarrendes Sulfat, das nach dem Absaugen durch $1^1/_2$ Stunden auf poröser Platte liegen blieb.

0·2549 Grm. dieses Sulfates wogen nach 14 Stunden 0·2324 Grm.
„ „ „ „ „ „ 18 „ 0·2319 „
„ „ „ „ „ „ 38 „ 0·2301 „
und nach dem Trocknen zwischen 110—120° .....0·2277 „

Es enthielt also ähnlich wie das Homocinchonidinsulfat schon nach Entfernung der Mutterlauge nur mehr 10·74 Percent Krystallwasser. das es in 14 Stunden bis auf 2·02 Percent durch Verwitterung verlor, während nach Hesse's Angaben das Cinchonidinsulfat an freier Luft nur langsam, und überhaupt nicht unter den 2 Mol. H_2O entsprechenden Wassergehalt von 4·84 Percent verwittern soll.

Die fractionirte Krystallisation des Sulfates wurde nicht bis zur völligen Auflösung des Gemenges geführt, da die mittleren Fractionen immer wieder die glashellen Nadeln der ursprünglichen Verbindung zeigten und hatte es den Anschein, als ob sehr geringe Mengen der schwerer löslichen chininhältigen Antheile genügen, um das Aussehen der sonst gallertartig krystallisirenden zu verändern.

Ein mit reinem „Homocinchonidinsulfat" angestellter Versuch zeigte in der That, dass ein Zusatz von 0·5 Percent Chininsulfat hinreiche, um den Verlauf der nach Hesse's Vorschrift vorgenommenen Krystallisationsprobe wesentlich zu alteriren und dass durch 1 Percent Chininsalz genau die glasglänzenden Nadeln seines „Cinchonidin's" entstehen, das also gewissermassen synthetisch darstellbar ist.

Andererseits büsst das zugesetzte Chininsulfat seine fluorescirenden Eigenschaften nahezu vollkommen ein, wie Versuche lehrten, bei denen einmal ein und dieselbe Menge Chininsulfat mit Homocinchonidinsulfatlösung das anderemal mit Wasser auf das gleiche Volum gebracht und den Versuchsflüssigkeiten gleichmässig immer grössere Mengen von Schwefelsäure zugesetzt wurden. Das Salzgemisch fluorescirte eben nur wahrnehmbar und kaum stärker als unter den gleichen Bedingungen das Homosalz für sich.

Das von O. Hesse jetzt als Cinchonidin beschriebene Alkaloid ist der Hauptsache nach also identisch mit seiner Homocinchonidinbase und verdankt seine unwesentlichen Eigenthümlichkeiten nur einer geringen Beimischung von Chinin; aus diesem Grunde und in Consequenz der Eingangs gemachten Erörterungen über Berechtigung des Namens Homocinchonidin empfiehlt es sich die letzte Bezeichnung aufzugeben und das linksdrehende

Chinaalcaloid der Formel $C_{19}H_{22}N_2O$ auch fernerhin Cinchonidin zu nennen.

Das Vorstehende berechtigt mich wohl, die endgiltige Entscheidung in der Eingangs erwähnten Streitfrage dem Leser zu überlassen, es enthebt mich auch der Verpflichtung eine Reihe von, wie mir scheint, unbegründeten Angriffen Hesse's [1] abzuwehren.

---

[1] Liebig's Ann. 205, 194.

Über die Aufsuchung der Störungsstellen an nicht vollkommen isolirten Leitungen.

(Mit 2 Holzschnitten.)

Von L. Ditscheiner.

Die Telegraphenleitungen sind niemals vollkommen isolirt. Die Folge davon ist eine continuirliche Abnahme des Stromes von der Anfangsstation bis zur Endstation. Jede einzelne Telegraphensäule bildet nämlich eine die Isolirung störende Ableitung, und wenn auch wegen des grossen Widerstandes derselben nur ein geringer Stromverlust durch jede einzelne bedingt ist, so wird dieser Stromverlust schon bedeutend bei langen Leitungen, da mit der Zunahme der Länge auch die Zahl der störenden Ableitungen wächst. Die Gesetze dieser Stromabnahme sind schon vielfach Gegenstand der theoretischen Behandlung geworden und als festgestellt zu betrachten. [1]

Im Folgenden sollen ein paar Fälle in Betracht gezogen werden, welche sich auf nicht vollkommen isolirte Leitungen beziehen, welche durch eine weitere Ableitung gestört sind. Die auf diese Weise zu erhaltenden Formeln können in der Praxis zur Bestimmung der Störungsstelle in ähnlicher Weise verwendet werden, wie dies bereits mit jenen geschieht, welche in einfacherer Weise für vollkommen isolirte Leitungen aufgestellt wurden.

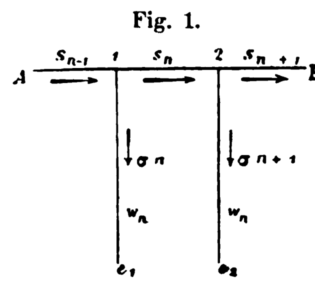
Zunächst soll kurz die Differentialgleichung mit Hilfe der Kirchhoff'schen Formeln abgeleitet werden, um die Bedeutung jener Grössen festzustellen, welche in den zu benützenden Gleichungen vorkommen.

---

[1] Namentlich in W. Thomson: On the theory of the electric Telegraph. Phil. Mag. [4 Ser.] XI, pag. 146, 1856.

Es sei AB Fig. 1 ein Stück der nicht vollkommen isolirten Leitung und $1e_1$ und $2e_2$ zwei nächstgelegene zur Erde führende Ableitungen. Da die Ableitungen gegenüber der grossen Länge der gesammten Leitung sehr nahe aneinander liegen, so kann die Entfernung 1 2 mit dx bezeichnet werden, wenn die Entfernung des Punktes 1 von einem beliebig gewählten Anfangspunkte x ist. Nennt man den Widerstand der Längeneinheit des Leitungsdrahtes k, so ist der Widerstand der Strecke 1 2 auch kdx. Nennen wir s_n die Stromintensität in 1 2, s_{n-1} und s_{n+1} die Stromintensitäten in den vor und hinter den Ableitungen gelegenen Drahtstücken, σ_n und σ_{n+1} die Stromintensitäten in den Ableitungen $1e_1$ und $2e_2$, deren Widerstände w_n sein sollen, so hat man nach den bekannten Kirchhoff'schen Formeln für Stromverzweigungen für die Knotenpunkte 1 und 2 und den geschlossenen Stromkreis e_1 1 2 e_2 nach Vernachlässigung des Erdwiderstandes

Fig. 1.



$$s_{n-1} = s_n + \sigma_n;\quad s_n = s_{n+1} + \sigma_{n+1};\quad s_n k dx + \sigma_{n+1} w_n - \sigma_n w_n = 0, \qquad 1)$$

woraus folgt

$$s_n k dx = (s_{n-1} - 2s_n + s_{n+1}) w_n.$$

Da aber $s_n = f(x)$ gesetzt werden kann, so wird

$$s_{n-1} - 2s_n + s_{n+1} = \frac{d^2 s_n}{dx^2} dx^2,$$

und da, wenn man mit β den Widerstand der sämmtlichen auf die Längeneinheit der Leitung fallenden Ableitungen, diese vom Strome gleichzeitig und nebeneinander durchflossen gedacht, bezeichnet, $w_n = \frac{\beta}{dx}$ wird, so hat man

$$\frac{d^2 s_n}{dx^2} = \alpha^2 s_n, \qquad 2)$$

wenn $\alpha = \sqrt{\frac{k}{\beta}}$ gesetzt wird.

Nennt man $\varkappa$ den specifischen Leitungswiderstand des Materiales, aus welchem der Leitungsdraht verfertigt ist, und q seinen

Querschnitt, so wird $k = \frac{x}{q}$. Hat man ferner auf der Längeneinheit der Leitung n solche Ableitungen und ist λ der Widerstand einer Ableitung, so ist $\beta = \frac{\lambda}{n}$.

Aus Gleichung 1) folgt auch für die Stromintensität in der Ableitung $1e_1$

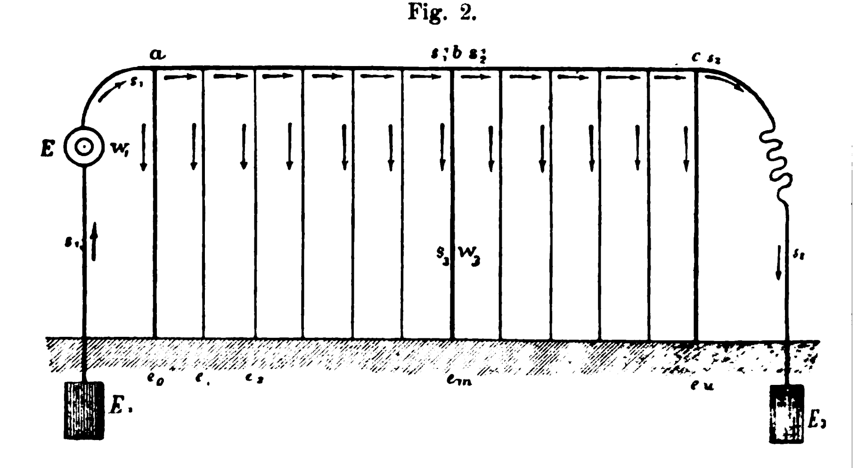
$$\sigma_n = s_{n-1} - s_n = f(x-dx) - f(x) = -\frac{ds_n}{dx}\cdot dx. \qquad 3)$$

Die Gleichung 2) liefert endlich durch Integration

$$s_n = Ae^{ax} + Be^{-ax}. \qquad 4)$$

Die Formel 4) soll nun auf eine nicht vollkommen isolirte Leitung $E_1 abc E_2$ (Fig. 2), welche bei b eine weitere störende Ab-

Fig. 2.



leitung be_m vom Widerstande w_3 besitzt, angewendet worden. In der Station I sei die Batterie von der elektromotorischen Kraft E, der Widerstand von der Erdplatte E_1, bis zur ersten Ableitung ae_0 sei w_1 (Apparate und Batteriewiderstände eingeschlossen) und die an allen Stellen gleiche Stromintensität s_1, während an der Station II der Widerstand von der letzten Ableitung ce_u bis zur Erdplatte E_2 ist w_2 und die in diesem Theile auftretende Stromintensität s_2. Die Stromintensität in der störenden Ableitung be_m sei s_3. Nach der

Gleichung 4) hat man für den Anfangspunkt und den Endpunkt, der Leitung ab

$$s_1 = A + B \text{ und } s'_1 = Ae^{\varkappa l} + B^{-\varkappa l}$$

und

$$s'_2 = A_1 + B_1 \text{ und } s_2 = A_1 e^{\varkappa l_1} + B_1 e^{-\varkappa l_1}$$

für den Anfangs- und Endpunkt der Leitung bc, wenn mit l und l_1 die ganzen Längen ab und bc bezeichnet werden und die x von a aus für die Leitung ab und von b aus für die Leitung bc gemessen werden.

Wendet man nun die bekannten Kirchhoff'schen Formeln an, so erhält man, unter Berücksichtigung der Stromrichtungen, für den Stromkreis $E_1 abc E_2$

$$(A+B) W_1 + k . \int_0^l (Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x}) dx + k \int_0^{l_1} (A_1 e^{\alpha x_1} + Be^{-\alpha x_1}) dx_1 + \\ + (A_1 e^{\alpha l_1} + B_1 e^{-\alpha l_1}) w_2 = E. \tag{5}$$

Für den Stromkreis $E_1 a c_0$ folgt nach Gleichung 3), da für a auch $x = 0$ und der Widerstand der Ableitung ae_0 gleich $\frac{\beta}{dx} = w_n$ ist,

$$(A+B) w_1 - \frac{\beta}{dx} \alpha (A-B) dx = E. \tag{6}$$

Aus dem Stromkreise $e_u c E_2$ folgt

$$\frac{\beta\alpha}{dx} (A_1 e^{\alpha l_1} - B_1 e^{-\alpha l_1}) dx + w_2 (A_1 e^{\alpha l_1} + Be^{-\alpha l_1}) = 0. \tag{7}$$

Für den Knotenpunkt b folgt

$$(Ae^{\alpha l} + Be^{-\alpha l}) - s_3 - (A_1 + B_1) = 0 \tag{8}$$

und endlich für den Stromkreis $E_1 ab e_m$

$$(A+B) w_1 + k \int_0^l (Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x}) dx + s_3 w_3 = E. \tag{9}$$

Diese fünf Gleichungen gestatten nach ausgeführter Integration die Bestimmung der Constanten A, B, A_1 und B_1 und der Intensität s_3.

Die Intensität s_1 an der Station I ergibt sich sodann aus

$$s_1 = A + B,$$

und da nach Ohm $s_1 = \frac{E}{W}$ ist, so folgt $W = \frac{E}{s_1}$. Dabei ist W

derjenige Widerstand, welchen eine vollkommen isolirte Leitung dem Strome entgegensetzen würde, in welcher durch die elektromotorische Kraft E ein Strom von der Intensität s_1 hervorgerufen wird. Wir führen diesen Widerstand hier ein, weil derselbe in der Praxis unter Anwendung des Differentialgalvanometers oder der Wheatstone'schen Brücke an der Station I gemessen werden kann.

Nach Substitution der aus den fünf Gleichungen 5, 6, 7, 8 und 9 folgenden Werthe erhält man

$$W = \frac{k}{\alpha} \cdot \frac{(q+p\varphi_1)(q_1+p_1\varphi_2)+2\varphi_3[Q\cdot(1+\varphi_1\varphi_2)+P(\varphi_1+\varphi_2)]}{p(q_1+p_1\varphi_2)+2\varphi_3(P+Q\varphi_2)} \quad 10)$$

wobei gesetzt ist

$$\begin{array}{lll} p = e^{\alpha l}+e^{-\alpha l} & p_1 = e^{\alpha l_1}+e^{-\alpha l_1} & P = e^{\alpha L}+e^{-\alpha L} \\ q = e^{\alpha l}-e^{-\alpha l} & q_1 = e^{\alpha l_1}-e^{-\alpha l_1} & Q = e^{\alpha L}-e^{-\alpha L} \\ \varphi_1 = \frac{\alpha}{k} w_1 & \varphi_2 = \frac{\alpha}{k} w_2 & \varphi_3 = \frac{\alpha}{k} w_3 \end{array} \quad 11)$$

und wobei $L = l+l_1$ die ganze Länge ac der Leitung ist.

Diese Gleichung liefert den Widerstand der ungestörten Leitung, wenn $w_3 = \infty$, also auch $\varphi_3 = \infty$ gesetzt wird, wodurch erhalten wird

$$W = \frac{k}{\alpha} \cdot \frac{Q(1+\varphi_1\varphi_2)+P(\varphi_1+\varphi_2)}{P+Q\varphi_2}.$$

Ist weiter die Leitung an beiden Enden mit der Erde leitend verbunden und können die Widerstände w_1 und w_2 als klein vernachlässigt werden, so erhält man die bekannte Formel

$$W = \frac{k}{\alpha} \cdot \frac{Q}{P} = \frac{k}{\alpha} \cdot \frac{e^{\alpha L}-e^{-\alpha L}}{e^{\alpha L}+e^{-\alpha L}}.$$

Ist die Leitung an der Station II isolirt, so wird wegen $w_2 = \infty$ auch $\varphi_2 = \infty$ und wegen w_1 sehr klein

$$W = \frac{k}{\alpha} \cdot \frac{P}{Q} = \frac{k}{\alpha} \cdot \frac{e^{\alpha L}+e^{-\alpha L}}{e^{\alpha L}-e^{-\alpha L}}. \quad 12)$$

Diese Werthe gehen für $\alpha = 0$, d. i. für vollkommen isolirte Leitungen über in die selbstverständlichen

$$W = kL \text{ und } W = 0.$$

In den gewöhnlichen, in der Praxis vorkommenden Fällen kann ohne weiters der Widerstand w_1 an der durch die Batterie mit der Erde leitend verbundenen Station I als sehr klein vernachlässigt werden, wodurch nach Gleichung 10) erhalten wird:

$$W = \frac{k}{\alpha} \cdot \frac{q(q_1+p_1\varphi_2)+2\varphi_3(Q+P\varphi_2)}{p(q_1+p_1\varphi_2)+2\varphi_3(P+Q\varphi_2)}.$$

Die Gleichungen 5)—9) geben dann

$$A = \frac{\alpha}{k} \cdot \frac{(q_1+\varphi_2 p_1)e^{-\alpha l}+2\varphi_3(1-\varphi_2)e^{-\alpha L}}{(q_1+\varphi_2 p_1)q+2\varphi_3(Q+P.\varphi_2)} \cdot E$$

$$B = \frac{\alpha}{k} \cdot \frac{(q_1+\varphi_2 p_1)e^{\alpha l}+2\varphi_3(1+\varphi_2)e^{\alpha L}}{(q_1+\varphi_2 p_1)q+2\varphi_3(Q+P.\varphi_2)} \cdot E$$

$$A_1 = \frac{\alpha}{k} \cdot \frac{2\varphi_3(1-\varphi_2)e^{-\alpha l_1}}{(q_1+\varphi_2 p_1)q+2\varphi_3(Q+P.\varphi_2)} \cdot E$$

$$B_1 = \frac{\alpha}{k} \cdot \frac{2\varphi_3(1+\varphi_2)e^{\alpha l_1}}{(q_1+\varphi_2 p_1)q+2\varphi_3(Q+P.\varphi_2)} \cdot E \quad \text{und}$$

$$s_3 = \frac{E\frac{\alpha}{k} - A(e^{\alpha l}-1)+B(e^{-\alpha l}-1)}{\varphi_3},$$

wodurch nach den obigen Gleichungen s_1, s'_1, s'_2 und s_2 sich ergeben. Setzt man in diesen Gleichungen $\varphi_2 = 0$, ist also das Ende an der Station II mit der Erde gut leitend verbunden, so erhält man die Gleichungen für die nicht isolirte Leitung, während für $\varphi_2 = \infty$ jene für die in der Station II isolirte Leitung sich ergeben. Ist die Leitung in b nicht gestört, also auch $\varphi_3 = \infty$, so erhält man

$$s_1 = \frac{\alpha}{k} \cdot \frac{P}{Q} \cdot E \quad \text{und} \quad s_2 = \frac{\alpha}{k} \cdot \frac{2}{Q} \cdot E,$$

woraus sich die bekannte Gleichung (Fleeming Jenkin. Elektricität und Magnetismus, übersetzt von F. Exner, pag. 363)

$$\frac{s_2}{s_1} = \frac{2}{P} = \frac{2}{e^{\alpha L}+e^{-\alpha L}} = \frac{2}{e^{\alpha L}+\frac{1}{e^{\alpha L}}}$$

ergibt.

Setzt man ferner voraus, die Leitung sei in der Station II isolirt, so wird $w_2 = \infty$, also auch $\varphi_2 = \infty$ und man erhält

$$W_1 = \frac{k}{\alpha} \cdot \frac{qp_1 + 2P\varphi_3}{pp_1 + 2Q\varphi_3} = \frac{k}{\alpha} \cdot \frac{Q + (e^{\alpha\Delta} - e^{-\alpha\Delta}) + 2P\varphi_3}{P + (e^{\alpha\Delta} + e^{-\alpha\Delta}) + 2Q\varphi_3},$$

wobei $l - l_1 = \Delta$ gesetzt ist. Dieser Widerstand W_1 ist an der Station I bei Isolirung der Leitung in II zu messen.

Macht man dieselbe Bestimmung in II bei Isolirung der Leitung in der Station I, so erhält man den Widerstand

$$W_2 = \frac{k}{\alpha} \cdot \frac{Q - (e^{\alpha\Delta} - e^{-\alpha\Delta}) + 2P\varphi_3}{P + (e^{\alpha\Delta} + e^{-\alpha\Delta}) + 2P\varphi_3}.$$

Da α sowie P und Q, ersteres nach der Gleichung 12) durch Beobachtungen an der nicht gestörten Leitung und letztere nach der Gleichung 11) bekannt sein müssen, so lassen sich aus den gemessenen Werthen W_1 und W_2 sowohl φ_3 als auch $\Delta = l - l_1$ bestimmen, wodurch in Berücksichtigung, dass $L = l + l_1$ sein muss, sowohl l als auch l_1, somit auch der Ort der Störung bestimmt sind.

Einfacher gestaltet sich die Rechnung, wenn man unter der Annahme eines kleinen Werthes von α $e^{\alpha L}$ $e^{-\alpha L}$ $e^{\alpha\Delta}$ und $e^{-\alpha\Delta}$ in Reihen entwickelt und bei Gliedern mit zweiten Potenzen stehen bleibt. Da ferner $\alpha\Delta$ im Allgemeinen klein gegen αL sein wird, so ist es gestattet, bei der Entwicklung von $e^{\alpha\Delta}$ und $e^{-\alpha\Delta}$ bei den ersten Potenzen stehen zu bleiben, und

$$e^{\alpha\Delta} - e^{-\alpha\Delta} = 2\alpha\Delta \text{ und } e^{\alpha\Delta} + e^{-\alpha\Delta} = 2$$

zu setzen. Dadurch erhält man schliesslich

$$\Delta = \frac{W_1 - W_2}{k} [1 - \tfrac{1}{4}\alpha^2 L^2 (1 + \frac{2(W_1 + W_2)}{kL})] = l - l_1$$

und da $L = l + l_1$ ist, können sonach l und l_1 als bestimmt ansehen werden.

Ist α sehr klein, so dass auch zweite Potenzen vernachlässigt werden können, so erhält man die für vollkommen isolirte Leitungen geltende und bekannte Gleichung:

$$\Delta = l - l_1 = \frac{W_1 - W_2}{k}.$$

Sind die Leitungen an den Stationen II und I bei Beobachtung der Widerstände in I und II nicht isolirt, sondern im Gegentheile durch die Erdleitung mit der Erde gut leitend in Verbindung, dann ist in Gleichung 10) $w_1 = w_2 = 0$ und $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ zu setzen und wird der in I beobachtete Widerstand

$$W_1' = \frac{k}{\alpha} \cdot \frac{P-(e^{\alpha\Delta}+e^{-\alpha\Delta})+2\varphi_3 Q}{Q-(e^{\alpha\Delta}-e^{-\alpha\Delta})+2\varphi_3 P},$$

während der in II beobachtete Widerstand ist

$$W_2' = \frac{k}{\alpha} \cdot \frac{P-(e^{\alpha\Delta}+e^{-\alpha\Delta})+2\varphi_3 Q}{Q+(e^{\alpha\Delta}-e^{-\alpha\Delta})+2\varphi_3 P}.$$

Diese geben für kleine Werthe von α einen genäherten Werth

$$\Delta = l - l_1 = \frac{1}{2} \frac{W_2' - W_1'}{2\frac{W_1' W_2'}{kL} - (W_1' + W_2')}$$

$$\left[1 - \frac{1}{6}\left[5 W_1' W_2' + \frac{W_1' + W_2'}{2} kL\right] \alpha^2 L^2\right],$$

obwohl auch aus den ursprünglichen Gleichungen für W_1' und $W_2' e^{\alpha\Delta}$ direct und aus ihm Δ genau bestimmt werden kann.

Ein Beitrag zur Theorie der Maxima und Minima von Functionen.

Von **Franz Haluschka,**

suppl. Lehrer an der II. deutschen Staatsrealschule in Prag.

Die Theorie der Maxima und Minima von Functionen mehrerer Variabelen hat seit Lagrange eine mehrfache Behandlung erfahren, so von Petzval, Richelet, Brioschi, Stolz. Alle Methoden jedoch, welche auf die Lösung des vorliegenden Problems angewendet wurden, stimmen in ihrem Wesen überein; es ist die Form allein, wodurch sie sich von einander unterscheiden und in welcher ein Fortschritt möglich ist.

So ist denn auch die nachstehende Behandlung des Problems keine wesentlich neue; sie hat lediglich zum Zwecke, die aufgestellten Bedingungen für die Maxima und Minima einer Function zu compensiren und theilweise zu ergänzen. Ihre Aufgabe ist eine dreifache:

1. Die Bedingungen für die Maxima und Minima einer Function von n unabhängig Variabelen von den Eigenschaften einer gewissen Determinante abhängig zu machen,
2. den allgemeinen Fall, als die Variabelen durch Bedingungsgleichungen zusammenhängen, auf den vorigen zurückzuführen,
3. endlich den Fall zu discutiren, in welchem die erwähnte Determinante den Werth 0 hat.

I.

Ist

$$1) \ldots \quad f = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

eine Function der n unabhängigen Variabelen $x_1, x_2, \ldots x_n$, so haben diese, um f zu einem Maximum oder Minimum zu machen, die Bedingungsgleichungen zu erfüllen:

2)..... $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \ldots \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0.$

Bezeichnen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ unendlich kleine Incremente der Variabelen $x_1, \ldots x_n$, ferner

$$u_{11}, u_{12}, \ldots u_{1n}$$

die 2. partiellen Differentialquotienten von f, indem allgemein

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i} = u_{ik} = u_{ki}$$

gesetzt wird, so entscheidet der Ausdruck

3)..... $u = u_{11}\xi_1^2 + 2u_{12}.\xi_1\xi_2 + \ldots + 2u_{1n}\xi_1\xi_n + u_{22}\xi_2^2 + + \ldots + 2u_{2n}\xi_2\xi_n + \ldots + u_{nn}\xi_n^2.$

darüber, ob für die Werthsysteme der Variabelen, welche die Gleichungen 2 befriedigen, die Function f ein Maximum oder Minimum wird oder nicht.

Soll f einen solchen ausgezeichneten Werth annehmen, so muss die Function u der Variabelen ξ für ein jedes beliebige Werthsystem derselben ihr Vorzeichen beibehalten und zwar das Zeichen $+$ für ein Minimum, $-$ für ein Maximum von f. Es handelt sich also darum, die Bedingungen festzustellen, unter denen das Eine oder das Andere eintritt. Man kann sich hiebei auf den Fall eines positiven u beschränken, da in dem andern Falle nur die Zeichen der Coëfficienten in 3 in die entgegengesetzten zu verwandeln sind, um den vorigen Fall herbeizuführen.

Wenn u für ein jedes Werthsystem der ξ — die nun auch endlich gedacht werden können — positiv bleiben soll, so muss sich diese Function als eine Summe von Quadraten darstellen lassen in der Form:

4)..... $u = (\alpha_{11}\xi_1 + \ldots \alpha_{1n}\xi_n)^2 + \ldots + (\alpha_{n1}\xi_1 + \ldots + \alpha_{nn}\xi_n)^2.$

Die Vergleichung der Coëfficienten dieser Gleichung mit denen in 3 ergibt die Relation:

5)..... $u_{hi} = \alpha_{1h}.\alpha_{1i} + \alpha_{2h}.\alpha_{2i}. + \ldots + \alpha_{nh}.\alpha_{ni},$

aus welcher die folgende hervorgeht:

6)..... $$H = A^2,$$

wenn

7)..... $$\begin{vmatrix} u_{11} u_{12} \cdot\cdot u_{1n} \\ u_{21} u_{22} \quad u_{2n} \\ \vdots \\ u_{n1} u_{n2} \cdot\cdot u_{nn} \end{vmatrix} = H \text{ und } \begin{vmatrix} \alpha_{11} \alpha_{12} \cdot\cdot \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} \alpha_{22} \quad \alpha_{2n} \\ \vdots \\ \alpha_{n1} \alpha_{n2} \cdot\cdot \alpha_{nn} \end{vmatrix} = A$$

gesetzt wird.

Wenn man nun die Substitution macht:

8.)..... $$\begin{aligned} \alpha_{11}\xi_1 + \ldots + \alpha_{1n}\xi_n &= \eta_1 \\ \alpha_{21}\xi_1 + \ldots + \alpha_{2n}\xi_n &= \eta_2 \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad &\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \alpha_{n1}\xi_1 + \ldots + \alpha_{nn}\xi_n &= \eta_n, \end{aligned}$$

durch welche u in

$$v = \eta_1^2 + \eta_2^2 + \ldots + \eta_n^2$$

übergeht, so lässt sich die Forderung der Gleichung 5) oder 6) also in Worte fassen: Unter der Voraussetzung, dass es eine lineare Substitution 8) gibt, durch welche u in v transformirt werden kann, ist die Discriminante von u gleich dem Quadrate einer anderen Determinante, nämlich der Determinante der linearen Substitution 8). Nennen wir eine Determinante H eine *Quadratdeterminante*, wenn sich eine Determinante A angeben lässt, deren Elemente sämmtlich reell sind und mit denen der ersteren durch die Gleichung 5) zusammenhängen, so kann man kürzer sagen:

Unter der Voraussetzung, dass u mittelst der linearen Substitution 8) in v transformirt werden kann, ist die Discriminante H von u eine Quadratdeterminante und die Elemente ihrer Wurzeldeterminante sind die Coëfficienten der linearen Substitution. Umgekehrt gibt es immer, aber auch nur dann eine lineare Substitution 8), durch welche u in v überführt wird, wenn H eine Quadratdeterminante ist, denn dann, aber nur in diesem Falle sind die Substitutionscoëfficienten in 8) reell. Die Transformation wird illusorisch, wenn $H = 0$ ist, denn dann ist auch $A = 0$ und die Auflösungen der Substitutionsgleichungen 8) liefern keine bestimmten endlichen Substitutionswerthe für die Variabelen ξ. Dieser Fall aber wird weiter unten behandelt werden und soll darum von der nächstfolgenden Untersuchung ausgeschlossen bleiben.

Hiernach lassen sich die Bedingungen für ein Maximum oder Minimum der Function f kurz aussprechen, wie folgt:

Die Function f wird nur für solche Werthsysteme der Variabelen, ein Maximum oder Minimum, welche den Gleichungen 2) genügen. Sie wird für diese Werthsysteme ein Maximum oder ein Minimum, je nachdem die Discriminante von $-u$ oder die von $+u$ eine Quadratdeterminante ist. Findet keiner dieser Fälle statt, so tritt weder ein Maximum noch ein Minimum ein.

Es erübrigt noch Kennzeichen dafür anzugeben, ob H eine Quadratdeterminante ist oder nicht. Diese beruhen auf folgenden, durch die Multiplicationstheorie der Determinanten begründeten Eigenschaften:

1. Eine jede Quadratdeterminante ist symmetrisch.
2. Eine jede Hauptunterdeterminante derselben ist eine Summe von Quadraten, daher — da die betrachtete Determinante von Null verschieden vorausgesetzt wird—wesentlich positiv.

Diese Eigenschaften müssen der Determinante H, wenn sie eine Quadratdeterminante sein soll, nothwendig zukommen. Da sie nun die erste derselben ohnedies besitzt, so wäre nur zu untersuchen, ob ihr auch die andere zukommt. Diese Untersuchung braucht sich jedoch nicht auf die sämmtlichen Hauptunterdeterminanten von H zu erstrecken, es genügt, die folgenden in Betracht zu ziehen:

10)..... $$u_{11},\ u''_{22}\,u'''_{33},\ \ldots u^{(m)}_{mm},\ \ldots u^{(n)}_{nn} \equiv H,$$

wo symbolisch

$$\begin{vmatrix} u_{11}, & u_{12} & \ldots & u_{1m} \\ u_{21}, & u_{22} & \ldots & u_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{m1}, & u_{m2} & \ldots & u_{mm} \end{vmatrix} = u^{(m)}_{mm}$$

gesetzt wurde.

Sind nämlich diese Determinanten sämmtlich >0, so kann man schon hieraus den Schluss ziehen, dass H eine Quadratdeterminante ist.

Man setze, um dies nachzuweisen

$$H = A^2$$

und

$$A = \begin{vmatrix} \alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13} \ldots \alpha_{1n} \\ 0 \quad \alpha_{22}, \alpha_{23} \ldots \alpha_{2n} \\ 0 \quad 0 \quad \alpha_{33} \ldots \alpha_{3n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 0 \quad 0 \quad 0 \ldots \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \alpha_{11} \cdot \alpha_{12} \ldots \alpha_{nn}.$$

Erhebt man nach dem Multiplicationstheorem A ins Quadrat und setzt die Elemente der so erhaltenen neuen Determinante den gleichgestellten Elementen in H gleich, so erhält man zunächst:

$$u_{11} = \alpha_{11}^2,$$

$$u''_{22} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ 0 & \alpha_{22} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ 0 & 0 \end{vmatrix}^2 + \ldots = \alpha_{11}^2 \cdot \alpha_{22}^2,$$

$$u'''_{33} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{12} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}^2 + \ldots = \alpha_{11}^2 \cdot \alpha_{22}^2 \cdot \alpha_{33}^2,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$u_{nn}^{(n)} = \alpha_{11}^2 \cdot \alpha_{22}^2 \ldots \alpha_{nn}^2,$$

woraus nach der Voraussetzung hervorgeht, dass die Elemente des Anfangsgliedes von A durchaus reell sind.

Unter Berücksichtigung dessen folgt nun aus den ferneren Gleichungen:

$$\begin{aligned} u_{12} &= u_{21} = \alpha_{11} \cdot \alpha_{12}, \\ u_{13} &= u_{31} = \alpha_{11} \cdot \alpha_{13}, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ u_{1n} &= u_{n1} = \alpha_{11} \cdot \alpha_{1n}, \end{aligned}$$

dass alle Elemente der 1. Zeile in A reell sind.

Ebenso folgt aus den Gleichungen:

$$\begin{aligned} u_{23} &= u_{32} = \alpha_{12} \cdot \alpha_{13} + \alpha_{22} \cdot \alpha_{23}, \\ u_{24} &= u_{42} = \alpha_{12} \cdot \alpha_{14} + \alpha_{22} \cdot \alpha_{24}, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ u_{2n} &= u_{n2} = \alpha_{12} \cdot \alpha_{1n} + \alpha_{22} \cdot \alpha_{2n} \end{aligned}$$

unter Hinblick auf das vorher Gefundene, dass auch die Elemente der 2. Zeile in A reell sind.

Und so ergibt sich allgemein aus den Gleichungen:

$$u_{mm+1} = \alpha_{1m} \cdot \alpha_{1m+1} + \alpha_{2m} \cdot \alpha_{2,\, m2+} + \ldots + \alpha_{mm} \cdot \alpha_{mm+1},$$
$$u_{mm+2} = \alpha_{1m} \cdot \alpha_{1m+2} + \alpha_{2m} \cdot \alpha_{2,\, m+2} + \ldots + \alpha_{mm} \cdot \alpha_{mm+2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$u_{m,\, n} = \alpha_{1m} \cdot \alpha_{1n} + \alpha_{2m} \cdot \alpha_{2n} + \ldots + \alpha_{mm} \cdot \alpha_{mn},$$

dass alle Elemente der m^{ten} Zeile in A reell sind, wenn nur die Elemente der vorhergehenden $(m-1)$ Zeilen reell sind. Da dies aber von den Elementen der 1. und 2. Zeile nachgewiesen wurde, so sind auch die Elemente der 3., folglich auch die der 4. Zeile u. s. w.: alle Elemente der Determinante A reell.

Hiemit ist erwiesen, dass unter Voraussetzung nur positiver Werthe für die unter 10) angeführten Hauptunterdeterminanten H eine Quadratdeterminante ist und folglich alle übrigen Hauptunterdeterminanten derselben positiv sein müssen. Es ist bemerkenswerth, dass, wenn nach Ausschluss der unter 10) angeführten nicht alle Hauptunterdeterminanten von H positiv sind, auch die ersteren nicht sämmtlich positiv sein können; denn wären sie es, so wäre H eine Quadratdeterminante und somit alle Hauptunterdeterminanten derselben positiv, was der Annahme widerspräche. Sind nicht alle Glieder der Reihe 10) positiv, so geht H eine wesentliche Eigenschaft einer Quadratdeterminante ab, sie ist demnach keine solche.

Die Untersuchung über das Vorhandensein eines Maximums oder Minimums von f wird hiedurch auf die Untersuchung der in 10) auftretenden Hauptunterdeterminanten von H zurückgeführt. Es tritt ein Minimum ein, wenn diese sämmtlich positiv sind, ein Maximum, wenn — wie leicht einzusehen — die von geradem Grade positiv, die von ungeradem Grade negativ sind.

Das stimmt vollständig mit dem überein, was O. Stolz gefunden und in den Berichten der kais. Akademie der Wissenschaften 1868 niedergelegt hat. Stolz gibt folgende Kriterien für ein Maximum oder Minimum der gegebenen Function an:

a) Wenn überhaupt ein Maximum oder Minimum vorhanden ist, so müssen die Hauptunterdeterminanten aller geraden Grade

von H — soweit sie nicht verschwinden — sämmtlich positiv sein;

b) Die Hauptunterdeterminanten aller ungeraden Grade von H — so weit sie nicht verschwinden — sind im Falle eines Maximums sämmtlich negativ, im Falle eines Minimums sämmtlich positiv."

Dagegen wäre nur einzuwenden, dass die einschränkende Bemerkung: „so weit sie nicht verschwinden" ausser Wirksamkeit bleibt, da keine der Hauptunterdeterminanten von H verschwinden kann, sobald H eine Quadratdeterminante und von Null verschieden ist.

II.[1]

Wenn die Variabelen $x_1, \ldots x_n$ der Function f durch die m Bedingungsgleichungen zusammenhängen:

$$11) \ldots\ldots \quad \begin{aligned} &\varphi_1(x_1, \ldots x_n) = 0 \\ &\varphi_2(x_1, \ldots x_n) = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &\varphi_m(x_1, \ldots x_n) = 0, \end{aligned}$$

so sind auch die Incremente $\xi_1, \ldots \xi_n$ der Variabelen nicht mehr unabhängig, sondern durch die Bedingungsgleichungen verbunden:

$$12) \ldots\ldots \quad \begin{aligned} &1_1\xi_1 + 1_2\xi_2 + \ldots + 1_n\xi_n = 0 \\ &2_1\xi_1 + 2_2\xi_2 + \ldots + 2_n\xi_n = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &m_1\xi_1 + m_2\xi_2 + \ldots + m_n\xi_n = 0 \end{aligned}$$

wenn allgemein

$$\frac{\partial \varphi_h}{\partial x_i} = h_i$$

gesetzt wird.

Auch in diesem Falle hängt das Vorhandensein eines Maximums oder Minimums davon ab, ob der Ausdruck

$$13) \ldots\ldots \quad u = u_{11}\xi_1^2 + 2u_{12}\xi_1\xi_2 + \ldots$$

für ein jedes Werthsystem der Variabelen $\xi_1, \ldots \xi_n$, das den Gleichungen 12) entspricht, das negative oder das positive Vorzeichen beibehält. Um darüber zu entscheiden, eliminiren wir mit Hilfe

[1] Vgl. Richelot, Astron. Nachr., Bd. 48.

von 12) aus u die m Variabelen $\xi_1, \dots \xi_m$, wodurch diese Function in eine solche der $n-m$ unabhängig Variabelen $\xi_{m+1}, \dots \xi_n$ transformirt wird; auf die so transformirte Function können dann die in dem Vorhergehenden gefundenen Kriterien in Anwendung kommen.

Zu dem Ende ersetzen wir die Gleichungen 12) durch die folgenden:

$$14) \dots\dots \quad \begin{aligned} 1_1\xi_1 + 1_2\xi_2 + \dots + 1_n\xi_n &= 0, \\ 2''_2\xi_2 + \dots + 2''_n\xi_n &= 0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ m^{(m)}_m\xi_m + \dots + m^{(m)}_n\xi_n &= 0, \end{aligned}$$

deren k^{te} durch Elimination der Variabelen $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_{k-1}$ aus den ersten k der Gleichungen 12) hervorgeht; hienach besteht zwischen den Coëfficienten dieser Gleichungen und denen der Gleichungen 12) die Relation:

$$k^k_k = \begin{vmatrix} 1_1 & 1_2 \dots 1_{k-1} & 1_k \\ 2_1 & 2_2 \dots 2_{k-1} & 2_k \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ k_1 & k_2 \dots k_{k-1} & k_k \end{vmatrix} \quad \text{und } k^k_l = \begin{vmatrix} 1_1 & 1_2 \dots 1_{k-1} & 1_l \\ 2_1 & 2_2 \dots 2_{k-1} & 2_l \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ k_1 & k_2 \dots k_{k-1} & k_l \end{vmatrix}.$$

Durch Substitution des aus der ersten der Gleichungen 14) folgenden Werthes von ξ_1 wird u transformirt in

$$u' = u_{11}\left(\frac{1_2\xi_2 + \dots + 1_n\xi_n}{1_1}\right)^2 - \dots - 2u_{1n}.\frac{1_2\xi_2 + \dots + 1_n\xi_n}{1_1}.\xi_n + \\ + u_{22}.\xi_2^2 + \dots + 2.u_{2n}\xi_2.\xi_n + \dots\dots$$

Hierin ist der Coëfficient von

$$\xi_h^2 = \left(u_{hh} - \frac{1_h}{1_1}.u_{1h}\right) - \frac{1_h}{1_1}\left(u_{h1} - \frac{1_h}{1_1}u_{11}\right)$$

und der von

$$2.\xi_h.\xi_i = \left(u_{hi} - \frac{1_h}{1_1}u_{1i}\right) - \frac{1_i}{1_1}\left(u_{h1} - \frac{1_h}{1_1}u_{11}\right).$$

Nun ist

$$\left(u_{hi} - \frac{1_h}{1_1}u_{1i}\right) - \frac{1_i}{1_1}\left(u_{h1} - \frac{1^h}{1_1}u_{11}\right) = -\frac{1}{(1_1)^2}.\begin{vmatrix} u_{11} & u_{1i} & 1_1 \\ u_{h1} & u_{hi} & 1_h \\ 1_1 & 1_i & 0 \end{vmatrix}$$

und wenn daher

$$\begin{vmatrix} u_{11} & u_{1i} & 1_1 \\ u_{h1} & u_{hi} & 1_h \\ 1_1 & 1_i & 0 \end{vmatrix} = u''_{hi}$$

gesetzt wird, so nimmt u' die Form an:

$$u' = -\frac{1}{(1_1)^2}\cdot\left(u''_{22}\cdot\xi_2^2 + 2\cdot u''_{23}\cdot\xi_2\xi_3 + \ldots\right)\cdot$$

Aus diesem Ausdruck lässt sich auf dieselbe Art mit Hilfe der 2. der Gleichungen 14) ξ_2 eliminiren; man erhält, wenn

$$\begin{vmatrix} u''_{22} & u''_{2i} & 2''_2 \\ u''_{h2} & u''_{hi} & 2''_h \\ 2''_2 & 2''_i & 0 \end{vmatrix} = (u'''_{hi})_1$$

gesetzt wird:

$$u''_1 = \frac{1}{(1_1)^2(2''_2)^2}\cdot\left[(u'''_{33})_1\xi_3^2 + 2(u'''_{34})_1\xi_3\xi_4 + \ldots\right]\cdot$$

Die Determinante $(u'''_{hi})_1$, deren Elemente selbst Determinanten sind, lässt sich in eine andere mit einfachen Elementen durch Anwendung des nachstehenden Determinantensatzes transformiren.

15).... „Wenn man das Elementensystem der Determinante

$$A_m = \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1m} \\ \vdots \\ a_{m1} \ldots a_{mm} \end{vmatrix}$$

rechts und unten mit einem Saume von je r Elementenreihen versieht, so ist die Determinante des neuen Systems:

$$A_{m+r} = \begin{vmatrix} a_{11} \ldots\ldots a_{1m} & a_{1m+1} \ldots\ldots a_{1m+r} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_{m+r,1} \ldots a_{m+r,m}, & a_{m+r,m+1} \ldots a_{m+r,m+r} \end{vmatrix}$$

Aus dieser Determinante lassen sich andere Determinanten dadurch ableiten, dass man von den Saumreihen alle bis auf je eine Horizontal- und eine Verticalreihe unterdrückt. Ihre Form ist durch die Determinante gegeben:

$$b_{ik} = \begin{vmatrix} a_{11} \dots \dots a_{1m} & a_{1m+k} \\ \dots & \dots \\ a_{m1} \dots \dots a_{mm} & a_{mm+k} \\ a_{m+i,1} \dots a_{m+i\,m} & a_{m+i\,m+k} \end{vmatrix}$$

Setzt man hierin der Reihe nach

$$i = 1, 2, \dots r$$
$$\text{und } k = 1, 2, \dots r,$$

so erhält man alle Determinanten dieser Art. Sie bilden ein System von r^2 Elementen; die Determinante dieses Systems ist

$$B = \begin{vmatrix} b_{11} \dots b_{1k} \\ \vdots \\ b_{r1} \dots b_{rr} \end{vmatrix}$$

und es ist

$$B = A_{m+r} \cdot A_m^{r-1}.\text{“}$$

Beweis: Bezeichnet man mit α_{ik} den Coëfficienten von $a_{m+i,\,m+k}$ in A_{m+r} und bildet die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} \dots \alpha_{1r} \\ \alpha_{r1} \dots \alpha_{rr} \end{vmatrix},$$

so ist bekanntlich

$$\Delta = A_{m+r}^{r-1} \cdot A_m.$$

Wenn ferner β_{ik} die Determinante bezeichnet, die aus Δ dadurch hervorgeht, dass man die i-te Horizontal- und die k-te Verticalreihe unterdrückt, und mit $\frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_{ik}}$ die Unterdeterminante des Elementes α_{ik} in Δ, so ist

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_{ik}} = (-1)^{i+k} \cdot \beta_{ik},$$

und weil

$$\beta_{ik} = (-1)^{i+k} \cdot A_{m+r}^{r-2} \cdot b_{ik},$$

so ist

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_{ik}} = (-1)^{i+k} \cdot \beta_{ik} = A_{m+r}^{r-2} \cdot b_{ik}.$$

Multiplicirt man demnach eine jede Zeile von B mit A_{m+r}^{r-2} und ersetzt ein jedes der Producte $A_{m+r}^{r-2} . b_{ik}$ durch $\frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_{ik}}$, so erhält man

$$B . A_{m+r}^{(r-2)r} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_{11}}, & \ldots & \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_{1r}} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_{r1}}, & \ldots & \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_{rr}} \end{vmatrix} = \Delta'.$$

Die Elemente dieser Determinante sind nichts Anderes als die Minoren der Determinante Δ und es ist daher

$$\Delta' = \Delta^{r-1} = A_{m+r}^{(r-1)(r-1)} . A_{m}^{r-1},$$

somit

$$B = A_{m+r} . A_{m}^{r-1}].$$

Schreibt man zum Zwecke der vorgesetzten Transformation $(u_{hi}''')_1$ in der ausführlichen Form

$$(u_{hi}''')_1 = \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & 1_1 \\ u_{21} & u_{22} & 2_2 \\ 1_1 & 1_2 & 0 \end{vmatrix}, & \begin{vmatrix} u_{11} & u_{1i} & 1_1 \\ u_{21} & u_{2i} & 1_2 \\ 1_1 & 1_i & 0 \end{vmatrix}, & \begin{vmatrix} u_{11} & 1_1 & 2_1 \\ u_{21} & 1_2 & 2_2 \\ 1_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & 1_1 \\ u_{h1} & u_{h2} & 1_h \\ 1_1 & 1_2 & 0 \end{vmatrix}, & \begin{vmatrix} u_{11} & u_{1i} & 1_1 \\ u_{h1} & u_{hi} & 1_h \\ 1_1 & 1_i & 0 \end{vmatrix}, & \begin{vmatrix} u_{11} & 1_1 & 1_2 \\ u_{h1} & 1_h & 2_h \\ 1_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & 1_1 \\ 1_1 & 1_2 & 0 \\ 2_1 & 2_2 & 0 \end{vmatrix}, & \begin{vmatrix} u_{11} & u_{1i} & 1_1 \\ 1_1 & 1_i & 0 \\ 2_1 & 2_i & 0 \end{vmatrix}, & \begin{vmatrix} 11 & 1_1 & 2_1 \\ 1_1 & 0 & 0 \\ 2_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{(1_1)^2},$$

so ist nach dem citirten Satze

$$(1_1)^2 . (u_{hi}''')_1 = \begin{vmatrix} u_{11} & 1_1 \\ 1_1 & 0 \end{vmatrix}^2 . u_{hi}''',$$

worin

$$u_{hi}''' = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{1i} & 1_1 & 2_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_{2i} & 1_2 & 2_2 \\ u_{h1} & u_{h2} & u_{hi} & 1_h & 2_h \\ 1_1 & 1_2 & 1_i & 0 & 0 \\ 2_1 & 2_2 & 2_i & 0 & 0 \end{vmatrix} \text{ ist.}$$

Das gibt ferner

$$(u'''_{hi})_1 = (1_1)^2 . u'''_{hi}$$

und hiemit geht u''_1 über in

$$u'' = \frac{1}{(2''_2)^2}\left(u'''_{33}\xi_3^2 + 2 . u'''_{34}\xi_3\xi_4 + \ldots\right).$$

Wie die Transformation fortzusetzen sei, ist nun ersichtlich, man gelangt schliesslich, nach Verwendung auch der letzten der Gleichungen 14) zu dem Ausdrucke:

$$16)\quad u^{(m)} = (-1)^m . \frac{1}{\left(m_m^{(m)}\right)^2}\left[u^{(m+1)}_{m+1\ m+1} . \xi^2_{m+1} + 2u^{(m+1)}_{m+1\ m+2} . \xi_{m+1} . \xi_{m+2} + \right],$$

worin

$$17)\ldots\quad u_{m+h,\,m+i} = \begin{vmatrix} u_{11} \ldots\ldots u_{1m} & u_{1m+i} & 1_1 \ldots\ldots m_1 \\ \vdots & & \\ u_{m1} \ldots\ldots u_{mm} & u_{mm+i} & 1_m \ldots\ldots m_m \\ u_{m+h,1} \ldots u_{m+h,m} & u_{m+h,m+i} & 1_{m+h} \ldots m_{m+h} \\ 1_1 \ldots\ldots 1_m & 1_{m+i} & 0 \quad\quad 0 \\ \vdots & & \\ m_1 \ldots\ldots m_m & m_{m+i} & 0 \quad\quad 0 \end{vmatrix}$$

In dieser Function sind die Variabelen völlig unabhängig und die Bedingung dafür, dass sie für ein jedes Werthsystem der letzteren dasselbe Zeichen beibehält, ist die, dass die Discriminante D des Ausdrucks in der Klammer, deren Elemente nöthigenfalls mit den entgegengesetzten Vorzeichen zu versehen sind, eine Quadratdeterminante ist. Da aber die Untersuchung der Determinante D der Determinantenform ihrer Elemente halber sehr beschwerlich wäre, so wollen wir durch Transformation dieser Determinante die Bedingungen für ein Maximum oder Minimum von f von einer einfacheren Determinante abhängig machen, nämlich der Determinante:

$$18)\ldots\ldots\quad H = \begin{vmatrix} u_{11} \ldots u_{1n} & 1_1 \ldots m_1 \\ \vdots & \\ u_{n1} \ldots u_{nn} & 1_n \ldots m_n \\ 1_1 \ldots 1_n & 0 \ldots 0 \\ \vdots & \\ m_1 \ldots m_n & 0 \ldots 0 \end{vmatrix}$$

Setzt man nämlich

$$19) \ldots\ldots \quad \begin{vmatrix} u_{11} \ldots u_{1m} & 1_1 \ldots m_1 \\ \vdots & \\ u_{m1} \ldots u_{mm} & 1_m \ldots m_m \\ 1_1 \ldots 1_m & 0 \ldots 0 \\ \vdots & \\ m_1 \ldots m_m & 0 \ldots 0 \end{vmatrix} = (-1)^m \cdot \left(m_m^{(m)}\right)^2 = C,$$

so ist nach dem Satze 15)

$$20) \ldots\ldots \quad D = H \cdot C^{n-m-1}.$$

Bezeichnet man eine Hauptunterdeterminante von D vom r. Grade mit Dr und die ihr entsprechende Hauptunterdeterminante von H vom Grade $(2m+r)$, (welche die ersten und letzten je im Quadrat stehenden m^2 Elemente von H sämmtlich enthält) mit H_{2m+r}, so steht nach demselben Satze 15) H_{2m+r} zu D_r in der Beziehung:

$$21) \ldots\ldots \quad D_r = H_{2m+r} \cdot C^{r-1}, \quad r = 1, 2, \ldots \overline{n-m}.$$

Mit Hilfe dieser Relation lassen sich nun ähnlich wie unter I die Bedingungen für ein Maximum oder Minimum von f von den Hauptunterdeterminanten von H abhängig machen.

Wird zunächst m gerade vorausgesetzt, so bleibt u stets positiv, wenn D_r positiv ist. Weil nun $C^{r-1} > 0$ ist, so tritt dies ein, wenn $H_{2m+r} > 0$ ist. Soll hingegen u negativ bleiben, so muss $(-1)^r D_r$, somit auch $(-1)^r H_{2m+r}$ positiv sein.

Ist m ungerade, so bleibt u stets positiv, wenn $(-1)^r . D_r$ positiv ist. Da in diesem Falle $(-1)^{r-1} C^{r-1}$ positiv ist, so muss H_{2m+r} negativ sein. Wenn dagegen u negativ bleiben soll, so muss D_r und folglich $(-1)^{r-1} H_{2m+r} > 0$ sein.

Die in Rede stehenden Bedingungen sind daher olgende:

Für ein Minimum: $(-1)^m . H_{2m+r} > 0$,

Für ein Maximum: $\begin{cases} \text{bei geradem } r: (-1)^m . H_{2m+r} > 0. \\ \text{bei ungeradem } r: (-1)^m . H_{2m+r} < 0. \end{cases}$

Es ist ohne Weiteres einzusehen, dass diese Bedingungen erfüllt werden, sobald die Glieder der Reihe 10) oder die mit ihnen identischen Grössen:

$$(-1)^m . H, (-1)^m . \frac{\partial H}{\partial u_{nn}}, (-1)^m . \frac{\partial^2 H}{\partial u_{nn} \partial u_{n-1\, n-1}},$$
$$\ldots (-1)^m . \frac{\partial^{n-m-1} H}{\partial u_{nn} \ldots \partial u_{m+2\, m+2}}$$

derselben genügen.

III.[1]

In den bisherigen Untersuchungen wurde die Voraussetzung aufrecht erhalten, dass die Determinante H einen von 0 verschiedenen Werth habe. Diese Einschränkung möge nun fallen: H sei $= 0$.

Es mögen zunächst die Variabelen x der Function f als vollständig unabhängig vorausgesetzt werden.

Bezeichnen $u_1, u_2, \ldots u_n$ die ersten partiellen Differentialquotienten von u nach den Variabelen $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n$, ist also allgemein

$$1) \ldots \quad \frac{1}{2} u_k = u_{k1}\xi_1 + u_{k2}\xi_2 + \ldots + u_{kn}\xi_n,$$

so ist (nach der Voraussetzung: $H = 0$) von diesen Functionen eine durch die anderen vermöge einer linearen Gleichung von der Form ausdrückbar:

$$2) \ldots \quad c_1 u_1 + c_2 u_2 + \ldots + c_n u_n = 0$$ [2]

und die Function u geht durch die lineare Substitution

$$3) \ldots \quad \begin{aligned} \xi_1 &= \beta_{11}\eta_1 + \ldots + \beta_{1n-1}\, \eta_{n-1} + c_1\eta_n \\ \xi_2 &= \beta_{21}\eta_1 + \ldots + \beta_{2n-1}\, \eta_{n-1} + c_2\eta_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \xi_n &= \beta_{n1}\eta_1 + \ldots + \beta_{nn-1}\, \eta_{n-1} + c_n\eta_n \end{aligned}$$

---

[1] Vgl. Spitzer: Theorie des Grössten und Kleinsten, in Grunert's Archiv XXII.

[2] S. Hesse, Crelle's J., Bd. 42, pag. 117.

in eine Function der Grössen $\eta_1 \ldots \eta_{n-1}$ über, weil nach vollführter Substitution η_n aus der Rechnung fällt.

(Es ist nämlich

$$\frac{\partial u}{\partial \eta_n} = \frac{\partial u}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial \xi_1}{\partial \eta_n} + \frac{\partial u}{\partial \xi_2} \cdot \frac{\partial \xi_2}{\partial \eta_2} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial \xi_n} \cdot \frac{\partial \xi_n}{\partial \eta_n} =$$

$$= u_1 c_1 + u_2 \cdot c_2 + \ldots + u_n c_n = 0)$$

Die Function u ist also in Wahrheit eine Function von nur $(n-1)$, oder Falls mehrere Bedingungsgleichungen von der Form 2) vorhanden sind, von einer noch geringeren Anzahl von Variabelen. Es frägt sich: Auf welche Weise ist dies möglich, da doch die Variabelen x, somit auch ihre Incremente ξ vollständig unabhängig vorausgesetzt wurden? Dieses Paradoxon erklärt sich nur dadurch, dass die Function f sich in diesem Falle als eine Function von weniger als n Variabelen darstellen lässt. Das aber ist nicht anders möglich, als wenn die Variabelen x durch eine Anzahl $r < n$ von Functionen ψ in f eingehen. In der That zeigt sich dann, dass die Anzahl der Bedingungsgleichungen, welche die Variabelen x zu erfüllen haben, um f zu einem Maximum oder Minimum zu machen, für gewisse Werthsysteme dieser Variabelen auf die Anzahl r jener Functionen ψ reducirbar ist, was zur natürlichen Folge hat, dass H verschwindet.

Es sei z. B.

$$f = f(x_1 . x_2, \ldots x_n) = F(\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_r)$$
$$(r < n)$$

und

4.....

$$\psi_1 = \psi_1(x_1 \ldots x_n),$$
$$\psi_2 = \psi_2(x_1 \ldots x_n),$$
$$\cdots\cdots$$
$$\psi_r = \psi_r(x_1 \ldots x_n).$$

Im Falle eines Maximums oder Minimums von f müssen dann unter den Variabelen die Bedingungsgleichungen bestehen:

$$5) \ldots \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial \psi_1} \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial \psi_2} \cdot \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial \psi_r} \cdot \frac{\partial \psi_r}{\partial x_1} = 0$$

$$5)\ldots\quad \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_2} &\equiv \frac{\partial f}{\partial \psi_1}\cdot\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2}+\frac{\partial f}{\partial \psi_2}\cdot\frac{\partial \psi_2}{\partial x_2}+\ldots+\frac{\partial f}{\partial \psi_2}\cdot\frac{\partial \psi_r}{\partial x_2}=0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} &\equiv \frac{\partial f}{\partial \psi_1}\cdot\frac{\partial \psi_1}{\partial x_n}+\frac{\partial f}{\partial \psi_2}\cdot\frac{\partial \psi_2}{\partial x_n}+\ldots+\frac{\partial f}{\partial \psi_r}\cdot\frac{\partial \psi_r}{\partial x_u}=0. \end{aligned}$$

Die Werthe der Variabelen, welche dieses Gleichungssystem befriedigen, findet man dadurch, dass man aus je r dieser Gleichungen die unbekannten Grössen

$$\frac{\partial f}{\partial \psi_1},\ldots\frac{\partial f}{\partial \psi_r}$$

eliminirt, wodurch $(n-r+1)$ Gleichungen erhalten werden. Drückt man ausserdem das Verhältniss je zweier dieser Grössen durch die Unterdeterminanten des Systems ihrer Coëfficienten in den obigen Gleichungen aus, so erhält man $r-1$, somit im Ganzen n Gleichungen zur Bestimmung jener Werthe der Variabelen, welche das Gleichungssystem 5) befriedigen. Ein anderes Gleichungssystem zur Bestimmung eben solcher Werthe ist aber auch das folgende:

$$6)\ldots\ldots\quad \frac{\partial f}{\partial \psi_1}=0,\ \frac{\partial f}{\partial \psi_2}=0,\ \frac{\partial f}{\partial \psi_3}=0\ \ldots\ \frac{\partial f}{\partial \psi_r}=0,$$

und das ist dasjenige, von dem oben die Rede war. Bildet man die Determinante H für irgend eines der Werthsysteme der Variabelen, welche diesen Gleichungen genügen, so findet man dieselbe $=0$.

Wird nämlich folgende abkürzende Bezeichnung eingeführt:

$$v_{ik}=\frac{\partial^2 f}{\partial \psi_i\,.\,\partial \psi_k},\quad \psi_k^\lambda=\frac{\partial \psi_k}{\partial x_\lambda},$$

$$v_{i1}\psi_1^\lambda+v_{i2}\psi_2^\lambda+\ldots+v_{ir}\psi_r^\lambda=a_i^\lambda$$

$$i,k=1,2,\ldots r,$$

$$\lambda=1,2,\ldots n,$$

so ist

$$H = \begin{vmatrix} a'_1\psi'_1 + a'_2\psi'_2 + \ldots + a'_r\psi'_r, \ldots a^n_1 . \psi^1_1 + a^n_2\psi'_2 + \ldots + a^n_r\psi'_r \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a'_1\psi^n_1 + a'_2\psi^n_2 + \ldots + a'_r\psi^n_r, \ldots a^n_1\psi^n_1 + a^n_2\psi^n_2 + \ldots + a^n_r\psi^n_r \end{vmatrix}.$$

diese Determinante aber ist $= 0$, denn sie ist das Product von 2 Determinanten, deren jede $= 0$ ist.

Das Gleichungssystem 6) besteht aus nur r Gleichungen mit n Unbekannten, wesshalb r derselben in Function der übrigen $n-r$ bestimmt werden können, etwa in der Form:

$$7) \ldots\ldots \quad \begin{array}{c} x_1 = \chi_1(x_{r+1} \ldots x_n) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_r = \chi_r(x_{r-1} \ldots x_n) \end{array}$$

Dabei ist nicht ausgeschlossen, dass jede der Functionen χ mehrdeutig sein kann.

Je nachdem nun den letzteren $(n-r)$ Variabelen diese oder jene Werthe beigelegt werden, erhalten auch die ersteren $x_1 \ldots x_r$ im Allgemeinen immer andere Werthe. Alle Werthsysteme der Variabelen, welche auf diese Art aus den Gleichungen 7) hervorgehen, also dadurch, dass man bei einer bestimmten Deutung der χ die Variabelen $x_{r+1}, \ldots x_n$ sich verändern lässt, haben das mit einander gemein, dass sie den Functionen ψ, somit auch der Function f dieselben Werthe zuertheilen. Es entsteht nun die Frage: Sind die auf diese Art gewonnenen Werthe von f Maximal- oder Minimalwerthe oder nicht? Streng genommen nicht, da eine Werthveränderung der Variabelen in dem durch die Gleichungen 7) beschränkten Gebiete keine Werthveränderung der Function f zur Folge hat. Schliesst man jedoch derartige Änderungen der Variabelen aus, so ist es wohl möglich, dass die in Rede stehenden Werthsysteme der Variabelen f zu einem Maximum oder Minimum machen.

Um darüber zu entscheiden, hat man nur nöthig, anstatt der Grössen $x_1, \ldots x_n$ die Functionen ψ als unabhängige Variabele in Rechnung zu bringen. Hiedurch geht f über in F und man hat den Fall wieder hergestellt, in welchem die Determinante H einen von 0 verschiedenen Werth hat; wäre auch unter diesem neuen

Gesichtspunkte die Determinante $H = 0$, so wäre das nur ein Zeichen, dass die Anzahl der unabhängigen Variabelen auf noch weniger als r reducirbar sei.

Wenn die Variabelen der zu untersuchenden Function an Nebenbedingungen gebunden sind, so bedarf es wohl nur einer einfachen Überlegung, um zu erkennen, dass auch in diesem Falle das Verschwinden der Determinante H dieselbe Bedeutung hat wie in dem vorigen Falle, nämlich, dass die Variabelen in der Function sowohl, wie in den Nebenbedingungen nur in gewissen Functionen — deren Anzahl kleiner ist als die der Variabelen — auftreten. Das Problem findet auch hier seine Erledigung dadurch, dass man diese Functionen als neue unabhängige Variabele in Rechnung bringt.

Über Körper von vier Dimensionen.

Von H. Durège in Prag.

(Vorgelegt in der Sitzung am 5. Mai 1881.)

Bei den Polyedern findet nach einem Satze von Euler zwischen den Anzahlen der Ecken (n_0), der Kanten (n_1) und der Flächen (n_2) die Relation statt, dass

$$n_0 - n_1 + n_2 = 2$$

ist. Es soll im Folgenden die Frage untersucht werden, ob nicht auch bei einem Körper von vier Dimensionen eine ähnliche Relation stattfindet zwischen den Anzahlen der Ecken, der Kanten, der Flächen und der Polyeder, welche jenen Körper begrenzen.

Die erwähnte Euler'sche Relation gilt nicht allgemein von jedem dreidimensionalen Körper, der von ebenen Flächen begrenzt wird. Man kann sagen, dass sie immer gilt, wenn die Oberfläche des Körpers überall convex ist, im Allgemeinen aber kommt zu der rechten Seite der obigen Gleichung noch eine Zahl hinzu, welche abhängt von der Ordnung des Zusammenhanges der Gesammtoberfläche des Körpers und der der einzelnen begrenzenden Flächen.

Wir werden uns aber in der gegenwärtigen Betrachtung auf die Fälle beschränken, in denen die Euler'sche Relation wirklich gilt und zunächst eine solche Ableitung dieser Formel zu geben versuchen, welche eine Uebertragung auf ein Gebiet von mehr als drei Dimensionen gestattet. Es wird dabei im Laufe der Untersuchung die oben erwähnte Bedingung der Convexität sich durch andere Bedingungen ersetzen lassen, die etwas weitergreifend sind, indem sie nicht alle und jede Concavität ausschliessen, und die ausserdem ebenfalls eine Uebertragung auf Körper von vier Dimensionen erlauben.

I.

Wir beginnen damit, die Euler'sche Relation zunächst für einen einfachen Fall abzuleiten.

Man denke sich einen Körper P dadurch erzeugt, dass ein ebenes, überall convexes Polygon seine Lage und Gestalt stetig ändert; das ursprüngliche Polygon, bei welchem die Bewegung beginnt, heisse A, das, bei welchem sie endet, B. Die Bewegung geschehe in der Art, dass die Ecken von A gerade Linien beschreiben, welche aus der Ebene von A heraustreten, und von denen je zwei, die von den Endpunkten einer Seite ausgehen, in einer Ebene liegen. Diese Geraden sollen während der Bewegung einander nicht schneiden und solche Lagen haben, dass das sich bewegende Polygon immer ringsherum convex bleibt. Am Schlusse der Bewegung, wenn A in B übergegangen ist, soll ein Zusammentreffen der Geraden gestattet sein, jedoch so, dass B entweder ebenfalls ein ebenes, ringsherum convexes Polygon ist, oder im Falle es degenerirt, entweder in eine Gerade oder in einen Punkt sich zusammenzieht. Ein auf diese Weise erzeugter Körper mag der Kürze wegen ein einfacher Körper genannt werden.

Es ist nun ohne Weiteres klar, dass ein solcher einfacher Körper P keine andern Ecken, Kanten und Flächen hat als diejenigen, welche den Polygonen A und B angehören, und ausserdem diejenigen, welche durch die Bewegung der Ecken und Kanten von A erzeugt werden. Demnach bestehen die Ecken von P aus den Ecken von A und von B; die Kanten von P aus den Kanten von A und von B und den von den Ecken von A beschriebenen Geraden; endlich die Flächen von P aus A und B selbst und den durch die Kanten von A beschriebenen Ebenen. Bezeichnet man daher die Anzahlen dieser Begrenzungsstücke bei A, B und P, respective mit n, N und n', indem man bei allen für die Ecken, Kanten und Flächen, respective die Indices 0, 1, 2 beifügt, so entstehen, wenn zunächst angenommen wird, dass das Polygon B nicht degenerirt, die Gleichungen

$$\begin{aligned} n'_0 &= n_0 + N_0 \\ n'_1 &= n_1 + N_1 + n_0 \\ n'_2 &= 2 + n_1, \end{aligned}$$

aus welchen mit Berücksichtigung der für das Polygon B geltenden Gleichung $N_0 - N_1 = 0$ sogleich die Euler'sche Formel folgt, nämlich

$$n'_0 - n'_1 + n'_2 = 2.$$

Wenn dagegen das Polygon in eine Gerade oder einen Punkt sich zusammenzieht, so gehen die vorigen Gleichungen bezüglich in die folgenden über:

$$\begin{aligned} n'_0 &= n_0 + 2 \\ n'_1 &= n_1 + 1 + n_0 \\ n'_2 &= 1 \ + n_1 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} n'_0 &= n_0 + 1 \\ n'_1 &= n_1 + n_0 \\ n'_2 &= 1 \ + n_1, \end{aligned}$$

welche ebenfalls die Euler'sche Relation liefern.

Dabei ist vorausgesetzt, dass jede Ecke und Kante von A an der Bewegung wirklich theilnimmt. Ist dies nicht der Fall, bleiben vielmehr α_0 Ecken und α_1 Kanten fest (α_1 kann höchstens gleich 1 sein), so fallen in P nicht allein α_0 Kanten und α_1 Flächen fort, sondern, da A jetzt α_0 Ecken und α_1 Kanten mit B gemeinschaftlich hat, so sind diese in P nur einmal zu zählen. Man erhält also dann folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} n'_0 &= n_0 + N_0 - \alpha_0 \\ n'_1 &= n_1 + N_1 - \alpha_1 + n_0 - \alpha_0 \\ n'_2 &= 2 \ + n_1 \ - \alpha_1 \end{aligned}$$

aus denen wiederum die Euler'sche Relation folgt.

Demnach gilt diese für jeden einfachen Körper. Um nun ihre Geltung zu erweitern, schlagen wir den Weg ein, dass wir aus einem gegebenen, von ebenen Flächen begrenzten Körper K durch Ablösung einer Ecke einen neuen Körper L bilden und zeigen, dass, wenn diese Ablösung unter bestimmten, sogleich näher anzugebenden Bedingungen möglich ist, die Zahl

$$n_0 - n_1 + n_2,$$

d. i. die Zahl der Ecken und Flächen vermindert um die Zahl der Kanten, dadurch ihren Werth nicht ändert. Hat dann das Polyeder K die Beschaffenheit, dass man unter den nämlichen Bedingungen nach und nach so viele Ecken abtrennen kann, dass zuletzt ein einfacher Körper übrig bleibt (oder, was auf dasselbe hinauskommt, dass man alle Ecken bis auf vier ablösen kann,

so dass zuletzt ein Tetraeder übrig bleibt), so gilt die **Euler**'sche Relation für das gegebene Polyeder K, d. h. jene unveränderliche Zahl hat den Werth 2, weil dies bei einem einfachen Körper stattfindet.

Um jenen Nachweis zu führen sei Folgendes bemerkt: In jeder Ecke eines Körpers K stossen mehrere Kanten (mindestens drei) zusammen; bei einer gewählten Ecke C sei r die Anzahl derselben; diese führen nach eben so vielen Ecken a_1, a_2 .... a_r von K. Wir stellen nun an die gewählte Ecke C folgende Forderungen:

1. Es sei möglich, die r Ecken a zu einem einzigen geschlossenen Zuge durch gerade Linien α zu verbinden, welche ganz auf der Oberfläche von K verlaufen.

2. Wird durch diese Linien α eine (entweder ebene, oder aus ebenen Theilen bestehende gebrochene) Fläche M gelegt, so theile diese den Körper K in zwei getrennte Theile von der Art, dass der eine Theil, welcher L heisse, die Ecke C nicht enthalte, dass aber die Fläche M und die Linien α sämmtlich Theile der Begrenzung von L bilden.

Dann wird die Ecke C von K abgelöst und es entsteht ein neuer Körper L, dessen Begrenzungsstücke wir mit denen von K der Anzahl nach vergleichen können.

Das Polygon M ist eben, wenn die Linien α alle in einer Ebene liegen; im entgegengesetzten Falle kann es durch Diagonalen in ebene Flächen zerlegt werden. Ist σ die Anzahl der dazu nöthigen Diagonalen, so besteht M aus $\sigma + 1$ ebenen Flächen, die der Annahme nach als Flächen von L auftreten, während jene Diagonalen σ Kanten desselben bilden. Neue Ecken treten aber dabei nicht auf.

Die Linien α, deren Anzahl r ist, werden der Annahme nach Kanten von L. Ist eine von ihnen zugleich auch eine Kante von K, so geht bei der Abtrennung die zwischen ihr und der Ecke C enthaltene Fläche von K verloren. Ist aber eine dieser Linien nicht eine Kante von K, so geht die Fläche von K, in welcher diese Linie verläuft, nicht ganz verloren, sondern wird durch die Abtrennung nur verkleinert. Ist also δ die Anzahl der Linien α, welche nicht zugleich Kanten von K sind, so verliert K nur $r - \delta$ Flächen, während δ Kanten in L neu auftreten.

Hienach kann man nun leicht angeben, um wieviel die Zahlen n_0, n_1, n_2 der Ecken, Kanten und Flächen von K durch die Abtrennung der Ecke C vermehrt werden:

n_0 nimmt zu um -1

n_1 „ „ „ $-r+\delta+\sigma$

n_2 „ „ „ $-(r-\delta)+\sigma+1$,

woraus folgt, dass die Zahl $n_0-n_1+n_2$ in der That ganz ungeändert bleibt.

Demnach ziehen wir das Resultat, dass die Euler'sche Relation für jeden von ebenen Flächen begrenzten Körper gilt, der die Eigenschaft hat, dass man von ihm unter den aufgestellten Bedingungen nach und nach so viele Ecken abtrennen kann, dass zuletzt ein einfacher Körper (oder auch ein Tetraeder) übrig bleibt.

Es ist damit nicht gesagt, dass die Euler'sche Relation nicht auch bisweilen gelten könne, wenn die obigen Bedingungen nicht erfüllt sind, in der That kann sie in verschiedenen Fällen trotzdem in Kraft bleiben; wir wollen aber von diesen Fällen absehen, da bei den Körpern von vier Dimensionen ohnehin auf die vollste Allgemeinheit von vornherein verzichtet werden soll.

II.

Wir wollen nun die vorstehenden Betrachtungen auf Körper von vier Dimensionen übertragen.

Wir denken uns einen vierdimensionalen Körper P dadurch erzeugt, dass ein überall convexes Polyeder A seine Lage und Gestalt stetig ändert und schliesslich in ein neues Polyeder B übergeht. Diese Bewegung geschehe in folgender Art. Die Ecken des ursprünglichen Polyeders A beschreiben gerade Linien, welche sämmtlich aus dem Raume,[1] in welchem A sich befindet, heraustreten. Von diesen Geraden sollen je zwei, die von den Endpunkten einer Kante ausgehen, in derselben Ebene liegen, und alle

---

[1] Mit dem Worte „Raum" soll stets ein Gebiet von drei Dimensionen bezeichnet werden.

diejenigen, die von den Eckpunkten einer Fläche beschrieben werden, in dem nämlichen Raume sich befinden. Diese Geraden sollen ferner während der Bewegung einander nicht schneiden und solche Lagen haben, dass das sich bewegende Polyeder stets ein überall convexes bleibt. Am Schlusse der Bewegung, wenn A in B übergegangen ist, soll ein Zusammentreffen jener Geraden stattfinden können, jedoch so, dass B entweder ebenfalls ein überall convexes Polyeder ist, oder, im Falle es degenerirt, entweder in ein ebenes Polygon oder in eine Kante oder in eine Ecke sich zusammenzieht. Einen auf diese Weise erzeugten vierdimensionalen Körper P wollen wir wieder einen einfachen Körper nennen.

Bei einem solchen kann man nun die Begrenzungsstücke leicht übersehen. Die Ecken von P bestehen aus den Ecken von A und von B; die Kanten von P aus den Kanten von A und von B und den von den Ecken von A beschriebenen Geraden; die Flächen von P aus den Flächen von A und von B und den von den Kanten von A beschriebenen Ebenen; endlich die den Körper P begrenzenden Polyeder bestehen aus A und B selbst und den von den Flächen von A beschriebenen Polyedern. Bezeichnet man daher die Zahlen der Begrenzungsstücke von A, B, P, resp. mit n_k, N_k, n'_k, indem für die Ecken, Kanten, Flächen und Polyeder resp. $k=0$, 1, 2, 3, gesetzt wird, so hat man, wenn zuerst B ein Polyeder ist,

$$\begin{aligned} n'_0 &= n_0 + N_0 \\ n'_1 &= n_1 + N_1 + n_0 \\ n'_2 &= n_2 + N_2 + n_1 \\ n'_3 &= 2 \ + n_2; \end{aligned}$$

und hieraus folgt, da für B die Euler'sche Relation

$$N_0 - N_1 + N_2 = 2$$

gilt,

$$n'_0 - n'_1 + n'_2 - n'_3 = 0.$$

Dies ist also die Beziehung, welche bei einem vierdimensionalen Körper an die Stelle der Euler'schen Relation tritt.

Man gelangt zu demselben Resultate, wenn B degenerirt, denn je nachdem es sich in ein ebenes Polygon oder in eine Kante oder in eine Ecke zusammenzieht, erhält man an Stelle der vorigen Gleichungen, resp. die folgenden:

$$\begin{array}{lll}
n'_0 = n_0 + N_0 & n'_0 = n_0 + 2 & n'_0 = n_0 + 1 \\
n'_1 = n_1 + N_1 + n_0 & n'_1 = n_1 + 1 + n_0 & n'_1 = n_1 + n_0 \\
n'_2 = n_2 + 1 + n_1 & n'_2 = n_2 + n_1 & n'_2 = n_2 + n_1 \\
n'_3 = 1 + n_2 & n'_3 = 1 + n_2 & n'_3 = 1 + n_2.
\end{array}$$

Berücksichtigt man, dass in dem ersten Falle $N_0 - N_1 = 0$ ist, so folgt in allen drei Fällen wieder die obige Beziehung.

Nehmen nicht alle Ecken, Kanten und Flächen von A an der Bewegung Theil, sondern bleiben α_0 Ecken, α_1 Kanten und α_2 Flächen fest (α_2 kann höchstens gleich 1 sein, da zwei Räume nicht mehr als eine Ebene gemein haben können), so dass sie A und B gemeinschaftlich angehören, so entstehen die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
n'_0 &= n_0 + N_0 - \alpha_0 \\
n'_1 &= n_1 + N_1 - \alpha_1 + n_0 - \alpha_0 \\
n'_2 &= n_2 + N_2 - \alpha_2 + n_1 - \alpha_1 \\
n'_3 &= 2 + n_2 - \alpha_2;
\end{aligned}$$

welche ebenfalls das frühere Resultat liefern.

Den einfachsten vierdimensionalen Körper, der das Analogon zum Tetraeder im Raume bildet, erhält man, wenn man aus den Ecken eines Tetraeders A gerade Linien zieht, welche in einem Punkte B ausserhalb des Raumes, in dem A liegt, zusammentreffen. Dieser Körper hat fünf Ecken, nämlich B und die vier Ecken von A; zehn Kanten, nämlich die sechs Kanten von A und die von den vier Ecken von A beschriebenen Geraden; zehn Flächen, nämlich die vier Flächen von A und die von dessen sechs Kanten beschriebenen Ebenen; endlich begrenzen diesen Körper fünf Tetraeder, nämlich A selbst und die von den vier Flächen von A beschriebenen Tetraeder, so dass

$$n_0 - n_1 + n_2 - n_3 = 5 - 10 + 10 - 5 = 0$$

ist. In jeder Ecke dieses Körpers stossen vier Kanten zusammen, die zu je drei in vier verschiedenen Räumen liegen; sie bilden

sechs Flächen, zu je drei in denselben vier Räumen vertheilt; jede derselben ist zweien Räumen gemeinschaftlich. Endlich stossen in jeder Ecke vier in verschiedenen Räumen liegende Tetraeder zusammen. Alle fünf Tetraeder zusammen bilden innerhalb des vierdimensionalen Gebietes ein vollständig zusammenhängendes Gebiet von drei Dimensionen, durch welches das Innere unseres Körpers von dem übrigen Theile des vierdimensionalen Gebietes getrennt wird.

Die letzere Eigenschaft tritt noch deutlicher hervor an einem Körper, der entsteht, wenn man ein rechtwinkeliges Parallelepipedon A so bewegt, dass seine Ecken parallele gerade Linien von gleicher Länge beschreiben. Man lasse nämlich drei zusammenstossende Kanten von A mit drei rechtwinkeligen Coordinatenaxen x, y, z zusammenfallen, und es seien resp. a, b, c die Längen dieser Kanten. Die Ecken mögen sich bewegen parallel zu der der vierten Dimension angehörigen Coordinatenaxe w, und die gemeinschaftliche Länge der dadurch erzeugten Kanten sei d. Wird dann irgend ein Punkt durch die Coordinaten

$$x = \alpha, \; y = \beta, \; z = \gamma, \; w = \delta$$

bestimmt, so befindet er sich im Innern unseres Körpers, wenn α, β, γ, δ Werthe haben, welche zwischen Null und resp. a, b, c, d enthalten sind; wir wollen im Folgenden für α, β, γ, δ stets solche Werthe voraussetzen. Der Körper wird begrenzt von acht Parallelepipeden, und man überblickt nun leicht den Zusammenhang des Gebietes von drei Dimensionen, das dieselben innerhalb des vierdimensionalen Gebietes bilden, wenn man einen Punkt durch eine ununterbrochene Bewegung nach und nach durch alle acht Parallelepipeda hindurchführt, was in der That geschehen kann, ohne eine Seitenfläche eines Parallelepipedes zu überschreiten, nämlich in folgender Weise.

Da die Parallelepipeda alle in verschiedenen Räumen liegen, je zwei der letzteren aber nicht mehr als eine Ebene gemeinsam haben können, so bringe man einen im Innern eines Parallelepipeds liegenden Punkt zuerst in eine Seitenfläche desselben; dann kann man, indem man durch diese nicht hindurchgeht, in das Innere des an diese Seitenfläche anstossenden Parallelepipeds gelangen, denn da in diesem zweiten Raume die übrigen

Seitenflächen des ersteren Parallelepipeds sich gar nicht vorfinden, so besteht für die Ausführung dieser Bewegung kein Hinderniss. Geht man z. B. von dem Punkte ($\alpha\,\beta\,\gamma\,o$) aus, der in dem Raume liegt, welcher durch die Axen x, y, z bestimmt ist, und zwar im Innern des dort befindlichen Parallelepipeds mit den Kanten a, b, c, so führe man ihn zuerst in die Lage ($\alpha\,\beta\,o\,o$), dann befindet er sich in der Seitenfläche mit den Kanten a, b. Geht man dann zu ($\alpha\,\beta\,o\,\delta$) über, so ist der Punkt in den durch x, y, w bestimmten Raum gelangt und in das Innere des dort befindlichen Parallelepipeds mit den Kanten a, b, d. Da aber die Coordinaten x, y, z dabei weder den Werth Null, noch resp. die Werthe a, b, c überschritten haben, so ist der Punkt durch keine Seitenfläche des Parallelepipedes mit den Kanten a, b, c hindurchgegangen. Ebenso führt man nun den Punkt wieder in eine Seitenfläche dieses zweiten Parallelepipeds, etwa nach ($\alpha\,o\,o\,\delta$) und dann in ein drittes Parallelepiped, etwa nach ($\alpha\,o\,\beta\,\delta$); und in derselben Weise kann man weiter gehen. In der folgenden Zusammenstellung enthält die erste Columne Punkte, welche der Reihe nach in den acht Parallelepipeden liegen, und diese werden in der Weise durchlaufen, dass der bewegliche Punkt jedesmal aus dem Innern eines Parallelepipeds zuvor in die (nebenstehend in der zweiten Columne angegebene) Lage auf einer Seitenfläche des letzteren und dann erst in das folgende Parallelepiped geführt wird:

1.	($\alpha\,\beta\,\gamma\,o$)	($\alpha\,\beta\,o\,o$)
2.	($\alpha\,\beta\,o\,\delta$)	($\alpha\,o\,o\,\delta$)
3.	($\alpha\,o\,\gamma\,\delta$)	($o\,o\,\gamma\,\delta$)
4.	($o\,\beta\,\delta\,\gamma$)	($o\,\beta\,\gamma\,d$)
5.	($\alpha\,\beta\,\gamma\,d$)	($\alpha\,\beta\,c\,d$)
6.	($\alpha\,\beta\,c\,\delta$)	($\alpha\,b\,c\,\delta$)
7.	($\alpha\,b\,\gamma\,\delta$)	($a\,b\,\gamma\,\delta$)
8.	($a\,\beta\,\gamma\,\delta$)	

Führt man den Punkt nun in dem letzten Parallelepiped auf eine Seitenfläche desselben nach ($a\,\beta\,\gamma\,o$), so kann man ihn wieder nach ($\alpha\,\beta\,\gamma\,o$) zurückbringen in das Parallelepiped, von welchem er ausgegangen ist.

Demnach hängen die acht begrenzenden Parallelepipeda in der That zusammen, und dass sie das Innere unseres Körpers von dem übrigen Theile des vierdimensionalen Gebietes trennen, folgt daraus, dass um in diesen Theil zu gelangen, eine oder mehrere der Coordinaten x, y, z, w entweder negativ werden, oder resp. die Werthe a, b, c, d überschreiten müssen. Wenn aber dies eintritt, muss der bewegliche Punkt durch eine Seitenfläche eines Parallelepipeds hindurchgegangen sein.

Umgekehrt, sobald ein Punkt von dem Innern aus durch eine dieser Seitenflächen hindurchgeht, so werden eine oder mehrere seiner Coordinaten entweder negativ, oder überschreiten resp. die Werthe a, b, c, d, und daher gelangt der Punkt dann jedesmal in das äussere Gebiet. Dagegen kann er aus dem Innern eines der acht Parallelepipede stets nach $(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta)$, also aus dem Parallelepiped heraus und in das Innere des Körpers gelangen, ohne eine Seitenfläche zu überschreiten. Demnach sind die Parallelepipede gegen das Innere des Körpers zu vollständig offen, und durch Überschreiten einer ihrer Seitenflächen gelangt man stets in das äussere Gebiet.

Man übersieht hienach, welche Rolle bei einem vierdimensionalen Körper die begrenzenden Polyeder und die Flächen derselben spielen. Bewegt sich ein Punkt im Innern eines der begrenzenden Polyeder, so wird er, sobald er an eine Fläche desselben gelangt, gehindert, seine Bewegung in diesem Polyeder in derselben Richtung fortzusetzen, er kann aber in das an diese Fläche anstossende Polyeder ausbiegen und in diesem weiter gehen. Geht er durch eine Fläche hindurch, so gelangt er stets nach aussen, dagegen kann er aus jedem Polyeder in das Innere gelangen, ohne eine Fläche überschreiten zu müssen. Demnach hat man sich einen vierdimensionalen Körper so vorzustellen, dass ein im Innern befindliches vierdimensionales Gebiet umgeben und begrenzt wird von einem von den Polyedern gebildeten dreidimensionalen Gebiete, welches nicht bloss in sich selbst zusammenhängt, sondern auch mit dem vierdimensionalen Gebiete des Innern, ähnlich wie bei einem dreidimensionalen Körper das zweidimensionale Gebiet der Flächen mit dem dreidimensionalen des Innern zusammenhängt. Die Flächen der begrenzenden Polyeder sind zugleich die Flächen des Körpers; wird eine

von ihnen von innen her überschritten, so gelangt man stets in das äussere Gebiet. Damit der Körper vollständig begrenzt sei, müssen immer mehrere Polyeder vorhanden sein, die in verschiedenen Räumen liegen, und zwar mindestens fünf, wie aus dem oben beschriebenen, dem Tetraeder im Raume entsprechenden Körper hervorgeht. Analog sind bei einem Polyeder im Raume mindestens vier Flächen, bei einem Polygon in der Ebene mindestens drei Seiten zur Begrenzung erforderlich.

Wir wollen nun dazu übergehen, die Geltung der oben gefundenen Relation

$$n_0 - n_1 + n_2 - n_3 = 0$$

zu erweitern für vierdimensionale Körper, die nicht mehr „einfache" sind, falls sie gewissen Bedingungen genügen. Zu dem Ende bemerke man Folgendes: In jeder Ecke eines Körpers K stossen mehrere Kanten zusammen, und zwar mindestens vier, denn es müssen in der Ecke auch mehrere Polyeder zusammenstossen, die in verschiedenen Räumen sich befinden; drei Kanten aber liegen stets nur in einem Raume. Wählt man irgend eine Ecke C aus, so sei r die Anzahl der hier zusammenstossenden Kanten. Diese liegen nicht alle in demselben Raume, doch lassen sich aus ihnen Gruppen bilden von der Art, dass alle Kanten derselben Gruppe auch in demselben Raume liegen. Jede Kante wird gleichzeitig mehreren Gruppen angehören. Würde man durch die Kanten einer und derselben Gruppe eine Ebene legen, so würde man eine Pyramide erhalten. Wir wollen desshalb diese Gruppen der Kürze wegen mit dem Namen Pyramiden bezeichnen, und es sei p ihre Anzahl. Die von den Kanten eingeschlossenen Flächen bilden gruppenweise die Seitenflächen der p Pyramiden; jede Seitenfläche gehört gleichzeitig zweien Pyramiden an, die in verschiedenen Räumen liegen. Die Anzahl aller dieser Seitenflächen sei s.

Die r von C ausgehenden Kanten führen nach eben so vielen Ecken von K, die mit $a_1, a_2, \ldots a_r$ bezeichnet seien. Wir nehmen nun die Beschaffenheit und Lage der in C zusammenstossenden Kanten, Flächen und Pyramiden so an, dass man alle diejenigen unter den Ecken a, die auf den Kanten einer und derselben Pyramide liegen, mit einander zu einem einzigen geschlossenen

Züge durch gerade Linien α verbinden könne, welche ganz auf den Seitenflächen der Pyramide verlaufen. Sodann aber nehmen wir weiter an: Wenn man durch jeden dieser geschlossenen Züge eine (entweder ebene oder aus ebenen Theilen bestehende gebrochene) Fläche F legt, so sollen diese Flächen F sich zu einem (im Allgemeinen nicht ganz in einem und demselben Raume liegenden) Polyeder M zusammenschliessen, welches so beschaffen sei, dass für dasselbe die Euler'sche Relation gelte. Endlich nehmen wir noch an, dass der Körper K durch das Polyeder M und dessen Flächen so in zwei getrennte Theile zerlegt werde, dass der eine von beiden, der L heisse, die Ecke C nicht enthalte, dagegen das Polyeder M und dessen Flächen und Kanten sämmtlich zu seinen Begrenzungsstücken zähle.

Wenn diese Bedingungen erfüllt sind, so wird von K die Ecke C abgetrennt und ein neuer Körper L gebildet. Es soll bewiesen werden, dass die Zahl

$$n_0 - n_1 + n_2 - n_3$$

durch diese Abtrennung ihren Werth nicht ändert.

Zuvor aber ist über das Polyeder M noch etwas zu bemerken. Die Flächen F desselben befinden sich im Allgemeinen nicht alle in demselben Raume; M verhält sich analog wie ein Polygon, dessen Seiten nicht alle in derselben Ebene liegen. Was die Euler'sche Relation anbelangt, so ist es offenbar einerlei, ob man dabei jede Fläche F nur als eine einzige zählt und dann als Kanten nur diejenigen betrachtet, in denen die F zusammenstossen, oder ob man in jeder Fläche F die ebenen Flächen, aus denen sie besteht, einzeln rechnet und dann auch die Kanten, welche die letzteren trennen, mitzählt. Man überzeugt sich leicht, dass, wenn die Euler'sche Relation bei der einen Auffassung gilt, dies auch bei der andern stattfindet. Denn wird eine Fläche F durch ε Diagonalen in $\varepsilon + 1$ ebene Theile zerlegt und durch diese ersetzt, so ändert sich sowohl die Anzahl der Kanten, als auch die der Flächen um ε. Die Differenz derselben bleibt also ebenso wie die Anzahl der Ecken ungeändert. Die erstere Auffassung aber führt zu einer Relation zwischen den Zahlen r, s und p. Nämlich jede Fläche F gehört zu einer der früher erwähnten Pyramiden, ihre Anzahl ist daher p; jede Kante von M liegt

in einer Pyramidenfläche, und jede Ecke in einer Pyramidenkante, d. h. r ist die Anzahl der Ecken von M, und s die Anzahl der Kanten, mithin ist der Annahme gemäss

$$r - s + p = 2;$$

und dies bedeutet nichts anderes, als dass die p Pyramiden eine solche Lage zu einander haben, dass, wenn man sie alle mit einem ebenen Raume schneidet, der Schnitt ein gewöhnliches Polyeder bildet, für welches die Euler'sche Relation gilt.

Wir wollen nun die Unveränderlichkeit der Zahl

$$n_0 - n_1 + n_2 - n_3$$

zuerst für einen einfachen Fall beweisen. Nehmen wir an, die Geraden α seien sämmtlich Kanten des ursprünglichen Körpers K, dann sind die Figuren F zugleich Flächen von K und daher ebene Polygone. Nehmen wir ferner an, dass diese Polygone F alle in ein und demselben Raume liegen, so ist M ein gewöhnliches Polyeder. In diesem Falle verliert K bei Ablösung der Ecke C nur diese Ecke selbst und die in ihr zusammenstossenden r Kanten, s Flächen und p Pyramiden, während in L nur das Polyeder M als Begrenzungsstück neu hinzutritt. Man hat also

n_0	nimmt	zu	um	-1
n_1	„	„	„	$-r$
n_2	„	„	„	$-s$
n_3	„	„	„	$-p+1$,

folglich bleibt die Zahl $n_0 - n_1 + n_2 - n_3$, weil $r - s + p = 2$ ist, vollständig ungeändert.

Um dasselbe auch in dem allgemeinen Falle nachzuweisen, wollen wir jetzt annehmen, dass unter den Geraden α sich δ befinden, die nicht zugleich Kanten von K sind. Diese treten dann der Annahme nach in L als δ neue Kanten auf. Von denselben liegen entweder nur eine, oder gleichzeitig mehrere auf einer und derselben Pyramide. Möge ρ die Anzahl der Pyramiden sein, bei denen dies vorkommt. Dann ist ρ auch gleichzeitig die Zahl der Flächen F, unter deren Kanten sich solche Linien α befinden. Eine solche Fläche F darf dann nicht mehr als eben vorausgesetzt werden, man kann sie aber durch Diagonalen in eine gebrochene,

aus Ebenen bestehende Fläche verwandeln, und sind ε' Diagonalen dazu nöthig, so besteht F aus $\varepsilon'+1$ ebenen Flächen. Wird diese Verwandlung bei allen ρ Flächen vorgenommen, so entstehen dadurch $\Sigma\varepsilon'+\rho$, oder wenn $\Sigma\varepsilon'=\varepsilon$ gesetzt wird, $\varepsilon+\rho$ ebene Flächen, die als neue Flächen bei L auftreten, während L zugleich ε neue Kanten gewinnt. Neue Ecken treten dabei aber nicht auf.

Die Flächen F begrenzen das Polyeder M; dieses wird nach der Zerlegung der Flächen F von lauter ebenen Flächen begrenzt und bildet, wenn man sich dieses Ausdruckes bedienen darf, ein gebrochenes Polyeder, nämlich ein solches, dessen Seitenflächen nicht alle in demselben Raume sich befinden. Der Ausdruck soll darauf hindeuten, dass man M durch Querwände in Theile theilen kann, von denen jeder ganz in einem und demselben Raume liegt. Zu dem Ende geht man von irgend einer Ecke aus, fasst so viele aneinanderstossende Flächen zusammen, als in demselben Raume sich befinden (deren mindestens drei vorhanden sein müssen) und legt die erste Querwand durch diejenigen Kanten, an welche Flächen anstossen, die aus diesem Raume heraustreten. Diese Querwand ist ein Polygon, das, wenn es nicht eben ist, durch Diagonalen in ebene Theile zerfällt. Da jeder der letzteren gleichzeitig auch einem der anstossenden neuen Räume angehört, so kann in derselben Weise fortgefahren werden. Hat man im Ganzen k solcher Querwände zu ziehen, so wird M in $k+1$ Theile zerlegt. Die Querwände können, wie schon bemerkt, durch Diagonalen in ebene Theile getheilt werden. Sind in einer Querwand dazu σ' Diagonalen nöthig, so besteht die Querwand aus $\sigma'+1$ ebenen Flächen, alle k Querwände liefern daher, wenn $\Sigma\sigma'=\sigma$ gesetzt wird, $\sigma+k$ Flächen und σ Kanten. Durch diese Zerlegung treten also bei L als neue Begrenzungsstücke auf: σ Kanten, $\sigma+k$ Flächen und $k+1$ Polyeder. Neue Ecken aber entstehen hier wiederum nicht.

Hienach kann man nun, wenn von K die Ecke C abgelöst wird, angeben, wie viele Begrenzungsstücke L mehr oder weniger hat als K. Zuerst hat L nur die eine Ecke C weniger als K, also

$$n_0 \text{ nimmt zu um } -1.$$

Die Kanten anlangend, so verliert K die r Kanten, die in C zusammenstossen, dagegen treten in L neu auf: die δ Linien α, die

nicht Kanten von K waren, die ε Kanten, die durch die Zerlegung der Flächen F entstanden, und die σ Kanten, die bei Zerlegung von M sich einstellten, also

$$n_1 \text{ nimmt zu um } -r+\delta+\varepsilon+\sigma.$$

Bezüglich der Flächen ist zu bemerken, dass, wenn eine der s Pyramidenflächen eine der δ Linien α enthält, die nicht zugleich Kanten von K sind, diese Fläche bei der Theilung nicht ganz verloren geht, sondern nur verkleinert wird. Daher fallen nur $s-\delta$ Pyramidenflächen fort, dagegen kommen neu hinzu die $\varepsilon+\rho$ Flächen, in welche die F zerlegt wurden, und die $\sigma+k$ Flächen, die bei M auftraten; demnach

$$n_2 \text{ nimmt zu um } -(s-\delta)+(\varepsilon+\rho)+(\sigma+k).$$

Endlich verliert K auch nicht alle p Pyramiden ganz, sondern nur diejenigen, welche lauter solche Linien α enthalten, die zugleich Kanten von K sind, also nur $p-\rho$, von den übrigen wird bloss ein Stück abgeschnitten, und in L treten die $k+1$ Polyeder hinzu, in welche M zerfiel; daher

$$n_3 \text{ nimmt zu um } -(p-\rho)+(k+1).$$

Stellt man zusammen, so ergiebt sich

$$\begin{array}{llll} n_0 \text{ nimmt zu um } & -1 & & \\ n_1 \quad " \quad " \quad " & -r+\delta+\varepsilon+\sigma & & \\ n_2 \quad " \quad " \quad " & -s+\delta+\varepsilon+\sigma+\rho+k & & \\ n_3 \quad " \quad " \quad " & -p & & +\rho+k+1; \end{array}$$

mithin nimmt die Zahl $n_0-n_1+n_2-n_3$ zu um

$$-2+r-s+p$$

und bleibt also, da $r-s+p=2$ ist, unverändert.

Demnach gilt die oben gefundene Relation

$$n_0-n_1+n_2-n_3=0$$

für jeden vierdimensionalen, von Polyedern begrenzten Körper, der die Eigenschaft hat, dass man von ihm nach und nach eine Ecke nach der andern unter den oben aufgestellten Bedingungen abtrennen kann, bis zuletzt ein „einfacher" Körper übrig bleibt:

oder auch, dass man alle Ecken bis auf fünf ablösen kann, so dass man zuletzt den oben beschriebenen, von fünf Tetraedern begrenzten Körper übrig behält.

Wenn man sich auf „einfache“ Körper beschränkt, so kann man noch einen Schritt weitergehen. Ebenso wie aus einem einfachen Polyeder ein einfacher Körper von vier Dimensionen entstand, kann man aus diesem unter den analogen Beschränkungen einen einfachen Körper von fünf Dimensionen, aus diesem wieder einen von sechs Dimensionen u. s. f. entstehen lassen und dann die zwischen den Zahlen der Begrenzungsstücke stattfindenden Relationen immer nach derselben Methode finden. Wendet man die Bezeichnungen n_k, N_k, n'_k mit derselben Bedeutung an wie früher, und lässt den Index k die Anzahl der Dimensionen bedeuten, welche das Begrenzungsstück besitzt, so hat man für einen Körper von fünf Dimensionen die Gleichungen

$$\begin{aligned} n'_0 &= n_0 + N_0 \\ n'_1 &= n_1 + N_1 + n_0 \\ n'_2 &= n_2 + N_2 + n_1 \\ n'_3 &= n_3 + N_3 + n_2 \\ n'_4 &= 2 + n_3 \end{aligned}$$

und erhält, da die N_k einem einfachen vierdimensionalen Körper angehören, also $N_0 - N_1 + N_2 - N_3 = 0$ ist,

$$n'_0 - n'_1 + n'_2 - n'_3 + n'_4 = 2.$$

Da nun aber der Bau dieser Gleichungen bei den folgenden Schritten sich immer gleich bleibt und jedesmal die Relation zur Anwendung kommt, die für den Körper gilt, der eine Dimension weniger hat, so befolgen diese Relationen ein sehr einfaches Gesetz; nämlich es ist bei einem

Polygon . . . . $n_0 - n_1 = 0$
Polyeder . . . . $n_0 - n_1 + n_2 = 2$
Körper von 4 Dimensionen $n_0 - n_1 + n_2 - n_3 = 0$
„ „ 5 „ $n_0 - n_1 + n_2 - n_3 + n_4 = 2$
„ „ 6 „ $n_0 - n_1 + n_2 - n_3 + n_4 - n_5 = 0$ u. s. f.

Über die Dotterpigmente.

Von **Richard Maly** in Graz.

Bei meinen schon vor mehreren Jahren begonnenen Untersuchungen über das sogenannte Luteïn, respective die Farbstoffe des Eidotters, lag zunächst der Gedanke vor, zu prüfen, ob sich irgend ein chemischer Zusammenhang zwischen demselben und den Gallenfarbstoffen oder dem Blutfarbstoffe nachweisen lasse, wenigstens in der Art, wie ein solcher Zusammenhang zwischen Blutfarbstoff und Gallenfarbstoffen untereinander besteht, was sich bekanntlich durch die Möglichkeit der Überführung beider in einen und denselben Körper das Hydrobilirubin ergibt.

Das Nachfolgende wird eine Lösung dieser Frage enthalten, und zwar wird sich ergeben, dass ein solcher Zusammenhang nicht stattfindet, und dass auch eine physiologisch zu vermuthende Verwendung der Dotterfarbstoffe für die Bildung von Blutfarbstoff mit grosser Wahrscheinlichkeit von der Hand zu weisen ist. Ausserdem werden Methoden beschrieben werden, durch welche die betreffenden Substanzen wenigstens einigermassen rein dargestellt werden können.

Bevor ich darauf eingehe, sei mir gestattet, die einzelnen einschlägigen Angaben aus der Literatur hier zusammenzustellen, da ich nicht finden kann, dass dieselben irgendwo gesammelt worden wären.

In seiner Thierchemie sagt Berzelius[1] von den Dotterfarbstoffen Folgendes: „Chevreul fand einen röthlichen und einen gelblichen Farbstoff darin (d. h. im Hühnereidotter), welchen

[1] Lehrbuch der Chemie von J. J. Berzelius, übersetzt von F. Wöhler. Band 9, pag. 651, 1840.

letzteren er mit der gelben Materie der Galle verglich." Das von Berzelius nicht citirte Original habe ich nicht weiter aufzusuchen mich bemüht, da bei der Sorgfalt, mit der Berzelius in diesem berühmten Buche alle Angaben seinerzeit aufgenommen hat, dasselbe nicht mehr enthalten haben dürfte.

Gobley[1] zählt im Eidotter 12 Körper auf, darunter einen gelben und einen rothen Farbstoff, die er so darstellte; er behandelte Eigelb mit heissem Alkohol, schied durch Abkühlen Olein und Cholesterin ab, wobei ein Farbstoff mit „ziemlich entschieden rother Farbe" gelöst blieb. Durch Wiederauflösen des Cholesterins in Alkohol und Auskrystallisirenlassen desselben blieb ein mehr gelbgefärbter Stoff zurück. Fest oder rein konnte keiner von beiden Körpern erhalten werden. Der rothe schien in Weingeist löslicher zu sein als der gelbe; im rothen liess sich auch Eisen nachweisen. Später hat Gobley[2] die Karpfeneier untersucht; auch von ihnen sagt er, der eine Farbstoff darin ist mehr roth und eisenhaltig, er sei das Analogon vom Blutroth, der andere ist mehr gelb, er wird mit dem gelben Blutserum- und Gallenfarbstoff verglichen.

Die grünen Hummereier haben Valenciennes und Fremy[3] extrahirt. Der daraus erhaltene Farbstoff war eine grüne harzartige Substanz, die durch verschiedene Einflüsse, so durch Trocknen im Vacuum, durch Berührung mit Alkohol, durch Reiben etc. roth geworden sein soll. Ebenso soll sich auch der in den Hummerschalen selbst enthaltene Farbstoff verhalten haben.

Ein wenig mehr als das Vorhergehende trugen zur Charakteristik der Dotterfarbstoffe die Arbeiten von Städeler und von Holm bei, durch welche einerseits die Aufmerksamkeit auf ähnlich sich verhaltende gelbe Farbstoffe anderer Fundstellen gelenkt, andererseits in bestimmter Weise die Verschiedenartigkeit vom gelben Gallenfarbstoff und vom Dotterfarbstoff nachgewiesen wurde. Nachdem nämlich der gelbe Gallenfarbstoff das Bilirubin krystallinisch erhalten und vor Allem durch Städeler in seinen Haupteigenschaften beschrieben war, hat F. Holm[4] daran

---

[1] Lieb. Annal. 60, 275, und chem. Centralblatt 1846.

[2] Chemisches Centralblatt 1850, 381.

[3] Daselbst 1854, 623.

[4] Journal für praktische Chemie 100; 142, 1867.

anschliessend gezeigt, dass die sogenannten Hämatoidinkrystalle aus den apoplectischen Cysten — welche von den Pathologen zumeist als Bilirubinkrystalle angesprochen wurden — davon verschieden sind, und ebenso, dass auch der gelbe, zum Theil in hämatoidinähnlichen mikroskopischen Kryställchen in den Corpora lutea der Kuh vorkommende Farbstoff keinesfalls Bilirubin ist.

Im Zusammenhange mit Holm's Beobachtungen hat dann Städeler[1] die Untersuchung der farbigen Körper des Hühnereidotters aufgenommen und gefunden, dass der Farbstoff davon — Städeler spricht in der Einzahl — ebenfalls vom Bilirubin vollständig verschieden ist, dass er aber in Lösungsverhältnissen und Farbenreactionen mit dem Farbstoffe der apoplectischen Cysten dem sogenannten Hämatoidin und mit dem der Corpora lutea übereinstimmt.

Städeler's Angaben bilden eigentlich die einzige Vorarbeit über den Gegenstand; er schüttelte nichtcoagulirten Hühnereidotter mit Äther, wobei Farbstoff und Fett in den Äther übergehen, verseifte den Ätherrückstand mit Natron und zog den Seifenleim wieder mit Äther aus. Dieser Ätherauszug hinterliess aber nochmals ein nicht oder schwierig verseifbares Fett, das allmälig Cholesterin ausschied, butterartig erstarrte, und goldgelb gefärbt war. Dieses farbstoffreiche Fett war das Präparat Städeler's. Es hatte Ähnlichkeit mit dem hämatoidinhaltigen Fette der Eierstöcke, löste sich mit goldgelber Farbe in Äther und Chloroform, in Schwefelkohlenstoff mit orangenfarbener. Beim Zerrühren mit wenig einer concentrirten Salpetersäure färbte es sich vorübergehend rein blau. Bei Gegenwart von Weingeist wurde es von Salpetersäure ohne Farbenspiel entfärbt.

Hiemit hatten Städeler und Holm ein unterscheidendes Merkmal zwischen Dotterfarbstoff und dem der Corpora lutea[2]

---

1 Journal für praktische Chemie 100; 148, 1867.

2 Das Hämatoidin der (apoplectischen) Cysten meine ich hier nicht, da E. Salkowski Chemisches Centralblatt 1869, 32 aus dem Inhalte einer Strumacyste einmal ein sogenanntes Hämatoidin erhielt, das alle Eigenschaften des Bilirubins besass. Der Name Hämatoidin bedeutet daher nichts Chemischbestimmtes, ist nur der Ausdruck für rothe oder gelbe mikroskopische Kryställchen von thierischen Fundstellen, und wäre am besten zu streichen.

einerseits und dem Bilirubin andererseits constatirt: 1. die beiden ersteren lassen sich aus einer stark alkalischen Flüssigkeit mit Äther ausschütteln, während das Bilirubin umgekehrt sich aus solchen Flüssigkeiten nicht ausschütteln lässt, vielmehr durch Alkalien seiner Lösung in Chloroform, Äther etc. entzogen wird; 2. Gallenfarbstoff gibt mit Salpetersäure das bekannte Farbenspiel, auch bei Gegenwart von Alkohol, Dotterfarbstoff gibt mit Salpetersäure blaue Färbung, bei Gegenwart von Alkohol tritt aber durch Salpetersäure sofort Entfärbung ein.

Das Pigment aus dem Eierstocke der Kuh haben auch G. Piccolo und A. Lieben[1] untersucht. Sie verseiften das Ätherextract einer grossen Zahl gelber Körper, verdünnten, und konnten dann aus der Seifenlösung eine kleine Menge glänzender, mikroskopischer, dichroitischer Kryställchen abfiltriren, die aber nicht durch die Einwirkung des Alkalis erst entstanden, sondern bereits im ursprünglichen ätherischen Auszuge enthalten waren. Die Hauptmasse der Farbstoffe blieb in der Seifenlösung gelöst. Die Kryställchen waren in Äther, Benzol und Schwefelkohlenstoff löslich, färbten sich unter dem Mikroskope mit concentrirter Schwefelsäure blau und verloren ihre rothe Farbe an der Luft, blieben ab davon geschützt, unverändert. Die Verfasser schlugen für ihre Krystalle die Namen Luteohämatoidin oder Hämoluteïn vor.

Thudichum[2] fasst in einer kurzen Mittheilung im Jahre 1869 eine Reihe gelber Farbstoffe verschiedener Örtlichkeiten, so die der Ovarien, des Eidotters, des Blutserums, der Zellen des Fettgewebes, des Milchfettes, der serösen Ergüsse, der Samen des Mais, des Fleisches von Pflanzenbeeren, der gelben Rüben, des Orleangelb und der gelben Blüthen von 42 Pflanzenspecies unter dem Namen Luteïn zusammen. Er spricht von „Krystallen des Luteïns", nennt sie scheinbar rhombische Tafeln, gibt aber nicht mit einer Silbe an, wie sie darzustellen wären, oder wo man sie finden könnte. In Alkohol, Äther und Chloroform soll das Luteïn löslich sein. Mit Salpetersäure soll es blau und dann wieder gelb werden, und im Spectrum sollen zwei oder auch drei Streifen auftreten. Die Körper von Holm und Städeler fallen nach Thu-

[1] Zeitschrift für Chemie 1868, 645.

[2] Centralblatt für die medicinischen Wissenschaften 1869, 1.

dichum ebenfalls mit Luteïn zusammen, während die Gallenfarbstoffe auch Thudichum als völlig verschieden von seinem Luteïn erkennt.

Einen neuen Fundort für das gelbe mit Salpetersäure sich blau färbende Pigment hat dann Capranica[1] in seiner in Boll's Laboratorium in Rom ausgeführten Arbeit über die farbigen Substanzen der Retina angegeben. Es sind das die farbigen mikroskopischen Ölkugeln, die in der Retina fast jeden Wirbelthieres sich finden. Drei Farbreactionen hat Capranica an ihnen beobachtet: 1. concentrirte Schwefelsäure verwandelt unter dem Mikroskop die goldgelbe Farbe momentan in violett und sehr bald in tiefes Blau; 2. concentrirte Salpetersäure färbt für einen Augenblick blaugrün und macht dann farblos; 3. Jodkaliumjodlösung macht grün bis blaugrün. Die Hauptmasse dieser Kugeln ist eine Fettsubstanz. Durch Ausziehen der Netzhäute (vom Huhn) mit Alkohol erhielt Capranica eine gelbe Lösung, die auf Schwefelkohlenstoffzusatz röther wurde. Beide Lösungen absorbiren im Spectrum das Licht etwa von *b* an, und lassen nach starker Verdünnung noch zwei Streifen über, den einen um *F* herum, den anderen etwa in der Mitte zwischen *F* und *G*. Am Lichte blichen die Lösungen ab, wobei Luft ohne Einfluss sein soll. Darnach hält Capranica seinen Farbstoff für identisch mit dem im Eidotter und dem der Corpora lutea und behält den Namen Luteïn.

Endlich ist noch der Arbeiten Kühne's[2] zu gedenken. Derselbe nennt die Farbstoffe der retinalen Ölkugeln „die lichtbeständigen Farben" der Netzhaut im Gegensatze zum Sehpurpur eine Gegenüberstellung, die nur relativ richtig ist. Durch Verseifung des Rückstandes der alkoholischen und ätherischen Auszüge aus den Netzhäuten vom Huhn, mit Natronlauge und Behandlung der rothen Seife mit Lösungsmitteln erhielt Kühne Lösungen von verschiedenen Farben: mit Petroleumäther einen gelbgrünen Auszug, den er Chlorophan nennt, mit Äther einen gelben, den er Xantophan nennt, worauf die Seife als rosenrothe Masse zurückblieb (Rhodophan). Die Absorptionsspectra wiesen, wie bei Cap-

---

[1] Archiv für Anat. und Physiol. Physiol. Abtheil. Jahrg. 1877, 283.

[2] Untersuchungen a. d. physiol. Instit. Heidelberg 1, 341, und Jahresberichte für Thierchemie 8, 280.

ranica Verdunklung im violetten Theile und im gemischten Äther-extract meist zwei Streifen auf. Die alkoholisch-ätherische Lösung vom Eidotter fand Kühne spectraliter den retinalen Lösungen ähnlich; mehrere der Farbe nach unterschiedene Lösungen aus Dotterseife zu erhalten, gelang aber nicht.

Nach diesem Stande der Kenntnisse kommen an verschiedenen thierischen (und pflanzlichen) Fundstellen ein oder mehrere gelb- bis orangenrothe Farbstoffe vor, die vom Bilirubin definitiv verschieden, untereinander durch ihre Widerstandsfähigkeit gegen Alkalien, ihre Farbreaction mit Salpetersäure, ihre lichtabsorbirenden Eigenschaften und ihr nach einiger Zeit stattfindendes Abbleichen charakterisirt sind. Krystallisationsvermögen scheint ihnen nur ausnahmsweise (Hämatoidinkrystalle der gelben Körper im Eierstock) zuzukommen, meist sind sie nur in alkoholischen oder ätherischen Lösungen oder als gefärbte Seifen erhalten worden. Die Schwierigkeit der Untersuchung liegt hier vor Allem in der Beschaffung des Materials, denn mit so minimalen Mengen, wie sie die retinalen Ölkügelchen darstellen, wird sich eine eigentlich chemische Untersuchung nie ausführen lassen, und andererseits liegt sie wie beim Hühnereidotter in der grossen Masse von Fett und der Gegenwart von anderen unbekannten Substanzen.

Es schienen mir desshalb für eine derartige Untersuchung wegen ihres geringen Fett- und hohen Farbstoffgehaltes die rothen Eier der Seespinnen *(Maja Squinado)*, die man von den Küsten Istriens im Frühjahre erhalten kann, ein geeignetes Materiale, und ich zweifle nicht, dass jede weitere Untersuchung sich desselben mit Vortheil bedienen wird. Jedes Weibchen dieser Thiere hat in einer, wie eine flache Schale mit der Convexität nach aussen auf den Bauch gelegten Schwanzklappe (richtiger Abdominalplatte) circa eine kleine Handvoll dieser prächtig rothen (nackten) Eidotter, an chitinösen Trägern (Abdominalfüssen, Bauchfüssen) befestigt. Jeder Abdominalfuss bildet mit den daran hängenden Eiern ein Träubchen, das man mit einem Scheerenschnitt herauslösen kann. Es ist nicht schwer und nicht gar zu kostspielig, sich einige Kilo solcher Eier zu verschaffen, die einen sehr ansehn-

lichen Farbstoffgehalt repräsentiren. Doch muss man dieselben aus dem lebenden Thiere herausnehmen, denn nach dem Tode zersetzen sie sich rasch wie alle Meeresproducte und werden bald übelriechend und missfärbig.

Einige Bestimmungen über den Wasser- und Aschegehalt und über den Gehalt an Alkohol- und Ätherextract der frischen Eier hat für mich Herr Hinteregger ausgeführt.

I. 5·5967 Grm. frische Eier gaben bei 100 bis 110° C. anhaltend getrocknet 3·682 Grm. oder 65·7% Wasser ab.

II. 5·639 Grm. Eier eines anderen Thieres verloren 3·525 Grm. oder 62·52% Wasser.

Im Mittel beträgt der Wassergehalt 64·1%.

Eine andere Partie vorher getrockneter Eier wurde in dem von mir [1] beschriebenen Extractionsapparate erst mit Äther und darauf mit Alkohol heiss extrahirt. Es gaben:

5·915 Grm. trockener Eier 0·8152 Grm. oder 13·78% Ätherextract und 1.448 Grm. oder 24·47% Alkoholextract. Der Rückstand im wesentlichen aus Eiweisskörper bestehend, lieferte 0·1683 Grm. oder, auf die ursprünglichen trockenen Eier bezogen, 2·84% Asche.

Man sieht hieraus, dass die Seespinneneier gegenüber den Vogeleiern (respective Vogeleidottern) sehr arm an Fett sind, denn in den 13·7% Ätherextract ist auch der grösste Theil des Farbstoffes und das Cholesterin enthalten.

Wegen der Zersetzlichkeit der frischen nassen Eier (Dotter) muss man den Vorrath conserviren, was sich auf mancherlei Weise gut ausführen lässt. In wässeriger Salicylsäurelösung halten sich die Eier wochenlang mit ihrer unverändert rothen Farbe, nur die darüberstehende Flüssigkeit wird trüb und schimmelig. Wirft man sie in Alkohol, so geht der Farbstoff allmälig aber langsam mit morgenrother oder gelbrother Farbe in Lösung. Rascher und vollständiger nimmt Äther den Farbstoff auf, und selbst bei jahrelangem Aufbewahren unter Äther in verschlossenen Flaschen tritt keine Änderung in der Tingirung ein. Ebenso vollständig zieht Chloroform den Farbstoff aus, und wenn man dieses einmal erneuert, so sind die Eier farblos geworden und sehen aus wie

[1] Sitzungsb. d. k. Akad. Bd. 70, III. Abth., Juni 1874.

etwas opake homöopathische Kügelchen; der Chloroformauszug ist granatroth. Beiläufig ähnlich verhalten sich auch Benzol und Toluol. Petroleumäther nimmt weniger Pigment auf und färbt sich schwächer; unter ihm aufbewahrt werden die Eier mit der Zeit dunkler, missfärbig und faulig. Starke Essigsäure macht die Eier aufquellen und nimmt auch nach einem halben Jahre nur wenig Pigment auf. Ähnlich wirkt Glycerin unter guter Erhaltung des Pigmentes. Auch unter wässerigem Ammoniak oder verdünnter Natronlauge bleiben die Farbstoffe ziemlich erhalten.

Ich habe grosse Mengen der Eier mit Alkohol und mit Chloroform erschöpft, und viele Liter der intensiv gefärbten Extracte verarbeitet.

Sehr viel zweckmässiger ist es aber, um später ein feines Pulver daraus machen zu können, und um in der Anwendung der Lösungsmittel sich freie Hand zu lassen, die Dotterträubchen zu trocknen. Von der Abdominalplatte genommen und in ebene Schalen gelegt, trocknen sie bei 35—40° C. binnen einem Tage vollkommen aus mit Erhaltung der Farbe und Durchscheinbarkeit. Wegen des geringen Fettgehaltes werden sie brüchig spröde und lassen sich zu einem feinen, weichen, trockenen, röthlichen Pulver zerreiben, das an die Lösungsmittel in viel kürzerer Zeit und vollständig den Farbstoff abgibt.

Dieses nicht stärker als zum Trocknen nöthig, erhitzt gewesene Dotterpulver gibt schon an kaltes Wasser den Farbstoff ab, während die unzerriebenen Dotter dies nicht thun.[1] Überhaupt löst sich ein grosser Theil der Eiermasse im Wasser, aber die Lösung ist etwas trübe und filtrirt langsam. Sie enthält viel Eiweiss, coagulirt beim Kochen, und ebenso durch Zusatz von Essigsäure mit überschüssigem Kochsalz in der Kälte. Das flockige, wie es scheint auch wachs- und protagonartige Substanzen enthaltende Coagulum reisst einen grossen Theil des Farbstoffes aus der Lösung mit. Auch starker Alkohol macht den wässerigen rothen Auszug gerinnen, aber in diesem Falle bleibt der meiste Farbstoff im Filtrat, und der Rest lässt sich dem Coagulum durch weiteren warmen Alkohol fast ganz entziehen.

[1] Werden diese erhitzt, so hält das im Dotterbläschen coagulirende Eiweiss die Pigmente zurück, und in der trüben Flüssigkeit finden sich nur phosphorhältige Körper.

Zunächst war nun zu sehen, ob dieser reichlich zu habende Seespinnendotterfarbstoff übereinstimmt mit dem der Hühnereidotter, dem der Retina u. s. w., denn nur dann bot er ein grösseres Interesse und ein wichtiges Ersatzmaterial für die in grösserem Quantum unzugänglichen „Luteïne“ der Wirbelthiere. Die älteren Angaben bieten zu solchem Vergleiche genügende Anhaltspunkte, und liessen, wie das Folgende ergibt, Übereinstimmung erkennen.

Der alkoholische Auszug der Seespinnendotter ist völlig klar, gelb-feuerroth; auch in dünner Schichte geht bei dieser Concentration nur roth und etwas gelb hindurch, das ist von 25—70 meiner Scala[1] entsprechend dem Intervalle *a* bis *E*, das ganze violette Ende des Spectrums ist scharf abgegrenzt und dunkel. In verdünnterer, etwa 1·5 Ctm. dicker, nur mehr gelb erscheinender alkoholischer Lösung verhält sich das rothe Ende des Spectrums ziemlich gleich, aber zwischen 75—90 der Scala ist ein dunkler, etwas verschwommener Streifen zu sehen, der also um *F* herum liegt und nach beiden Seiten hin eine beträchtliche Ausdehnung hat. Dann wird das spätere Blau bis über *G* hinaus wieder sichtbar.

Ganz ähnlich verhält sich Chloroformlösung; in concentrirterer Lösung schneidet das sichtbare Spectrum bei etwa 70 ab, in ganz verdünnter bleibt ein Schattenstreif im Grünblau.

Dunstet man etwas der alkoholischen Lösung ab, so gibt der Rückstand, mit einem Tropfen gelber Salpetersäure befeuchtet, dunkelblaue Färbung, die auf Zusatz von Wasser oder von Alkohol verschwindet. Mit concentrirter Schwefelsäure befeuchtet, gibt der Rückstand eine schmutzig blaugrüne Färbung.

Durch Alkalien oder Ammoniak lässt sich der chloroformigen oder ätherischen Lösung der Farbstoff nicht entziehen. Dies alles zeigt daher, dass der vorliegende Farbstoff mit dem der Hühnereidotter und der anderen Fundstellen übereinstimmt.

Bei den Versuchen, den Farbstoff besser als bisher zu isoliren, ergab sich bald, dass nicht ein, sondern dass bestimmt zwei Farbstoffe vorliegen, ein gelber und ein rother, dass also die bisher als Luteïn bezeichnete Substanz

[1] *Li* = 35; *Na* = 50; *Tl* = 65.

ein Gemenge ist. Ich werde zuerst drei der einfacheren Versuche beschreiben, durch die eine Trennung beider Pigmente bewerkstelliget werden kann.

I. Trennungsmethode.

Wird das trockene Dotterpulver mit kaltem Wasser extrahirt, das Filtrat nach dem Zusatze eines Tröpfchens Essigsäure durch Kochen coagulirt, das die Pigmente einschliessende Coagulum getrocknet, und die erhaltene hornige Masse nach dem Zerreiben mit feinem Quarzsand in einem kleinen Extractionsapparate mit Petroläther erschöpft, so erhält man eine stark gefärbte, bernsteingelbe Lösung. Wird dann der so ausgekochte Rückstand in gleicher Weise mit Schwefelkohlenstoff behandelt, so resultirt eine rothe Flüssigkeit, in dünnen Schichten rein rosa oder purpurn, in dickeren braunroth. Man erhält übrigens die beiden verschiedenfarbigen Extracte auch, wenn man das getrocknete Dotterpulver direct mit den Lösungsmitteln aufeinanderfolgend behandelt.

Da aber Capranica (l. c.) ganz richtig beobachtet hat, dass dem Schwefelkohlenstoff überhaupt die Eigenschaft zukommt, das sogenannte Luteïn mit dunklerer Farbe und mehr rothem Ton zu lösen, so kann man nicht beide Extracte, das von Petroleum und von Schwefelkohlenstoff, direct vergleichen. Dunstet man jedoch sowohl von dem einen wie von dem anderen etwas ab, und übergiesst die Rückstände mit Alkohol, so löst sich überall etwas Farbstoff auf, aber vom Petroleumrückstand bleiben gelbe Öltropfen, vom Schwefelkohlenstoffrückstand dunkelrothe zurück.

Dasselbe zeigt sich mit Umgehung des Schwefelkohlenstoffes, wenn man in folgender Weise operirt. Die gepulverten Eier werden zuerst im Extractionsapparate mit Petroleumäther ausgekocht, man erhält den gelben Farbstoff in Lösung. Das erschöpfte Eierpulver wird nach dem Abdunsten des Petroleums mit kaltem Wasser behandelt, wobei man eine dunkelrothe allen noch übrigen Farbstoff enthaltende, sehr leicht und völlig klar filtrirende Lösung erhält. Man hat so auch einige Trennung der übrigen Bestandtheile bewirkt; die Petroleumlösung enthält ausser dem gelben Pigment alles vorhandene Fett, die rothe wässerige ausser dem rothen Pigment die Eiweissstoffe und protagonartige Körper.

Die Spectra dieser zwei Lösungen sind etwas verschieden, und gestalteten sich bei Gaslicht (Sonnenlicht war damals nicht zu haben) so. Die gelbe Petroleumlösung lässt Roth, Gelb etwas Grün hindurch, während das violette Ende von 75 an dunkel ist; bei stärkerer Verdünnung rückt der sichtbare Theil nach rechts und es bleibt ein schwacher Streifen bei 80 — 90, d. h. um *F* herum. Die rothe wässerige Lösung verhält sich in stärkerer Concentration ziemlich wie die gelbe, bei stärkerer Verdünnung hellt sich aber das Spectrum gegen das violette Ende hin auf, ohne dass ein Streifen erkennbar wäre.

II. Trennungsart.

Digerirt man den alkoholischen Eierauszug mit gutwirkender Thierkohle (Fleischkohle), und filtrirt nach 3 — 4 Stunden, so fliesst nur ein gelbes Filtrat ab, während der rothe Farbstoff an der Kohle fest haftet, die denselben nach dem Auswaschen mit Alkohol leicht unter Bildung einer purpurfarbigen Lösung an Schwefelkohlenstoff abgibt.

Ich habe grössere Mengen alkoholischen Dotterauszuges so behandelt, und einige Vorversuche mit den getrennten Lösungen angestellt. Das gelbe alkoholische Filtrat enthält noch die meisten anderen Stoffe, die aus den Dottern in den Alkohol übergehen und gibt abgedunstet einen gelben, wachsartigen Rückstand, in dem man nach Verschmelzen mit Salpeter und Soda viel Phosphorsäure findet. Im Spectrum sieht man wieder nach gehöriger Verdünnung den blassen Streifen zu beiden Seiten von *F*. Die Farbreactionen mit Salpetersäure und mit Schwefelsäure treten hier nicht deutlich ein, die letztere färbt bald dunkelbraun, offenbar eine Verkohlungserscheinung.

Die rothe Schwefelkohlenstofflösung lässt beim Abdunsten einen kirschrothen noch etwas fettigen Rückstand, der mit einem Tropfen gelber Salpetersäure schön indigblau wird; die Farbe verschwindet von selbst ziemlich bald, noch rascher auf Alkoholzusatz. Concentrirte Schwefelsäure färbt den Rückstand grün und später braun. Nach diesen Versuchen kommen die beiden Farbreactionen viel deutlicher dem rothen als dem gelben Pigmente zu. Phosphor, respective protagonartige Substanzen, sind in der rothen Lösung nicht mehr enthalten.

III. Trennungsart.

Am schönsten kann man den gelben vom rothen Farbstoff durch Baryt trennen. Setzt man zu dem alkoholischen, gelbrothen Dotterauszuge nicht zu wenig gesättigtes warmes Barytwasser und filtrirt nach einiger Zeit, so läuft leicht und klar ein citrongelbes Filtrat ab, während man am Filter einen mennigrothen Niederschlag hat. Das gelbe Filtrat nochmals mit etwas Barytwasser versetzt, bleibt gelb, und setzt nur eine Trübung ab, die sich zu weissen Flocken zusammenballt. Sonach scheint die Trennung beider Farbstoffe durch Baryt vollständig. Behandelt man den rothen Barytniederschlag, nachdem er mit Alkohol ausgekocht worden ist, mit schwefelsäurehaltigem Alkohol, so erhält man den rothen Farbstoff in alkoholischer Lösung. Die Lösung ist concentrirt braunroth, wird durch Verdünnen nicht gelb, sondern relativ lichter und zuletzt rosafarbig. Die phosphorhaltigen Körper gehen zumeist in den Barytniederschlag ein, und finden sich dann in der rothen Lösung, die auch noch Fettsäuren enthält. Die Farbreactionen mit Salpetersäure und Schwefelsäure treten auch bei dieser Trennungsart besser mit dem Rückstande der rothen als der gelben Lösung ein.

Das Vorgebrachte zeigt also mit genügender Sicherheit, dass in den untersuchten Dottern zwei verschiedene Farbstoffe vorkommen, und dass es auf verschiedene Weise gelingt, sie der Hauptsache nach oder vielleicht, wie bei 3, vollständig von einander zu scheiden. Viel grösser ist dann aber die Schwierigkeit, die einzelnen Farbstoffe von den anderen noch vorhandenen Dotterstoffen zu trennen. Eigentliche Fette, die ohnedies bei diesem Material zurücktreten, können in dem Alkoholauszuge nicht viele vorhanden sein, aber es sind freie Fettsäuren vorhanden, dann wallrath- oder wachsähnliche Substanzen, die schwer oder kaum verseifbar sind, ferner protagonartige Stoffe und deren Zersetzungsproducte, endlich Cholesterin. Diese Stoffe gehen, wenn man Isolirversuche anstellt, in fast alle Auszüge und Schüttelflüssigkeiten über, und da sie selbst als Lösungsmittel für die Pigmente dienen, wird durch ihre Gegenwart die Wirkung der Lösungsmittel unberechenbar alterirt. In den wässerigen Auszügen dienen die löslichen Albuminate als Pigmentlösungsmittel. Krystallisirt oder auch nur in Gestalt eines mikroskopischen Präpara-

tes habe ich die Pigmente nie erhalten, obwohl die Bedingungen hiezu nach den Erfahrungen, die man über die Bildung der Hämatoidinkryställchen im Fette der Eierstöcke hat, bei manchen Versuchen von mir günstig schienen. So gab der Chloroformauszug von etwa $^1/_2$ Kilo Dotter, nach dem Abdestilliren des etwa 2 Kilo betragenden Chloroforms ein grosses Quantum völlig klaren dunkelrothen Öles, das mehr als ein Vierteljahr lang stehen blieb, aber ausser etwas Fettsäuren nichts Krystallinisches abschied. Es scheint mir desshalb, wenn auch nicht unwahrscheinlich, doch nicht bewiesen, dass die spärlichen und ausnahmsweisen Befunde der sogenannten Hämatoidinkrystalle (soferne sie nicht Bilirubin sind) auf Identität mit den regelmässig und normal vorkommenden Dotterfarbstoffen zurückzuführen sind, und ich möchte daher Piccolo und Lieben's Bezeichnung Hämoluteïn für die nativen Kryställchen der Corpora lutea, nicht auf einen der Dotterfarbstoffe übertragen. Thudichum's Name Luteïn ist wie schon gezeigt, das Gemenge von meinem rothen und gelben Dotterpigment. Ich werde dieselben im Folgenden mit Dotterroth (Vitellorubin) und Dottergelb (Vitelloluteïn) bezeichnen, und dazu übergehen, zu beschreiben, inwieweit dieselben im Einzelnen rein darzustellen gelang, wobei in Anbetracht der Schwierigkeit, solche Körper zu fassen, das Erreichte immerhin einen Anfang für fernere Untersuchungen abgeben dürfte.

Darstellung des Vitellorubins.

Bei einer Reihe von Versuchen, an denen ich, wie sich später zeigte, leider zu lange festgehalten habe, bin ich vorzüglich davon ausgegangen, die mit Äther, Alkohol oder Chloroform gewonnenen Auszugrückstände zu verseifen und aus den so erhaltenen Lösungen oder den ausgesalzenen Seifen die Pigmente mit Lösungsmitteln wieder auszuziehen oder auszuschütteln. Die ätzenden Alkalien wirken nämlich, soferne man aus der Unveränderlichkeit der Tingirungen schliessen darf, keineswegs auf die Pigmente ein, und man kann ihrer Wirkung freies Spiel lassen. Obwohl ich später eine ergiebigere Methode zur Abscheidung des Vitellorubins beschreiben werde, so haben doch die Verseifungsversuche in ihrer mannigfaltigen Variation mir zuerst die

Substanz geliefert, und das Resultat ergeben, dass das Vitellorubin sich mit Alkalien und alkalischen Erden verbindet, dass diese Verbindungen nur noch in Äther, Chloroform und Schwefelkohlenstoff aber nicht mehr in Alkohol löslich sind, sonach mit Alkohol aus den obigen Lösungen ausgefällt und damit gewaschen werden können.

Ein solcher Verseifungsversuch ist z. B. folgender: von etwa einem Liter alkoholischen Dotterauszuges wird die Hälfte des Alkohols abdestillirt und der Retortenrückstand, in dem sich etwas dickflüssiges Öl von der übrigen Flüssigkeit separirt hat, mit Ätznatron erwärmt. Nach dem Erkalten resultirt eine dunkelrothe trübe, viel Farbstoff in der Trübung enthaltende Flüssigkeit, die mit verdünnter Kochsalzlösung und viel Äther geschüttelt, und zur besseren Klärung mit etwas Alkohol vermischt wird. Nach einiger Zeit trat ziemlich gute Trennung in folgende drei Schichten ein: 1. eine untere wässerige, wenig gefärbte; 2. eine mittlere kleine, gefärbte, die wesentlich eine alkoholisch-ätherische Seifenlösung ist; und 3. eine obere ätherische Schichte, die in ihrem unteren Theile ein rothpulveriges Sediment hat. Die unterste Schichte wird entfernt, die mittlere, welche sich aus dem Scheidetrichter abgelassen, sowohl mit Wasser als Alkohol mischt, wird auch nicht weiter berücksichtiget. Der in der ätherischen Schichte suspendirte Niederschlag besteht aus Farbstoff, wachsartiger und phosphorhältiger Substanz, brennt am Platinblech mit leuchtender Flamme und Acroleïngeruch. Das ätherische Filtrat hingegen enthält die Farbstoffe einigermassen rein; es wird destillirt und gibt einen rothen Rückstand, der nicht mehr fettig aussieht, sondern nur neben Farbstoff Krystallflitter von Cholesterin enthält. Beim Übergiessen mit warmem Alkohol löst sich das letztere sowie der vorhandene gelbe Farbstoff auf, und am Boden des Destillirkolbens bleibt eine Schichte der dunkelrothen amorphen Verbindung des Vitellorubins mit Alkali. Sie wird so lange mit Alkohol gewaschen, bis dieser sich nicht mehr färbt. Sowie man dann Chloroform oder Schwefelkohlenstoff dazu bringt, löst sich das Ganze sofort im ersteren Lösungsmittel mit dunkelbraunrother, im letzteren mit purpurrother Farbe. Aus der Chloroformlösung erhält man durch Vermischen mit viel Alkohol die Verbindung als rothflockigen Niederschlag, der sich in Alkohol vertheilt, sofort

löst, sobald man eine kleine Menge Essig- oder Salzsäure hinzufügt und dadurch das Alkali entzieht. Durch Vermischen der angesäuerten Lösung mit Wasser, Ausschütteln mit Äther und Verdunsten des Äthers erhält man dann das freie Vittellorubin, so rein als ich es bisher darzustellen vermochte.

Bei dieser Art der Darstellung hat man ungeheure Verluste, und es ist schwierig, ein Viertelgramm des Pigments zu gewinnen. Sehr viel mehr, aber weniger rein, namentlich mit Fettsäuren verunreinigt, erhält man das rothe Pigment, wenn man von der früher erwähnten Barytfällung ausgeht. Der alkoholische Dotterauszug wird mit heissem Barytwasser versetzt, der mennigrothe Niederschlag filtrirt, mit Alkohol so lange gewaschen, bis dieser farblos abläuft, worauf man in verdünnte Salzsäure zur Zerlegung einträgt. Es scheidet sich ein auf der wässerigen Lösung schwimmender, krümmlich weicher, kirschroth gefärbter Niederschlag ab, der aus Vitellorubin und Fettsäuren (Ölsäure?) neben etwas phosphorhaltiger Substanz besteht. Um daraus einen Theil der letzteren Körper zu entfernen, habe ich folgendes Verfahren eingeschlagen: Der rothe krümmliche Niederschlag wird noch feucht mit gebrannter Magnesia zerrieben, die rothe Masse mit Alkohol kalt ausgezogen und darauf in einem Kolben mit Äther oder Chloroform digerirt. Die weitaus grösste Menge Farbstoff geht in Lösung, die man abfiltrirt und mit viel Alkohol ausfällt. Der reichliche, aus dunkelrothen Flocken bestehende Niederschlag ist leicht filtrirbar, und trocknet nach dem Waschen mit Alkohol unter der Luftpumpe zu einem schwarzrothen Körper, der sich leicht zu einem zinnoberrothen Pulver zerreiben lässt. Er stellt die Magnesiumverbindung des Vitellorubins dar, aber freilich noch mit einer anderen organischen Magnesiaverbindung verunreinigt. Welcher Art diese ist, vermag ich nicht anzugeben, denn fettsaure (stearinsaure) Magnesia ist in Chloroform nicht löslich, und kann daher bei der Behandlung der rothen Magnesiapasta nicht mit in das Chloroform übergegangen sein. Auch Phosphor ist durch Schmelzen mit Soda und Salpeter noch in dem Präparate nachzuweisen, hingegen ist Eisen einmal nur in undeutlicher Menge, in einem anderen Präparate gar nicht gefunden worden, so dass ich das Vitellorubin für eisenfrei ansehe. Viel wichtiger und geradezu überraschend ist aber, dass das Vitello-

rubin auch keinen Stickstoff enthält, was auf mehrfache Weise, zuletzt auch durch Dumas' Methode in einem quantitativ gehaltenen Versuche constatirt wurde.

Versucht man mit der Magnesiumverbindung weitere Reinigungsversuche anzustellen, so scheint kaum etwas anderes zu erübrigen, als dieselbe mit Salzsäure oder Essigsäure wieder zu zerlegen, in Äther zu lösen und mit Laugen zu schütteln. Dabei treten aber sofort wieder die grossen Verluste, durch Übergang von Farbstoff in die alkalische Lösung, schlechte Abgrenzung der Schichten etc. ein.

Von den Eigenschaften des Vitellorubins ist noch zu erwähnen, dass es sich im freien Zustande in Alkohol mit braunrother Farbe löst, die bei Verdünnung in reines Rosa übergeht. Äther und Chloroform lösen es ebenfalls. Gelbe Salpetersäure färbt augenblicklich indigblau, wenn man einen Tropfen darauf bringt;[1] die Färbung verschwindet von selbst, nach einigen Secunden. Concentrirte Schwefelsäure löst zur dunkelsaftgrünen Flüssigkeit vor beständigerer Färbung. Jodhältige Jodkaliumlösung erzeugt nichts; Chlorwasser und ebenso schwefelige Säure wirken langsam bleichend. Concentrirte Salzsäure macht missfärbig violett. Verdünnte Schwefelsäure unter Zusatz von ein wenig Braunstein oder chlorsaurem, oder chromsaurem Kali bewirkt keine auffällige Erscheinung.

Das Spectrum der weingeistigen Lösung gibt, mit Sonnenlicht gemacht, einen breiten Streifen von 75—90 meiner Scala; er schliesst *F* ein. Das Vitelloluteïn gibt ein völlig davon verschiedenes Spectrum.

Sehr auffallend ist die Lichtempfindlichkeit des Vitellorubins. Seine Lösungen und die trockene Magnesiumverbindung halten zwar ziemlich lange aus, ohne dass man eine Veränderung sieht; aber in dünnen Schichten, oder wenn Papierstreifen mit der Lösung getränkt werden, tritt bald Bleichung ein. Ich habe von der Magnesiumverbindung in Schwefelkohlenstoff gelöst und die purpurrothe Lösung in mehreren Porzellanschiffchen eintrocknen lassen. Das eine blieb am Fenster bloss mit einer Glasschale bedeckt stehen, das zweite kam in ein Glasrohr, das mit Kohlen-

[1] Die Magnesiumverbindung gibt genau die gleiche Reaction.

säure gefüllt, an einem Ende verschlossen, am anderen aber mit einem geöffneten Kipp'schen Apparate verbunden wurde, so dass keine Luft eindringen konnte, und wurde ebenfalls an das Fenster gestellt. Nach zwei Tagen war die Substanz im Luftschiffchen ganz blass, nur an einzelnen kleinen Stellen noch roth, nach wieder zwei Tagen war im Schiffchen gar nichts mehr zu sehen, wie ein weisser Hauch, während die Substanz des CO_2-Schiffchens noch die ursprüngliche dunkelrothe Farbe hatte. Dieses roth gebliebene Schiffchen wurde nun in eine Pappschachtel gelegt, also mit Luft zusammen, aber im Finstern aufbewahrt; nach drei Tagen, als die Schachtel wieder geöffnet wurde, war auch diese Substanz abgebleicht. Also findet Oxydation auch ohne Licht in völliger Dunkelheit statt.

Weisses Schreibpapier mit der chloroformigen Lösung getränkt, ist dunkelrosenroth; ein Streifen davon in's Sonnenlicht gelegt, ist schon nach 2—3 Stunden ganz weiss geworden, im zerstreuten Lichte dauert es etwa 1—2 Tage. Legt man eine ausgeschnittene Figur aus Papier auf das getränkte Papier, und dieses in die Sonne, so hat man nach ein paar Stunden ein Bild davon, natürlich ein vergängliches.

Vitellolutein.

Das Vitellolutein scheint noch schwieriger zu isoliren zu sein. Es ist von dem Vitellorubin vor Allem durch die Unfähigkeit unterschieden, sich mit Basen zu verbinden. Auf folgende Art, glaube ich, einigermassen der Reindarstellung nahegekommen zu sein. Das alkoholische Filtrat vom rothen durch Barytwasser erzeugten, das Vitellorubin einschliessenden Niederschlag wird nochmals mit etwas Barytwasser versetzt, der nun weisse Niederschlag entfernt und das Filtrat mit Petroleumäther geschüttelt. Der letztere nimmt einen Theil des gelben Farbstoffes auf und lässt beim Abdestilliren auch noch ziemlich viel Cholesterin; diese Portion wird entfernt, ebenso auch ein zweites Schüttelpetroleum. Schüttelt man dann von neuem, so geht nochmals gelber Farbstoff in Lösung, der dann beim Abdestilliren des Petroläthers als stark gelber Rückstand hinterbleibt, indem von Fett oder Cholesterin nichts mehr zu bemerken ist. Er löst sich mit Hinterlassung

einiger Flocken in Alkohol. Seine Lösungen sind rein und hellgelb, etwa wie die neutraler Alkalichromate. Sein Spectrum im Sonnenlichte betrachtet, ist völlig verschieden von dem des Vitellorubins. Es zeigt nämlich zwei deutliche, schmale Streifen von 80—90 und von 100—105, also den einen die *F*-Linie einschliessend, während der zweite gerade in der Mitte des Zwischenraumes von *F* und *G* liegt.

Gegen Salpetersäure und gegen concentrirte Schwefelsäure verhält sich dieses Pigment wie das Vitellorubin. Es ist ebenfalls stickstofffrei. Dadurch ergibt sich, dass beide Pigmente untereinander nahe verwandt sind, aber von dem Blutroth und den stickstoffreichen Gallenpigmenten principiell verschieden. Die im Eingange mir vorgelegte Frage ist sonach bis zu einem gewissen Grade beantwortet, und zwar wohl in einer Weise, die ganz unerwartet erscheint. Künftige Untersuchungen werden zeigen müssen, ob die Dotterpigmente eine stickstoffhaltige Gruppe aufnehmen, durch die sie zu dem werden können, was man physiologisch wohl von ihnen vermuthet: zu Blutroth, oder ob sie eine andere Bestimmung haben, und zur Hämoglobinbildung in keinem Zusammenhange stehen. Dies letztere wird auch noch dadurch wahrscheinlich, dass gerade die Crustaceen, die in ihrem Blute kein Hämoglobin enthalten, über eine so grosse Menge derselben Dotterpigmente verfügen, die auch im Wirbelthierei vorkommen.

Bahnbestimmung des Planeten (118) Peitho.

II. Theil.

Von Dr. **Johann Holetschek,**
Adjunct der Wiener Sternwarte.

(Vorgelegt in der Sitzung am 5. Mai 1881.)

Im LXXI. Bande der Sitzungsberichte habe ich für den Planeten Peitho eine Bahnberechnung mitgetheilt, die aus zwei Oppositionen nach der Methode der Variation der Distanzen abgeleitet ist. Die Ermittlung genauerer Bahnelemente auf Grund neuer Beobachtungen unter Berücksichtigung der durch Jupiter und Saturn ausgeübten Störungen bildet den Gegenstand der vorliegenden Arbeit.

Peitho ist bis jetzt in vier Erscheinungen beobachtet worden, nämlich ausser der ersten (1872) in der dritten (1874), vierten (1876) und siebenten (1880). Das Beobachtungsmaterial aus den Jahren 1872 und 1874 ist schon im 1. Theile enthalten; ich führe daher zunächst die Ergebnisse der Jahre 1876 und 1880 an.

Opposition 1876.

			mittl. Ortszeit	AR.	Decl.	*
März	18	Kopenhagen[1]	16h 28m 43s	13h 39m 36s99	−3°11′22″6	*f*
	29	Düsseldorf[2]	14 1 18	13 30 9·81	−2 34 7·4	*e*
	30	Berlin[3]	15 19 20	13 29 10·13	−2 30 27·6	*d*
	31	„	13 7 9	13 28 17·82	−2 27 17·8	*d*
	31	Kopenhagen	15 15 52	13 28 12 48	−2 26 55·4	*c*
April	2	Berlin	12 52 35	13 26 21·53	−2 20 23 2	*b*
	4	Washington[4]	. . .	13 24 9·23	−2 12 46·1	Mer.-B.
	10	„	. . .	13 18 10·56	−1 53 35·2	„
	13	Kopenhagen	13 35 58	13 15 22·62	−1 45 27·0	*a*

---

[1] Astr. Nachr. Bd. 90, Seite 157.
[2] „ „ „ 88, „ 143.
[3] „ „ „ 88, „ 241.
[4] „ „ „ 95, „ 183.

		mittl. Ortszeit	AR.	Decl.	*
April 15	Washington	. . .	13 13 15·51	—1 39 33·8	Mer.-B.
19	„	. . .	13 9 27·77	—1 30 4·4	„
20	„	. . .	13 8 32·14	. . . .	„
21	Paris[1]	11 6 26	13 7 49·88	—1 26 21·1	„
22	„	11 1 36	13 6 55·94	—1 24 23·3	„
25	Washington	. . .	13 4 8·62	—1 19 8·1	„

Mittlere Orte der Vergleichsterne für 1876·0.

*	AR.	Decl.	
a	13ʰ12ᵐ31ˢ89	—1°52'52"5	Schjell. 4772
b	13 24 49·14	—2 21 18·5	Anschluss an Schjell. 4823.
c	13 25 46·76	—2 27 41·2	Schjell. 4837.
d	13 29 34·58	—2 30 40·7	Anschluss an Wash. Cat. 5612.
e	13 31 22·33	—2 36 9·5	Astr. Nachr. Nr. 797.
f	13 38 50·94	—3 10 48·3	W. 650.

Mit der für diese Erscheinung berechneten Oppositions-Ephemeride, die sich am Schlusse des 1. Theiles findet, wurden die Beobachtungen verglichen, wobei sich folgende Differenzen ergaben, welchen der Vollständigkeit halber noch die Correctionen für Parallaxe beigesetzt sind; die Meridianbeobachtungen von Washington und Paris sind bereits für Parallaxe corrigirt.

		Corr. f. Parallaxe in		Beob. weniger Rech.	
1876		AR.	Decl.	$d\alpha$	$d\delta$
März 18	Kopenhagen	+0ˢ13	+4"6	—23ˢ04	+3'11"9
29	Düsseldorf	+0·06	+4·4	—24·11	+3 15·3
30	Berlin	+0·13	+4·5	—24·56	+3 18·3
31	„	+0·02	+4·5	—24·55	+3 18·4
31	Kopenhagen	+0·13	+4·7	—24·46	+3 21·9
April 2	Berlin	+0·01	+4·5	—24·53	+3 20·7
4	Washington	0·00	. .	—24·36	+3 18·4
10	„	0·00	. .	—24·50	+3 21·6
13	Kopenhagen	+0·10	+4·6	—24·32	+3 22·2
15	Washington	0·00	. .	—24·23	+3 19·8
19	„	0·00	. .	—23·76	+3 14·5
20	„	0·00	. .	—23·98	. . .
21	Paris	0·00	. .	—23·57	+3 15·3
22	„	0·00	. .	—23·50	+3 17·8
25	Washington	0·00	. .	—23·12	+3 12·2

[1] Comptes Rendus, Tome 83, S. 465.

Nach der Berliner Correspondenz über Planetenbeobachtungen Nr. 30 wurde Peitho auch zu Madrid am 18., 21. und 22. April beobachtet, doch habe ich die Resultate in keiner Publication gefunden.

Um nun die Unterschiede zwischen den beobachteten und berechneten Positionen zur Bildung eines Normalortes zu verwenden, habe ich dieselben auf folgende Form gebracht:

$$d\alpha = -24\overset{s}{.}43 \quad -0\overset{s}{.}0406t \quad +0\overset{s}{.}0039t^2$$
$$d\delta = +3'18''8 \quad +0''728t \quad -0''044t^2,$$

wo t die seit April 1·1 verflossenen Tage sind; daraus ergibt sich für April 2·5

$$d\alpha = -24\overset{s}{.}48, \quad d\delta = +3'19''7$$

und der auf das mittlere Äquinoctium 1880·0 bezogene Normalort ist:

$$1876 \text{ April } 2{\cdot}5 \quad \alpha = 201°38'42''0, \quad \delta = -2°21'31''5.$$

Aus den drei bis dahin beobachteten Oppositionen (1872, 1874 und 1876) wurde durch Variation der geocentrischen Distanzen, deren Detail ich aber hier nicht anführe, folgendes Elementensystem abgeleitet, welches als Ausgang für die späteren Rechnungen dient:

Epoche 1872, März 31·0 mittl. Berliner Zeit.

	mittl. Äq. 1870·0	mittl. Äq. 1880·0.
$\pi =$	77°22'33''9	77° 0'56''6
$\Omega =$	47 21 41·2	47 29 35·2
$\omega =$	30 0 52·7	30 1 21·4
$i =$	7 48 5·3	7 48 8·1

$$M = 84°42'48''8$$
$$\varphi = 9\ 14\ 44{\cdot}7$$
$$\mu = 931''6917$$
$$\log a = 0{\cdot}3871566.$$

Damit wurden für die nächsten Jahre (1877 bis 1881) die Ephemeriden gerechnet, wie sie in den betreffenden Bänden des Berliner Jahrbuches enthalten sind.

Opposition 1880.

Aus dieser Erscheinung standen mir blos zwei von Dr. R. Luther in Düsseldorf angestellte Beobachtungen zur Verfügung (Astr. Nachr. Band 99). Nachträglich erfuhr ich zwar aus der Berliner Correspondenz Nr. 117, dass der Planet noch zu Madrid am 12. und 13. Mai beobachtet worden ist, doch sind auch diesmal die Beobachtungen in keiner der mir zugängigen Publicationen enthalten.

	mittl. Zeit Düsseldorf	AR.	Decl.
1880 April 30	$10^h 50^m 46^s$	$14^h 25^m 3^s.19$	$-12°29'14''4$
Mai 1	10 16 39	14 24 3·67	−12 27 2·0.

Mittlerer Ort des Vergleichssternes für 1880·0:

AR.	Decl.	
$14^h 26^m 2^s.84$	$-12°28'23''0$	Bessel Z. 245.

Die Vergleichung der beiden Beobachtungen mit der Ephemeride im Berliner Jahrbuch für 1882, Seite [21] ergab:

	Corr. f. Parallaxe in		B.—R.	
	AR.	Decl.	$d\alpha$	$d\delta$
April 30	-0^s05	$+4''6$	$+13^s.99$	$-2'45''4$
Mai 1	−0·08	+4·6	+13·81	−2 41·9
		im Mittel	+13·90	−2 43·6,

welche Correction an den Ephemeridenort für April 30·5, nämlich an

$$\alpha = 14^h 24^m 46^s.74, \quad \delta = -12°26'19''2$$

angebracht wurde; daraus folgt als Normalort, reducirt auf das mittlere Äquinoctium 1880·0:

$$1880 \text{ April } 30·5 \quad \alpha = 216°14'38''4, \quad \delta = -12°28'51''4.$$

Reiht man nun die im 1. Theile enthaltenen und die jetzt gebildeten beiden Normalorte aneinander, so hat man folgende Rechnungsgrundlagen:

			α	δ		Beob.
I	1872 Mai	24·5	179°35'58"0	+10°49'28"7	1870·0	13
II	April	17·5	174 49 6·8	+11 4 26·6		21
III	Mai	11·5	173 33 14·3	+ 9 36 32·8		5
IV	1874 Oct.	19·5	34 43 20·9	+ 9 37 22·6		11
V	1876 April	2·5	201 38 42·0	− 2 21 31·5	1880·0	14
VI	1880 April	30·5	216 14 38·4	−12 28 51 4		2

Mit dem oben angeführten Elementensystem sind die Störungen nach der Methode der Variation der Constanten für den Zeitraum 1872 Jänner 31 bis 1880 Mai 28 berechnet worden. Von störenden Planeten sind Jupiter und Saturn in Betracht gezogen, deren Massen und heliocentrische Coordinaten durchgehends dem Berliner Jahrbuch entnommen sind. Das Intervall beträgt 40 Tage, als Osculationsepoche ist 1872 März 31·0 gewählt. Vor dem Jahre 1875 liegt die mittlere Ekliptik und das mittlere Äquinoctium 1870·0, von da an 1880·0 zu Grunde.

Die numerischen Werthe der Differentialquotienten der Elementenstörungen sind am Schlusse dieser Abhandlung tabellarisch zusammengestellt. Von den wirklichen Störungswerthen selbst theile ich aber blos diejenigen mit, welche für die einzelnen Normalorte aus dem Störungsschema durch Interpolation gefunden wurden. Da die Osculation in der ersten Erscheinung liegt, so habe ich für die Normalorte des Jahres 1872 auf Störungen keine Rücksicht genommen; für die drei anderen ergaben sich folgende Werthe, worin die Wirkungen der beiden störenden Planeten bereits addirt sind.

	1874 Oct. 19·5	1876 April 2·5	1880 April 30·5
$\Delta\mu$	−0"39797	−0"46100	− 0"27143
ΔL	−3' 6"59	−5' 1"06	−26'32"23
$\Delta\pi$	−4 33·59	+0 20·95	+42 13·11
$\Delta\varphi$	−1 59·35	−2 49·80	− 0 39·75
$\Delta\Omega$	−0 49·53	−0 46·50	− 5 43·12
Δi	−0 2·84	−0 2·79	− 0·39·70

Werden diese Störungen an die Elemente angebracht und mit diesen für die Zeiten der sechs Normalorte die geocentrischen Orte des Planeten gerechnet, so bleiben folgende Differenzen im Sinne „Beobachtung weniger Rechnung“ übrig:

			$d\alpha$		$d\delta$
1872	März 24·5		0"0		0"0
	April 17·5	+	3·0	—	3·1
	Mai 11·5	+	7·1	—	6·1
1874	Oct. 19·5	—	3·3	—	34·3
1876	April 2·5	+	12'45·7	—	7'1·1
1880	April 30·5	+	23 37·4	—	11 5·2.

Dass hier ganz andere Differenzen auftreten, als früher bei der Vergleichung der Beobachtungen mit den Ephemeriden, hat natürlich darin seinen Grund, dass bisher sämmtliche Ephemeriden ohne Berücksichtigung der Störungen berechnet sind.

Um nun die Bahn des Planeten den sechs Normalorten möglichst genau anzuschliessen, wurden die Differentialquotienten zwischen den Änderungen der Elemente und den Änderungen der geocentrischen Coordinaten ermittelt; da der Äquator als Fundamentalebene gewählt ist, wurden die Elemente vorerst in äquatoreale verwandelt:

Epoche und Osculation 1872, März 31·0 mittl. Zeit Berlin.

	1870·0	1880·0
L'	163°17'40"0	163°26'11"9
M	84 42 48·8	84 42 48·8
π'	78 34 51·2	78 43 23·1
Ω'	11 46 57·4	11 48 47·9
ω'	66 47 53·8	66 54 35·2
i'	29 16 33·5	29 15 52·4

$$\varphi = 9°14'44"7$$
$$\mu = 931"6917$$
$$\log a = 0·387156.$$

Auch mit diesen Elementen wurden die geocentrischen Orte des Planeten für die sechs Epochen ermittelt, wodurch die letzte Rechnung theilweise controlirt ist; dabei mussten die von der Lage der Fundamentalebene abhängigen Störungswerthe in äquatoreale umgesetzt werden; diese sind:

	1874 Oct. 19·5	1876 April 2·5	1880 April 30·5
$\Delta\omega'$	—4'20"49	+0'33"38	+44'5"19
$\Delta\Omega'$	—0 14·49	—0 13·75	— 2 4·85
$\Delta i'$	+0 1·75	+0 1·56	— 0 3·90.

Bei der Berechnung der Differentialquotienten wurden statt der Elemente π' und φ die Grössen Φ' und Ψ' eingeführt, nach den Relationen:

$$\Phi' = \frac{\sin\varphi}{\sin 1''}\sin\pi', \qquad \Psi' = \frac{\sin\varphi}{\sin 1''}\cos\pi'.$$

Hiefür findet man

	1870·0	1880·0
$\Phi' =$	$+32484{}^{\prime\prime}44$	$+32500{}^{\prime\prime}62$
$\Psi' =$	$+\ 6561\cdot288$	$+\ 6480\cdot654.$

Auf diese Weise ergaben sich folgende Bedingungsgleichungen, worin die Zahlenwerthe logarithmisch angesetzt und die Abweichungen in den Rectascensionen durch Multiplication mit $\cos\delta$ auf den grössten Kreis reducirt sind.

Für die Rectascensionen.

0·15700dL'	+1^n·24063$d\mu$	+0·46037$d\Phi'$	+9·61375$d\Psi'$	+9·59986$d\Omega'\sin i'$	+9·20968di'	= −∞
0·11094	1^n·38032	0·41439	9·54874	9·56759	8·85905	= 0·46896
0·03102	1^n·23395	0·34052	9·33160	9·52167	6·45283	= 0·81512
0·32993	3·30452	0^n·47906	0·39786	9·54471	9^n·46868	= 0^n·51234
0·09086	3·25989	0·40618	9^n·82739	9·60787	8^n·98458	= 2·88373
0·05606	3·52588	0·31207	0^n·15496	9·40159	9^n·52104	= 3·14141

Für die Declinationen.

9^n·89974dL'	+1·43181$d\mu$	+0^n·19237$d\Phi'$	+9^n·53315$d\Psi'$	+0·21394$d\Omega'\sin i'$	+9·47299di'	= −∞
9^n·83210	1·29258	0^n·13220	9^n·36644	0·18408	9·13538	= 0^n·49136
9^n·75169	0·89485	0^n·06152	9^n·02159	0·12712	6·73324	= 0^n·78533
0·03113	3·00018	0^n·19992	0·07351	0^n·24765	9·76605	= 1^n·53529
9^n·84119	3^n·00461	0^n·15729	9·46560	0·20798	9^n·24388	= 2^n·62439
9^n·75337	3^n·22263	0^n·01215	9·84442	0·15832	9^n·82766	= 2^n·82295

+15·6312 dL'	+12·9793 $d\mu'$	+11·5662 $d\Phi'$	+ 5·3282 $d\Psi'$	− 3·9886 $d☊' \sin i'$	−0·0013 di' =	+3160·86
+12·9793	+23·4526	+ 6·8012	− 1·2899	− 3·4514	−0·0007	+7535·29
+11·5662	+ 6·8012	+50·8753	−11·6482	− 3·8310	−0·0186	+6177·82
+ 5·3282	− 1·2899	−11·6482	+11·2390	− 1·0625	−0·0641	−3125·63
− 3·9886	− 3·4514	− 3·8310	− 1·0625	+15·3720	−1·7228	− 928·22
− 0·0013	− 0·0007	− 0·0186	− 0·0641	− 1·7228	+1·1694	− 34·81

Bei der Elimination wird man auf nachstehende Bestimmungsgleichungen geführt:

+15·6312 dL'	+12·9793 $d\mu'$	+11·5662 $d\Phi'$	+ 5·3282 $d\Psi'$	− 3·9886 $d☊' \sin i'$	−0·0013 di'	= +3160·86
	+12·6753	− 2·8027	− 5·7142	− 0·1395	+0·0003	= +4910·68
		+41·6973	−16·8543	− 0·9105	−0·0176	= +4924·80
			+ 0·0342	− 0·1339	−0·0706	= + 1·37
				+13·8086	−2·0002	= + 45·28
					+0·7337	= − 23·21,

durch deren Summirung folgende Probegleichung für die Bestimmung der Unbekannten entsteht:

$$+15{\cdot}6312\,dL' + 25{\cdot}6546\,d\mu' + 50{\cdot}4608\,d\Phi' - 17{\cdot}2061\,d\Psi' + 8{\cdot}6361\,d☊' \sin i' - 1{\cdot}3557\,di' = +13019{\cdot}78.$$

Für die Unbekannten findet man:

$$
\begin{aligned}
dL' &= -195''74 \\
d\mu = \tfrac{1}{1000}\, d\mu' &= +0''39709 \\
d\Phi' &= +105''77 \\
d\Psi' &= -30\cdot412 \\
d\Omega' \sin i' &= -1\cdot30;\quad d\Omega' = -2''67 \\
di' &= -31\cdot63.
\end{aligned}
$$

Durch diese Werthe wird der Probegleichung völlig genügt. Da in der vierten Eliminationsgleichung der Coëfficient von $d\Psi'$ ziemlich klein ist, so muss die Bestimmung dieser Unbekannten etwas unsicher ausfallen. Werden nun die gefundenen Werthe in die Bedingungsgleichungen eingesetzt, so bleiben folgende Differenzen übrig:

Normalort	$d\alpha \cos\delta$	$d\delta$
I	+0''7	−0''2
II	+4·1	−1·2
III	−0·7	+0·7
IV	+0·5	−1·5
V	−5·5	+1·8
VI	+4·1	−2·5.

Bringt man die Correctionen an die Elemente an, so erhält man das äquatoreale System:

$$
\begin{aligned}
L' &= 163°14'24''3 \\
\mu &= 932''08879 \qquad \text{mittl. Äq. } 1870\cdot0 \\
\Phi' &= +32590''21 \\
\Psi' &= +6530\cdot876 \\
\Omega' &= 11°46'54''7 \\
i' &= 29\ \ 16\ \ \ 1\cdot9.
\end{aligned}
$$

Aus Φ' und Ψ' erhält man wieder:

$$
\begin{aligned}
\pi' &= 78°40'\ \ 6''2 \\
\varphi &= \ \ 9\ \ 16\ \ 23\cdot7
\end{aligned}
$$

und geht man schliesslich vom Äquator auf die Ekliptik zurück, so ergibt sich als Resultat der ganzen Rechnung folgendes Elementensystem:

Epoche und Osculation 1872, März 31·0 mittl. Zeit Berlin.

	mittl. Äq. 1870·0	1880·0
$L =$	162° 2′ 8″9	162°10′31″6
$M =$	84 34 18·1	84 34 18·1
$\pi =$	77 27 50·8	77 36 13·5
☊ $=$	47 23 53·3	47 31 47·3
$\omega =$	30 3 57·5	30 4 26·2
$i =$	7 47 39·2	7 47 42·0

$$\varphi = 9°16'23''7$$
$$\mu = 932''08879$$
$$\log a = 0·3870329.$$

Die directe Darstellung der sechs Normalorte mit diesen Elementen lässt innerhalb der Unsicherheitsgrenzen der logarithmischen Rechnung dieselben unausgeglichenen Fehler übrig, wie die Substitution in die Bedingungsgleichungen; obwohl daher die wegzuschaffenden Differenzen sehr gross waren, hat doch eine einzige Ausgleichung genügt.

Übrigens ist die erlangte Herabminderung der Fehler nicht befriedigend, da in drei Rectascensionen noch zu grosse Abweichungen übrig bleiben. Die muthmasslichen Gründe davon dürften aus folgenden Bemerkungen hervorgehen. Die drei Normalorte aus der ersten Erscheinung sind wohl sämmtlich etwas unsicher; die Zahl der benützten Beobachtungen ist zwar ziemlich gross, doch stimmen dieselben unter einander nicht gut. Im Normalort V rührt die grosse Abweichung wohl theilweise daher, dass bei der Berechnung der Störungen zu lange dasselbe Elementensystem beibehalten wurde. (Ende Jänner 1877 war der Planet in der Jupiternähe und zugleich im Aphelium.) Der Ort VI kann überhaupt keinen Anspruch auf Genauigkeit haben, da er auf der Position eines einzigen Vergleichsternes beruht, der nicht mit hinreichender Sicherheit bestimmt ist. Im Allgemeinen wird aber auch der Umstand von Bedeutung sein, dass die erste Erscheinung des Planeten, weil sie durch drei Normalorte repräsentirt ist, ein zu grosses Gewicht erhalten hat; bei einer späteren Rechnung wird man daher aus der ersten Opposition höchstens zwei Normalorte beibehalten und überdies dem Ort VI ein kleineres Gewicht geben müssen.

Mit den gefundenen Elementen wurde die Berechnung der Störungen vom 28. Mai 1880 an weiter fortgeführt und bis 13. Jänner 1883 ausgedehnt. Für die Opposition des Jahres 1881 (4. August) habe ich keine besondere Ephemeride gerechnet, weil der Planet zu südlich steht ($\delta = -30°$); dagegen theile ich für die zu Anfang des Jahres 1883 eintretende, recht günstige Opposition eine genauere Ephemeride mit, welche ebenso, wie die Jahresephemeride für 1882 mit folgenden Elementen berechnet ist:

Epoche und Osculation 1883, Jan. 13·0 mittl. Zeit Berlin.

$$
\begin{aligned}
L &= 101°50'29''6 \\
M &= 23\ 42\ 43·6 \\
\pi &= 78\ \ 7\ 46·0 \\
\Omega &= 47\ 25\ 44·1 \\
i &= 7\ 46\ 55·9 \\
\varphi &= 9\ 18\ 26·6 \\
\mu &= 931''88947 \\
\log a &= 0·3870947.
\end{aligned}
$$

mittl. Äq. 1880·0 (für π, Ω, i)

Die rechtwinkeligen Äquatorcoordinaten sind:

$$
\begin{aligned}
x' &= [0·379427] \sin (E + 167°42'29''6) - 0·082485 \\
y' &= [0·330522] \sin (E + \ \ 81\ \ 6\ 42·0) - 0·342033 \\
z' &= [0·075288] \sin (E + \ \ 67\ 49\ 28·8) - 0·178118.
\end{aligned}
$$

Jahresephemeride für 1882.

0ʰ mittl. Zeit Berlin		A. R.	Decl.	log Δ	log r
Jan.	18	22ʰ 38·0ᵐ	−14° 5'	0·486	0·373
Febr.	7	23 12·3	9 59	0·500	0·366
	27	23 47·7	5 40	0·508	0·360
März	19	0 23·8	− 1 13	0·510	0·353
April	8	1 0·8	+ 3 15	0·508	0·347
	28	1 38·8	7 36	0·500	0·340
Mai	18	2 18·0	11 43	0·487	0·334
Juni	7	2 58·5	15 28	0·470	0·329
	27	3 40·1	+18 45	0·448	0·324

0h mittl. Zeit Berlin	A. R.	Decl.	log Δ	log r
Juli 17	4h 22·6m	+21°27'	0·421	0·320
Aug. 6	5 5·4	23 33	0·390	0·316
26	5 47·5	25 2	0 352	0·313
Sept. 15	6 27·5	26 2	0·309	0·311
Oct. 5	7 3·5	26 44	0·260	0·311
25	7 33·3	27 28	0·205	0·311
Nov. 14	7 53·6	28 40	0·147	0·312
Dec. 4	8 0·5	30 37	0·093	0·314
24	7 51·2	33 6	0·055	0·316
44	7 30 0	+35 3	0·050	0·320

Ephemeride für die Opposition.

12h mittl Zeit Berlin	A. R.	Decl.	log Δ	Licht-zeit
1882 Dec. 10	7h 59m 18s05	+31°23'59"2	0·077825	9m 56s
11	58 57·08	31 31 30·7	0·075722	9 53
12	58 33·60	31 39 4·8	0·073678	9 50
13	58 7·64	31 46 41·0	0·071695	9 47
14	57 39·22	31 54 18·7	0·069774	9 45
15	57 8·39	32 1 57·3	0·067919	9 42
16	56 35·19	32 9 36·4	0·066131	9 40
17	55 59·65	32 17 15·3	0·064412	9 37
18	55 21·82	32 24 53·4	0·062764	9 35
19	54 41·74	32 32 30·1	0 061190	9 33
20	53 59·45	32 40 4·8	0·059691	9 31
21	53 15·01	32 47 36·8	0·058269	9 29
22	52 28·48	32 55 5·6	0·056927	9 28
23	51 39·91	33 2 30·5	0·055666	9 26
24	50 49·38	33 9 50·9	0·054487	9 24
25	49 56·94	33 17 6·1	0·053392	9 23
26	49 2·68	33 24 15·5	0·052383	9 22
27	7 48 6·67	+33 31 18·4	0·051462	9 20

12^h mittl. Zeit Berlin	A. R.	Decl.	log Δ	Licht-zeit
1882 Dec. 28	$7^h 47^m 8^s 99$	+33°38' 14"1	0·050630	$9^m 19^s$
29	46 9 74	33 45 2·1	0·049888	9 18
30	45 9·00	33 51 41·6	0·049238	9 18
31	44 6·87	33 58 12·1	0·048681	9 17
1883 Jan. 1	43 3·45	34 4 32·9	0·048219	9 16
2	41 58·85	34 10 43·4	0·047852	9 16
3	40 53·19	34 16 43·0	0·047581	9 15
4	39 46·58	34 22 31·2	0·047407	9 15
5	38 39·15	34 28 7·4	0·047331	9 15
6	37 31·02	34 33 31·1	0·047353	9 15
7	36 22·31	34 38 41·8	0·047473	9 15
8	35 13·16	34 43 39·1	0·047692	9 16
9	34 3·71	34 48 22·5	0·048009	9 16
10	32 54·08	34 52 51·8	0·048424	9 17
11	31 44·40	34 57 6·5	0·048937	9 17
12	30 34 82	35 1 6·4	0·049548	9 18
13	29 25·47	35 4 51·4	0·050255	9 19
14	28 16·48	35 8 21·2	0·051058	9 20
15	27 7·98	35 11 35·8	0·051955	9 21
16	26 0 10	35 14 34·9	0·052946	9 22
17	24 52·96	35 17 18·6	0·054028	9 24
18	23 46·67	35 19 47·0	0·055201	9 25
19	22 41·35	35 21 59·9	0·056463	9 27
20	7 21 37·12	+35 23 57 6	0·057813	9 29

Opposition in A. R. 1883, Jan. 11.
Lichtstärke 2·28, Grösse 10·0.

Jupiter.

Mittlere Ekliptik 1870·0.

0^h mittl. Zeit	$1600 \frac{d\mu}{dt}$	$40 \frac{dL}{dt}$	$40 \frac{d\pi}{dt}$	$40 \frac{d\varphi}{dt}$	$40 \frac{d\Omega}{dt}$	$40 \frac{di}{dt}$
1872 Jan. 31	+3"5790	+ 2"369	— 75"261	— 3"305	— 6"366	+0"448
März 11	2·6325	5·287	56·883	2·495	3·801	0·403
April 20	1 7441	6·985	39·978	2·209	1·949	0·294
Mai 30	0·9722	7·771	25 879	2·385	0·737	0·157
Juli 9	+0·3287	7·903	15·030	2·888	— 0·051	+0·016
Aug. 18	—0·1946	7·571	7·363	3·582	+ 0·224	—0·114
Sept. 27	0 6129	6 919	2·561	4·352	+ 0·191	0·226
Nov. 6	0·9421	6·046	— 0·193	5·107	— 0·060	0·314
Dec. 16	1·1964	5·028	+ 0·191	5·783	0·456	0·377
1873 Jan. 25	1·3877	3·915	— 0·963	6·335	0·937	0·415
März 6	1·5254	2·751	3·239	6·735	1·451	0 429
April 15	1·6165	1·563	6·256	6·968	1·957	0·421
Mai 25	1·6660	+ 0·378	9·661	7·029	2·422	0·394
Juli 4	1·6775	— 0·784	13·133	6·923	2·819	0·350
Aug. 13	1·6528	1·903	16 375	6·662	3·127	0·294
Sept. 22	1·5925	2·960	19·118	6·264	3·331	0·228
Nov. 1	1·4961	3·938	21·124	5·762	3·423	0·156
Dec. 11	1·3621	4·814	22·190	5·188	3·398	0·082
1874 Jan. 20	1·1885	5 569	22·166	4·593	3·257	—0·009
März 1	0·9731	6 178	20·979	4·031	3·008	+0·058
April 10	0·7142	6·613	18·653	3·563	2·663	0·116
Mai 20	0·4112	6·849	15·355	3·256	2·242	0·163
Juni 29	—0·0673	6·856	11·421	3·165	1·768	0·196
Aug. 8	+0·3099	6·612	7·366	3·325	1·272	0·212
Sept. 17	0·7045	6·096	3·846	3·736	0·788	0·212
Oct. 27	1·0914	5·300	1·536	4·331	— 0·352	0 197
Dec. 6	1·4351	4·232	0·914	4·980	+ 0·001	0·169
1875 Jan. 15	+1·6931	— 2·916	— 2·004	— 5·507	+ 0·246	+0·132

Mittlere Ekliptik 1880·0.

0^h mittl. Zeit	$1600 \frac{d\mu}{dt}$	$40 \frac{dL}{dt}$	$40 \frac{d\pi}{dt}$	$40 \frac{d\varphi}{dt}$	$40 \frac{d\Omega}{dt}$	$40 \frac{di}{dt}$
1875 Jan. 15	+1"6931	— 2·916	— 2·004	— 5·507	+ 0·246	+0·132
Febr. 24	1·8215	— 1·402	4 176	5·728	0·369	0·092
April 5	1·7848	+ 0·238	6·178	5·525	0·375	0·054
Mai 15	1·5628	1·907	6·434	4·897	0·290	0·025
Juni 24	1·1535	3·482	— 3·498	3·973	0·159	+0·007
Aug. 3	+0·5701	4·826	+ 3·580	2·974	+ 0·087	0·000
Sept. 12	—0·1644	5·778	15·070	2·159	— 0·012	0·000
Oct. 22	1·0226	6·160	30·615	1·763	+ 0·071	—0·003
Dec. 1	—1·9744	+ 5·768	+ 49·380	— 1 963	+ 0·326	—0·025

Saturn.

Mittlere Ekliptik 1870·0.

0^h mittl. Zeit	$1600\frac{d\mu}{dt}$	$40\frac{dL}{dt}$	$40\frac{d\pi}{dt}$	$40\frac{d\varphi}{dt}$	$40\frac{d\Omega}{dt}$	$40\frac{di}{dt}$
1872 Jan. 31	+0ʺ0940	—0ʺ002	—2ʺ049	—0ʺ055	—0ʺ146	+0ʺ010
März 11	0·0851	+0·102	1·879	0·046	0·111	0·012
April 20	0·0685	0·199	1·573	0·049	0·072	0·011
Mai 30	0·0455	0·283	1·169	0·073	0·035	0·007
Juli 9	+0·0172	0·341	0·713	0·119	—0·004	+0·001
Aug. 18	—0·0148	0·371	—0·260	0·189	+0·014	—0·007
Sept. 27	0·0488	0·363	+0·147	0·281	+0·015	0·018
Nov. 6	0·0832	0·313	0·468	0·387	—0·006	0·030
Dec. 16	0·1155	0·217	0·677	0·500	0·053	0·044
1873 Jan. 25	0·1433	+0·072	0·771	0·608	0·129	0·057
März 6	0·1634	—0·115	0·766	0·698	0·233	0·069
April 15	0·1728	0·336	0·703	0·757	0·364	0·078
Mai 25	0·1682	0·574	0·651	0·774	0·511	0·083
Juli 4	0·1477	0·806	0·692	0·744	0·663	0·082
Aug. 13	0·1105	1·000	0·899	0·668	0·800	0·075
Sept. 22	—0·0588	1·129	1·318	0·560	0·903	0·062
Nov. 1	+0·0024	1·167	1·930	0·438	0·952	0·043
Dec. 11	0·0653	1·102	2·654	0·324	0·938	0·023
1874 Jan. 20	0·1211	0·943	3·342	0·238	0·859	—0·002
März 1	0·1615	0·715	3·831	0·186	0·729	+0·014
April 10	0·1811	0·456	3·994	0·165	0·569	0·025
Mai 20	0·1775	—0·204	3·769	0·157	0·401	0·029
Juni 29	0·1528	+0·009	3·202	0·143	0·249	0·028
Aug. 8	0·1116	0·159	2·410	0·105	0·127	0·021
Sept. 17	0·0606	0·241	1·565	—0·037	0·046	0·012
Oct. 27	+0·0073	0·255	0·827	+0·057	—0·005	+0·003
Dec. 6	—0·0408	0·212	0·318	0·161	0·000	—0·006
1875 Jan. 15	—0·0777	+0·127	+0·071	+0·252	—0·023	—0·012
Mittlere Ekliptik 1880·0.						
1875 Jan. 15	—0·0777	+0·127	+0·071	+0·252	—0·023	—0·012
Febr. 24	0·0994	+0·019	0·028	0·312	0·063	0·016
April 5	0·1047	—0·097	0·077	0·332	0·111	0·016
Mai 15	0·0951	0·207	0·098	0·315	0·157	0·014
Juni 24	0·0741	0·300	+0·004	0·276	0·194	0·009
Aug. 3	0·0461	0·366	—0·227	0·231	0·218	—0·003
Sept. 12	—0·0153	0·406	0·566	0·195	0·229	+0·004
Oct. 22	+0·0149	0·415	0·955	0·176	0·225	0·010
Dec. 1	+0·0423	—0·396	—1·332	+0·176	—0·210	+0·016

Jupiter.

0ʰ mittl. Zeit	$1600\frac{d\mu}{dt}$	$40\frac{dL}{dt}$	$40\frac{d\pi}{dt}$	$40\frac{d\varphi}{dt}$	$40\frac{d\Omega}{dt}$	$40\frac{di}{dt}$
1876 Jan. 10	−2"9862	+ 4"373	+ 70"230	− 2"854	+ 0"766	−0"088
Febr. 19	4·0144	+ 1·725	91·820	4·435	1·352	0·220
März 30	4·9977	− 2·439	112·686	6·586	1·970	0·455
Mai 9	5·8473	8·334	131·316	9·041	2·405	0·828
Juni 18	6·4380	16·053	146·283	11·361	2·320	1·367
Juli 28	6·6091	25·404	156·502	12·935	+ 1·266	2·075
Sept. 6	6·1884	35·734	161·642	13·055	− 1·225	2·914
Oct. 16	5·0467	45·805	162·522	11·123	5·454	3·780
Nov. 25	3·1796	53·884	161·112	6·960	11·290	4·510
1877 Jan. 4	−0·7755	58·226	159·889	− 1·081	17·990	4·924
Febr. 13	+1·7991	57·764	160·569	+ 5·338	24·309	4·898
März 25	4·1166	52·628	163·062	10·886	28·952	4·430
Mai 4	5·8451	44·073	165·569	14·504	31·097	3·635
Juni 13	6·8411	33·863	165·634	15·834	30·630	2·691
Juli 23	7·1399	23·623	161·336	15·161	28·030	1·766
Sept. 1	6·8783	14·452	151·843	13·119	24·041	0·976
Oct. 11	6·2228	6·907	137·407	10·415	19·413	−0·374
Nov. 20	5·3213	− 1·136	118·996	7·643	14·741	+0·030
Dec. 30	4·2887	+ 2·953	97·972	5·233	10·445	0·256
1878 Febr. 8	3·2064	5·568	75·829	3·453	6·776	0·337
März 20	2·1314	6·939	54·082	2·428	3·864	0·310
April 29	1·1062	7·299	34·195	2·173	1·748	0·212
Juni 8	+0·1656	6·859	17·474	2·595	− 0·405	+0·075
Juli 18	−0·6573	5·810	+ 4·940	3·513	+ 0·237	−0·073
Aug. 27	1·3308	4·327	− 2·867	4·675	+ 0·284	0·206
Oct. 6	1·8262	2·564	6·091	5·796	− 0·127	0·307
Nov. 15	2·1240	+ 0·668	5·632	6·619	0.844	0·364
Dec. 25	2·2209	− 1·237	− 3·004	6·983	1·712	0·373
1879 Febr. 3	2·1325	3·045	+ 0·066	6·862	2·584	0·334
März 15	1·8939	4·676	2·127	6·372	3·343	0·256
April 24	1·5490	6·075	2·378	5·701	3·906	0·150
Juni 3	1·1427	7·205	+ 0·721	5·048	4·230	−0·027
Juli 13	0·7139	8·055	− 2·409	4·566	4·306	+0·099
Aug. 22	−0·2908	8·626	6·319	4·340	4·151	0·220
Oct. 1	+0·1080	8·931	10·292	4·389	3·801	0·326
Nov. 10	0·4724	8·993	13·732	4·689	3·300	0·412
Dec. 20	0·7980	8·834	16·216	5·184	2·698	0·474
1880 Jan. 29	1·0841	8·480	17·501	5·812	2·043	0·513
März 9	1·3319	7·952	17·490	6·506	1·380	0·527
April 18	+1·5436	− 7·275	− 16·200	+ 7·205	− 0·749	+0·518

Saturn.

0h mittl. Zeit	$1600\,\frac{d\mu}{dt}$	$40\,\frac{dL}{dt}$	$40\,\frac{d\pi}{dt}$	$40\,\frac{d\varphi}{dt}$	$40\,\frac{d\Omega}{dt}$	$40\,\frac{di}{dt}$
1876 Jan. 10	+0'0650	—0'352	—1'644	+0'190	—0'184	+0'021
Febr. 19	0·0824	0·285	1·858	0·215	0·152	0·025
März 30	0·0939	0·202	1·962	0·241	0·116	0·027
Mai 9	0·0997	0·106	1·960	0·264	0·079	0·027
Juni 18	0·0995	—0·003	1·867	0·274	0·045	0·026
Juli 28	0·0936	+0·101	1·714	0·271	—0·014	0·024
Sept. 6	0·0821	0·202	1·532	0·247	+0·008	0·020
Oct. 16	0·0653	0·293	1·359	0·203	0·022	0·015
Nov. 25	0·0434	0·368	1·230	0·139	0·024	0·009
1877 Jan. 4	+0·0167	0·421	1·182	+0·056	+0·013	+0·003
Febr. 13	—0·0141	0·445	1·243	—0·042	—0·013	—0·003
März 25	0·0481	0·432	1·433	0.149	0·053	0·008
Mai 4	0·0838	0·375	1·756	0·259	0·108	0·013
Juni 13	0·1189	0·271	2·190	0·360	0·175	0·015
Juli 23	0·1503	+0·118	2·685	0·446	0·252	0·016
Sept. 1	0·1734	—0·085	3·154	0·505	0·331	0·013
Oct. 11	0·1826	0·323	3·469	0·535	0·404	—0·008
Nov. 20	0·1722	0·573	3·488	0·534	0·460	+0·001
Dec. 30	0·1377	0·799	3·091	0·515	0·485	0·012
1878 Febr. 8	0·0785	0·957	2·243	0·496	0·470	0·023
März 20	—0·0009	1·007	—1·058	0·494	0·413	0·033
April 29	+0·0816	0·927	+0·200	0·519	0·321	0·039
Juni 8	0·1508	0·730	1·202	0·560	0·214	0·039
Juli 18	0·1905	0·464	1·714	0·583	0·113	0·035
Aug. 27	0·1926	—0·187	1·719	0·555	—0·037	0·027
Oct. 6	0·1597	+0·043	1·408	0·456	+0·007	0·017
Nov. 15	0·1029	0·196	1·062	0·300	0·020	0·009
Dec. 25	+0·0367	0·263	0·898	—0·119	+0·011	+0·002
1879 Febr. 3	—0·0254	0·253	0·986	+0·048	—0·011	—0·001
März 15	0·0742	0·185	1·256	0·171	0·036	0·003
April 24	0·1060	+0·077	1·574	0·242	0·058	—0·002
Juni 3	0·1204	—0·050	1·818	0·267	0·073	0·000
Juli 13	0·1201	0·178	1·911	0·262	0·081	+0·002
Aug. 22	0·1085	0·299	1·839	0·243	0·081	0·004
Oct. 1	0·0891	0·403	1·631	0·227	0·075	0·006
Nov. 10	0·0650	0·487	1·334	0·220	0·065	0·008
Dec. 20	0·0385	0·545	1·004	0·229	0·052	0·009
1880 Jan. 29	—0·0116	0·579	0·687	0·252	0·038	0·009
März 9	+0·0147	0·587	0·420	0·287	0·025	0·009
April 18	+0·0392	—0·571	+0·229	+0·330	—0·013	+0·009

Jupiter.

0ʰ mittl. Zeit	$1600\frac{d\mu}{dt}$	$40\frac{dL}{dt}$	$40\frac{d\pi}{dt}$	$40\frac{d\varphi}{dt}$	$40\frac{d\Omega}{dt}$	$40\frac{di}{dt}$
1880 Mai 28	+1ʺ7215	— 6ʺ455	—14ʺ078	+ 7ʺ838	— 0ʺ180	+0ʺ490
Juli 7	1·8673	5·520	11·008	8·389	+ 0·296	0·443
Aug. 16	1·9816	4·492	6·788	8·831	0·659	0·387
Sept. 25	2·0649	3·378	— 2·002	9·119	0·901	0·324
Nov. 4	2·1163	2·190	+ 3·075	9·232	1·020	0·257
Dec. 14	2·1338	— 0·941	8·144	9·158	1·023	0·192
1881 Jan. 23	2·1136	+ 0·353	12·877	8·894	0·922	0·132
März 4	2·0505	1·675	16·913	8·445	0·738	0·081
April 13	1·9367	3·002	19·859	7·830	0·500	0·041
Mai 23	1·7617	4·304	21·286	7·081	0·242	+0·014
Juli 2	1·5119	5·541	20·737	6·248	+ 0·004	0·000
Aug. 11	1·1700	6·655	17·679	5·409	— 0·170	—0·002
Sept. 20	0·7141	7·567	11·795	4·670	0·236	+0·002
Oct. 30	+0·1201	8·163	+ 2·642	4·173	— 0·152	+0·005
Dec. 9	—0·6372	8·276	— 9·947	4·096	+ 0·110	—0·006
1882 Jan. 18	1·5746	7·675	25·742	4·634	0·549	0·048
Febr. 27	2·6815	6·040	43·831	5·949	1·108	0·146
April 8	3·8808	+ 2·977	62·298	8·041	1·626	0·328
Mai 18	4·9634	— 1·904	77·999	10·529	1·775	0·618
Juni 27	5·5143	8·651	87·751	12·319	+ 1·037	1·014
Aug. 6	4·9555	16·399	89·882	11·691	— 1·124	1·439
Sept. 15	—2·9019	22·826	87·414	7·288	4·735	1·726
Oct. 25	+0·2239	24·957	86·670	+ 0·024	8·718	1·692
Dec. 4	3·1671	21·655	89·969	— 6·744	11·341	1·319
1883 Jan. 13	+4·8463	—14·797	—92·341	—10·194	—11·664	—0·788

Saturn.

0^h mittl. Zeit	$1600 \frac{d\mu}{dt}$	$40 \frac{dL}{dt}$	$40 \frac{d\pi}{dt}$	$40 \frac{d\varphi}{dt}$	$40 \frac{d\Omega}{dt}$	$40 \frac{di}{dt}$
1880 Mai 28	+0″0611	—0″532	+0″105	+0″377	—0″003	+0″008
Juli 7	0·0801	0·473	0·065	0·422	+0·004	0·006
Aug. 16	0·0957	0·396	0·121	0·460	0·008	0·005
Sept. 25	0·1073	0·304	0·237	0·488	0·010	0·004
Nov. 4	0·1145	0·201	0·389	0·502	0·008	0·002
Dec. 14	0·1169	—0·089	0·546	0·499	+0·005	+0·001
1881 Jan. 23	0·1140	+0·026	0·674	0·481	0·000	0·000
März 4	0·1051	0·140	0·732	0·444	—0·005	—0·001
April 13	0·0896	0·246	0·681	0·392	0·009	0·001
Mai 23	0·0670	0·337	0·484	0·329	0·011	—0·001
Juli 2	+0·0369	0·405	+0·104	0·261	0·009	0·000
Aug. 11	—0·0008	0·438	—0·471	0·194	—0·003	0·000
Sept. 20	0·0451	0·426	1·237	0·140	+0·008	0·000
Oct. 30	0·0939	0·358	2·149	0·106	0·025	—0·001
Dec. 9	0·1425	0·223	3·106	0·098	0·047	0·003
1882 Jan. 18	0·1828	+0·021	3·949	0.112	0·069	0·006
Febr. 27	0·2036	—0·238	4·479	0·132	0·086	0·011
April 8	0·1915	0·519	4·517	0·124	0·089	0·018
Mai 18	0·1375	0·762	4·025	+0·046	0·071	0·025
Juni 27	—0·0450	0·898	3·203	—0·121	+0·031	0·030
Aug. 6	+0·0643	0·873	2·398	0·342	—0·024	0·031
Sept. 15	0·1570	0·693	1·896	0·538	0·077	0·028
Oct. 25	0·2060	0·415	1·688	0·632	0·110	0·021
Dec. 4	0·2035	—0·124	1·527	0·600	0·114	0·013
1883 Jan. 13	+0·1609	+0·115	—1·168	—0·475	—0·093	—0·006

XIII. SITZUNG VOM 19. MAI 1881.

Se. Excellenz der Herr Curator-Stellvertreter macht der Akademie mit hohem Erlasse vom 15. Mai die Mittheilung, dass er in Verhinderung Seiner kaiserlichen Hoheit des Durchlauchtigsten Herrn Erzherzog-Curators in Höchstdessen Stellvertretung die diesjährige feierliche Sitzung am 30. Mai mit einer Ansprache eröffnen werde.

Das w. M. Herr Prof. E. Hering übersendet eine Abhandlung: „Beiträge zur allgemeinen Nerven- und Muskelphysiologie. VII. Mittheilung. Über die durch chemische Veränderung der Nervensubstanz bewirkten Veränderungen der polaren Erregung durch den elektrischen Strom", von Herrn Dr. Wilh. Biedermann, Privatdocenten der Physiologie und ersten Assistenten am physiologischen Institute der Universität zu Prag.

Das w. M. Herr Prof. Dr. A. Rollett übersendet eine Abhandlung des Herrn Otto Drasch, Docent und Assistent am physiologischen Institute der Universität zu Graz, betitelt: „Zur Frage der Regeneration des Trachealepithels mit Rücksicht auf die Karyokinese und die Bedeutung der Becherzellen."

Das w. M. Herr Director Dr. E. Weiss übersendet eine nachträgliche Mittheilung über den Kometen Swift vom 30. April 1881.

Das c. M. Herr Oberbergrath V. L. Ritter v. Zepharovich in Prag sendet die Fortsetzung seiner krystallographisch-optischen Untersuchungen über „Kampferderivate".

Das c. M. Herr Prof. H. Leitgeb in Graz übersendet eine Abhandlung unter dem Titel: „Die Stellung der Fruchtsäcke bei den geocalyceen Jungermannien."

Das c. M. Herr Prof. J. Wiesner übersendet eine von Herrn Dr. Hans Molisch im pflanzenphysiologischen Institute der

Wiener Universität ausgeführte Abhandlung: „Über die Ablagerung von kohlensaurem Kalk im Stamme dicotyler Holzgewächse.“

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. „Normalenfläche einer krummen Fläche längs ihres Schnittes mit einer zweiten krummen Fläche“, von Herrn Regierungsrath Prof. Dr. G. A. Peschka an der technischen Hochschule in Brünn.
2. „Zur Theorie der Polyeder“, von Hrn. Prof. Dr. F. Lippich an der Universität in Prag.
3. „Untersuchungen über die Bierhefe“, von Herrn G. Czeczetka, technischer Fabriksdirector in Wien.

Der Secretär überreicht eine im k. k. physikalischen Institute ausgeführte Untersuchung: „Über das magnetische Verhalten von Eisenpulvern verschiedener Dichten“, von Herrn J. Haubner.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Académie, Royale de Copenhague: Oversigt over det Forhandlingar of dets Medlemmers Arbejder i Aaret 1880. Nr. 2. Kjobenhavn; 8°.

— — Mémoires. 5me série. Vol. XII. Nr. 6. Kjøbenhavn, 1880; 4°. — 6me série. Vol. I. Nr. 1. Kjøbenhavn, 1880; 4°.

Academy, the American of Arts and Sciences: Proceedings. New Series. Vol. VIII. Whole series. Vol. XVI. Part 1. From May 1880, to February 1881. Boston, 1881; 8°.

Akademie, kaiserlich Leopoldino-Carolinisch-Deutsche der Naturforscher: Leopoldina. Heft XVII. Nr. 7—8. Halle a. S. April, 1881; 4°.

— der Wissenschaften k. b. zu München: Sitzungsberichte der mathem.-physikalischen Classe. 1881. Heft 2. München, 1881; 8°.

Apotheker-Verein, allgem. österr.: Zeitschrift (nebst Anzeigen-Blatt). XIX. Jahrg, Nr. 14. Wien, 1881; 8°.

Central-Station, k. bayer. meteorologische: Beobachtungen der meteorol. Stationen im Königreiche Bayern. Jahrgang II. Heft 4. München, 1880; 4°.

Chemiker-Zeitung: Central-Organ. Jahrgang V, Nr. 19. Cöthen, 1881; 4°.

Commission de la carte géologique de la Belgique: Texte explicatif du levé géologique de la planchette de Lubbeek. Bruxelles, 1881; 8°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences Tome XCII, Nr. 18. Paris, 1881; 4°.

Gesellschaft, deutsche chemische, zu Berlin: Berichte. XIV. Jahrgang. Nr. 8. Berlin, 1881; 8°.

Halle, Universität: Akademische Gelegenheitsschriften vom Jahre 1879—80. 90 Stücke 4°, 8° & folio.

Moniteur scientifique du D[teur] Quesneville: Journal mensuel. 25[e] année, 3[e] série. Tome XI. 473[e] livraison. — Mai 1881. Paris; 4°.

Moore, F. F. Z. S.: The Lepidoptera of Ceylon. Part II. London, 1881; 4°.

Museo Público de Buenos-Ayres: Description physique de la République Argentine par le Dr. H. Burmeister. Tome III. Animaux vertébrés 1[re] partie. Buenos-Ayres, Paris, Halle, 1879; 8°. — Atlas de la Description physique de la République Argentine. 2[e] Livraison. Lépidoptères. Buenos-Ayres. Paris, Halle, 1880; folio. — Berichte über die Feier des 50jährigen Doctor-Jubiläums des Professors Dr. Herm. Burmeister, begangen den 19. December 1879 in Buenos-Ayres. Buenos-Ayres, 1880; 8°.

Muséum d'Histoire naturelle. Nouvelles Archives. 2[e] série. Tome III, 2[e] fascicule. Paris, 1880; 4°.

Nature. Vol. XXIV. Nr. 602. London, 1881; 8°.

Naturforscher-Verein zu Riga: Correspondenzblatt. XXIII. Jahrgang. Riga, 1880; 8°.

Radcliffe Observatory, Oxford: Results of meteorological Observations made in the years 1876—79. Vol. XXXVII. Oxford, 1880; 8°.

Society, the Royal geographical: Proceedings and monthly Record of Geography. Vol. III. Nr. 5. May 1881. London; 8°,

— the Royal geological of Ireland: Journal. Vol. XV. Part. III. 1879—80, Edinburgh, London, Dublin, 1880; 8°.

— the Royal microscopical: Journal. Ser. 2. Vol. I. Part 2. April, 1881. London; 8°.

Society the Royal of South Australia: Transactions and Proceedings and Report. Vol. III (for 1879—80.) Adelaide, 1880; 8°.

— the literary and philosophical of Manchester: Memoirs. 3. Series. VI. Vol. London, Paris, 1879; 8°.

— — Proceedings. Vol. XVI—XIX. Sessions 1876—1880. Manchester, 1877—1880.

Verein militär-wissenschaftlicher, in Wien: Organ. XXII. Band, 4. & 5., 6. Heft. Wien, 1881; 8°.

Wiener Medizinische Wochenschrift XXXI. Jahrgang. Nr. 20, Wien, 1881; 4°.

Wissenschaftlicher Club in Wien: Monatsblätter. II. Jahrg., Nr. 7. — Ausserordentliche Beilage Nr. VI, Wien, 1881; 4°.

Über das magnetische Verhalten von Eisenpulvern verschiedener Dichten.

Von **J. Haubner.**

Die nachstehenden Versuche, welche sich mit der Abhängigkeit der Magnetisirungsfunction von der Dichte beschäftigen, wurden nach der auch schon von anderen Experimentatoren[1] angewandten magnetometrischen Methode ausgeführt, nur mit dem Unterschiede, dass die Eisenpulver nicht in cylindrische Formen, sondern in die einer mathematischen Behandlung zugängliche Kugelform gebracht und die Messungen in absolutem, d. i. elektromagnetischem Masse in Gauss'schen Einheiten durchgeführt wurden. Das Eisenpulver war gewöhnliches, sogenanntes „feinstes Eisenpulver", wie es im Handel zu haben ist.

Neben dem totalen Magnetismus fand auch der remanente Beachtung.

I.

Die Verdrehung ψ, welche ein sehr kleiner Magnet vom magnetischen Moment M, dessen Axe senkrecht auf der Richtung des magnetischen Meridians steht, dem in der Entfernung R befindlichen, gleichfalls kleinen Magnet eines Edelmann'schen Galvanometers ertheilt, kann man durch den Ausdruck

$$\operatorname{tg} \psi = 2 \frac{M}{HR^3}$$

wiedergeben, worin H die Horizontalcomponente des Erdmagnetismus ist.

---

[1] v. Waltenhofen, Ber. d. k. Akad. d. Wissensch. Bd. LXXIX, 1879. — Auerbach, Magnetische Untersuchungen, Wiedemann's Annalen d. Phys. u. Chem., Bd. XI, Heft 3, 1880.

Eine Eisenkugel, die unter dem Einflusse einer auf dem magnetischen Meridian senkrechten, constanten magnetisirenden Kraft P steht, wirkt wie ein solcher kleiner Magnet vom Momente

$$M = v \cdot \mu,$$

— unter v das Kugelvolumen und μ das auf die Volumseinheit entfallende Moment verstanden. Für eine Kugel ist

$$\mu = \varkappa \cdot P,$$

worin $\varkappa$ mit der Magnetisirungsfunction k in der Beziehung

$$\frac{1}{\varkappa} = \frac{1}{k} + \frac{4\pi}{3}$$

steht. Die Winkel ψ wird man durch Spiegelablesung bestimmen, und hat schliesslich, wenn e der beobachtete Ausschlag, d die Distanz der Skala vom Spiegel des Galvanometers ist,

$$\frac{1}{\varkappa} = 2v \cdot \frac{2d}{HR^3} \cdot \frac{P}{e},$$

woraus sich k berechnen lässt, wenn e und P beobachtet werden.

Ein nahezu homogenes, magnetisches Feld kann man durch eine lange, vom elektrischen Strome durchflossene Drathspirale herstellen, in deren Mittelpunkt die zu magnetisirende Kugel gebracht wird. Die magnetisirende Kraft P, welche eine cylindrische Spirale in der Richtung ihrer Axe auf einen inneren Punkt ausübt, ist

$$P = 4\pi ni - K,$$

wo n die auf die Längeneinheit der Spirale entfallende Zahl der Windungen und K die Kraft bedeutet, mit welcher die Endbelegungen von der Dichte $\sigma = ni$ auf den Punkt wirken, wenn man die Kreisströme durch magnetische Platten ersetzt denkt.

Ich führe den Ausdruck für P eigens an, weil man merkwürdigerweise mitunter K statt P als magnetisirende Kraft in sogenannten „absoluten" Messungen angegeben findet.

Ist $2l$ die Länge der Spirale, r der Radius, dann ist

$$K = 4\pi ni \left[1 - \frac{l}{\sqrt{l^2 + r^2}}\right]$$

für den Mittelpunkt. Für einen Punkt, der sich in der Entfernung x von der Mitte, in der Axe befindet, ist

$$K = 2\pi n i \left[2 - \frac{l+x}{\sqrt{(l+x)^2+r^2}} - \frac{l-x}{\sqrt{(l-x)^2+r^2}}\right],$$

welcher Ausdruck für kleine Werthe von x äusserst wenig von dem vorigen verschieden ist. Man kann daher setzen

$$P = 4\pi n i \cdot \frac{l}{\sqrt{l^2+r^2}} = 4\pi i \frac{N}{\sqrt{l^2+r^2}},$$

wenn N die Gesammtzahl der Windungen einer Lage ist und bei mehreren Lagen

$$P = 4\pi i \Sigma \frac{N_v}{\sqrt{l_v^2+r_v^2}}.$$

Für $l = 100$ Mm., $r = 20$ Mm. fand ich von $x = 0$ bis $x = 20$ Mm. nur eine Variation von P um etwa $3^0/_{00}$, in radialer Richtung ist sie noch geringer, sonach kann man den von der Kugel eingenommenen Raum als homogenes Feld betrachten.

Ich stellte mir nun eine Spirale her mit sieben Lagen, und es war $2l_1 = 200$ Mm., $2l_7 = 203$ Mm., der äussere Radius der innersten Lage 23 Mm., der äussersten 29 Mm. und die Zahl der Windungen von innen nach aussen 168, 169, 167, 168, 167, 167, 164.

Zur Magnetisirung wurden entweder nur die innersten drei, oder alle sieben Lagen verwendet und

$$P_1 = 30{\cdot}86.i, \quad P_2 = 70{\cdot}97.i$$

gefunden.

Die Spirale war auf zwei Schienen so aufgelegt, dass ihre Axe senkrecht auf dem magnetischen Meridian stand und in ihrer Verlängerung den Mittelpunkt des Magnetes des Edelmann-schen Galvanometers traf. Die Wirkung der vom Strome durchflossenen Spirale kann durch eine zweite, beliebige Spirale auf der entgegengesetzten Seite aufgehoben werden. Ich wählte dazu eine kurze Rolle, um nicht das von der ersten Spirale gelieferte Feld zu sehr zu beeinträchtigen.

Ausser durch diese beiden Rollen ging der Strom noch durch eine dritte Rolle. Die Ablenkungen i', welche dieselbe dem Magnete eines Weber'schen Galvanometers ertheilte, wurden gleichfalls mit Spiegel und Fernrohr abgelesen und gaben ein Mass für die Stromstärke i, dessen Reductionsfactor C auf absolutes Mass mittelst einer Gaugain'schen Bussole bestimmt war ($C_1 = 0·04834$, $C_2 = 0·173$ bei $H = 2$).

Als Form für die Eisenpulver diente eine Glaskugel vom Volumen $v = 30503$ Cmm.

Verdünntes Eisenpulver stellte ich durch Mischung desselben mit feinem Broncepulver her, dessen Dichte der des Eisens wenig nachstand — eine Eisenfüllung der Kugel wog circa 116 Grm., die Broncefüllung 94 Grm. — Auf diese Art war nicht zu befürchten, dass bei der Füllung eine beträchtliche Sonderung der Pulver und damit eine ungleichmässige Vertheilung des Eisens eintreten werde.

Der Magnetismus des verwendeten Broncepulvers konnte bei den Dichten, mit denen ich operirte, vernachlässigt werden.

Nebst blossem Eisenpulver untersuchte ich nämlich nur Mischungen mit $^3/_4$, $^1/_2$ und $^1/_4$ Eisen. Weiter in der Verdünnung zu gehen, erschien mir nicht räthlich, da einerseits dann dem Magnetismus des Bronce hätte Rechnung getragen, anderseits die Compensationsrolle der Magnetisirungsspirale hätte bedeutend genähert werden müssen, was ausser der Störung des magnetischen Feldes, die sich noch berechnen liesse, auch die unangenehme Folge hat, dass die Compensation sehr schwierig und schon durch die geringste Erschütterung auch nur eines Drahtstückes aufgehoben wird.

Was die Ordnung der Ablesungen betrifft, so wurde, nachdem die Wirkung der Magnetisirungsspirale auf den Magnet bei dem stärksten zur Verwendung gekommenen Strome compensirt worden war, die Kugel mit dem Pulver in die Spirale eingeführt, so dass der Mittelpunkt der Kugel und Spirale zusammenfielen, sodann mit den schwächeren Kräften die Magnetisirung begonnen und zu immer stärkeren geschritten, und bei jeder Kraft wurde geschlossen, geöffnet, entgegengesetzt geschlossen und wieder geöffnet. Die halbe Distanz e_r der Skalentheile bei der ersten und dritten Ablesung am Edelmann gab den totalen, die bei der

zweiten und vierten (e_ρ) den remanenten Magnetismus an. Die Ablesung der Stromstärke am Weber geschah unmittelbar vor der Ablesung 1 und 3. Nach Vollzug der Beobachtungen wurde die Kugel aus der Spirale gezogen, nachgesehen, ob durch das Einschieben nichts an der Compensation gestört worden sei, und die etwaige Störung in Rechnung gezogen. Darauf wiederholte sich das Verfahren bei einer grösseren Distanz mit grösseren Kräften.

Aus der Reihe der durchgeführten Versuche führe ich folgende an:

Darin sind Q_ϵ das Gewicht des zur Mischung genommenen Eisenpulvers, Q_β das des Broncepulvers, $Q_{\epsilon\beta}$ das Gewicht der Füllung, Q das daraus berechnete Gewicht des in der Füllung befindlichen Eisens und δ seine Dichte.

Tabelle I.

$Q = 116{\cdot}69$ Gr. $R_1 = 399{\cdot}2$ Mm. und $P_1(1—5)$, $C_1(1—7)$
$\delta = 3{\cdot}826$ $R_2 = 649$ „ „ $P_2(6—11)$, $C_2(8—11)$
$d = 2210$ Mm.

Nr.	i	e_τ	e_ρ	P	$\frac{1}{x}$	μ_τ	k	μ_ρ	$\frac{\mu_\rho}{\mu_\tau}.10^{-4}$
1	45·7	25·4	—	68·18	5·688	11·98	0·667	—	—
2	64·7	36	0·05	96·52	5·682	16·99	0·670	0·024	14
3	106·9	59·5	0·1	159·5	5·680	28·08	0·671	0·047	17
4	159·1	88·9	0·35	237·3	5·658	41·95	0·681	0·166	39
5	231·5	129·7	0·9	345·3	5·643	61·2	0·688	0·425	69
6	131	169·6	1·7	449·4	5·616	80·03	0·701	0·802	100
7	161·8	210·2	2·4	555·1	5·596	99·18	0·711	1·132	114
8	56·6	62·4	0·7	694·9	5·493	126·5	0·767	1·419	112
9	78·15	87·45	1·55	959·5	5·412	177·3	0·818	3·143	177
10	108·6	122·7	2·75	1333	5·360	248·8	0·854	5·576	224
11	148·6	169·45	4·75	1825	5·311	343·5	0·891	9·630	280

Tabelle II.

$Q_\varepsilon = 86 \cdot 86$ Gr. $Q = 86 \cdot 75$ Gr., $R_1 = 325 \cdot 5$ $P_1(1-6)$, $C_1(1-9)$
$Q_\beta = 23 \cdot 58$ Gr. $\delta = 2 \cdot 844$, $R_2 = 512 \cdot 5$ $P_2(7-11)$, $C_2(10-11)$
$Q_{\varepsilon\beta} = 110 \cdot 3$ Gr. $d = 2210$.

Nr.	i'	e_τ	e_ρ	P	$\frac{1}{x}$	μ_τ	k	μ_ρ	$\frac{\mu_\rho}{\mu_\tau} . 10^{-4}$
1	34·6	27·5	0·1	51·62	7·338	7·034	0·318	0·026	36
2	49	39	0·15	73·1	7·327	9·976	0·319	0·038	38
3	68·6	54·8	0·25	102·3	7·301	14·02	0·321	0·064	46
4	112·1	89·7	0·5	167·2	7·289	22·89	0·323	0·128	56
5	161·4	129·7	1·0	240·8	7·257	33·18	0·326	0·256	77
6	228·3	184·1	1·9	340·6	7·232	47·09	0·329	0·486	103
7	127·1	61·7	0·8	436·1	7·078	61·6	0·346	0·799	130
8	156·2	76·4	1·05	535·9	7·025	76·28	0·353	1·05	137
9	193·9	95·5	1·75	665·2	6·977	95·35	0·359	1·75	183
10	72·9	129·7	3·35	895·1	6·912	129·5	0·367	3·34	258
11	94·8	170·6	4·8	1164	6·833	170·3	0·378	4·79	281

Tabelle III.

$Q_\varepsilon = 58$ Gr., $Q = 57 \cdot 81$ Gr. $R_1 = 319$, $P_1(1-6)$, $C_1(1-9)$
$Q_\beta = 47$ Gr., $\delta = 1 \cdot 895$ $R_2 = 467 \cdot 5$, $P_2(7-11)$, $C_2(10-11)$
$Q_{\varepsilon\beta} = 104 \cdot 65$ Gr., $d = 2210$.

Nr.	i'	e_τ	e_ρ	P	$\frac{1}{x}$	μ_τ	k	μ_ρ	$\frac{\mu_\rho}{\mu_\tau} . 10^{-4}$
1	35·2	20·8	0·1	52·51	10·49	5·008	0·159	0·024	48
2	50·1	29·7	0·2	74·74	10·45	7·151	0·160	0·048	67
3	69·6	41·4	0·3	103·8	10·42	9·968	0·161	0·072	73
4	109·4	65·5	0·6	163·2	10·35	15·77	0·162	0·144	92
5	161·6	97·2	0·95	241·1	10·30	23·40	0·164	0·229	98
6	227·1	137·5	2·0	338·8	10·23	33·11	0·166	0·482	145
7	125·3	55·9	1·0	429·9	10·15	42·36	0·168	0·758	179
8	154·8	69·9	1·5	531·1	10·03	52·97	0·171	1·14	215
9	193·5	88·1	2·3	663·8	9·943	66·77	0·174	1·47	261
10	71·5	118·3	3·7	877·9	9·792	89·65	0·178	2·80	313
11	92·7	156·2	5·65	1138	9·615	118·4	0·184	4·28	362

Tabelle IV.

$Q_\iota = 29$ Gr. $Q = 28 \cdot 89$ Gr. $R_1 = 204$, $P_1(1-6)$ $C_1(1-9)$
$Q_\beta = 71$ „ $\delta = 0 \cdot 947$ $R_2 = 326 \cdot 6$, $P_2(7-11)$ $C_2(10-11)$
$Q_{\iota\beta} = 99 \cdot 63$ Gr. $d = 2217$.

Nr.	i'	e_τ	e_ρ	P	$\frac{1}{\varkappa}$	μ_τ	k	μ_ρ	$\frac{\mu_\rho}{\mu_\tau} . 10^{-4}$
1	31·7	32.6	—	47·29	23·11	2·046	0·0529	—	—
2	45·15	46·5	0·2	67·36	23·05	2·922	0·0530	0·013	43
3	62·8	64·8	0·4	93·68	23·03	4·068	0·0531	0·025	62
4	101·5	104·8	0·7	151·4	23·02	6·578	0·0531	0·044	67
5	145·2	151·5	1·2	216·6	22·78	9·510	0·0538	0·075	79
6	204·6	215·5	2·5	305·2	22·56	13·53	0·0544	0·157	116
7	118	70·6	1·1	404·8	22·28	18·17	0·0553	0·283	156
8	143·9	86·9	1·4	493·7	22·07	22·37	0·0559	0·360	161
9	176·2	107	2·1	604·5	21·95	27·61	0·0563	0·541	196
10	67·1	148	3·75	823·8	21·62	38·09	0·0574	0·965	253
11	85·35	192	5·8	1048	21·20	49·42	0·0588	1·49	302

Tabelle V.

$Q = 115 \cdot 97$ Gr. $R_1 = 345 \cdot 7$ $P_1(1-6)$ $C_1(1-9)$
$\delta = 3 \cdot 802$ $R_2 = 507 \cdot 2$ $P_2(7-11)$ $C_2(10-11)$
$d = 2210$.

Nr.	i'	e_τ	e_ρ	P	$\frac{1}{\varkappa}$	μ_τ	k	μ_ρ	$\frac{\mu_\rho}{\mu_\tau} . 10^{-4}$
1	33·1	27·1	—	49·38	5·946	8·304	0·569	—	—
2	46·6	38·3	0·15	69·52	5·923	11·74	0·577	0·046	39
3	65·2	53·7	0·25	97·27	5·911	16·46	0·581	0·077	47
4	105·9	87·5	0·5	158	5·892	26·81	0·587	0·153	57
5	154·7	128	0·8	230·8	5·884	39·21	0·590	0·245	63
6	221·6	138·5	1·4	330·6	5·879	56·23	0·592	0·429	76
7	127·7	77·8	0·75	438·1	5·819	75·3	0·613	0·726	96
8	156·6	96	1·0	537·2	5·783	92·91	0·627	0·968	104
9	187·1	115·2	1·6	641·9	5·757	111·5	0·638	1·55	139
10	69·7	154	2·6	855·7	5·742	149	0·643	2·52	169
11	90·6	202·3	4·1	1112	5·682	195·8	0·670	3·97	203

Hiezu füge ich noch eine Versuchsreihe über unvermischtes Eisenpulver, die ich vor den bereits angeführten nach der Ringmethode angestellt hatte. Der Ring war aus Holz und hatte einen Hohlraum von den Durchmessern $d = 160{\cdot}2$ Mm., $D = 180{\cdot}2$ Mm. und eine Höhe $h = 13{\cdot}6$ Mm., mit der Holzwand war $d' = 150{\cdot}3$, $D' = 190$, $h' = 25$. Das Gewicht des eingefüllten Pulvers betrug 242·24 Gr.

Aufgewickelt waren fünf Lagen mit folgenden Windungszahlen und äusseren Dimensionen:

$$\nu_1 = 370, \quad \nu_2 = 360, \quad \nu_3 = 336, \quad \nu_4 = 335, \quad \nu_5 = 306$$
$$R_1 - r_1 = 23 \text{ Mm.} \quad R_2 - r_2 = 26{\cdot}5, \quad R_3 - r_3 = 28{\cdot}4, \quad R_4 - r_4 = 31$$
$$h_1 = 28 \text{ Mm.} \quad h_2 = 30{\cdot}5, \quad h_3 = 33, \quad h_4 = 35{\cdot}2.$$

Darnach hatten die über den Querschnitt des Pulvers und der einzelnen Lagen erstreckten Integrale die Werthe

$$A = 1{\cdot}6$$
$$A_1 = 6{\cdot}91, \quad A_2 = 8{\cdot}43, \quad A_3 = 10{\cdot}26, \quad A_4 = 12{\cdot}03.$$

Die zur Verwendung gebrachten magnetisirenden Kräfte waren

$$P_1 = 8{\cdot}696 . i \ (1-4)$$
$$P_{12} = 17{\cdot}16 . i \ (5-9)$$
$$P_{123} = 25{\cdot}05 . i \ (10)$$
$$P_{1234} = 32.93 . i \ (11-16),$$

die Reductionsfactoren für die relative Stromstärke i' auf absolutes Mass:

$$R_1 = 0{\cdot}009915 \ (1-2)$$
$$R_2 = 0{\cdot}0506 \ (3-10)$$
$$R_3 = 0{\cdot}1885 \ (11-16).$$

Inducirende Lagen waren die 2., 3., 4. und 5. (1—4), die 5. allein von 5—16. Die Fläche des Erdinductors betrug 74.968.10³ □Mm., der Ausschlag vom Erdinductor $ej = 186{\cdot}16$ Mm., bei einem Widerstande der Secundärleitung $w_s = 63{\cdot}37$ Siem. *E.* Sonst war $w_s = 18{\cdot}51$ (1—2), 33·37 (3—4), 30·61 (5—8), 60·61 (9—10), 230·61 (11—13), 330·61 (14), 530·61 (15—16).

Die Magnetisirungsfunction ist aus der Formel

$$k = C . \frac{ew}{ilj} - \text{Correctur}$$

zu rechnen, wobei

$$\begin{aligned} C &= 7 \cdot 538 \ (1-11) \quad \text{Correctur:} \ 0 \cdot 343 \\ &= 16 \cdot 69 \ (5-9) \quad \text{„} \quad 0 \cdot 381 \\ &= 11 \cdot 43 \ (10) \quad \text{„} \quad 0 \cdot 422 \\ &= 8 \cdot 698 \ (11-16) \quad \text{„} \quad 0 \cdot 464, \end{aligned}$$

und die auf den remanenten Magnetismus bezügliche Grösse k_ρ, nach derselben Formel, — nur dass der Ausschlag beim Wenden e_w durch $2e_\rho$ zu ersetzen und die Correctur wegzulassen ist. Die Anordnung der Apparate war dieselbe wie bei meinen Versuchen: „Über das magnetische Verhalten des Eisens."[1] (Siehe Tab. VI.)

II.

Die graphische Darstellung der Versuche zeigt, dass die Magnetisirungsfunction k der Eisenpulver als Function des Momentes μ betrachtet, einen ähnlichen Verlauf hat wie die des Eisens. Für kleine Werthe von μ wächst sie nur langsam, um sodann wieder rascher zu steigen. Ein Maximum von k habe ich nicht erreicht, was bei den Versuchen mit der Kugel nicht zu wundern ist, da der äusseren magnetisirenden Kraft P hier der freie Magnetismus der Oberfläche in der Stärke $\frac{4\pi}{3}\mu$ entgegenwirkt, so dass verhältnissmässig nur kleine Momente erzielt werden. Die Versuchreihe nach der Ringmethode, bei welcher die

---

[1] LXXXII. Bd. d. Sitzb. d. k. Akad. d. Wiss. in Wien, Oct. 1880.

Berichtigung. Bei der Berechnung der obigen Versuchsreihe über Eisenpulver ward ich inne, dass sich in die citirte Abhandlung beim mechanischen Rechnen der Fehler einschlich, dass ich auch bei k_ρ die Correction in Abzug brachte. Darnach sind in jener Abhandlung in der Versuchsreihe I die k_ρ um die Beträge 0·095 (1—10) 0·111 (11—22), 0·121 (23—31), 0·13 (32—37), und bei der Versuchsreihe II um 0·113 (1—12), 0·132 (13—21), 0·152 (22—34), 0·174 (35—38) zu vermehren und ebenso die μ_ρ um diese mit den respectiven P multiplicirten Grössen. Die dort befindliche graphische Darstellung leidet unter diesem Irrthume wegen der Kleinheit des angewandten Massstabes nicht.

äussere magnetisirende Kraft am vollständigsten ausgenützt ist, zeigt jedoch bei dem Momente 1000 schon eine sehr langsame Zunahme von k, so dass man ein Maximum in der Nähe dieses Werthes vermuthen kann.

Tabelle VI.

$\delta = 3\cdot33.$

Nr.	i'	e_w	$2e_p$	P	k_τ	μ_τ	k_ρ	μ_ρ
1	80·1	62·4	—	6·906	0·586	2·03	—	—
2	143·5	112·2	0·2	12·37	0·590	7·30	0·002	0·02
3	55·15	122·3	0·3	24·27	0·591	14·34	0·002	0·05
4	104·65	232·9	0·8	46·05	0·595	27·40	0·003	0·15
5	96·75	111·2	0·3	83·99	0·603	50·64	0·003	0·22
6	108·7	126	0·6	94·36	0·610	57·56	0·005	0·45
7	149·6	175·7	3·2	129·9	0·624	81·04	0·018	2·38
8	178·7	215·3	4·6	155·1	0·650	100·8	0·022	3·42
9	199·2	121	2·9	172·9	0·666	115·2	0·025	4·34
10	158·3	148·1	4·5	200·7	0·682	136·9	0·034	6·73
11	72	99·9	7	446·9	0·788	352·2	0·088	39·14
12	103	145	12·4	639·3	0·806	515·3	0·109	69·42
13	127·2	187	18	789·5	0·862	680·5	0·127	100·8
14	151·4	157	15	939·7	0·877	824·1	0·128	120·4
15	176·5	115·5	10·7	1095	0·894	979·3	0·125	137·8
16	192·1	126·5	12	1192	0·903	1077	0·130	154·6

Da es indess misslich ist, mit sehr starken Kräften zu operiren und man, wenn es auch gelingt, mit einer Kraft über das Maximum hinauszukommen, bei den Unregelmässigkeiten, welche Eisenpulver bisweilen zeigen, doch nicht sicher wäre, ob es überschritten sei, gab ich es auf, nach einem Maximum zu suchen und wählte die Ablenkungsmethode, da überdies bei meinem Ringe die Correctionen für die Induction seitens des Primärstromes eine bedenkliche Grösse hatten.

Von den Werthen der Magnetisirungsfunction dürften namentlich auch die Grenzwerthe für $\mu = 0$ für die Theorie einmal von

Wichtigkeit werden, und ich werde die Versuche hauptsächlich in Bezug auf diese Werthe discutiren.

Die magnetisirende Kraft ist dann immer klein vorauszusetzen, und zwar soll mit diesem Ausdrucke nur mehr die Resultirende aus der äusseren und der aus dem magnetischen Potenzial sich ergebenden Kraft ($P' = P - \frac{4\pi}{3}\mu$ bei der Kugel) verstanden sein, so dass zwischen μ und P' einfach die Beziehung $\mu = k.P'$ besteht.

Bei den Versuchen über die Magnetisirung des Eisens vermutete ich, dass der Werth von k für $\mu = 0$ den Antheil bestimme, welchen P' für sich allein zum magnetischen Momente liefert, von dem ja ein Theil auf die gegenseitige Wirkung der in polaren Zustand versetzten Theile zu stehen kommt (Molecularvertheilung).

Wäre das der Fall, so müssten für gleiche aber sehr kleine P' die Quotienten $\frac{\mu}{\delta}$, d. i. die magnetischen Momente der Masseneinheit des Eisens und mithin die Quotienten $\frac{k}{\delta}$ gleiche Werthe besitzen, gleichgiltig, was auch δ für Werthe hat.

Berechnet man nun die Quotienten und nimmt für k überall den ersten in den Tabellen (I, II, III, IV) enthaltenen Werth, so ist für

$$\delta = 0\cdot947 \qquad \frac{k}{\delta} = 0\cdot0559$$

$$\delta = 1\cdot895 \qquad \frac{k}{\delta} = 0\cdot0839$$

$$\delta = 2\cdot844 \qquad \frac{k}{\delta} = 0\cdot1118$$

$$\delta = 3\cdot826 \qquad \frac{k}{\delta} = 0\cdot1744,$$

d. h., es ist für diese Dichten auch schon bei sehr schwachen Kräften die Molecularvertheilung wirksam.

Es fragt sich nun, welcher Grenze sich dieser Quotient nähert, wenn die Verdünnung immer weiter getrieben wird, denn diese Grenze müsste, da bei einer ins Unendliche fortgesetzten

Verdünnung eine Wechselwirkung der Theilchen nicht mehr statt hat, den Factor angeben, mit dem die magnetisirende Kraft zu multipliciren wäre, um das Moment einer so zertheilten Masseneinheit zu finden, oder den Antheil bestimmen, den P' für sich allein an der Magnetisirung nimmt.

Verzeichnet man diese Zahlen mit den δ als Abscissen und den $\frac{k}{\delta}$ als Ordinaten, so sieht man, dass die Punkte für die drei geringsten Dichten genau in einer geraden Linie liegen, welche die Ordinatenaxe in einem Punkte oberhalb der Abscissenaxe schneidet, und der Abstand a dieses Punktes vom Ursprunge wäre die gesuchte Grenze.

Für Dichten, die zwischen 1 und 3 liegen, hat man demnach mit hinlänglicher Genauigkeit

$$\frac{k}{\delta} = a + b\delta$$

oder

$$k = a\delta + b\delta^2,$$

also die Abhängigkeit der Magnetisirungsfunction von der Dichte durch das Gesetz einer Parabel gegeben.

Die Zahlenwerthe der Coëfficienten sind

$$a = 0\cdot0281, \quad b = 0\cdot0295.$$

Für consistentes Eisen fand ich in der erwähnten Abhandlung $k = 16\cdot5$ bei $\delta = 7\cdot867$. Die Grösse $a\delta$ ist hiefür $= 0\cdot22$, sonach wäre für kleine Kräfte das in der Volumeinheit des consistenten Eisens unter Mitwirkung der Molecularvertheilung erzeugte Moment 75mal grösser als das Moment, welches die magnetisirende Kraft für sich allein hervorrufen würde.

Gegen diese Folgerungen lassen sich allerdings Einwendungen erheben, denn sie enthalten implicite die Voraussetzung, dass die Verdünnung des Pulvers so weiter gehe wie bei den Versuchen, dass also die Eisentheilchen, die ja Gruppen von sehr vielen Molecülen sind, nicht in Molecüle auseinandergerissen werden. So lange aber Molecülgruppen vorhanden sind, machen sich innerhalb derselben noch immer moleculare Wirkungen geltend, und von diesem Gesichtspunkte aus müsste man den gefundenen Werth von a noch für zu gross halten. — Immerhin

aber dürfte das mit Gewissheit erhellen, dass der directe Antheil der magnetisirenden Kraft an der Magnetisirung ein kleiner ist und dass der Werth a die Grösse desselben wenigstens beiläufig wiedergibt.

Dass die für $\frac{k}{\delta}$ gegebene Formel für grössere Dichten nicht mehr anwendbar ist, zeigt schon ein Blick auf die Zeichnung. Der Punkt, welcher der Dichte $\delta = 3{\cdot}826$ entspricht, liegt bereits beträchtlich über der Geraden. Ich unterlasse es aber, eine genauere empirische Formel aufzustellen, da hiezu einerseits die Zahl der Versuche eine zu geringe ist und anderseits die Versuchsmethode gerade bei den grösseren Dichten nicht ganz zuverlässige Resultate liefert, da bei denselben $\frac{1}{k}$ gegen $\frac{4\pi}{3}$ noch zu klein ist. So haben zwei mit gleicher Sorgfalt ausgeführte Reihen (I, V) ziemlich verschiedene Werthe für k ergeben. Allerdings ist zu erwähnen, dass zwischen der Ausführung der ersten und der folgenden Reihen eine längere Zeit verstrichen ist, und es wäre möglich, dass in Folge einer langsamen theilweisen Oxydation des Eisenpulvers sich bei V ein kleinerer Werth für k ergeben hat.

Bezüglich des remanenten Magnetismus zeigt sich, dass er sowohl mit abnehmender Dichte als auch mit zunehmendem totalen Momente wächst. Zur Bestimmung der Grenze, welcher sich hiebei der remanente Magnetismus der Masseneinheit nähert, geben die Versuche noch keinen rechten Anhalt.

SITZUNGSBERICHTE

DER

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

LXXXIII. BAND. III. ABTHEILUNG.

JAHRGANG 1881. — HEFT I BIS V.

(Mit 9 Tafeln.)

WIEN.

AUS DER K. K. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI CARL GEROLD'S SOHN,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1881.

INHALT.

Seite

I. Sitzung vom 7. Jänner 1881: Übersicht 3

Brücke, Über eine durch Kaliumhypermanganat aus Hühnereiweiss erhaltene stickstoff- und schwefelhaltige unkrystallisirbare Säure. [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.] . . . 7

II. Sitzung vom 13. Jänner 1881: Übersicht 13

Pommer, Über die lacunäre Resorption in erkrankten Knochen. (Mit 2 Tafeln.) [Preis: 1 fl. 40 kr. = 2 RMk. 80 Pfg.] . 17

III. Sitzung vom 20. Jänner 1881: Übersicht 141

IV. Sitzung vom 3. Februar 1881: Übersicht 147

Exner, Zur Kenntniss vom feineren Baue der Grosshirnrinde. (Mit 1 Tafel.) [Preis: 40 kr. = 80 Pfg.] 151

V. Sitzung vom 10. Februar 1881: Übersicht 168

VI. Sitzung vom 17. Februar 1881: Übersicht 171

Brücke, Nachtrag zu der am 7. Jänner gemachten Mittheilung über eine durch Oxydation von Eiweiss erhaltene unkrystallisirbare Säure. [Preis: 5 kr. = 10 Pfg.] 174

VII. Sitzung vom 10. März 1881: Übersicht 181

Lustig, Über die Nervenendigung in den glatten Muskelfasern. (Mit 1 Tafel.) Preis: 25 kr. = 50 Pfg.] 186

VIII. Sitzung vom 17. März 1881: Übersicht 195

v. Fleischl, Physiologisch-optische Notizen. [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.] 199

IX. Sitzung vom 31. März 1881: Übersicht 208

X. Sitzung vom 7. April 1881: Übersicht 215

Holl, Über die Blutgefässe der menschlichen Nachgeburt. (Mit 2 Tafeln.) [Preis: 1 fl. 30 kr. = 2 RMk. 60 Pfg.] . . . 219

Dubelir, Über den Einfluss des fortdauernden Gebrauches von kohlensaurem Natron auf die Zusammensetzung des Blutes. [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.] 261

Seite

XI. Sitzung vom 5. Mai 1881: Übersicht 277

XII. Sitzung vom 12. Mai 1881: Übersicht 281

XIII. Sitzung vom 19. Mai 1881: Übersicht 285

Biedermann, Beiträge zur allgemeinen Nerven- und Muskelphysiologie. VII. Mittheilung. Über die durch chemische Veränderung der Nervensubstanz bewirkten Veränderungen der polaren Erregung durch den elektrischen Strom. (Mit 2 Tafeln.) [Preis: 1 fl. = 2 RMk.] 289

Drasch, Zur Frage der Regeneration des Trachealepithels mit Rücksicht auf die Karyokinese und die Bedeutung der Becherzellen. (Mit 1 Tafel.) [Preis: 50 kr. = 1 RMk.] . 341

SITZUNGSBERICHTE

DER

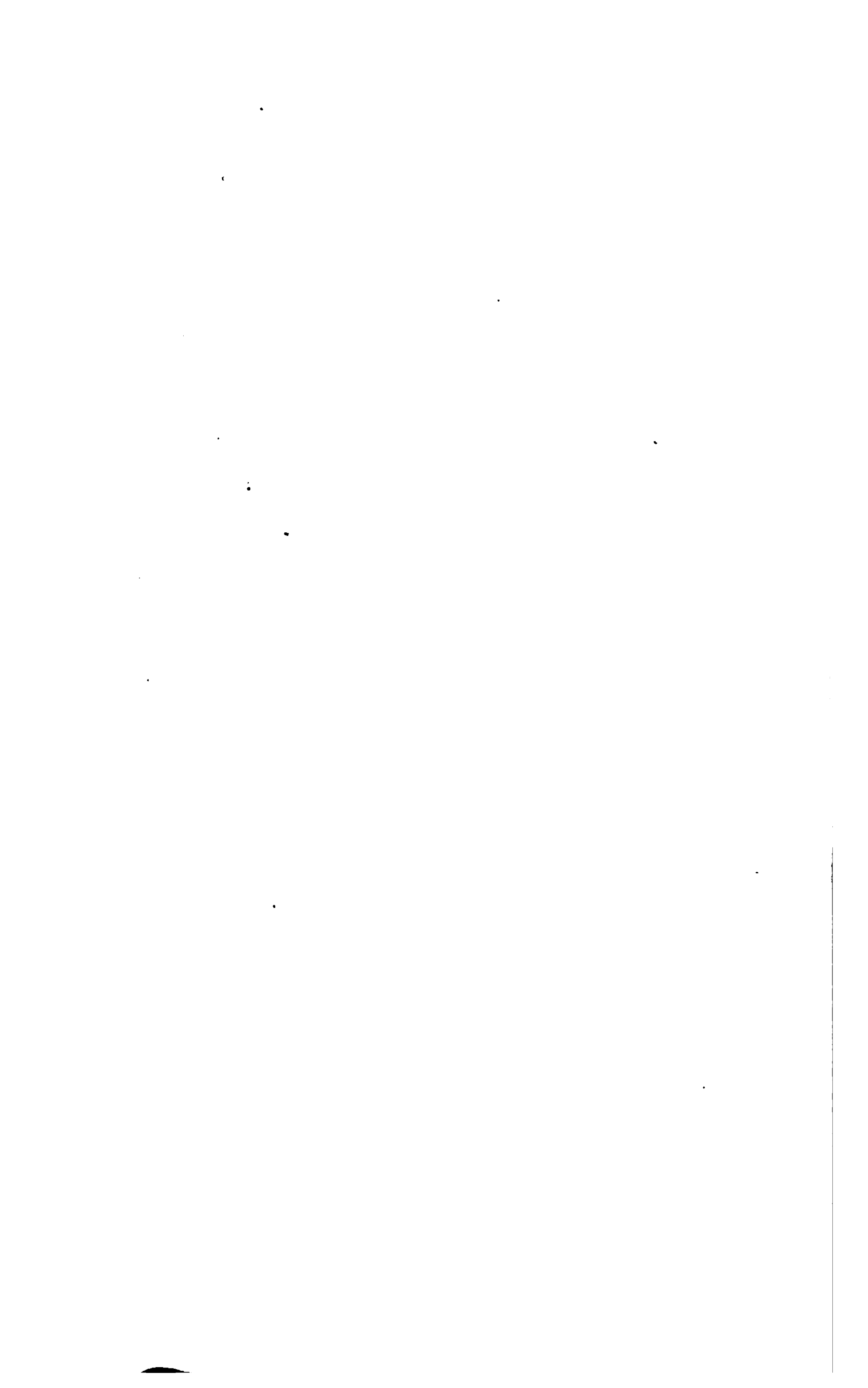
KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LXXXIII. Band. I. Heft.

DRITTE ABTHEILUNG.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Physiologie, Anatomie und theoretischen Medicin.



I. SITZUNG VOM 7. JÄNNER 1881.

In Verhinderung des Vicepräsidenten übernimmt Herr Dr. L. Fitzinger den Vorsitz.

Die Direction der königl. Oberrealschule in Déva dankt für die Betheilung dieser Lehranstalt mit akademischen Druckschriften.

Das wirkliche Mitglied Herr Prof. A. Winckler übermittelt einige Exemplare seiner neuerlich erschienenen Schrift, betitelt: „Die Integration linearer Differentialgleichungen und der Herr Professor Simon Spitzer in Wien."

Das c. M. Herr Prof. Dr. L. Boltzmann in Graz übersendet eine Abhandlung: „Über das Grössenverhältniss der elektrischen Ausdehnung bei Glas und Kautschuk", von den Herren D. G. Korteweg und V. A. Julius in Breda.

Herr Prof. Leop. Gegenbauer in Innsbruck übersendet eine Abhandlung, betitelt: „Eine Verallgemeinerung der Cartesianischen Zeichenregel."

Herr Cloris Baudet in Paris übersendet eine Notiz über die Wasserzersetzung bei Anwendung von Elektroden aus Retortenkohle.

Der Secretär legt ein versiegeltes Schreiben des Herrn Willibald Vinier in Wien vor, welcher um die Wahrung seiner Priorität bezüglich des Inhaltes ersucht.

Das w. M. Herr Prof. v. Barth überreicht eine in seinem Laboratorium von den Herren Dr. G. Goldschmiedt und M. v. Schmidt ausgeführte Arbeit: „Untersuchungen über das Stuppfett."

Das w. M. Herr Hofrath Prof. E. Ritter v. Brücke berichtet über eine unkrystallisirbare Säure, die er durch Oxydation mit Kaliumhypermanganat aus Eiweiss erhalten hat.

Der Secretär bringt zur Kenntniss, dass nach der letzten Classensitzung die telegraphische Meldung über einen von Herrn C. F. Pechüle in Kopenhagen am 16. December v. J. entdeckten Kometen bei der Akademie einlangte, dessen Elemente und Ephemeride an der Wiener Sternwarte berechnet und im Kometen-Circulare Nr. XXXVII vom 22. December 1880 veröffentlicht worden sind.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Académie de Médecine: Bulletin. 44e année, 2e série. Tome IX. Nrs. 50—52. Paris, 1880; 8°.

Annales des Mines. 7e série. Tome XVIII. 4e livraison de 1880. Paris, 1880; 8°.

Apotheker-Verein, allgem. österr.: Zeitschrift nebst Anzeigen-Blatt. XVIII. Jahrg. Nr. 36. Wien, 1880; 8°. — XIX. Jahrg. Nr. 1. Wien, 1881; 8°.

Bibliothèque universelle et Revue Suisse: Archives des Sciences physiques et naturelles. 3e période. Tome IV, Nr. 11. — 15 Novembre 1880. Genève, Lausanne, Paris; 8°.

Chemiker-Zeitung: Central-Organ. Jahrgang IV.. Nr. 51—53. Cöthen, 1880; 4°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome XCI. Nrs. 23—25. Paris, 1880; 4°. — Tables des Comptes rendus. Premier semestre 1880. Tome XC; 4°.

Elektrotechnischer Verein: Elektrotechnische Zeitschrift, I. Jahrgang 1880, Heft 12. December, Berlin, 1880; 4°.

Gesellschaft, deutsche chemische, zu Berlin: Berichte. XIII. Jahrgang, Nr. 18. Berlin, 1880; 8°.

— für Salzburger Landeskunde: Mittheilungen. XX. Vereinsjahr. 1880. 1. & 2. Heft. Salzburg; 8°.

— österreichische, zur Förderung der chemischen Industrie: Berichte. II. Jahrgang 1880, Nr. 3. Prag, 4°.

— naturforschende zu Danzig: Tageblatt der 53. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte in Danzig vom 18. bis 24. September 1880; von Dr. Otto Völkel. Danzig; 4°.

Gewerbe-Verein, n.-ö.: Wochenschrift. XLI. Jahrg. Nr. 51 bis 53. Wien, 1880; 4°.

Gesellschaft, naturforschende Gesellschaft und pomologische Gesellschaft zu Altenburg: Mittheilungen aus dem Osterlande. Neue Folge. I. Band. Altenburg, 1880; 8⁰.

Handels- und Gewerbekammer in Wien: Bericht über den Handel, die Industrie und die Verkehrsverhältnisse in Niederösterreich während des Jahres 1879. Wien, 1880; 8⁰.

Ingenieur- u. Architekten-Verein, österr.: Wochenschrift. V. Jahrgang, Nr. 51 u. 52. Wien, 1880; 4⁰.

— — Zeitschrift. XXXII. Jahrgang, 10. u. 11. Heft. Wien, 1880; gr. 4⁰

Journal, the American of Science 3. series: Vol. XX. Nr. 120. (Whole Number, CXX). December, 1880. New Haven, 1880; 8⁰.

Maumené, E. J.: Théorie générale de l'Action chimique. Paris, 1880; 8⁰.

Militär-Comité, k. k. technisches und administratives: Mittheilungen über Gegenstände des Artillerie- und Genie-Wesens. Jahrgang 1880. 10. u. 11. Heft. Wien; 8⁰.

Mittheilungen aus J. Perthes' geographischer Anstalt, von Dr. A. Petermann. XXVI. Band, 1880. XII. Gotha; 4⁰.

Moniteur scientifique du Dᵗᵉᵘʳ Quesneville: Journal mensuel 25ᵉ année. 3ᵉ série. Tome XI. Livraison. 469ᵉ. Janvier 1881. Paris; 4⁰.

Nature. Vol. XXIII. Nrs. 581, 583. London, 1880; 4⁰.

Omboni, Giovanni Prof.: Denti di Ippopotamo da aggiungersi alla fauna fossile del Veneto: Venezia, 1880; 4⁰.

Osservatorio del Collegio reale Carlo Alberto in Moncalieri: Bullettino meteorologico. Vol. XV. Nrs. 4 & 6. Torino, 1880; 4⁰.

Société impériale de Naturalistes de Moscou: Bulletin. Année 1880. Nr. 2. Moscou, 1880; 8⁰.

Society, the royal astronomical: Monthly notices. Vol. XLI. Nr. 1. November 1880. London; 8⁰.

Verein für Erdkunde zu Dresden. XVI. und XVII. Jahresbericht. Sitzungsberichte und geschäftlicher Theil der Vereinsjahre 1878—79 und 1879—80. Schluss Ende März 1880. Dresden; 8⁰. — Wissenschaftlicher Theil. (Vereinsjahr 1879/80.) Dresden; 8⁰. — Nachtrag zum XVII. Jahresbericht. Wissenschaftlicher Theil. (Vereinsjahr 1879—80). Dresden; 8⁰.

Verein militär-wissenschaftlicher, in Wien: Organ. XXI. Band, 5. Heft. 1880. Wien; 8°.

Wiener Medizin. Wochenschrift. XXX. Jahrgang, Nr. 51 & 52. Wien, 1880; 4°. — XXXI. Jahrgang, Nr. 1. Wien, 1881; 4°.

Winckler, A. Dr.: „Die Integration linearer Differentialgleichungen" und der Herr Professor Simon Spitzer in Wien. Wien, 1881; 8°.

Wissenschaftlicher Club in Wien: Monatsblätter. II. Jahrg., Nr. 1, 2 u. 3. Wien, 1880; 4°. — Ausserordentliche Beilagen Nr. 1 u. 2. Wien, 1880; 4°.

Wolf, Heinrich, k. k. Bergrath: Geologische Gruben-Revierkarte des Kohlenbeckens von Teplitz-Dux-Brüx im nordwestlichen Böhmen. Wien, 1880; gr. folio. — Begleitworte zur geologischen Gruben-Revierkarte des Kohlenbeckens von Teplitz-Dux-Brüx. Wien, 1880; 8°.

Zürich, Universität: Akademische Schriften pro 1879—80. 37 Stücke. 4° & 8°.

Über eine durch Kaliumhypermanganat aus Hühnereiweiss erhaltene stickstoff- und schwefelhaltige unkrystallisirbare Säure.

Von dem w. M. E. Brücke.

Man versetzt Hühnereiweiss, so wie es aus den Eiern genommen ist, mit Kaliumhypermanganat in concentrirter Lösung; dann fügt man von Zeit zu Zeit noch Kaliumhypermanganat hinzu, das mit einer zur Lösung unzureichenden Menge von Wasser benetzt ist; man wiederholt dies, so oft die Farbe bald und vollständig verschwindet. Die Masse erwärmt sich dabei nicht unbeträchtlich, verdickt sich und wird später wieder flüssiger. Jetzt kommt ein Zeitpunkt, wo die Farbe des Kaliumhypermanganats sehr langsam verschwindet. Noch nach Stunden zeigt die braune Masse, auf der Wand der Porzellanschale verschmiert, einen Stich ins Röthliche. Man fügt jetzt kein Hypermanganat mehr hinzu, lässt bis zum anderen Tage stehen, verdünnt mit heissem Wasser, filtrirt, zieht den Rückstand noch mehrmals mit Wasser aus und vereinigt die Filtrate.

Wenn die Reaction ihr normales Ende erreicht hat, so kann man durch Zusatz von Essigsäure das alkalische Filtrat auf schwach saure Reaction bringen, ohne dass irgend ein Niederschlag entsteht; auch dann verträgt die Flüssigkeit noch ein Mehr von Essigsäure, wenn man aber ein gewisses Quantum überschreitet, so entsteht ein Niederschlag, der sich bei weiterem Säurezusatze noch vermehrt. Dieser im Verhältniss zu der angewendeten Eiweissmenge reichliche Niederschlag besteht der Hauptmasse nach aus der Substanz, von der ich im Folgenden sprechen will.

Um sie in reinerem Zustande zu erhalten, wurde der Niederschlag auf ein Filter gebracht, etwas mit essigsäurehaltigem Wasser gewaschen, dann mit solchem verrieben, in einem Becherglase erwärmt, nach dem Erkalten decantirt und so mehrmals hintereinander; dann wurde er wiederum auf ein Filtrum gebracht, nach dem Abtropfen in ammoniakhaltigem Wasser gelöst und aus der filtrirten Lösung durch Essigsäure wieder gefällt

Schon jetzt konnte ich feststellen, dass die Substanz sich weder mit Salpetersäure und Kali gelb färbte, noch mit dem Millon'schen Reagens roth, dass sie also die beiden Reactionen nicht gab, welche wir nach Otto Nasse's Erfahrungen von einem die Muttersubstanz des Tyrosins bildenden aromatischen Atomcomplex im Eiweiss herleiten. Auch die Eiweissprobe mit Zucker und Schwefelsäure gelang nicht und ebenso wenig die von Adamkiewitsch angegebene mit Eisessig und Schwefelsäure. Mittelst Salzsäure konnte ferner nicht wie beim Eiweiss eine violette Färbung erhalten werden. Endlich enthielt auch die Substanz keinen durch Bleiverbindungen direct nachweisbaren Schwefel; sie konnte mit Bleiglätte und Kali gekocht, mit Kali gekocht und mit Bleizuckerlösung geprüft werden; es trat nicht die geringste Bräunung ein.

Indessen war die Substanz noch nicht aschenfrei. Durch mehrmals wiederholtes Auflösen mittelst Ammoniak und Fällen mittelst Essigsäure wurde sie es insoweit, dass sie beim Glühen nur noch einen geringen, und zwar einen dunkel rothbraunen Rückstand liess. Derselbe rührte von Eisen her, welches der Substanz beharrlich anhaftete. Doch gehörte es ihr nicht an, denn es erwies sich als den gewöhnlichen Reagentien direct zugänglich. Die Substanz gab, in wenig Schwefelammonium gelöst, eine grüne Lösung und mit Ferrocyankalium und etwas Chlorwasserstoffsäure färbte sie sich blau.

Um das Eisen wegzubringen, löste ich eine Portion von Neuem in ammoniakhaltigem Wasser auf und filtrirte sie in verdünnte Chlorwasserstoffsäure hinein unter Umrühren der letzteren. Der Eisengehalt war verringert, aber immer noch nachweisbar. Später gelang es mir, eisenfreie Substanz zu erhalten, indem ich die mittelst Essigsäure auf schwachsaure Reaction

gebrachte ammoniakalische Lösung mit essigsaurem Kupferoxyd fällte, den Niederschlag auswusch, ihn wieder löste und in verdünnte Chlorwasserstoffsäure hineinfiltrirte, während die letztere dabei fortwährend umgerührt wurde. Der Niederschlag wurde noch einmal wieder gelöst und noch einmal durch Hineinfiltriren der Lösung in verdünnte Chlorwasserstoffsäure wieder erzeugt, dann auf einem vorher mit verdünnter Chlorwasserstoffsäure gewaschenen Filtrum gesammelt und ausgewaschen.

Man wird sich vielleicht bei der Wiederdarstellung der Substanz von vorne herein der Chlorwasserstoffsäure mit mehr Vortheil bedienen als der Essigsäure. Ich hatte nur die letztere vorgezogen, weil sie weniger dem Verdachte ausgesetzt war, dass sie das darzustellende Product noch weiter verändern könnte.

Ich kann über die Substanz noch Folgendes aussagen. Mit Kali erhitzt, gibt sie reichlich Ammoniak. Wird sie mit Salpeter und Kali geschmolzen, so lässt sich in der Schmelze Schwefelsäure nachweisen. Sie hat die Eigenschaften einer schwachen Säure. Ein getrocknetes Stück legte ich wieder befeuchtet auf blaues Lakmuspapier. Es brachte einen rothen Fleck hervor, während ein anderes, ebenso behandeltes Stück, am Boden eines engen Reagirglases in einer blassen Lösung von Eisenchlorid liegend, in seiner Umgebung keine tiefere Färbung hervorbrachte, also keine auf diesem Wege nachweisbare Essigsäure enthielt. Mir schien indessen diese Gegenprobe nicht genügend. Derselbe Gegenversuch wurde angestellt, als ich etwas mit Wasser und darauf mit Weingeist gewaschener und dann getrockneter Substanz in ein Reagirglas mit sehr verdünnter und mit sehr wenig Alkali angefärbter Lösung von käuflicher Rosolsäure geworfen hatte. Vom Boden her entfärbte sich die Rosolsäure. An den ersten zwei Tagen verbreitete sich die Entfärbung nach und nach über die ganze Flüssigkeit und dieselbe wurde gewechselt. Später trat zwar die Entfärbung an der Substanz ein, aber sie verbreitete sich äusserst langsam nach aufwärts. Dieselbe Erscheinung zeigte sich wieder beim Wechsel der Rosolsäurelösung. Ich erklärte mir dies folgendermassen: Die Rosolsäure war empfindlicher als die Eisenchloridlösung. Es waren wahrscheinlich noch sehr kleine Mengen von Essigsäure verhanden gewesen und

diese hatten bei der leichten Diffundirbarkeit der letzteren das rasche Fortschreiten der Entfärbung bedingt. Später, als die schwer diffundirbare Substanz allein in Wirkung trat, schritt dem entsprechend auch die Entfärbung langsamer fort.

Die Substanz, welche hier unter mehrmaligem Wechseln der schwach alkalisirten Rosolsäurelösung mehr als eine Woche lang gelegen hatte, wurde nach Abgiessen der Flüssigkeit auf blaues Lakmuspapier geworfen und röthete dasselbe. Sie neutralisirte also das Alkali desselben, wie zu erwarten war, nachdem sie das Alkali an sich gerissen hatte, an das die Rosolsäure gebunden war. Da sie in verdünnten Säuren schwer löslich, aber an Alkalien gebunden leicht löslich und dabei voraussichtlich nur eine schwache Säure war, so liess sich erwarten, dass auch schwächere Säuren sie aus ihren Lösungen ausfällen.

Beim Durchleiten von Kohlensäure erhielt ich keine Fällung, wohl aber durch eine heiss concentrirte Borsäurelösung. Anderseits löst sich die gewaschene, aber noch feuchte Säure in Boraxlösung auf. Eine Lösung von Salycylsäure bringt flockige Fällung hervor, wenn sie in hinreichender Menge hinzugefügt wird. Auch Tannin muss man in einiger Menge zusetzen, um einen Niederschlag zu erzielen.

Von der Fällung durch Essigsäure haben wir bereits gesprochen. Auch hier tritt der Niederschlag erst ein, wenn die Flüssigkeit stark sauer reagirt. Durch Ferrocyankalium wird eine solche saure Lösung nicht gefällt. Die frisch vom Filtrum genommene wasserfeuchte Substanz löst sich, mit concentrirter Schwefelsäure übergossen, schnell und unter Gasentwicklung auf. Beim sofortigen Verdünnen der Lösung mit Wasser tritt ein Niederschlag auf.

In durch ihre Concentration schon trägflüssiger Phosphorsäure löst sich unsere Säure schon in der Kälte und zwar ohne Gasentwicklung. Wird mit Wasser verdünnt, so erfolgt ein flockiger Niederschlag. Dieser flockige Niederschlag gibt noch die früher erwähnte violette Färbung, wenn er mit Kali und einer sehrgeringen Menge eines Kupferoxydsalzes versetzt wird.

Concentrirte Chlorwasserstoffsäure löst sie gleichfalls ohne Gasentwicklung schon bei gewöhnlicher Temperatur auf. Beim Verdünnen mit Wasser entsteht ein Niederschlag. Auch dieser

gab mit Kupfervitriollösung und Kali noch violette Färbung. Auch solche Chlorwasserstoffsäure von 1·14 spec. Gewichtes löst sie ziemlich schnell, wenn man erwärmt. Ich erhitzte die Lösung bis zum Sieden, dann liess ich auskühlen, fügte Kali bis zum Entstehen eines Niederschlages hinzu und filtrirte von diesem ab. Das noch saure Filtrat prüfte ich mit Chlorbarium, erhielt aber keinen Niederschlag.

Concentrirte Salpetersäure löste sie bei gewöhnlicher Temperatur gleichfalls ohne Gasentwicklung auf. Beim Verdünnen mit Wasser entstand ein Niederschlag. Er war weniger flockig und spärlicher, liess aber auch noch die erwähnte Reaction deutlich erkennbar eintreten. Auch Eisessig löst unsere Säure auf. Man kann eine solche Lösung mit Wasser verdünnen, ohne dass ein Niederschlag entsteht; wenn man aber die Säure mit einem Alkali allmälig abstumpft, so entsteht ein solcher, und zwar begreiflicherweise zu einer Zeit, wo die Flüssigkeit noch sehr stark sauer ist.

Die Salze der schweren Metalle bringen in den neutralen oder schwachsauren Lösungen mehr oder weniger prompt Fällungen hervor. Die Kupferverbindung löst sich, wie ich schon mehrmals erwähnt habe, mit violetter Farbe in wässerigem Kali oder Natron. Dieselbe Reaction kommt bekanntlich dem Eiweiss zu, aber auch dem Leim, wie dies Humbert, der die Reaction auch am Eiweiss zuerst beschrieben zu haben scheint, schon im Jahre 1855 bemerkte.

Humbert fand die Farbe beim Leim etwas mehr bläulich als beim Eiweis; aber ich werde an einem anderen Orte Gelegenheit haben, zu zeigen, wie sehr die Tinte, ob etwas mehr röthlich, oder etwas mehr bläulich, bei dieser Reaction von Nebenumständen abhängt.

Alaunlösung bringt einen flockigen Niederschlag hervor, Magnesiumsulfat aber keinen.

Die beschriebene Säure scheint mir dadurch ein besonderes Interesse zu haben, dass sie in verhältnissmässig grosser Menge aus dem Eiweiss gewonnen wird und dabei demselben in ihren physikalischen Eigenschaften noch einigermassen ähnlich ist. Weder sie, noch ihre Verbindungen zeigen die geringste Neigung zu krystallisiren, ihre Lösungen diffundiren langsam und

halten den Schaum ähnlich wie Eiweisslösungen, wenn auch in geringerem Grade; wird sie aus denselben für sich oder als Metallverbindung gefällt, so erscheint der Niederschlag flockig wie ein Eiweissniederschlag. Endlich dreht sie die Polarisationsebene nach links.

Wenn ich trotz dieses Interesses darauf verzichte, sie weiter chemisch zu untersuchen, so geschieht es nur desshalb, weil ich glaube, hoffen zu dürfen, dass sich ein Chemiker von Fach dieser Arbeit unterziehen werde, die er sicher viel umsichtiger und vollständiger durchführen wird, als ich es thun könnte.

Berichtigung.

(Vorgelegt in der Sitzung am 20. Jänner 1881.)

Beim Aufarbeiten eines Restes der Substanz bin ich zu der Überzeugung gekommen, dass dieselbe noch ein Gemenge war. Ich bin augenblicklich nicht in der Lage, die Eigenschaften des einen und des andern Bestandtheils zu erörtern. Es handelt sich hier nur darum, dass ich einen Irrthum, sobald ich zur Kenntniss desselben gekommen bin, berichtige.

II. SITZUNG VOM 13. JÄNNER 1881.

In Verhinderung des Vicepräsidenten übernimmt Herr Dr. L. Fitzinger den Vorsitz.

Die Direction des k. k. militär-geographischen Institutes übermittelt zwanzig Blätter Fortsetzungen der Specialkarte der österr.-ungar. Monarchie (1 : 75000).

Das w. M. Herr Prof. Dr. Alexander Rollett übersendet eine von Herrn Dr. Gustav Pommer in Graz ausgeführte Arbeit: „Über die lacunäre Resorption in erkrankten Knochen."

Das c. M. Herr Prof. E. Weyr in Wien übersendet eine Abhandlung: „Über die involutorische Lage sich berührender Kegelschnitte."

Das c. M. Herr Regierungsrath Professor Dr. Adolf Weiss übersendet als siebenten Beitrag seiner „Mittheilungen aus dem pflanzenphysiologischen Institute der Prager Universität" eine Abhandlung unter dem Titel: „Über die physiologische Bedeutung der Transpiration der Pflanzen", von Herrn Friedrich Reinitzer, Stipendisten am chemisch-analytischen Laboratorium des deutschen Polytechnicums in Prag.

Das c. M. Herr Professor S. Stricker übersendet eine Mittheilung des Assistenten am pharmokologischen Institute der Wiener Universität Herrn Dr. Josef Lazarski: „Über den Einfluss der Blausäure auf Athmung und Kreislauf" aus dem Institute für experimentelle Pathologie in Wien.

Von den Herren Dr. J. M. Eder und Hauptmann J. Pizzighelli in Wien wird eine Abhandlung unter dem Titel: „Beiträge zur Photochemie des Chlorsilbers" eingesendet.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. „Über die Beziehungen der homogenen Deformationen fester Körper zur Reactionsfläche", von Herrn Prof. Dr. J. Finger an der technischen Hochschule in Wien.
2. „Über ein neues Derivat der Gallussäure", von den Herren Prof. Dr. J. Oser und Präparator W. Kalmann an der technischen Hochschule in Wien.

Herr Eugen Goldstein in Berlin stellt das Ansuchen, dass das von ihm unter dem 17. November 1880 behufs Wahrung seiner Priorität an die kaiserliche Akademie gesendete und in der Sitzung der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe am 2. December v. J. vorgelegte versiegelte Schreiben eröffnet und dessen Inhalt publicirt werde.

Diesem Ansuchen entsprechend wurde das bezeichnete Schreiben eröffnet. Dasselbe enthält eine Notiz: „Über den Einfluss der Kathodenform auf die Vertheilung des Phosphorescenzlichtes", welche im akademischen Anzeiger publicirt wird.

Das w. M. Herr Professor v. Barth überreicht eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit des Herrn Dr. H. Weidel: „Über eine Tetrahydrocinchoninsäure."

Der Secretär Herr Hofrath J. Stefan überreicht eine Abhandlung: „Bestimmung magnetischer und diamagnetischer Constanten von Flüssigkeiten und Gasen in absolutem Masse", von Herrn J. Schuhmeister, Assistenten am k. k. physikalischen Institute in Wien.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Academia regia scientiarnm suecia: Fragmenta silurica e dono Caroli Henrici Wegelin. Opus studio Nicolai Petri Angelin inchoatum edendum curavit G. Lindström. Holmiae, 1880; gr. 4°.

— Palaeontologia scandinavica auctore N. P. Angelin. P. I. Crustacea formationis transitionis. Fasciculi I & II. Holmiae, 1878; 4°.

Académie impériale de Sciences de St. Pétersbourg: Mémoires, VII° série. Tome XXVII. Nrs. 5. 6, 7, 10. 11 & 12. St. Pétersbourg, Riga, Leipzig, 1879—80; 4°.

Accademia, R. dei Lincei: Atti. Anno CCLXXVIII 1880—81. serie terza. Transunti. Vol. V. Fascicolo 1°. Seduta del 5. Dicembre 1880. Roma, 1881; 4°.

— — Sopra alcuni eclissi di sole antiqui e su quello di Agatocle in particolare. Memoria del Prof. G. Celoria. Roma, 1880; 4°.

— R. delle scienze di Torino: Atti. Vol. XV. Disp. 1ª—8ª. Torino, 1879—80; 8°.

Akademie der Wissenschaften, königl.: Öfversigt af Förhandlingar. 37ᵉ Arg. Nos 5—7. Stockholm, 1880; 8°.

Basel, Universität: Akademische Schriften pro 1875—79; 66 Stück, 4° & 8°.

Becker, M. A.: Topographie von Niederösterreich. II. Band, 8. Heft. Der alphabetischen Reihenfolge (Schilderung) der Ortschaften. 5. Heft. Wien, 1880; 4°.

Bibliothèque universelle: Archives des sciences physiques et naturelles. 3ᵉ période. Tome IV. Nr. 12.—15. Décembre 1880. Genève, Lausanne, Paris, 1880; 8°.

Central-Station, königl. meteorologische: Beobachtungen der meteorologischen Stationen im Königreich Bayern. Jahrgang II. Heft 3. München, 1880; 4°. — Übersicht über die Witterungsverhältnisse im Königreiche Bayern während der Monate Mai bis November 1880. Fol.

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Tome XCI. Nrs. 26. Paris, 1880; 4°.

Gesellschaft, österreichische, für Meteorologie: Zeitschrift. XVI. Band. Jänner-Heft 1881, Wien; 4°.

— physikal. - medicin. in Würzburg: Verhandlungen N. F. XV. Band, 1. & 2. Heft. Würzburg, 1881; 8°.

Hartwig, Ernst Dr.: Beitrag zur Bestimmung der physischen Libration des Mondes aus Beobachtungen am Strassburger Heliometer. Karlsruhe, 1880; 4°.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. X. Band. Jahrgang 1878. Heft 3. Berlin, 1881; 8°.

Kaltenegger, Ferd. Prof.: Die geschichtliche Entwicklung der Rinderracen in den österreichischen Alpenländern. Prag, 1881; 8°.

Landbote, der steirische: Organ für Landwirthschaft und Landescultur. XIII. Jahrgang, Nr. 14—24. Graz, 1880; 4°. — XIV. Jahrgang, Nr. 1. Graz, 1881; 4°.

Militär-geographisches Institut, k. k.: Specialkarte der österr.-ungar. Monarchie. 17. Lieferung, 20 Blätter.

Nature. Vol. XXIII. Nr. 584. London, 1881; 4°.

Observatorium, Tifliser physikalisches: Magnetische Beobachtungen im Jahre 1879. Tiflis, 1880; 8°.

— Materialien zu einer Klimatologie des Kaukasus. Abth. I: Meteor. Beobachtungen, Bd. II. Lieferung 4. Tiflis, 1879; 8°.

Observatory, the: A monthly Review of Astronomy. Nr. 45. 1881, January 1. London; 8°.

Osservatorio della regia università di Torino: Bollettino. Anno XIV (1879). Torino, 1880; quer 4°.

Radcliffe Observations, 1876. Vol. XXXVI. Oxford, 1880; 8°.

Reichsanstalt, k. k. geologische: Verhandlungen. Nr. 15 & 16. 1880. Wien; 8°.

Repertorium für Experimental-Physik etc., von Dr. Ph. Carl. XVII. Band, 2. & 3. Heft. München und Leipzig, 1881; 8°.

Simony, Oscar Prof.: Gemeinfassliche, leicht controlirbare Lösung der Aufgahe: In ein ringförmig geschlossenes Band einen Knoten zu machen und verwandter merkwürdiger Probleme. Wien, 1881; 8°.

Société botanique de France: Bulletin. Tome XXVII. (2e série. — Tome IIe) 1880. Comptes rendus des séances. 5. Paris; 8°.

— mathématique de France: Bulletin. Tome VIII, Nr. 6. Paris, 1880; 8°.

Society, the royal: Proceedings. Vol. XXIX. Nrs. 197—199. Vol. XXX. Nrs. 200, 202—205. London, 1879—80; 8°.

— — Philosophical Transactions for the year 1879. Vol. 170. Parts 1 & 2. London, 1879; gr. 4°. — for the year 1880. Vol. 171. Part 1. London, 1880; gr. 4°.

— : The Council of the Royal Society. Dec. 1, 1879. 4°.

— the zoological of London: Proceedings of the scientifique meetings for the year 1880. Part III. May and June. London; 8°.

Ufficio centrale di Meteorologia italiana: Annali, Série II. Vol. I. — 1879. Roma, 1880; gr. 4°.

Wiener Medicinische Wochenschrift. XXXI. Jahrgang. Nr. 2. Wien, 1881; 4°.

Über die lacunäre Resorption in erkrankten Knochen.

Von Dr. **Gustav Pommer.**

(Mit 2 Tafeln.)

Bei der Untersuchung eines grossen Materiales, welches ich behufs des Studiums der Knochenkrankheiten gesammelt hatte, stiess ich auf die mannigfachsten Bilder von lacunärer Resorption in den erkrankten Knochen.

Das veranlasste mich, besondere Studien über das Zustandekommen der Howship'schen Grübchen, über welches ja die widersprechendsten Anschauungen vorgebracht wurden, anzustellen.

Das Resultat dieser Studien war, dass ich mich für die zuerst von Kölliker vertheidigte Anschauung entscheiden musste, dass die Howship'schen Lacunen durch die resorbirende Thätigkeit besonderer Zellen (Ostoklasten) zu Stande kommen.

Da aber gerade diese Anschauung so viele Einwendungen erfahren hat, glaube ich gerechtfertigt zu sein, wenn ich hier die Gründe ausführlich auseinandersetze, welche mich zum Anhänger der angeführten Resorptionstheorie machten.

Ich muss dem eigentlichen Gegenstande meine Erfahrungen über die Begrenzung der Howship'schen Lacunen vorausschicken und werde dann erst über das Verhalten der Grundsubstanz in den der Resorption unterliegenden Knochen, weiters über die Knochenzellen und ihre Beziehung zu der Entstehung der Lacunen und zum Schlusse über die Morphologie und Herkunft der Ostoklasten handeln.

I. Das Verhalten des Randes und der Begrenzungsfläche der Howship'schen Lacunen.

Ich habe vor allem zu bemerken, dass bei der Mannigfaltigkeit der Bilder, welche die Histologie der Knochenkrank-

heiten bietet, eine strengkritische Durchmusterung jener Bilder allein zum Ziele führen kann.

Es ist in manchem gegebenen Falle durchaus nicht leicht, zwischen Resorption und Apposition zu entscheiden.

Ehe ich eine Stelle für die Resorption in Anspruch nehmen darf, muss es sich zeigen lassen, dass die betreffende Stelle unmöglich durch Apposition erklärt werden kann.

Um zu dieser Entscheidung zu gelangen, ist vor allem eine genaue Kenntniss der Resultate der Forschungen v. Ebner's[1], also eine genaue Kenntniss des feineren Baues der Knochensubstanz nothwendig. Ferners müssen die über die Vorgänge bei der Apposition im normalen Knochen handelnden, gründlichen Studien eines Gegenbaur[2], Kölliker[3], Rollett[4], Waldeyer[5] u. A. als Richtschnur stets im Auge behalten werden. Die mannigfachen zweifellosen Appositionsbilder, welche uns beim Studium der Knochenkrankheiten in reicher Fülle überall begegnen, müssen an zweifelhaften Stellen zum Vergleiche herangezogen werden.

Selbstverständlich ist auch an jeder gegebenen Stelle, ehe wir Resorption annehmen, die Frage aufzuwerfen und zu beantworten, ob wir nicht eine künstlich durch die Schnittführung oder Präparation geschaffene Unterbrechung der Structurverhältnisse vor uns haben.

Ich bezog daher auf Resorption nur diejenigen Bilder, welche eine durch nichts Anderes erklärbare Unterbrechung der Knochentextur darboten.

Die Grenzflächen der Howship'schen Gruben können ein sehr verschiedenartiges Aussehen zeigen.

---

[1] Über den feineren Bau der Knochensubstanz. 72. Bd. d. Sitzber. d. k. Akademie. Wien, 1875.

[2] Über die Bildung des Knochengewebes. Jenaische Zeitschrift f. Med. u. Naturw. III. Bd., 2 und 3. Heft. 1867, S. 206 ff.

[3] Handbuch der Gewebelehre, Leipzig, 5. Auflage, 1867.

[4] Von den Bindesubstanzen. Stricker's Handbuch, Leipzig, 1871. S. 81 ff.

[5] Über den Ossificationsprocess. Archiv f. mikr. Anat. I. Bd., 1865. S. 354 ff.

In einer sehr grossen Anzahl von Bildern erscheinen die Lacunen mit „scharfem Rande“ und „glatter Fläche“ versehen, also ganz so beschaffen, wie es die von Kölliker in seinem Werke[1] gewiss auf breiter Basis entworfene Schilderung angibt.

Ich habe aber noch vorzugsweise drei andere Arten von Beschaffenheit der Grenze der Howship'schen Lacunen häufig beobachtet, nämlich: die Ränder der Lacunen sahen ausgefasert aus, oder sie erschienen mit feinen Wimpern besäumt, oder sie waren mit glänzenden, doppeltcontourirten Rändern versehen.

Ich will nun zunächst die ausgefaserten Lacunenränder besprechen.

In einer nicht unansehnlichen Anzahl von Bildern fand ich Lacunen, welche, in die Lamellen der Knochensubstanz quer eindringend, aus ihrem Rande Fasern aussandten.

Diese Fasern liefen zumeist in der Richtung der von den Lacunen durchschnittenen Lamellenlinien von dem Lacunenrande weg, seltener standen sie senkrecht auf die Lamellenzüge in den Resorptionsraum hinein.

Die Fasern waren theils spiessig starr und dick und behielten auch in ihrer Lage in dem Resorptionsraum die Richtung bei, so z. B. in Präparaten von einer Rippe (22 des Verzeichnisses am Schlusse der Arbeit)[2], in einem syphilitisch cariösen Stirnbein (13), in der Nähe eines metastatischen Sarcomknotens des Scheitelbeines (19) (siehe Fig. 9, 10); theils hingen die Fasern, im Präparate flottirend, von dem Lacunenrande weg, waren zart und wellig: gummöse Ostitis des Scheitelbeines (11) (siehe Fig. 1). Die Fasern waren lang, standen dicht aneinander; sie durchsetzten oft einen bedeutenden Antheil des Resorptionsraumes und kreuzten sich dabei. In der Nähe der ausfasernden Ränder fanden sich in der Mehrzahl der Bilder gar keine oder nur vereinzelte, kleine Zellen. In dem Falle des Scheitelbeinsarcoms, sowie bei einem metastatischen Carcinom des Femur (17) lagen

[1] Die normale Resorption des Knochengewebes etc. Leipzig, 1873, Seite 20.

[2] Am Schlusse der Arbeit findet sich ein Verzeichniss von dreissig untersuchten Fällen von Knochenerkrankungen und Knochenatrophie vor, auf welches ich fortan unter Anführung der den Fall betreffenden Nummer verweisen werde.

jedoch in der Mitte der Fasern, welche, aus den Lacunenrändern auslaufend, den Resorptionsraum zum Theil durchsetzten, mehrkernige Riesenzellen (siehe Figur 4). Besonders in dem letzteren Falle schienen die Fasern die Riesenzellen bis über die entgegengesetzte Fläche zu durchbohren.

Es war meine Sorge, mich durch blosses Aufliegen von Fasern nicht täuschen zu lassen; aber man konnte selbst an den in manchen Schnitten liegenden Mulden der Lacunen die Fasern noch bis zum Grunde der Mulde, sowie bis zum scharfen Rande der Lacune verfolgen. Versuche, die Fasern mit den Nadeln abzuzupfen, führten zu keinem anderen Resultate, als dass die Fasern zerrissen. (Siehe Figur 1.)

In dem Sarcomfalle (19), ferners im Scheitelbeine mit syphilitischer Ostitis (11) fanden sich die Mulden von Resorptionsräumen mit einem Gewirre von Stiftchen und Fasern bedeckt. (Siehe Figur 4.) Auffallend war es, dass auch grössere bogige Buchten, die wie die Lacunen der gewöhnlichen Grösse die Lamellen durchschnitten, an ihrem Rande ausfaserten. (Siehe Figur 3.)

In dem bereits angegebenen Carcinomfalle (17) und auch in Präparaten von anderen Fällen liefen feine Fasern nicht in der Richtung der bogigen Lamellenzüge, sondern senkrecht auf diese, in radiärer Richtung aus den Lacunenrändern und -mulden in die Resorptionsräume hinein. (Siehe Figur 2.)

Ausser in den angeführten Fällen fand sich noch Ausfaserung der Lacunen bei einer fungösen Gelenksentzündung des Fingers (3), bei syphilitischer Atrophie des Scheitelbeines (12), bei einem Carcinom des Kiefers (18), in einem Olecranon (20).

Es entsteht nun die Frage, wie denn die geschilderte Ausfaserung der Howship'schen Lacunen zu Stande komme. Wurden diese Fasern den Lacunen apponirt, nachdem die Resorption abgelaufen war?

Am ehesten könnte noch die letzterwähnte Form der Ausfaserung in senkrechter, radiärer Richtung zu der Vermuthung veranlassen, dass es sich hiebei um Apposition handle. V. v. Ebner[1] fand, dass der Verlauf der Fibrillen in den die Lacunen aus-

---

[1] l. c. S. 46.

füllenden Appositionshöckern häufig radiär ist, und Kölliker[1] gibt an, dass in den neuangelagerten mehr faserig aussehenden Theilen die Fasern senkrecht oder nahezu senkrecht auf der Resorptionsfläche stehen. Dass jedoch die Appositionshöcker mit ihren mehr oder minder radiär ziehenden Fibrillen durch Einpflanzung präformirter Fasern in die Resorptionslacunen entstehen, ist nirgends angegeben und lässt sich nach allen Erfahrungen über die Knochenbildung nicht annehmen.

Die einzige Form der Apposition, welche noch einige Ähnlichkeit bieten würde, ist die des Cambiumreticulums[2]. Doch fand ich diese Form niemals auf nackter Resorptionsfläche, der ja an den betreffenden Stellen der Bilder (siehe Fig. 2 und andere) die Fasern aufsitzen; ich sah diese Form niemals die Grundlage der Apposition bilden. Vor allem aber spricht gegen die Annahme, dass die ausfasernden Lacunen in Form des Cambiumreticulums in Apposition begriffen seien, die grosse Zahl und die dichte nicht areolare Anordnung der Fasern, wenn man auch annehmen wollte, dass die Osteoblasten, welche den zweiten Bestandtheil des Cambiumreticulums bilden, herausgefallen sein sollten. Noch weniger als für die radiäre Ausfaserung ist die Annahme einer Apposition für diejenigen Bilder passend, in denen die Fasern der Lacunen die Richtung der durchschnittenen Lamellenzüge einhalten. Denn es ist bekannt, dass die auf eine Resorptionsfläche neuangelagerten Knochenpartien niemals die Textureigenthümlichkeiten des alten Knochens einhalten, und dass ihre Fasern in völlig abweichender Richtung und Anordnung verlaufen[3]. Die Übereinstimmung in Richtung und Anordnung, welche sich zwischen den Fibrillen der Lamellenzüge und den Fasern der Lacunen manifestirt, weist darauf hin, dass dieselben ein Continuum bilden und daher von gleichem Alter und gleicher

---

[1] l. c. S. 40.

[2] Dieses findet sich von Rollett (l. c. S. 101, 102) von Waldeyer (l. c. S. 371) u. A. beschrieben. Ich fand diese Form der Anbildung, bei der zwischen je zwei Osteoblasten ein faseriger Fortsatz des Reticulums, meist etwas verbreitert, in die Knochensubstanz übergeht, so dass die Osteoblasten wie in Areolen liegen, nicht nur periostal sondern auch oft in den Räumen des Knochens selbst.

[3] Vgl. v. Ebner l. c. S. 40 ff.

Abstammung sind. Die besprochenen Fasern können also den Lacunen nicht neu apponirt worden sein.

Die erwähnten Bilder wurden übrigens in Resorptionsräumen gefunden, an deren übrigen Lacunen sich keine Apposition zeigte. Ich sehe darin keinen Beweis, aber immerhin eine Unterstützung meiner Anschauung.

Wenn sich aber die Ausfaserung der Lacunen auf Apposition von Fasern nicht zurückführen lässt, so bleibt uns nur mehr die Auffassung, dass diese Fasern bei der Entstehung der Resorptionslacunen zurückblieben, dass sie erhalten blieben, während die übrige Knochengrundsubstanz der Resorption verfiel.

Es stellen sich dieser Erklärung ebenfalls nur in den Bildern Schwierigkeiten entgegen, in denen die Fasern der Lacunen senkrecht auf die Streifenlinien der Lamellen, in welche die Lacunen einbrechen, verlaufen. Es bleibt uns hier nur die Deutung übrig, dass diese freigewordenen Fasern den Lamellen entstammen, deren Faserbündel parallel mit der Axe des Havers'schen Raumes, respective senkrecht auf den durchgelegten Schnitt verlaufen, und dass dieselben, aus den Lacunenmulden emporstehend, von ihrer Richtung abgebogen wurden.

Eine zweite Erklärung könnte in der Annahme gesucht werden, dass die betreffenden Lacunen, eben bis zur Kittlinie eines Lamellensystemes vorgedrungen, die radiär verlaufenden Fibrillen der Appositionshöcker befreit hätten. Ich fand jedoch in der Umgebung der besprochenen Bilder keine Kittlinienstücke, in deren Verlauf sich diese Lacunen hätten einfügen lassen; hierin allein wäre ein Anhaltspunkt für letztere Annahme zu erblicken gewesen. Aus den angeführten Gründen möchte ich also den ausgefaserten Rändern der Lacunen die Deutung geben, dass bei der lacunären Resorption des Knochens noch Structurelemente des Knochens und zwar die Fibrillen in grösserer oder geringerer Anzahl und Länge zurückbleiben. Auch bezüglich des Grades der Isolirung der Fibrillen müssen Unterschiede angenommen werden; denn wir sehen in den einen Bildern feine, zarte Fibrillen aus den Lacunen wegziehen, in den anderen Bildern sind die Fasern dicker und stehen als starre, steife Spiesse in den Resorptionsraum hinein. Während wir zur Erklärung jener die Annahme machen müssen, dass bei der Resorption nur die Knochenfibrillen

in verschiedener Anzahl und Länge erhalten blieben, die Kittsubstanz jedoch gänzlich entfernt wurde, zwingen uns die dickeren, starren Spiesse der Lacunenränder zu der Vermuthung, dass auch Antheile der Kittsubstanz der Resorption sich entziehen können. Wir dürfen, nach der von v. Ebner geschaffenen Kenntniss der Knochenfibrillen[1], diese dicken, starren Spiesse nicht für einzelne, isolirte Fasern halten, sondern müssen dieselben als Gruppen von mit einander verklebten Fäserchen ansehen und daher annehmen, dass in diesem Falle Knochenfibrillen, durch Reste der Kittsubstanz miteinander verbunden, der Resorption widerstanden. Dass dieser Widerstand nicht blos ein momentaner ist, sondern ein längerdauernder werden kann, beweisen manche Bilder, wie besonders die des syphilitisch cariösen Scheitelbeines (13) und des Schädelsarcoms (19). Diese Bilder (siehe Figur 4) sprechen dafür, dass die restirenden Fibrillen und Fibrillengruppen geradezu ein Hauptbestandtheil des durch seinen faserigen Charakter und durch seine Armuth an Zellen ausgezeichneten Inhaltes solcher Havers'scher Resorptionsräume sein können. Es muss bemerkt werden, dass in solchen Bildern noch manches fraglich bleibt. Es können jedoch immerhin locale dem Zellenleben hinderliche Umstände angenommen werden, wenn wir uns die Zellenarmuth des faserigen Inhaltes solcher Havers'scher Resorptionsräume erklären sollen. Das dürfte auch der Grund für das Zurückbleiben des Faserbesatzes der Lacunen sein. In grosser Verbreitung traf ich derartige Bilder bei der in Verkäsung begriffenen syphilitischen Caries des Stirnbeines an. Es liegt hierin wohl ein Hinweis, dass es auch allgemein oder auf grössere Ausdehnung hin wirkende Ursachen geben kann, die der Vollendung der Resorption und dem Leben der Zellen hinderlich sein und solche eigenthümliche Bilder veranlassen können.

Unter denselben Verhältnissen kommt es auch zu der Erscheinung, dass die meisten Anlagerungspartien in den Havers-schen Räumen in Bindegewebsfasern auslaufen, welche dicht aneinander und in radiärer Richtung von den Appositionsstreifen aus in die Markräume hineinragen. Es findet also die Apposition vorwiegend unter Betheiligung präformirter Fibrillen statt. Dieses

[1] l. c. S. 12.

Verhalten zeigte sich in den Präparaten der syphilitischen Ostitis (11, 13) sowie in den Markräumen der Tibia und des Scheitelbeines eines vier Wochen alten hochgradig abgezehrten Kindes, und es kommt auf diese Weise ebenso wie in Folge unvollständiger lacunärer Resorption — die ich früher besprach — zur Erfüllung der Knochenräume mit Bindegewebsfasern. Derartige Befunde sind auch schon in der Literatur aufgezeichnet.

Soloweitschik[1] bereits gibt an, dass sich bei dem trichterförmigen Knochendefect, welcher eine Folge der Usur des Knochens von Seite einer Gummigeschwulst sei, die Gefässcanäle erweitert, statt mit Mark mit straffem, fibrillären Bindegewebe erfüllt finden (l. c. Seite 200), und sagt, dass hiebei die Erweiterung der Canäle in lacunärer Form die Ausnahme bilde; der langsam fortschreitende Zerstörungsprocess bei Syphilis bringe es nicht dazu (l. c. Seite 210). Virchow[2] aber fand in dem Falle eines syphilitisch cachectischen Individuums „innerhalb des gallertigen Gebietes bei der mikroskopischen Untersuchung ein directes Einschmelzen der Knochenbalken in fibröse Streifen". Virchow nennt da den Localprocess im Knochenmarke „eine atrophische Erscheinung".

Bei der Durchsuchung der Literatur finde ich nur bei Thierfelder[3] ein meinen ausfasernden Lacunen einigermassen ähnliches Bild. Derselbe schildert zwischen unregelmässig begrenzten Knochenbälkchen — welche in der Abbildung stellenweise flach lacunär erscheinen — vorwiegend senkrecht zu denselben stehende Fasern, „so dass sie unmittelbar aus dem Knochen hervorgegangen zu sein scheinen". Wegen der Häufigkeit solcher Bilder wendet sich Thierfelder gegen die Deutung, dass diese die Folge des Umbiegens der Fassern in der Nähe der Knochenbälkchen sein können. Da Resorptionsvorgänge gänzlich fehlen, und die Markräume mit „Narbengewebe" erfüllt seien, handle es sich hier um „Stillstand oder relative Heilung der Ostitis".

[1] Beiträge zur Lehre von der syphilit. Schädelaffection. Virchow's Archiv 48. Bd.

[2] Über Bildung und Umbildung von Knochengewebe etc. Berliner klin. Wochenschrift, 1875, Nr. 1, S. 1.

[3] Atlas der patholog. Histologie. Leipzig 1876, 5. Lieferung. Patholog. Histol. d. Knochen u. d. Periosts. Taf. XXVII., Fig. 3.

Die von Rindfleisch[1] entworfene Schilderung und Abbildung der „Bindegewebsmetamorphose der Knochen“ kann ich schon deshalb nicht hieher beziehen, weil die Grenze zwischen dem normalen Knochengewebe und dem „in fibrillärem Zerfall begriffenen“ convex und nicht concav, lacunär gezeichnet ist. Ich werde hierauf sowie auf die von den Autoren vielfach angenommene „Umwandlung“ des Knochens in Bindegewebe u. s. w. im zweiten Abschnitte eingehen.

Eine andere Form der Begrenzung der Howship'schen Lacunen, welche sich an die eben beschriebenen Ausfaserungsbilder der Lacunen am passendsten anreihen lässt, sind dichtflimmerige, wimperige, schmale Säume. (Siehe Fig. 16.) Ich fand solche oft, besonders schön an der Profilansicht mancher Lacunen der fungösen Ostitis des Fingers (3) und des metastatischen Carcinoms des Femur (17). Diese Säume zeigen eine feine sammetähnliche Strichelung und erscheinen wie aus zarten dichtgestellten Wimpern zusammengesetzt. In diesen Säumen sind hie und da auch Stellen von sammetähnlich körnigem Aussehen, welches wahrscheinlich durch das Umgebogenwerden der feinen Wimpern entstehen dürfte.

Vielen wimperigen Säumen traf ich Riesenzellen so innig anliegen, dass beide wie verfilzt zusammenhingen. Das körnige Protoplasma solcher Riesenzellen grenzte sich dabei in der Lacunenlinie scharf von der Knochensubstanz ab, und öfters liess sich an der zarten, Protoplasma und Knochensubstanz trennenden Lacunenlinie ein auffallender Glanz wahrnehmen. Die der Lacunenlinie angrenzende Partie solcher wie eingefilzter Riesenzellen zeigte sich der Grenze entlang radiär gestrichelt. Derartigen Bildern begegnete ich besonders häufig beim metastatischen Sarcom des Scheitelbeines (19). Ich versuchte in den Fig. 22, 29 diesen eigenthümlichen Anblick wiederzugeben und verweise ferners auf Fig. 11 und 23. War in einem solchen Falle der Contact der Riesenzelle mit dem Lacunenrand lockerer oder gelöst, so zeigte sich nun letzterer deutlich wimperig umsäumt, und auch an der dem Lacunenrande zugewendeten Fläche der

[1] Lehrbuch der patholog. Gewebelehre. Leipzig 1875, 4. Aufl., S. 27, Fig. 11.

Riesenzelle trat ein feinfransiger Wimpersaum hervor. Einen solchen Wimpersaum an den Riesenzellen hat Kölliker[1] zuerst beschrieben.

An vielen Stellen zeigte sich der Saum der Lacunen nicht so fein wimperig, wie ich es bisher angegeben habe, sondern gröber gestrichelt und erweckte den Eindruck einer faserigen Zähnelung. Die zugehörige Riesenzelle erschien dann an ihrer losgelösten Contactfläche von dem Aussehen einer Riffzelle. (Vgl. Fig. 11.) Durch die innige Ineinanderschiebung der Riffe und Stacheln solcher Riesenzellen und der faserigen Spitzen und Zähne jener Lacunenränder sehen wir wieder Bilder entstehen, in denen die sehr deutlich radiär gestrichelte Grenzpartie der Riesenzelle im innigsten Contact mit der in der Lacunenlinie scharf abgegrenzten Knochensubstanz steht.

Ebenso wie den vorher beschriebenen ausgefaserten Rändern möchte ich auch den fein- oder gröberwimperigen Säumen der Lacunen die Deutung geben, dass bei der Resorption noch Structurelemente des Knochens und zwar wahrscheinlich überwiegend die Fibrillen, hier jedoch in grosser Anzahl und von geringer Länge, zurückbleiben und für einige Zeit wenigstens der Resorption widerstehen. Wie viel von der Kittsubstanz in den wimperigen Lacunensäumen erhalten bleibt, entzieht sich wohl der Beurtheilung.

Der Einwurf, dass diese wimperigen Säume auf Apposition zu beziehen seien, kann nicht erhoben werden, da die geschilderten Bilder keinen der Charaktere der Apposition darbieten.

Nachzutragen habe ich noch, dass der Muldengrund von Lacunen, deren Rand wimperig umsäumt ist, bei tiefer Einstellung feinkörnig, wie chagrinirt erscheint.

Viel häufiger als die bisher abgehandelte Ausfaserung und wimperige Umsäumung der Lacunen kommt es vor, dass die Ränder der Lacunen in ihrer Profilansicht glänzend, doppeltcontourirt, wie von schmalen glänzenden Wällen umzogen sind. Oft sind die glänzenden Ränder innenzu nicht glatt, sondern gezähnelt contourirt, also gekerbt, und diese Kerbung des doppeltcontourirten Randes kann so prägnant hervortreten, dass derselbe

---

[1] l. c. S. 22.

wie aus einzelnen, tröpfchenartig kugeligen, glänzenden Erhabenheiten zusammengesetzt erscheint. (Vgl. Fig. 5, 6, 14.)

Glatt doppeltcontourirte Lacunensäume fand ich unter Anderem bei der Untersuchung der Oberarmfractur (1), der cariösen Ulna (5), des metastatischen Oberarmcarcinoms (16), in den atrophischen Knochen (25 und 27) u. s. w.

Dass ich mich bei der Beobachtung der glatt doppeltcontourirten Ränder der Lacunen der Verwechslung mit etwaigen convex oder concav gerollten zarten Schnitträndern entzog, ist wohl selbstverständlich. Diese ist auch leicht zu verhüten. Übrigens erscheinen in manchen Bildern, wo man an etwas dickeren Schnitten von obenher auf die Kämme hinsieht, in welchen benachbarte Lacunenmulden zusammenstossen, bei tiefer Einstellung auf diese Kämme die schönsten glänzenden Säume, wie ich es besonders deutlich gelegentlich der Untersuchung eines Fingers mit peripherem Enchondrom (15) sah. (Siehe Figur 7.) Diese glänzenden, doppeltcontourirten Kämme waren aber von der Schnittführung ganz unberührt geblieben.

Auch die Frage, ob die glänzenden Lacunensäume nicht etwa durch die Einwirkung der zur Conservirung verwendeten Müller'schen Flüssigkeit, oder der zur Entkalkung verwendeten schwachen Chromsäure entstanden seien, konnte ich mit Sicherheit für diejenigen zahlreichen Präparate ausschliessen, in denen das Vorkommen dieser glänzenden Lacunensäume ein sporadisches war. Auch die stets geringe Breite dieser Säume spricht gegen die Annahme, dass dieselben Kunstproducte seien. Eine quellende Einwirkung der genannten Salz- oder Säurelösung könnte vielleicht an und für sich kaum, gewiss aber nicht vereinzelt so scharf charakterisirte Bilder schaffen.

Noch weniger als für die glatt doppeltcontourirten Lacunenränder lässt sich für die glänzenden, gezähnelt contourirten und für die aus tröpfchenartigen Erhabenheiten zusammengesetzten Ränder und Flächen die Annahme aufrecht erhalten, dass wir es dabei mit Kunstproducten zu thun haben.

Lacunen mit doppeltem, innenzu gezähnelten Contour fand ich da und dort an zerstreuten Stellen, so z. B. in Schnitten von der fungösen Ostitis (3), von dem Kiefer mit Carcinom (18), von dem Schädelsarcom (19). (Siehe Figur 5, 10.) Bei diesem letzteren,

bei dem Carcinom des Femur (17), bei der Ostitis des Talus (10), besonders schön jedoch bei der fungösen tuberculösen Caries der Ulna (2) fand ich Lacunen mit dem schon beschriebenen Tröpfchensaum. (Siehe Figur 4, 8.)

Der letztgenannte Fall zeigte auch den Übergang solcher Tröpfchensäume in die gezähnelten und in die glatt wallartig aussehenden, glänzenden Lacunenränder sehr deutlich, wie mir dieser auch noch vielfach, so bei der Untersuchung des Olecranons (20), des Schädelsarcoms (19), der Rippe (22) u. s. w. bekannt wurde. Die Zusammengehörigkeit dieser verschiedenen Formen der glänzenden Säume scheint mir daher nicht zweifelhaft.

In dem citirten Falle der cariösen Ulna (2) fanden sich mehrere Besonderheiten. Es war der Grund der Lacunen, welche die Randpartien und die Spitzen der dem verkalkten Basaltheile des Gelenkknorpels benachbarten Knochenbalken vielfach zu einem Gitterwerke durchbrachen, mit ebensolchen tröpfchenähnlich glänzenden Erhabenheiten besetzt, wie der Rand der Lacunen. (Siehe Figur 14.) Wo wir einen Tröpfchensaum eine Lacune umgeben finden, müssen wir wohl erwarten, auch den Muldenabhang und den Grund der Lacune mit solchen glänzenden kugeligen Erhabenheiten überdeckt zu treffen. In der That fand ich aber derartige Bilder ausser in dem erwähnten Falle nur selten noch, und zwar in einem Präparate von der Rippe (22). Hier zeigten sich an dem Abhange einiger seichter Howship'scher Gruben beim Wechsel der Einstellung glänzende, gezähnelte Linien, die aus hell emporleuchtenden Kugelkuppen zusammengesetzt waren und ganz an die Tröpfchenreihen erinnerten, die sich bei der Caries der Ulna (2) fanden. Dieser letztere Fall (2) zeigte noch die Eigenthümlickeit, dass in der Nähe der besprochenen Lacunenmulden auch die leichtbogige Oberfläche der Balken mit tröpfchenähnlich glänzenden Erhabenheiten besetzt war, die in regelmässig reihiger Anordnung standen. (Siehe Figur 8.) An einigen Stellen eben solcher Schnitte, von denen die Figur 8 gezeichnet ist, ragten von dem zarten Schnittrande faserähnliche Streifchen weg, auf welchen ebenfalls, wie auf der Oberfläche des betreffenden Knochenbalkens, die erwähnten tröpfchenähnlich glänzenden Erhabenheiten in regelmässiger Entfernung von ein-

ander zu sehen waren. Ich halte diese Streifchen jedoch nicht für frei vorragende Knochenfibrillen, sondern für durch das Messer weggeschabte Partien der Oberfläche des Knochenbalkens. (Siehe Figur 8.)

Es bleibt nun noch die Frage zu beantworten, ob die verschiedenartigen glänzenden Lacunensäume auf Appositions- oder auf Resorptionsvorgänge bezogen werden sollen. Zur Lösung dieser Frage ist es vor allem nothwendig, die solchen Lacunenrändern anliegende Markmasse näher zu betrachten.

Auch in dieser Beziehung ist der Fall der cariösen Ulna (2) von Interesse. Von ihrem Gelenkknorpel war der verkalkte Basaltheil allein mehr vorhanden[1]. Die an diesem ansitzenden Knochenpartien waren von dem übrigen Balkenwerke der Ulna durch eine Masse abgetrennt, welche aus theils amorph verkäsendem, theils kleinzelligem im fettigkörnigen Zerfalle begriffenen Granulationsgewebe bestand. Diese Masse füllte auch die Lacunen der Balken aus und bedeckte die Flächen derselben. Häufig fanden

[1] Dass dieser Knorpelantheil verkalkt gewesen war, konnte ich aus den Spuren der Kalkkrümeln, an der Grösse, Plumpheit und Unregelmässigkeit der Knorpelkapseln erkennen, welche Merkmale Kölliker in seiner Gewebelehre Seite 200 für diese an allen Gelenken vorkommende eigenartige Lage angibt. Als Grenze zwischen dem verkalkten Grunde und den übrigen kalklosen Partien der Gelenkknorpel findet sich gewöhnlich eine flachwellige Linie gezeichnet. Ich benütze diese Gelegenheit, um darauf hinzudeuten, dass innerhalb solcher verkalkter Basalantheile der Gelenkknorpel, noch schöner und häufiger jedoch in den verkalkten Partien, welche in den Rippenknorpeln die Nähe eingelagerter Inseln von echter Knochensubstanz umgeben, bogige Wellenlinien sichtbar sind. Diese Linien ziehen in verschiedener Anzahl einander meist ziemlich nahe und parallel dahin, tangiren einander öfters und beziehen die Knorpelkapseln in verschiedener Weise in sich ein. Sie sind durch alle Merkmale als Verkalkungslinien charakterisirt. Dieselben bleiben in Schnitten, welche durch Präparation mit schwacher Chromsäure oder Müller'scher Flüssigkeit gewonnen wurden, deutlich, indem die glänzend contourirten Spuren von Kalkkörnchen, -krümeln und -kugeln die Linien begleiten und die Buckeln derselben zusammensetzen. Durch das entstehende Chromoxyd nehmen solche Präparate und besonders die beschriebenen Linien in denselben eine tiefgrüne Färbung an. Soweit mir die Literatur zugänglich war, fand ich keine Erwähnung, dass solche Linien in mehrfacher Anzahl in den verkalkten Zonen der Knorpel zu sehen sind.

sich so kleine Lacunen an den Knochenbalken, dass ihnen an Grösse eben nur eine lymphkörperchengrosse Rundzelle entsprach. Solche und kleinere von Körnchen durchsetzte Zellen lagen vielfach noch in diesen kleinen Lacunen, deren Ränder auch glänzend und wie wellig contourirt waren.

Weiter abwärts von den Spitzen der erwähnten Knochenbalken verlor das verkäste Granulationsgewebe seine Einförmigkeit und zeigte einen faserigen, von reichlichen Miliartuberkeln der verschiedensten Entwicklungsstadien durchsetzten Bau.[1]

Im Bereiche der verkästen Massen, und seitdem die Kuppen des Granulationsgewebes in Verkäsung gerathen waren, muss Apposition von neuem Knochengewebe geradezu als unmöglich betrachtet werden.

Ebensowenig kann man an Lacunen, deren Inhalt ein atrophischer ist, Apposition als bestehend annehmen.

Es finden sich in den Knochen marastischer Individuen ebenfalls, jedoch in relativ geringerer Zahl, Lacunen, die theils tief, theils jedoch — und diese bilden die entschiedene Mehrheit — seicht in die Knochensubstanz eindringen.

In den Lacunen solcher Knochen fand ich oft Riesenzellen, auch sah ich in der Nähe der Lacunen plumpspindelförmige, mehrkernige Zellen liegen, deren Form mit der der betreffenden Lacune auffallend correspondirte. (Siehe Figur 18.)

Dabei waren die Markräume der Knochen marastischer Individuen theils mit einem zellen- und fettreichen Marke gefüllt, theils war dieses in deutlicher Atrophie begriffen.

Von Belang für die uns eben beschäftigende Angelegenheit sind besonders diejenigen seichten Grübchen, welche glatte doppeltcontourirte Ränder — z. B. in der Rippe eines 84 und eines 75 Jahre alten Individuums (21, 24) — oder gezähnelte und Tröpfchensäume besassen — so im Olecranon der Phthisikerin (20), in der Rippe eines Bright'schen Individuums (22), in der

[1] In Übereinstimmung mit den Angaben Köster's (V. A. 48. Bd., S. 99) und Rindfleisch's (l. c. S. 526) fand ich in, die Knochenräume erfüllenden, fungösen Granulationen regelmässig Miliartuberkeln. Solche beschrieb auch in jüngster Zeit Feurer in seinen Untersuchungen über Spondylitis. (V. A. 82. Bd., S. 107.)

crista ilei (24) — welchen Lacunen jedoch ein entschieden atrophischer Inhalt anlag. Es war das entweder eine hyaline, spärlich gekörnte und gefaserte oder eine trübe, bräunliche, wie geronnene Masse, in der sich reichliche, verschieden gestaltete, kleine Körnchen und braungelbe Fetttröpfchen, runde Lymphzellen jedoch nur ganz vereinzelt finden liessen. Entfernt vom Knochenrande lagen in diesem Inhalte zart contourirte Capillarstücke, oder Capillaren innerhalb von Faserzügen, umgeben von Gruppen von Zellen, welche Lymphkörperchen glichen, oder es fand sich in der hyalinen oder bräunlich körnigen Markmasse ein Maschenwerk von spärlichen, ziemlich grossen, verästelt sternförmigen oder spindelförmigen Zellen. (Siehe Figur 2, 5, 12.)

In Analogie mit diesen Befunden steht es, dass ich an denselben und ähnlichen Präparaten subperiostal Lacunen in den Knochen eindringen sah, die nur von faserigem Bindegewebe bedeckt waren, in welchem sich keinerlei Zellen nachweisen liessen. Viele dieser Lacunen zeigten ebenfalls einen glänzenden, doppelt contourirten Saum.

Ich glaube, dass die geschilderten Eigenschaften des Markinhaltes absolut gegen die Annahme sprechen, dass die glänzenden Säume der besprochenen Lacunen auf eine eben vor sich gehende Anlagerung neuen Knochens bezogen werden können.

Dass eine solche Annahme gemacht werden könnte, liegt an und für sich sehr nahe, und wir müssen uns jetzt mit diesem Einwurfe etwas näher beschäftigen.

Wie bekannt ist und sehr oft, so von H. Müller[1], Waldeyer[2], Gegenbaur[3], Rollett[4], Kutschin[5], Klebs[6], Ranvier[7],

---

[1] Über die Entwicklung der Knochensubstanz etc. Zeitschr. f. wissensch. Zoologie. IX. Bd., S. 160.

[2] l. c. S. 263.

[3] l. c. S. 212.

[4] l. c. S. 99.

[5] Zur Entwicklung des Knochengewebes. Untersuchungen aus dem Institute für Physiologie und Histologie in Graz. Herausgegeben von A. Rollett. Leipzig 1870, S. 62.

[6] Beobachtungen und Versuche über Cretinismus. Arch. f. exp. Pathologie etc. II. Bd., S. 440.

[7] Technisches Lehrbuch der Histologie. 3. u. 4. Lieferung. Leipzig 1877. S. 416.

Kassowitz[1] u. A. in verschiedener Weise geschildert wurde, finden sich, namentlich an den primären Markräumen, auffallend stark lichtbrechende Säume, die bis auf einen von Gegenbaur nebenbei geäusserten Zweifel als neuentstandene Knochenlagen übereinstimmend aufgefasst wurden. Einzelne der Autoren sehen die glänzenden Säume um die primären Markräume nicht als Anlagerungen neuen Knochens an, sondern führen dieselben auf „Metaplasie" des Knorpelgewebes zurück. Diese Differenz berührt jedoch die vorliegende Frage nur wenig. Es ist immerhin sichergestellt, dass neuer Knochen in Form glänzender Säume entstehen kann. Diese Säume zeigen zumeist eine Kerbung des freien Randes, welche der Anlage der Knochencanälchen entspricht. Auch mir wurde es und zwar auch an den Objecten dieser Untersuchung zur Überzeugung, dass sich in der Form solcher glatter oder gekerbter stark lichtbrechender Säume der Knochen apponire. Umsomehr musste ich auf der Hut sein, ob ich es bei den früher abgehandelten glänzenden Lacunenrändern nicht auch mit stark lichtbrechenden Appositionsstreifen zu thun habe. Die Ähnlichkeit beider erstreckt sich ja weit, denn es ergab die directe Beobachtung wiederholt, dass die Zähnelung der glänzenden Lacunensäume, ebenso wie die Kerbung der Appositionsstreifen, von den trichterförmigen Mündungen der Knochencanälchen herrühre. Es liessen sich oft die Knochencanälchen bis zu den betreffenden Punkten des glänzenden Saumes und in die dunklen Querstriche desselben hineinverfolgen, welche Querstriche eben den Eindruck der Zähnelung und des Zusammengesetztseins aus tröpfchenartigen Erhabenheiten hervorbringen. (Siehe Figur 1.) Abgesehen davon deutete auch schon die regelmässige Anordnung der „Zähne" und „Tröpfchenkugeln" auf die Ausmündungen der Knochencanälchen als Ursache der Erscheinung hin.

Niemals jedoch fand ich, was an den stark lichtbrechenden Appositionsstreifen so häufig ist, dass die dieser Schilderung zu Grunde gelegten Formen der glänzenden Lacunensäume nur an einer Stelle ihren schmalen Doppelcontour überschritten, dass sie

[1] Die normale Ossification und die Erkrankungen des Knochensystems etc. Medic. Jahrb. 1879, S. 373.

in breitere, halbmondförmige Streifen übergingen. (Vgl. Fig. 15 und deren Erklärung S. 119.) Letzteres zeigt sich stets, wenn die Apposition über das erste Entwicklungsstadium hinausschreitet. Der Appositionsstreifen folgt dann nicht mehr allein den Buchten der Resorptionslinie, sondern beginnt diese auszufüllen, wird demgemäss stellenweise breiter, bucklig, halbmondförmig.

Auf ein Verkommniss muss jedoch hiebei noch Acht gegeben werden. Es kann nämlich geschehen, dass durch Unebenheit der Schnittfläche, durch ein welliges Verbogensein des Schnittes, durch einen schrägen nicht die reine Profilansicht des Lacunensaumes ergebenden Verlauf der Schnittfläche in den Bildern Stellen geschaffen werden, die scheinbar Verdickungen und Verbreiterungen des glänzenden Saumes darstellen Ich habe eine solche Stelle in Figur 12 zu zeichnen versucht. Der Wechsel der Einstellung klärt eine solche Täuschung jedesmal leicht auf und bewahrt uns davor, einen schmalen doppeltcontourirten Lacunensaum für örtlich verbreitert anzusehen.

Die Annahme, dass an den besprochenen Lacunensäumen die Apposition im Zuge sei, kann also schon durch die blosse Würdigung der Eigenschaft der Säume unwahrscheinlich werden, dass dieselben in gleichbleibender geringer Breite die Lacunen umziehen.

Noch mehr wird man in dieser Auffassung bestärkt, wenn man die Natur des solchen Lacunen anliegenden, oben beschriebenen Markinhaltes in Erwägung zieht. Wenn wir auch den atrophischen Verhältnissen des Markes in den bezüglichen Fällen volle Bechnung tragen, so müssen wir doch kleine rundliche oder zarte spindelförmige Zellen — nach den Erfahrungen an deutlich charakterisirten Appositionsstellen unter gleichen oder ähnlichen Verhältnissen — erwarten, wenn es sich hier um eine eben bestehende Apposition handeln sollte. Wir finden jedoch an den betreffenden Stellen keinerlei Zellen, auch nicht die kleinsten Formen von Osteoblasten. Diese Stellen sind auch nicht von jenen zarten Zellen überkleidet, welche im fertigen Knochen die Wände der Markräume, wie schon Waldeyer[1] angibt, oft bekleiden

[1] l. c. S. 372.

und die nach Schwalbe[1] als Endothel der perimyelären Lymphräume aufzufassen sind. Die Gegenwart solcher Zellen hätte aber die Veranlassung zur Annahme abgeben können, dass hier Osteoblasten vorhanden gewesen waren. Wo es sich um bestehende Resorption oder Apposition handelt, dort wird nach Schwalbe das fehlende Endothelhäutchen durch andere Zellen ersetzt oder das Endothel wird durch Zellen vom Knochen weggehoben[2].

Sollen wir nicht von der sicheren Basis der Erfahrung abirren, so müssen wir für die Lacunensäume, welchen (siehe Figur 5, 12, 20) nur eine atrophische Markmasse, jedoch gar keine Zellen anliegen, die Annahme ausschliessen, dass an denselben Apposition fortbestehe. Die Behauptung Kassowitz's[3], dass bei der langsamen linearen Apposition die Osteoblasten manchmal gänzlich fehlen und die schönsten Lamellen aus der glashellen Grundsubstanz sich bilden, kann den Thatsachen gegenüber nicht in's Gewicht fallen und nicht als Gegengrund angeführt werden.

Berechtigter ist die Frage, ob es sich an diesen Lacunen mit hellglänzendem Rande nicht etwa um einen im ersten Stadium eingetretenen Stillstand der Apposition handle. Es liegen in den betreffenden Bildern keine Gründe, um diese Annahme zu widerlegen und die Möglichkeit, dass in diesen Gruben nach beendeter Resorption die Anbildung begonnen habe, dass sie jedoch aus irgend einem localen oder allgemeinen Grunde bald sistirt worden sei, und dass sich desshalb nun in diesen Lacunen ebensowenig als Ostoklasten auch nicht Osteoblasten, sondern nur eine verkäste (Fall 2) oder eine atrophische Markmasse antreffen lasse, kann nicht von der Hand gewiesen werden.

Hingegen können jedoch auf keinerlei Appositionsvorgänge diejenigen glänzenden Lacunensäume bezogen werden, denen noch grosse mehrkernige Riesenzellen anliegen. (Siehe Figur 24.) Hier haben wir keine Ursache, eine bestehende Apposition anzunehmen; die Bilder, wo sich noch während der Fortexistenz der Riesenzellen in den Lacunen Apposition einstellt, sind scharf

---

[1] Über die Lymphwege der Knochen. Zeitschr. f. Anat. u. Entwickl. 1877, II. Bd., S. 137.

[2] l. c. S. 138.

[3] l. c. S. 167.

charakterisirt, indem sie immer die Riesenzellen durch Osteoblasten von dem Lacunengrunde abgedrängt zeigen. Die Riesenzellen liegen in solchen Bildern mitten unter Osteoblasten. (Vgl. Fig. 28 und deren Erklärung.)

Ebensowenig stimmt der Fund von Riesenzellen in mit glänzenden Säumen versehenen Lacunen mit der Annahme, dass der glänzende Rand von einer etwa früher eingeleiteten, jedoch sistirten Anlagerung herstamme. Wir müssten, um diese Annahme zu ermöglichen, voraussetzen, dass ohne Anwesenheit von Osteoblasten die Anlagerung des glänzenden Streifens erfolgt sei, für welche Voraussetzung, wie ich schon früher betont habe, keines der Appositionsbilder einen Anhaltspunkt bietet. Die Annahme, dass die Riesenzellen im Stande seien, die Anlagerung des glänzenden Lacunensaumes zu besorgen, wäre nicht nur an und für sich höchst willkürlich, sondern würde auch dieselbe Willkür in die Zellen hineinlegen.

Für die eben in Erwägung gezogenen Bilder ist daher die Annahme, dass die Entstehung der glänzenden Lacunensäume zu Appositionsvorgängen in irgend einer Beziehung stehe, höchst unwahrscheinlich.

Ebendasselbe gilt von solchen Bildern, welche einen glänzenden Doppelcontour an Lacunen zeigen, die in schon beschriebener Weise mit Fasern und Wimpern besetzt sind. Es finden sich Stellen, wo aus doppeltcontourirten, glatten oder gezähnelten Lacunensäumen weiche, zarte Fasern oder starre, faserige Spiesse weghängen oder wegstehen: so bei der gummösen Ostitis des Scheitelbeines (11), in dem syphilitisch cariösen Stirnbein (13), in der atrophischen Rippe (22). Öfters zeigen sich glänzende Lacunensäume von einzelnen feinen, kurzen Spitzen überragt, z. B. in dem Olecranon (20), und es gibt auch Stellen, wo den glänzenden, doppeltcontourirten Lacunenrand gegen den Resorptionsraum zu dicht gedrängte, feine, kurze Wimpern überragen. (Siehe Figur 1, 3, 9, 10, 17, 18, 23.) Diese Bilder sind, wie schon früher auseinandergesetzt wurde, mit Apposition schwer zu vereinbaren, und es wurden desshalb die Faser- und Wimperbesätze der Lacunen als bei unvollständiger Resorption zurückgebliebene Reste der Grundsubstanz gedeutet.

Wenn wir aber die glänzenden Säume der Lacunen, welchen Riesenzellen anliegen, sowie derjenigen Lacunen, welche von Fasern oder Wimpern besetzt sind, auf Appositionsvorgänge nicht zurückführen können, so erübrigt uns nur, diese Bilder auf die Resorption des Knochens zu beziehen.

Die Thatsache, dass sich an einer so überaus grossen Anzahl von Lacunen, welchen Riesenzellen innig anliegen, die glänzenden, wallartigen Säume nicht finden, ferners die eben besprochene Combination der glänzenden Säume mit der Ausfaserung der Lacunen, legt die Vermuthung nahe, dass diese Lacunensäume nicht dem Beginne oder Verlaufe, sondern der Abnahme und dem Ende der Resorption entsprechen dürften. Diese Annahme allein gibt auch für die von den atrophischen Knochen (20, 21, 22, 24) und von der cariösen Ulna (2) beschriebenen Bilder eine Erklärung ab, welche plausibler ist, als die früher erwähnte Annahme einer unterbrochenen Apposition.

Man könnte sich vorstellen, dass mit der Abnahme oder Unterbrechung der Resorption eine eigenartige Änderung des Lacunenrandes eintritt, oder dass es eine Veränderung ist, welche der Knochen am Rande der Lacune immer erleidet, wenn sich die Resorption vollzieht. Mit dieser Veränderung könnte für gewöhnlich die Resorption gleichen Schritt halten, unter besonderen Umständen dagegen, wo die Resorption eine Abnahme oder einen Stillstand erleidet, könnte das der Resorption unmittelbar vorausgehende Stadium der Veränderung des Knochens in Form dieses glänzenden Lacunensaumes für die Beobachtung erhalten bleiben.

Ob wir nun die auffallenden optischen Eigenschaften solcher Lacunenränder auf eigenartige oder dem Processe der Knochenzerstörung angehörige, nur im Flusse dieser verdeckte und nun gleichsam enthüllte, übrig gebliebene, präparatorische Änderungen zurückführen wollten, so würde noch immer die Frage zu beantworten bleiben, worin diese Änderungen bestehen.

In dieser Beziehung will ich nur bemerken, dass es sich nicht um eine Kalkentziehung des Lacunenrandes handeln kann, denn die beschriebenen glänzenden Lacunensäume wurden bei der Untersuchung entkalkter Knochenpräparate gefunden.

In demselben Sinne sprechen die Erfahrungen, welche ich bei der Untersuchung nicht entkalkter Knochen gesammelt habe.

Von osteomalacischen und rachitischen Knochen lassen sich im frischen und im entwässerten Zustande brauchbare Schnitte anfertigen und noch leichter, wenn dieselben durch vorhergehende Behandlung mit Müller'scher Flüssigkeit schnittfähiger gemacht werden. Die Differenz zwischen den kalklosen und kalkhältigen Knochenpartien wird hiedurch nicht aufgehoben; die Entkalkung durch die Müller'sche Flüssigkeit ist eine unvollständige.

Mit Zuhilfenahme der Müller'schen Flüssigkeit habe ich ausser von osteomalacischen und rachitischen auch von jugendlichen und von atrophischen Knochen Schnitte gewonnen[1].

An diesen Schnitten frischer oder nur unvollständig entkalkter Knochen fand ich häufig Lacunen mit den beschriebenen glänzenden Säumen, jedoch diese glänzenden Säume zeigten nicht die Merkmale einer Minderung oder Beraubung der Kalksalze.

Die locale Armuth des Knochengewebes an Kalksalzen zeigt sich in Form einer Durchsetzung der Knochengrundsubstanz mit den verschiedensten, stark lichtbrechenden Krümeln und Körnchen; es sind das grössere oder kleinere Kittsubstanzpartikelchen, welche Kalksalze enthalten, und denen gegenüber die dazwischenliegende Substanz der Fibrillen und die kalklosen Antheile des Kittes durch ihr geringeres Lichtbrechungsvermögen contrastiren.

Ein solches krümeligkörniges Aussehen bieten vielfach die osteomalacischen und rachitischen Knochen und an manchen Stellen auch Präparate von anderen Knochen dar. Ähnlich gekörnt ist auch die Grenze zwischen noch kalkhältigen und bereits entkalkten Knochenpartien bei künstlicher Entkalkung durch Säuren.

Die der Kalksalze gänzlich entbehrenden Antheile osteomalacischer und rachitischer Knochen, die noch nicht verkalkten Anlagerungen in anderen Knochen zeigen ihre Structur ebenso schön und deutlich, wie Schnitte von Knochen, bei deren künst-

---

[1] In dem Verzeichnisse dieser Arbeit sind die untersuchten atrophischen Knochen, nicht aber die jugendlichen und die Osteomalacie- und Rachitisfälle angeführt.

licher Entkalkung das Quellen der Fibrillen durch die Anwendung der Methode v. Ebners[1] verhindert worden war.

An den glänzenden Lacunensäumen nicht oder nur unvollständig entkalkter Knochenpräparate liess sich nun weder die fibrilläre Structur des gänzlich kalklosen Knochens erkennen, noch eine Durchsetzung mit Kalkkrümeln wahrnehmen. So verhält es sich in der entschiedenen Majorität der Beobachtungen. Eine Ausnahme bilden die glänzenden Säume solcher Lacunen, welche in gekörnte, also an Kalksalzen arme Knochenpartien einbrechen. An solchen, jedoch begreiflicher Weise nur sporadisch vorkommenden Bildern zeigen sich die doppeltcontourirten, wallartig aussehenden Säume ebenso körnig als die Knochensubstanz. Es kann hiedurch auch der Eindruck einer Zähnelung des Saumes erweckt werden. Diese Zähnelung ist aber unvergleichlich feiner und reichlicher und unregelmässig gegenüber derjenigen, welche die früher besprochenen Lacunensäume entkalkter Knochenpräparate zeigen.

Da die eben als Ausnahme angeführten gekörnten, glänzenden Lacunensäume bei einiger Überlegung geradezu eine Bestätigung der Regel abzugeben geeignet sind, so kann ausgesprochen werden, dass sich die Steigerung des Lichtbrechungsvermögens der Lacunensäume auf ein Verschwinden der Kalksalze aus dem Knochen nicht zurückführen lässt. Man wird vielmehr zu der Annahme einer anderen Art von Veränderung geführt, welcher Natur lässt sich freilich sehr schwer entscheiden. Wichtig erscheint es aber, die Thatsache anzuführen, dass die stark lichtbrechenden Lacunensäume sich weder an frischen, unentkalkten Knochenpräparaten noch an mittelst Müller'scher Flüssigkeit unvollständig, oder durch verschiedene Säuren vollständig entkalkten Knochen mit neutraler Carminlösung tingirten. Hieraus und aus dem schon früher Gesagten dürfte hervorgehen, dass diese Säume nicht verwechselt werden können mit den von Ribbert[2] erst vor Kurzem geschilderten, mit Carmin roth gefärbten „osteoiden" Säumen Howship'scher Lacunen. Beiläufig gesagt, ist weder

[1] l. c. S. 10.

[2] Über senile Osteomalacie und Knochenresorption im Allgemeinen. Virchow's Arch. 80. Bd., S. 448.

für diese noch für die von Ribbert an Havers'schen Canälen und Markräumen gezeichneten „osteoiden" Säume und Zonen die Annahme gestützt, dass es sich hiebei um ein „Kalkloswerden" des Knochens handelt. Es wird sich zeigen lassen, dass dies vielmehr, aller Wahrscheinlichkeit nach, unverkalkt gebliebene Anlagerungen sind.

Noch habe ich anzuführen, dass an — mit Salzsäure unter Zusatz von Kochsalz entkalkten — Knochen Farben, welche die Eigenschaft besitzen, die vorher schon kalklos gewesenen Partien osteomalacischer Knochen ungefärbt zu lassen, eine intensive Färbung der glänzenden Säume bewirkten. Soweit mir die Literatur der letzten Decennien bekannt ist, hat nur Bidder[1] und zwar an Elfenbeinstiften, die in lacunärer Resorption begriffen waren, glänzende, gezähnelte Lacunenränder beschrieben und abgebildet. Seine Worte hierüber lauten, wie folgt: „Oft sieht man bei scharfer Einstellung des oberen Randes einer Lacune den unteren mehr oder weniger deutlich vorspringend und in der Mulde zwischen beiden kleine glänzende Körnchen liegen. Die letzteren erblickt man auch an anderen Stellen dicht an den Lacunen, deren Ränder feingezähnelt und zerklüftet erscheinen, so dass man die Körnchen fast für ein Zerfallsproduct des Elfenbeins halten könnte".

Thierfelder[2] zeichnet einen in der Erklärung als „scharf" angegebenen Lacunenrand doppeltcontourirt. Dass die glänzenden Säume der Howship'schen Lacunen bisher so selten beschrieben wurden, dürfte vielleicht der Umstand einigermassen erklären, dass überhaupt bei der Untersuchung mancher Fälle keine deutlich doppeltcontourirten, wallartig aussehenden Lacunensäume zu finden sind. Manchmal mögen wohl auch solche Säume für Appositionsstreifen gehalten worden sein.

Mir jedoch drängte sich bei der Durchmusterung der zahlreichen Präparate, in welchen sich glänzende Lacunensäume der einen oder anderen Art fanden, bei dem Vergleiche dieser Bilder

---

[1] Neue Experimente über die Bedingungen des krankhaften Längenwachsthums von Röhrenknochen. Arch. f. klin, Chirurgie 1875, XVIII. Bd., S. 624. Taf. VII. Fig. 3.

[2] l. c. Taf. XXVI., Fig. 2a.

unter einander, immer mehr die Überzeugung auf, dass viele derselben mit den schon so lange bekannten glänzenden Appositionssäumen nicht identificirt werden können. Für manche Bilder, so für diejenigen, wo Lacunen mit glänzenden Säumen noch Riesenzellen beherbergen, lässt sich selbst die Annahme einer Unterbrechung der Apposition nicht aufrechterhalten, und in anderen Bildern wieder wurde durch die Combination der glänzenden Lacunensäume mit den in Folge der Sistirung einer an und für sich unvollständigen Resorption stehen gebliebenen Lacunenfasern direct auf eben diese Momente hingewiesen. Durch alle diese Verhältnisse wurde mir die schon oben vertretene Anschauung höchst wahrscheinlich, dass glänzende Säume nicht nur durch Apposition, sondern auch bei der Resorption zu Stande kommen können, und zwar bei der Abnahme oder am Ende derselben wenn vielleicht die verschiedenen Componenten der Resorption nicht mehr miteinander Schritt halten und der präparatorischen Änderung der Knochensubstanz nur langsam oder gar nicht der Schwund derselben nachfolgt, oder wenn mit dem Schlusse der Resorption eine eigenartige, mit dieser in keinem genetischen Zusammenhange stehende Änderung auftritt. Es scheint in keinem Falle die Veränderung in die Tiefe vorzugreifen; ich fand hiefür wenigstens nirgends einen Anhaltspunkt. Das kann ebensogut in der Natur des geänderten Saumes und in der Art seiner Entstehung, als auch in der Beschaffenheit der angrenzenden Weichgebilde begründet sein.

Befinden sich dieselben in so atrophischen oder degenerativen Zuständen, wie es manche meiner Bilder zeigen, so kann wohl auch hierin die Ursache des Stehenbleibens der Erscheinung liegen. Bei regem Zellenleben kommt es jedoch nach der Entstehung der Lacunen gewöhnlich zur Apposition oder zum weiteren Fortschreiten der Resorption.

Noch ist anzuführen, dass auch die von v. Ebner[1] an den Wandlinien der durchbohrenden Knochencanäle beschriebenen trichterförmigen Zacken und convexen Buckeln häufig glänzend contourirt sind[2]. (Siehe Figur 13 und deren Erklärung Seite 119).

---

[1] l. c. S. 61.

[2] Übrigens fand ich hellglänzende Ränder auch an Lacunen, die in den Knorpel einbrachen: so bei der fungösen Ostitis der Trochlea humeri

Nur einige der in diesem Abschnitte besprochenen Thatsachen sind für die Beweisführung dieser Arbeit von Belang. Es empfiehlt sich, hierauf erst im Verlaufe des letzten Abschnittes einzugehen.

II. Über das Verhalten der Knochengrundsubstanz bei der lacunären Resorption.

Nachdem ich in dem vorhergehenden Abschnitte die Eigenthümlichkeiten des Randes und der Begrenzungsfläche der Howship'schen Lacunen besprochen habe, gelange ich jetzt zur Betrachtung der Knochengrundsubstanz, in welche die Lacunen eingegraben sind.

Es ist für das vorliegende Thema von Bedeutung, dass nicht nur entkalkte, sondern auch unentkalkte Knochen untersucht werden.

Ich habe beides gethan. Zuerst werde ich Bilder von entkalkten Präparaten vorführen und daran den Beweis knüpfen, dass der Knochen bei der lacunären Resorption sich passiv verhält und keine activen Veränderungen eingeht.

Mit Hilfe der Bilder unentkalkter Knochenpräparate werde ich zeigen, dass an die Bildung der Lacunen keine Veränderung der den Lacunen benachbarten Knochengrundsubstanz gebunden ist.

Ich gehe nun daran, den ersten Punkt zu besprechen.

Schon im vorhergehenden Abschnitte wurde des Gitterwerkes Erwähnung gethan, welches durch das Einbrechen zahlreicher

---

(4), bei der chronischen Gonitis (6), im Enchondrom (15) und bei der fungösen Ostitis des Talus (10). In den beiden letztgenannten Fällen traf ich auch Knorpellacunen in Ausfaserung an.

An den Lacunen der Muskelfasern wurde durch Klemensiewicz (Die lacunäre Usur der quergestreiften Muskelfasern, 79. Bd. d. Sitzb. d. k. Akademie. 1879. Sep. Abdr. S. 9) ein glänzender Randsaum beschrieben. Klemensiewicz sagt hierüber: „auch grenzt sich jede einzelne Lacune durch eine schmale, stark lichtbrechende Linie von der Umgebung ab, so dass man den Eindruck erhält, als sei der Rand der Lacune wallartig erhaben.“

An den Muskelfasern kann dieser Process ganz sicher nur auf Resorption bezogen werden.

Lacunen in die dünnen Endstücke der Knochenbalken der cariösen Ulna (2) entstanden war. Indem die Lacunen von den verschiedensten Seiten und in verschiedener Richtung und Tiefe in die Knochenbalken einbrachen, blieben von diesen unregelmässig ausgenagte Gebilde übrig, deren Oberfläche aus dicht aneinander gelagerten Lacunenmulden zusammengesetzt war. Von diesen Lacunen drangen einzelne so tief ein, dass sie den Rest des Knochenbälkchens durchlöcherten und zu einem Gitterwerke umgestalteten.

Die Ränder und Lücken dieser Knochenbälkchen waren, wie bereits geschildert wurde, doppeltcontourirt, theils von einem wallartigen, theils von einem Tröpfchensaume umzogen.

Ähnliches fand sich bei der Untersuchung des metastatischen Sarcoms des Scheitelbeines (19). Es ragten da zwischen den Lacunen kleine Stäbchen (s. Fig. 23) oder Dreiecke (s. Fig. 11) darstellende Stückchen von Knochengrundsubstanz vor, deren Begrenzung durch verschieden tief concave, vielfach doppeltcontourirte Linien gegeben war. Indem diese Knochenstückchen miteinander zusammenhingen, ergab sich auch in diesem Falle öfters der Anblick eines Gitterwerkes. Auch losgelöst von dem Zusammenhange mit der übrigen Knochensubstanz lagen verschiedengestaltige Stückchen in der Nähe der Resorptionszone.

Bei der Untersuchung des gummös ostitischen Scheitelbeines (11) fand ich ebenfalls zwischen tiefen Lacunen, aus denen der Inhalt herausgefallen war, ein sehr langes dünnes Knochenstäbchen in flacher Bogenlinie hervorragen. Und bei der Carcinommetastase des Femur (17) traf ich lacunär benagte, zarte Knochengebilde ausser Zusammenhang mit dem ursprünglichen Knochengewebe.

Die Substanz aller dieser Stäbchen, Dreieckchen und Gitterwerke zeigte das gewöhnliche Aussehen von durch Säuren künstlich entkalktem Knochen. Schon wegen der Übereinstimmung der Structur dieser Knochenstückchen mit dem Baue des benachbarten Knochengewebes, ferners in Anbetracht der eigenthümlichen Form und der lacunären Begrenzung derselben kann es sich hiebei nur um bei dem Vorgreifen der Lacunen übrig gebliebene, der Resorption nicht verfallene Reste von Knochengrundsubstanz handeln. Die Vermuthung, dass es neugebildete

Knochenpartien seien, wäre durch nichts gerechtfertigt. Auch Kölliker[1] gibt an, dass es geschehen kann, „dass da, wo die Resorption Balken und Blätter von Substantia spongiosa trifft, dieselben an den Spitzen so zerstört werden, dass da und dort kleine Splitter von Knochensubstanz zurückbleiben".

Wie bereits angegeben, war in den Lacunen der Balken der cariösen Ulna (2) verkästes Granulationsgewebe enthalten; in dem Sarcom- und in dem Carcinomfalle (19, 17) waren die Lücken der Gitterwerke, respective der Knochenreste zumeist mit grossen Riesenzellen gefüllt. Eine Riesenzelle sieht man auch in Fig. 23 die Bucht der Lacune erfüllen, die durch ein dünnes Knochenstäbchen nach innen zu abgeschlossen wird.

In der Resorptionszone des metastatischen Sarcomknotens des Scheitelbeines (19) blieben jedoch zwischen Lacunen nicht nur die angegebenen Stäbchen, Dreieckchen und Gitterwerke aus unveränderter Knochensubstanz stehen, sondern es ging an vielen Stellen der Knochen in Form eines starrfaserigen Maschenwerkes in das Gerüste des Neubildungsknotens über.

Dieses bohnengrosse Neugebilde reichte von der Innenfläche des Scheitelbeines aus bis in die Nähe der Aussenfläche desselben und war von der äusseren Knochenrinde, sowie von den seitlich das Neugebilde einschliessenden Partien des Scheitelbeines durch eine buchtige, zackige Zone abgegrenzt, die in Loupenvergrösserung aus dunklen groben Körnern zusammengesetzt erschien. (S. Fig. 21.) Wenn man einen solchen Übersichtsquerschnitt bei stärkerer Vergrösserung ansieht, so überzeugt man sich, dass diese dunklen Körner die grossen vielkernigen Riesenzellen sind, welche dichtgedrängt nebeneinander liegend die Resorptionszone zusammensetzen, durch die der Sarcomknoten von der Substanz des Scheitelbeines abgegrenzt wird. An Übersichtsquerschnitten sieht man ferners, dass an den Eröffnungsstellen von Diploëräumen zumeist die Reihe der Riesenzellen eine Unterbrechung erleidet, und dass auch an der Wand von Havers-schen Räumen der benachbarten Knochensubstanz die grossen Riesenzellen liegen. (S. Fig. 21.)

---

[1] l. c. S. 20.

Das Neugebilde überragt nicht die Innenfläche des Scheitelbeines; es ist in seinen an die Dura meninx grenzenden Antheilen von einem Balkenwerke geflechtartig gebauten Knochengewebes durchsetzt.

Dieses seinem Baue nach zweifellos neugebildete Knochengerüste schliesst den Sarcomknoten nach innen ab, und wird durch die breite Lage des weichen Gewebes desselben von der Resorptionszone getrennt.

Dass sich Tumoren, welche im Knochen sitzen, durch Riesenzellen vom Knochengewebe abgrenzen, lässt sich sehr häufig für einen grösseren oder geringeren Antheil der Peripherie der Neugebilde nachweisen, und Rustitzky[1] fand „immer auf der Grenze zwischen Tumor und schwindendem Knochen" Riesenzellen.

Auch dass sich im Gewebe von Knochengeschwülsten häufig Knochensubstanz secundärer Bildung findet, ist bekannt und von Virchow[2], Volkmann[3], Rindfleisch[4], Scheiber[5] und Anderen angegeben worden. Während wir jedoch gewöhnlich bei den Knochengeschwülsten Resorption der alten Knochensubstanz und Bildung neuen Knochengewebes nahe nebeneinander finden, war bei dem eben besprochenen Falle die Resorptionszone von dem Balkenwerke des neugebildeten Knochengewebes weit getrennt und so jede Möglichkeit, Resorptionsbilder mit Appositionsformen zu verwechseln, von vorneherein ausgeschlossen.

Das Gewebe des Sarcomknotens, welches den Zwischenraum zwischen der Resorptionszone und dem neugebildeten Knochengewebe ausfüllte, war seinem Baue nach in die Form des Diktyom's (Heschl) einzureihen. Es bestand aus einem Gerüstwerke von Faserdurchkreuzungen, in welchem sich verschiedenartige Zellgebilde unterscheiden liessen, nämlich: gelblich glänzende, homogene Gebilde, dann Zellen mit auffallend stark

---

[1] Untersuchungen über Knochenresorption und Riesenzellen. Virch. A. 59. Bd. 1874, S. 225.

[2] Die krankhaften Geschwülste. Berlin 1865, II. Bd., S. 218. ff.

[3] Die Krankheiten des Knochens. II. Bd., 2. Abth., 1. Lfg. des Handbuches von Pitha und Billroth. Erlangen 1865, S. 442.

[4] l. c. S. 541.

[5] Virchow's Archiv. 54. Bd., S. 286.

glänzendem Kern. Solche Kerne, die viel stärker als die rothen Blutscheiben glänzten und an die „hämatoblastische Substanz“ erinnerten, waren auch frei anzutreffen. Ferners lagen in dem Gerüste des Neubildungsknotens blasse, feinkörnige Zellen, auch mehrkernige, jedoch nicht umfangreiche Zellen, endlich hie und da auch Fettzellen, die durch Osmiumsäure braunschwarz gefärbt wurden.

In der Nähe der Resorptionszone trat das Gerüste des Neugebildes immer mehr in den Vordergrund, indem seine früher wie durcheinander geworfenen, vielfach sich kreuzenden Fasern nach und nach zu Streifchen und kleinen Bälkchen zusammenliefen, die ein starres Aussehen hatten und sich wieder zu dickeren Zügen sammelten, welche in, zwischen den Lacunen der Resorptionszone stehengebliebene, Knochensporne übergingen. Diese letzteren waren theils glänzend umrandet und ihre Schnittfläche vom gewöhnlichen Aussehen des durch Säuren entkalkten Knochengewebes, theils war ihr Rand von kurzen steifen Fasern und groben Wimpersäumen besetzt und ihre muldig vertiefte Oberfläche bot dann ein chagrinirtes Aussehen dar. Ebenso waren auch die Züge, in welche diese Sporne ausliefen, von steifen Fasern und Spiessen überragt und lösten sich in die dickeren und endlich feineren Bälkchen und Fasern des Diktyomgerüstes auf. (Siehe Fig. 11.) Es liess sich so der unmittelbare Zusammenhang des Diktyomgerüstes mit dem in vordringender Resorption begriffenen Knochen nachweisen. Während aber bei dem Diktyomgerüste mehr oder minder auseinandergelöste Fasern ein meist ziemlich feines, kleinmaschiges Netzwerk für die zahlreichen, darin liegenden Zellen bildeten, stellten die Sporne und dickeren Streifen, in welche der Knochen auslief, die Umrahmung von grossen Maschenräumen dar. Diese Maschenräume ahmten die Form von Riesenzellen nach; sie waren meist rund oder oval und entsprachen auch in ihrer Grösse den Riesenzellen, die zumeist noch in den dem Knochen unmittelbar anliegenden Maschenräumen anzutreffen waren; aus anderen war der Inhalt besonders an feinen Schnitten herausgefallen.

Die Form, der Inhalt und die Zusammensetzung dieses Maschenwerkes, vor allem der continuirliche Zusammenhang desselben mit der originären Knochensubstanz sprechen auf das ent-

schiedenste dagegen, dass dieses Maschenwerk durch neue Anbildung entstanden sei. Und die angeführte Thatsache, dass sich in diesem Falle des metastatischen Scheitelbeinsarcoms (19) der neugebildete geflechtartig gebaute Knochen in Form von Balken weit entfernt von der Resorptionszone entwickelt, benimmt uns die letzten Zweifel. Dass das geschilderte Maschenwerk nicht auf Apposition bezogen werden kann, ist völlig sicher. Es bleibt uns daher zur Erklärung der Entstehung desselben nur mehr die Resorption.

Wir sind genöthigt anzunehmen, dass zwischen den Lacunen Antheile der Knochengrundsubstanz in Form des Maschenwerkes zurückblieben. Es erhellt aus der gegebenen Schilderung des Maschenwerkes, dass wir es hier nicht nur mit von der Resorption gar nicht berührten Resten von Knochengewebe zu thun haben, sondern dass es sich hier auch noch zum grossen Theile um Reste einer unvollständigen Resorption handelt. Die Sporne, durch welche das Maschenwerk mit der Knochensubstanz zusammenhängt, stellen, bis auf ihre peripheren, theils ausgefaserten, theils glänzend umsäumten Partien, noch ungeändertes Knochengewebe dar; die Streifen und Bälkchen aber, in welche die Sporne auslaufen, lösen sich in starre, dicke Fasern auf und endlich in äusserst feine, isolirte Fäserchen. Diese Erscheinung lässt sich nur auf die Art erklären, dass von den dünnen, die Lacunen trennenden Knochenpartien einzelne Antheile der Resorption verfielen, andere jedoch, und zwar überwiegend die Knochenfibrillen, der Resorption widerstanden.

Das starre, dicke Aussehen der Fasern zwingt auch hier zur Annahme, dass diese Fasern durch Kittsubstanz verklebte Fibrillengruppen vorstellen und dass daher auch Antheile der Kittsubstanz der Resorption lange widerstehen können.

Ähnlich wie in diesem Falle fand ich auch an der Resorptionszone einer Krebs-Metastase des Oberarmknochens (16) ein Maschenwerk von ausfasernden Knochenresten zurückbleiben. Dieser letztgenannte Fall machte es jedoch schon schwieriger, zwischen Resorption und Apposition zu entscheiden, da sich die Neubildung von Knochengewebe nicht von der Resorptionszone fernhielt, sondern in diese vielfach sich einschob. Trotzdem fanden sich auch hier einige Bilder, die ebensowenig mit der An-

lagerung neuen Knochens verwechselt werden konnten, als das vom Scheitelbeinsarcom gezeichnete Bild.

Wenn ich das bisher Geschilderte zusammenfasse, so ergibt sich, dass bei der lacunären Resorption Stückchen der Knochensubstanz zwischen den Lacunen bestehen bleiben können, sei es als verschiedengeformte vorragende Partikeln, sei es als zusammenhängende Gitterwerke. Auch gänzlich von dem Zusammenhange mit der Knochensubstanz losgelöste Knochenstückchen fanden sich in der Zone fortschreitender Resorption.

Ferners ergab sich, dass unter Umständen die zwischen den Lacunen erhalten gebliebenen Knochensporne noch einer weiteren jedoch unvollständig bleibenden Resorption unterliegen können, als deren Reste sich Fibrillen und Fibrillengruppen auffinden lassen.

Wenn wir uns nun fragen, welche Bedeutung diese Thatsachen für unser Urtheil über die Entstehungsursache der Lacunen besitzen, so lässt sich zweierlei hierauf antworten. Einmal müssen wir aus dem Zurückbleiben von Knochenstückchen, welche der Resorption nicht verfallen, die Folgerung ziehen, dass die Resorption durch einen localisirten, bezüglich seiner Wirkungssphäre begrenzten oder eingeschränkten Process bewirkt werde. Ein allgemein vorhandenes, nicht localisirtes Agens würde die geschilderten Bilder nicht schaffen können. Zweitens liegt in eben diesen Bildern ein besonders deutlicher Hinweis, dass sich die Knochengrundsubstanz bei der lacunären Resorption gänzlich passiv verhält. Würde dies nicht der Fall sein und würde sich die Knochengrundsubstanz in den Inhalt der Lacunen, sagen wir in die Riesenzellen, umwandeln, also bei der lacunären Resorption activ betheiligt sein, so wäre es nicht zu begreifen, warum so minimale Knochenpartikelchen zurückbleiben und warum sie nicht auch dieselbe Veränderung oder Umwandlung eingehen sollten. Dass die Knochensubstanz sich bei der lacunären Resorption passiv verhält, ist übrigens schon nach den Erfahrungen Billroth's an todten Knochen und Elfenbeinstiften nicht mehr zu bezweifeln. Es wird von denselben später nochmals zu sprechen sein.

Mehr als die angeführten Thatsachen lässt sich bei der Untersuchung von mittelst Säuren entkalkten Knochenpräparaten

nicht erfahren. Um zu einem sicheren Urtheile über die Frage zu gelangen, ob der Entstehung der Lacunen eine Veränderung der Knochengrundsubstanz vorausgehe und damit verknüpft sei, müssen unentkalkte oder durch Müller'sche Flüssigkeit nur unvollständig entkalkte Knochen untersucht werden.

Ehe ich auf die Resultate der Untersuchung solcher Knochen eingehe, muss ich jedoch noch derjenigen Angaben der Autoren gedenken, welche mit dem bisher von mir Vorgebrachten im Widerspruche stehen.

So gibt es eine ganze Reihe von Schriften, in denen die Annahme vertreten wird, dass die Knochengrundsubstanz auch eine active Rolle bei den verschiedenen Knochenprocessen spielen könne. Es wurden die verschiedensten Arten von Umwandlungen, Metaplasien und Degenerationen der Knochengrundsubstanz angenommen.

Es soll sich nach diesen Angaben die Knochensubstanz in Bindegewebe, in Knorpelgewebe, in Sarcomgewebe metamorphosiren, in Riesenzellen umwandeln können u. dgl. m.

Ich wende mich hier vorläufig nur gegen diejenigen dieser Angaben, welche mit den Knochenzellen und mit den Riesenzellen nichts zu thun haben.

So finden wir von Kolaczek[1] eine „bindegewebige Degeneration“ des Knochens, von Thierfelder[2] eine Veränderung des Knochens in Bindegewebe, von Ziegler[3] eine „knorpelige“ und eine „faserige Metaplasie“ des Knochens und später[4] von ebendemselben eine „sarcomatöse Metaplasie“ beschrieben.

Bei der Gründung dieser „Metaplasien“, „Veränderungen“ und „Degenerationen“ wurde nicht dafür gesorgt, eine Täuschung durch Apposition hintanzuhalten.

Ich habe mich bei Gelegenheit dieser Untersuchung von der Vielgestaltigkeit der Formen, unter welchen die Anlagerung neuen Knochens erfolgt, überzeugt und begreife die Schwierigkeiten,

---

[1] Beiträge zur Geschwulstlehre. Arch. f. klin. Chirurgie 18. Bd., S. 358.

[2] l. c. Tafel XXX, Fig. 5.

[3] Virch. Archiv, 70. Bd., S. 502 ff.

[4] Über Proliferation, Metaplasie und Resorption des Knochengewebes. Virchow's Archiv, 73. Bd., S. 355. ff.

welche sich besonders bei dem Studium der Knochengeschwülste der Beurtheilung gegebener Stellen entgegenstellen, wenn man nicht von dem Grundsatze ausgeht, dass erst dann, wenn eine Stelle weder durch Apposition noch durch Resorption erklärt werden könnte, zu Hypothesen gegriffen werden darf, die mit den bisherigen Errungenschaften der Histologie nichts gemein haben.

Ich fand keine Stelle, die sich weder durch Apposition noch durch Resorption hätte erklären lassen. Was für Eigenthümlichkeiten an Resorptionsbildern ich kennen lernte, habe ich bereits mitgetheilt. Es erübrigt noch, die verschiedenen Appositionsformen zu schildern, denen ich im Laufe dieser Untersuchung begegnete.

Unter den Formen, in welchen die Neubildung von Knochen erfolgt, war die Hauptrolle dem geflechtartig gebauten Knochengewebe v. Ebner's zugetheilt.

Ich fand geflechtartiges Knochengewebe in Form von Balkenwerken und als Anlagerung an Resorptionslinien sehr oft, so in den beiden früher besprochenen Fällen (19 und 16), bei der Humerusfractur (1), bei der Ostitis des Fersenbeines (8) u. s. w., besonders schön aber und instructiv mit Resorptionsbildern in nächster Nähe combinirt, bei der gummösen Ostitis (11), bei dem Carcinom des Alveolarfortsatzes (18); denselben Bau besitzt auch jede Osteophytwucherung. Die Zellen, welche solche Knochenlagen oder Balken einschliessen, sind gross, unregelmässig, zahlreich und confluiren vielfach miteinander. An ganz jungen derartigen Anlagerungen zeigt die Grundsubstanz oft noch keine deutliche Faserung, sondern erscheint homogen und ist häufig nur spärlich in Form dünner Septa zwischen den grossen von ihr umschlossenen Osteoblastenleibern vorhanden.

In der grössten Mehrzahl liegen solche Formen geflechtartigen Knochens oder die schönen Osteoblastenlager mit den Anfängen der Grundsubstanzbildung entschiedenen lacunären Resorptionsflächen auf, jenseits derer der Knochen mehr oder minder deutlich lamellös gebaut ist, überhaupt stets durch Verschiedenheiten der Structur als eine ältere Bildung contrastirt.

Hie und da ist jedoch die Grenze zwischen neuangelagertem und altem Knochen nicht lacunär sondern geradlinig, respective

gleichmässig bogig. Das sah ich in den von mir untersuchten Fällen wiederholt, so z. B. bei dem Humerus-Carcinom (16) u. s. w. Es ist daran nichts auffällig zu finden, da dies ja schon unter normalen Verhältnissen vorkommt und von v. Ebner[1] und von Kölliker[2] beschrieben wurde.

Wahrscheinlich tragen Bilder, in denen der Grenzlinie zwischen altem und neugebildetem Knochen die Buchtungen der Howship'schen Lacunen fehlten, wo also ohne vorhergehende Resorption neue Knochenanlagerung stattgefunden hatte, einige Schuld daran, dass man oft entschieden neuangelagertes, von dem alten Knochen abweichend gebautes Knochengewebe für eine Umwandlungsform des alten ansah. Übrigens wurde auch, trotz des Vorhandenseins der lacunären Grenzlinie zwischen dem alten lamellösen und dem neuangelagerten nicht lamellös gebauten Knochengewebe, letzteres auf Metaplasie des alten Knochens statt auf Apposition bezogen; so zeichnet z. B. Ziegler[3] in jeder Hinsicht deutlich charakterisirte Appositionsbilder als Belege für seine Annahme einer metaplastischen Umwandlung der Knochensubstanz in Bindegewebe und in Sarcomgewebe.

Noch öfter wie der geflechtartige Typus der Apposition scheint die Theilnahme präformirter Faserzüge an der Knochenbildung die Veranlassung zu Täuschungen abgegeben zu haben. Es wurden die verschiedenen Formen, unter denen sich präformirte Fasern an der Knochenanlagerung betheiligen, bereits von Kölliker[4], von Rollett[5], von v. Ebner[6] u. A. geschildert und von Billroth[7], Gegenbaur[8], Kölliker[9], v. Ebner[10] und Waldeyer[11] abgebildet. Ich fand derartige Bilder (vergl. Fig. 28 und deren Erklärung S. 121), in denen parallel angeordnete

[1] l. c. S. 47.
[2] l. c. S. 40.
[3] V. A. 73 Bd., Tafel VII, Fig. 3—6.
[4] Gewebelehre, 5. Aufl., S. 231.
[5] l. c. S. 103.
[6] l. c. S. 56.
[7] Beiträge zur pathologischen Histologie, Berlin 1858, Taf. III, Fig. 7.
[8] l. c. Fig. 4 g.
[9] l. c. Fig. 168.
[10] l. c. Fig. 20.
[11] l. c. Tafel XXII, Fig. 5.

oder in zopfähnlicher Weise verflochtene Faserbündel, deren Zwischenräume die grossen Osteoblasten erfüllen, in die Knochensubstanz hineinziehen, sehr oft und zwar, wie es den abnormen Verhältnissen entsprechen dürfte, nicht nur periostal, sondern auch innerhalb der Knochenräume, so z. B. besonders schön im fungös ostitischen Finger (3), Talus (10). Bei der fungösen Caries der Ulna (2) gewann ich Bilder, in welchen Sharpey'sche Faserbündel das Lumen von Markräumen quer durchsetzten und beiderseits in den Knochen eindrangen. Wenn nun ein auf diese Art, das heisst unter Betheiligung präformirter Faserbündel, gebildeter Knochen quer durchschnitten wird, kommt es zur Entstehung von Bildern, die entsprechend der Beschreibung Waldeyer's[1] gleichsam sphärisch dreieckige Lücken zwischen Kugeln zeigen. Es sind jedoch durchaus nicht alle derartigen Bilder auf Querschnitte von Bündeln zu beziehen. Ich fand, sowie es auch Gegenbaur[2] angibt, und zwar in der periostalen Auflagerung in der Nähe des Fingerenchondroms (15) in verschiedener Tiefe des Schnittes, von der Schnittfläche nicht berührte Knochenkugeln. Diese können nicht auf Querschnitte von Bündeln bezogen werden, sondern wir müssen sie nach v. Ebner[3] als halbkugelige gegen die anastomosirenden Knochenhöhlen vorspringende Massen ungeordnet gebauten Knochengewebes auffassen.

Diese Mannigfaltigkeit von Appositionsformen muss bei der Beurtheilung pathologischer Knochenpräparate überhaupt, am meisten aber bei dem Studium von in Knochen sitzenden Sarcomen, Carcinomen u. s. w. stets im Auge behalten werden.

Auch die Kenntniss der verschiedenen Formen und Anordnungen, unter welchen die Osteoblasten vorkommen, ist für unsere Orientirung in pathologischen Knochenpräparaten besonders wichtig. Für die Richtigkeit dieses Satzes kann ein Bild als Beleg dienen, welches Volkmann[4] nach einem Präparate von Colberg zeichnet und als „directen Übergang von Knochen in Spindelzellengewebe" declarirt.

[1] l. c. S. 372.
[2] l. c. S. 244.
[3] l. c. S. 64.
[4] Handbuch l. c. Fig. 93, S. 441.

Es stellt dieses Bild nichts anderes dar, als die, einem Knochenbalken auflagernde, einfache Schichte von miteinander parallel liegenden Spindelzellen. Solche Lagen von Spindelzellen fand ich selbst sehr häufig (besonders schön in den Fällen von Ostitis 5, 6 und 9) und muss dieselben als spindelförmige Osteoblasten auffassen. Spindelförmige Osteoblasten finden sich schon bei Waldeyer[1], Gegenbaur[2], Strelzoff[3], Heitzmann[4], Maas[5] und Anderen angegeben, und zwar als häufiges Vorkommen, indem die Spindeln derselben epithelartig ineinander geschoben, die Knochenbalken überziehen[6].

[1] l. c. S. 368.

[2] l. c. 219.

[3] Über die Histogenese der Knochen. Untersuchungen aus dem pathologischen Institute zu Zürich. Herausgegeben v. C. Eberth. Leipzig. 1873. S. 20.

[4] Untersuchungen über das Protoplasma. IV. Sitzgsber. d. k. Akad. 68. Bd., III. Abth., S. 58.

[5] Über das Wachsthum und die Regeneration der Röhrenknochen etc. Arch. f. klin. Chirurgie XX. Bd., S. 718.

[6] Es sei mir gestattet hier einzuschalten, dass ich öfters solche Züge von Spindelzellen durch eine Lage rundlich erscheinender Osteoblasten von dem in Anlagerung begriffenen Rande Havers'scher Canäle getrennt sah, wie dies auch Gegenbaur (l. c. S. 216) fand. Es möchte mir scheinen, dass sich solche Bilder zur Aufklärung der Entstehung der Lamellen verwenden liessen, deren von v. Ebner ergründeter Aufbau ja geradezu darauf hinweist, dass es auf die Richtung, in welcher die Osteoblastenfortsätze in die Knochensubstanz übergehen, ankommt, ob die Knochenfibrillenbündel parallel mit der Axe des Havers'schen Canals oder circulär zu liegen kommen. Wir können uns jetzt nicht mehr mit der Annahme einer „rhythmischen Abscheidung" zufrieden geben und ebensowenig kann uns die Annahme von Kassowitz (l. c. S. 167), dass die lamellöse Anordnung keine genetische, sondern nur eine „functionelle Bedeutung" habe, in irgend einer Weise zutreffend erscheinen.

Öfters, besonders deutlich bei der fungösen Ostitis (3), fand ich unter den spindelförmigen Osteoblasten sternförmige liegen, wie dies ja auch schon von Waldeyer (l. c. S. 362) und Anderen angegeben ist.

Manche derselben zeigten eine sehr grosse Anzahl von verästigten Ausläufern und standen in einem Markraume eines Präparates (3) durch ihre Äste sogar im Zusammenhange miteinander, was ebenfalls schon Waldeyer (l. c. S. 362) angibt, so dass mir die schon von H. Müller (l. c. S. 165), Kölliker (l. c. S. 218) u. A. aufgestellte Ansicht, dass die Knochenhöhlen und deren Ausläufer durch die Einschliessung solcher „Modelle"

Ein weiteres Beispiel dafür, dass Appositionsformen des Knochens für Umwandlungen desselben gehalten wurden, gibt uns die Schilderung, welche Redtenbacher von den Bildern entwirft, die er in künstlich in Entzündung versetzten Knochen fand[1].

Derselbe sah in Ausschmelzungsräumen, welche die alte Knochensubstanz und die neue Periostauflagerung durchsetzten, an schmächtigen Knochenbalken mit grossen Knochenzellen, „die Markzellen häufig epithelartig angelagert". Dennoch handelt es sich an diesen Stellen nach Redtenbacher „nicht um Regeneration des Gewebes, sondern um Einschmelzung und Freiwerden zelliger Elemente". Und in anderen Knochenpräparaten beschreibt R. an dem alten und an dem aufgelagerten Knochen eine „Umgestaltung der Knochengrundsubstanz in Fibrillenbündel". R. gibt in der Erklärung seiner Figur 2 selbst an, dass dieselbe eine Stelle aus der Periostauflagerung darstellt, und schildert die Zellen dieser Auflagerung als grösser, die Fibrillen derselben als durcheinander gefilzt. Diese Schilderung passt auf jedes geflechtartig gebaute Knochengewebe.

In den Bildern R.'s jedoch tritt die Faserung des Gewebes besonders scharf hervor.

Dieses Moment allein genügt aber keineswegs, um die Annahme, dass sich die Knochensubstanz regressiv umgestalte, zu rechtfertigen, da es viel näher liegt, auf Eigenthümlichkeiten der Apposition zu schliessen.

Durch das Studium der verschiedenen Appositionsformen des Knochens wurden wir bereits der Nöthigung enthoben, die von den Autoren beschriebenen Metaplasien, Degenerationen und Umwandlungen des Knochengewebes zu acceptiren. Wir haben gesehen, dass es sich für manche der Bilder und Schilderungen, auf welche diese Annahmen gestützt werden, nachweisen lässt, und dass es für andere wieder sehr wahrscheinlich ist, dass es

---

entstehen, mehr begründet erscheint, als die gegentheiligen Erklärungsarten, z. B. Brunn's „Resorption" (Arch. v. Reichert und Du Bois-Reymond 1874, S. 16) und Ranvier's Ansicht, dass der Raum der Knochencanälchen ausgespart werde (l. c. S. 417).

[1] Über entz. Vorgänge etc. Medic. Jahrb. 1878, S. 347, 348, Taf. XI.

sich hiebei nicht um active Umänderungen der Knochensubstanz, sondern um Appositionsvorgänge handelt.

Die mannigfachen Appositionsformen sind jedoch nicht die alleinige Quelle der Täuschung.

Gewiss haben auch oft Bilder, in denen Sehnengewebe oder Hyalinknorpel durch allmälige Übergänge mit Knochen verbunden ist, zur Annahme Veranlassung geboten, dass sich Knochen in Sehnengewebe, in Hyalinknorpel u. s. w., umwandle. V. Ebner[1] zeigte, dass es gänzlich ungerechtfertigt ist, solche Übergänge im genetischen Sinne zu deuten.

„Wenn Übergänge von Knochen und Bindegewebsformen vorkommen, so sind dieselben nur als räumliche und nicht als genetische aufzufassen"[2]. Oft sehen wir das fibrilläre Gewebe des Periosts, wie die Faserbündel der Sehnenansätze direct in die peripheren Knochenlagen eingepflanzt. Die Knochenanlagerung ist an solchen Stellen ebenso wie in dem Bereiche der Nähte der Schädelknochen meist nach dem sogenannten bindegewebigen Typus, das heisst unter Vermittlung präformirter Fibrillenbündel aufgebaut, so dass der Durchschnitt solcher Knochenschichten ein globuläres Aussehen zeigt. Auch an den dünnen Anlagerungsschichten, welche Pacchionische Gruben auskleiden, fand ich öfters die Knochensubstanz in faseriges Bindegewebe auslaufen[3].

---

[1] l. c. S. 82.

[2] v. Ebner l. c. S. 83.

[3] Bei Gelegenheit der Untersuchung des Femur (17) fand ich Bilder, welche beweisen, dass sich beim Wachsthum der Knochen die Insertionsstellen der Sehnen nicht in Knochensubstanz umwandeln, sondern dass diese Antheile der Sehnen theils der Resorption verfallen, theils zwischen den neuentstandenen Knochenpartien erhalten bleiben. Es finden sich nämlich in Querschnitten, welche ich in der Gegend einer Crista, an der sich eine Sehne ansetzte, durch die Rinde des Femur (17) legte, zwischen Havers'schen Systemen Stücke von echtem Sehnengewebe; diese zeigten an Quer- sowie an Längsschnitten als Umgrenzung lacunäre Resorptionslinien. Sie hatten also völlig die Configuration von Schaltstücken und waren auch noch in ziemlicher Tiefe der Rindensubstanz anzutreffen. In den peripheren Partien der Crista waren aber solche Sehnenstücke zu finden, die nicht rings von Knochensubstanz umschlossen wurden, sondern mit dem Sehnenansatz in continuirlichem Zusammenhange standen. Von Resorptionslinien begrenzte Partien von Sehnengewebe, die an der äusseren Seite noch

Diesen Thatsachen gegenüber sind wir durchaus nicht mehr gezwungen, das Bild, welches Rindfleisch[1] von der „Nähe des Resorptionsrandes“ bei einem andringenden Aneurysma zeichnet, auf eine Bindegewebsmetamorphose des Knochens zu beziehen. Ebensowenig sind wir genöthigt, die Annahme Rustitzky's[2] zu theilen, dass bei Atrophie des Knochens in Folge von Druck die Knochenbalken „unter Entkalkung direct in Bindegewebe übergeführt“ werden.

Es liegt viel näher, diese Stellen als einen räumlichen Übergang von Bindegewebe in Knochen aufzufassen, wie solcher sich besonders häufig an nach dem bindegewebigen Typus gebauten Knochenpartien findet. In demselben Sinne kommt die Angabe Rauber's zur Verwerthung, dass die unvollständig geschlossenen Lamellen direct in Bindegewebsbündel übergehen[3].

Manchmal scheinen nicht Appositionsbilder und auch nicht die Übergänge von Knochen und Bindegewebsformen zur Annahme von Umwandlungen der Knochensubstanz veranlasst zu haben, sondern Stellen, an denen in Folge unvollständiger Resorption zwischen den Lacunen ein faseriges Gitterwerk zurückblieb. Am wahrscheinlichsten wurde mir dies an der Schilderung Ceccherelli's[4]. Dieser gibt an, dass der Knochen ohne deutliche Grenze in das von Krebsacini durchsetzte bindegewebige Stroma überging. C. fasst jedoch dieses bindegewebige Stroma nicht als einen Rest der Resorption der Knochensubstanz auf, sondern vermuthet, dass es sich hiebei um eine „Umgestaltung der Knochengrundsubstanz“, um eine Theilnahme dieser an dem Fasergerüstbau handle.

Durch die Erwägung aller der vorgeführten Thatsachen wird es uns sehr wahrscheinlich, dass die angenommenen Umwandlungen der Knochensubstanz in andere Gewebe auf Verwechslungen mit Appositions- oder Resorptionsbildern oder auf

---

mit der Sehne selbst zusammenhingen, fand ich in der Nähe von Sehnenansätzen überhaupt häufig. (Vergl. Fig. 29 und deren Erklärung Seite 121.)

[1] l. c. S. 27, Fig. 11.

[2] l. c. S. 210.

[3] Elasticität und Festigkeit d. Knochen. Leipzig. 1876. S. 16.

[4] Medic. Jahrb. 1874, S. 159, 160.

Täuschung durch Bilder beruhen, welche Knochen und andere Bindegewebsformen aneinander gereiht und im Zusammenhange zeigen.

Alle Autoren, welche Umwandlungen der Knochengrundsubstanz der einen oder der anderen Art annehmen, setzen immer voraus, dass eine Minderung und Entziehung der Kalksalze dieselben einleite. Ebenso wird von Vielen angenommen oder geradezu behauptet, dass auch der Lacunenbildung eine Entziehung der Kalksalze der Knochensubstanz vorausgehe.

Es seien hier nur diejenigen Angaben erwähnt, die nicht unmittelbar mit der Betheiligung und dem Schicksale der Knochenzellen in Zusammenhang stehen.

Rokitansky[1] lässt bei der Caries der Schmelzung der Intercellularsubstanz eine Verarmung an Kalkerde vorangehen. R. Maier[2] gibt an, dass sich durch Ostitis das Knochengewebe in weiches osteoides Gewebe umwandle, wie dasselbe auch künstlich durch Entziehung der Kalksalze geschehe.

Lossen[3] spricht von einem rasch und unregelmässig um sich greifenden Erweichungsprocesse.

Volkmann[4] sagt, dass es eine „malacische" Form der Caries und des Knochenkrebses gebe, bei welcher die Knochensubstanz ihren Kalkgehalt verliert, um sich bei ersterer in ein „faserknorpelartiges, später zerfallendes Gewebe" umzuwandeln, bei letzterem aber in Form „fibröser Stränge" erhalten zu bleiben, die endlich ganz in der Neubildung untergehen. Rindfleisch[5] lässt der Resorption des Knochens durch eine andringende Neubildung Entkalkung vorangehen.

Heitzmann[6] schildert eine buchtig und eine gleichmässig erfolgende Lösung der Kalksalze. Ziegler[7] gibt an, dass er zuweilen Resorptionsgruben mit Riesenzellen gefunden habe, gewöhnlich aber zwar auch lacunäre Bildungen, „aber diese

---

1 Lehrb. der pathol. Anatomie. 3. Aufl., Wien 1856, II. Bd., S. 121.

2 Lehrbuch der allg. pathol. Anatomie. Leipzig 1871, S. 198.

3 Virchow's Archiv. 55. Bd., S. 62.

4 l. c. S. 317, S. 471.

5 l. c. S. 548.

6 Studien am Knochen und Knorpel. Med. Jahrb. 1872, S. 341.

7 l c. V. A. 73. Bd., S. 362.

Resorption betrifft nur die Kalksalze, während die Grundsubstanz erhalten bleibt".

Die überwiegende Mehrzahl aller der Angaben, nach welchen den angenommenen Umwandlungen, sowie der Entstehung der Lacunen ein Stadium vorausgehen soll, in welchem die Knochengrundsubstanz ihre Kalksalze verliert, basirt, nach den eigenen Ausführungen der betreffenden Autoren, auf Untersuchungen an durch Säuren künstlich entkalkten Knochen. Nur insoweit, als die Präparate solcher Knochen mit Carmin tingirt wurden, war es statthaft, über den Grad des Kalkgehaltes in gegebenen Stellen ein Urtheil zu fällen, indem es bekannt ist, dass sich auch an mit Säuren entkalkten Knochen die neugebildeten, kalkärmer gewesenen Partien durch eine intensivere Carminfärbung auszeichnen.

Die Folgerungen der betreffenden Autoren beziehen sich jedoch zumeist gar nicht auf die angewendete Carminmethode, ebensowenig stehen die Schlüsse Ziegler's zu der von ihm angewendeten Strelzoff'schen Doppeltinction in Beziehung.

Ziegler[1] empfiehlt zur Entkalkung der zu untersuchenden Knochen die Pikrinsäure und scheint dieser die Eigenschaft zu vindiciren, dass trotz ihrer Einwirkung der Unterschied zwischen kalkhältigen und kalklosen Partien erkennbar bleibe, da er, wie ich bereits anführte, angibt, dass er mit kalkloser Grundsubstanz gefüllte Lacunen angetroffen habe. Heitzmann[2] wieder behauptet, dass sich an Chromsäurepräparaten die Verarmung an Kalksalzen erkennen lasse. Als Merkmale derselben gibt Heitzmann „Helligkeit der Grundsubstanz", „Verstrichensein der Lamellengrenzen" und „undeutliche Begrenzung der Knochenhöhlen und Canäle" an.

Ich habe bereits hervorgehoben, dass sich Präparate von Knochen, welche durch Säuren künstlich entkalkt wurden, zur Beurtheilung des früheren Kalkgehaltes derselben nicht eignen. Auf Grund vielfältiger Erfahrungen und Versuche kann ich weder der Chromsäure, noch der Pikrinsäure, noch der mit Kochsalz oder mit Chromsäure combinirt angewendeten Salzsäure die

[1] l. c. S. 362.
[2] l. c. S. 341.

Eigenschaft zuerkennen, dass trotz der Einwirkung derselben der Unterschied zwischen noch nicht verkalkt gewesenen oder der Kalksalze etwa beraubten Knochenpartien, und den übrigen im Leben kalkhältig gewesenen Antheilen sichtbar und demonstrirbar bleibe.

Die Angabe Heitzmann's[1], dass scharfbuchtig begrenzte Felder in der Grundsubstanz entzündeter Knochen kalkfrei werden, dürfte aller Wahrscheinlichkeit nach auf Täuschung durch die Kittlinien des Knochens beruhen, die trotz der Entkalkung sichtbar bleiben. Auch Ziegler dürfte durch den Anblick der Kittlinien in den entkalkten Knochen oder durch Partien neuangelagerter, noch kalkloser Knochensubstanz zu seiner schon citirten Behauptung veranlasst worden sein. Derselbe gibt allerdings an, auch unentkalkte Objecte untersucht zu haben, doch sind die Resultate hievon in der Darstellung Ziegler's nicht specialisirt.

Ich muss nochmals wiederholen, dass uns nur Präparate von frischen oder conservirten Knochen, sowie von Knochen, die durch Müller'sche Flüssigkeit unvollständig entkalkt wurden, einen sicheren Aufschluss über die Frage ertheilen können, ob der Entstehung der Lacunen eine Kalkentziehung in der Knochengrundsubstanz vorausgeht, und welche Rolle überhaupt die Lösung und Beraubung der Kalksalze im Leben der Knochen spielt. Die Behandlung von in Säuren entkalkten Knochen mit Carmin bietet zur Bearbeitung dieser Frage zu wenig Sicherheit, da die Carminfärbung bei stärkerer Einwirkung des Farbstoffes nicht auf die früher schon kalklos oder kalkarm gewesenen Partien des Knochens beschränkt bleibt, sondern allgemein wird. Sehr nützlich erwies sich mir aber die Carmintinction an Präparaten von Knochen, die durch Müller'sche Flüssigkeit schnittfähig gemacht waren. Es bleibt zwar an solchen die Differenz zwischen den kalkhältigen und kalklosen Antheilen des Knochens unverändert deutlich, und ist daher die Carminmethode hiebei gänzlich entbehrlich, jedoch wird die Auffindung sehr zarter, kleiner, kalkloser Knochenpartien durch die Anwendung der Carmintinction sehr erleichtert.

[1] l. c. S. 341.

Andere Methoden, um den Knochen bei Vermeidung der Entkalkung durch Säuren der Untersuchung zugänglich zu machen, wurden schon von Virchow[1] und Volkmann[2] angewendet. Ersterer brach Bälkchen von frischen oder conservirten Knochen aus, wenn es nicht möglich war, dieselben mit dem Messer zu schneiden; letzterer empfiehlt ausserdem die Anfertigung von feuchten Schliffen.

Der Anwendung dieser verschiedenen Methoden verdanke ich eine Reihe von Erfahrungen, deren ausführliche Darlegung hier nicht Platz finden kann.

Ich werde nur insoweit auf dieselben eingehen, als daran die lacunäre Resorption interessirt ist.

Vor Allem muss ich hier auf die noch viel zu wenig gewürdigte Thatsache hinweisen, dass die Ablagerung der Kalksalze mit der Anbildung neuer Knochensubstanz keineswegs Schritt hält. Es erklärt sich hiedurch, dass unverkalkte Knochenanlagerungen ein sehr häufiger Fund sind.

Diese Thatsache, zu deren Kenntniss ich durch die Untersuchung menschlicher Knochen aus den verschiedensten Altersperioden gelangte, muss uns zur grössten Vorsicht mahnen, wenn es sich darum handelt, zu entscheiden, ob eine gegebene kalklose Knochenpartie wegen Beraubung der Kalksalze oder wegen Nichtablagerung derselben kalkfrei gefunden wird.

Ehe wir uns dafür aussprechen, dass an einer Stelle das Knochengewebe kalklos wurde, muss ausgeschlossen werden können, dass an dieser Stelle die Knochensubstanz kalklos blieb. Nur diejenigen Stellen, welche unmöglich auf das „Kalklosbleiben“ neuangelagerten Knochens bezogen werden können, dürfen als „kalklos geworden“ angesehen werden.

Dasselbe gilt auch von der Beurtheilung kalkarmer Knochenpartien, die, wie ich schon im ersten Abschnitte erwähnte, von den verschiedensten Kalkkörnchen und -krümeln durchsetzt sind. Ehe wir eine körnigkrümelige Knochenpartie auf fortschreitende Kalkverminderung beziehen dürfen, muss ausgeschlossen werden,

---

[1] Über die parenchymatöse Entzündung. Virchow's Archiv 4. Bd., 1852, S. 304.

[2] Zur Histologie der Caries und Ostitis. Arch. f. klin. Chirurgie IV. Bd., S. 338, 339.

dass es sich hiebei nicht um eine kalkarm gebliebene Stelle handelt. Auch solche kalkarme, körnigkrümelige Stellen fand ich in jugendlichen und in atrophischen Knochen und zwar mitten in normal kalkhältigen Knochenfeldern und nicht nur an der Peripherie gänzlich kalkloser Knochenpartien.

Von diesem Standpunkte aus musste ich mich schon vorher gegen die Deutung aussprechen, welche Ribbert[1] seinen Funden beilegt. Ebensowenig kann ich beistimmen, wenn Volkmann[2] aus dem Umstande, dass er bei chronischer Knochencaries in dem Knochengewebe Kalkkrümeln und „stellenweise“, „allerdings meist nur feine Bälkchen und Nadeln von Knochensubstanz“ hell, kalklos fand, auf eine fortschreitende „Entkalkung“ schliesst.

Es ist viel wahrscheinlicher, dass es sich in diesen Fällen um kalklos, respective um kalkarm gebliebene Knochenpartien handelt. Bevor es nicht durch die Eigenthümlichkeiten der kalklosen Knochenantheile unmöglich wird, diese als kalklos geblieben anzusehen, dürfen dieselben nicht auf Entkalkung oder, wie man sich oft ausdrückt, auf Erweichung bezogen werden.

Dieser Überlegung müssen auch die Bilder unterworfen werden, welche uns die Untersuchung osteomalacischer und rachitischer Knochen vorführt.

Da Rindfleisch aus Bildern, welche ihm die Untersuchung osteomalacischer Knochen darbot, Schlüsse zieht, die für die Entstehung der Howship'schen Lacunen eine ganz eigenartige Erklärung aufstellen, so muss ich in dem Nachfolgenden zuerst das hier Interessirende aus meinen Studien an osteomalacischen Knochen mittheilen und werde dann erst auf die Frage eingehen, ob an die Bildung der Lacunen eine Veränderung der benachbarten Knochengrundsubstanz gebunden ist oder nicht.

Rindfleisch untersuchte ausgebrochene Stückchen osteomalacischer Knochen und gibt in der so oft in anderen Büchern reproducirten Fig. 10, respective Fig. 202 seines Lehrbuches eine Darstellung dessen, was er fand. Diese Zeichnung zeigt als Grenze zwischen dem kalklosen und kalkhaltigen Knochengewebe eine scharfe Linie, die jedoch „nicht etwa parallel der äusseren

---

[1] l. c. 446.

[2] Arch. f. klin. Chir. IV. Bd., S. 451.

Contour des Knochenbälkchens fortläuft, sondern in ebensolchen einspringenden Bogen, wie wir sie sonst nur an der Resorptionslinie des Knochengewebes bei Entzündungen, Caries etc. wahrnehmen (Howship'sche Lacunen)". Rindfleisch schliesst daraus, „dass die Entkalkung in gewissen Richtungen und an gewissen Punkten schneller fortschreitet als an anderen, und dass die Howship'schen Lacunen diesem ungleich schnellen Fortschreiten der Entkalkung ihre Entstehung verdanken"[1]. Und schon an einer früheren Stelle[2] führt R. aus, dass wir für die Howship-schen Lacunen, ob sie mit Zellen gefüllt seien, oder ob sie eine Riesenzelle oder eine Gefässschlinge enthalten, ob sie bei der Osteomalacie die Grenzlinie des normalen und des bereits entkalkten Knochengewebes bilden, oder ob sie auch an todten Elfenbeinstiften, die zur Heilung der Pseudarthrose in den Knochen getrieben wurden, den gleichen Modus der Einschmelzung darbieten, „überall das ungleich schnelle Vorrücken einer entweder nur die Kalksalze oder einer die Kalksalze und den Knochenknorpel lösenden Flüssigkeit als die Ursache der Erscheinung ansprechen können".

Das ungleich schnelle Vorrücken der Flüssigkeit in der Knochensubstanz sucht R. durch die Verschiedenheit der „Richtung, in welcher die Strahlen der Knochenkörperchen zu der Fläche stehen, von welcher her die Resolution stattfindet"[3], oder dadurch zu erklären, „dass eine von den Markcanälen ausgehende Säure in einem nicht gleichmässig und überall durchgängigen, sondern nur canalisirten Gebiete je nach der Breite und Anzahl der Canäle stellenweise schneller oder langsamer vordringt"[4].

Ich habe eine bedeutende Anzahl osteomalacischer Knochen, herrührend von verschiedenen Fällen, und zwar überwiegend auf Schnitten untersucht, die sich von den weicheren Knochen ohne weitere Vorbereitung ausser der Wasserentziehung durch Alkohol sehr schön und dünn herstellen lassen. Ausserdem wurden noch die früher erwähnten Untersuchungsmethoden angewendet, die

[1] l. c. S. 532.
[2] l. c. S. 513.
[3] l. c. S. 26. Anmerk.
[4] l. c. S. 533.

ich noch durch die Auffindung mehrerer Farben vermehrte, welch' letztere im Gegensatze zum Carmin an künstlich durch salzsäurehältige Kochsalzlösung entkalkten osteomalacischen Knochen, die schon früher kalklos gewesenen Partien gänzlich ungefärbt lassen, während sich die früher kalkhältig gewesenen intensiv färben.

Die so gesammelten Erfahrungen stehen im Widerspruche mit den Angaben und Annahmen Rindfleisch's. Sie beweisen erstens, dass die Grenze zwischen den kalkhältigen und kalklosen Partien osteomalacischer Knochen durchaus nicht überwiegend oder gesetzmässig von einer Lacunenlinie gebildet wird, sie geben zweitens neuerdings einen Beleg dafür ab, dass es kalklosbleibende Knochenanlagerungen gibt und dass daher keineswegs aus dem Funde kalkloser Knochenstellen ohneweiters gefolgert werden darf, es handle sich hiebei um eingetretene Entkalkung; endlich wird es sich zeigen lassen, dass an solchen Stellen, die wirklich unzweifelhaft durch Entkalkung kalklos geworden sind, die Grenze zwischen dem kalkhältigen und kalklosen Knochen nicht lacunär und nicht scharf aussieht.

Man kann an jedem Präparate von osteomalacischen, sowie auch von rachitischen Knochen die verschiedenartigsten Grenzen zwischen den kalkhältigen und kalklosen Partien antreffen.

Es findet sich sehr häufig als Grenze zwischen der inneren weichen und der äusseren harten Zone Havers'scher Systeme eine regelmässige Kreislinie, ferner eine gerade oder bogige Linie zwischen den betreffenden, in ihrem Kalkgehalte verschiedenen Schichten des Lamellenmantels der Markräume. (S. Fig. 33.) Auch Bouley[1] fand den Contour der weichen Zone sehr häufig nicht so unregelmässig, als dies Rindfleisch angibt, sondern von einer „schönen Linie“ gebildet. Diese Grenzen sind von Kalkkrümeln und -körnchen durchsetzt. Auch an den Stellen, wo die Grenze die von Rindfleisch angegebene Configuration hat, finden sich häufig innerhalb der concaven Buchten jener Linie kleine Streifchen oder rundliche Fleckchen von Kalkkrümeln und -körnchen und zwar insbesondere in der Nachbarschaft von den Knochenkörperchen, welche ja in der Regel in den Buckeln der

---

[1] Note sur un cas d'ostéomalacie par P. Bouley et V. Hanot. Arch. de physiologie norm. et path. 1874, p. 637.

Lamellensysteme anzutreffen sind. (S. Fig. 31, 35.) Kalklose Streifen können auch innerhalb kalkhältiger Lamellenzüge und diesen parallel liegen (s. Fig. 30, 31, 35), oder auch quer die Lamellen durchsetzen. (S. Fig. 36, 37.) Öfters sieht man auch innerhalb weicher Knochenpartien grössere oder kleinere, runde oder ovale kalkhältige Stellen, die, meist an die Lage einzelner Knochenkörperchen gebunden, von einander und von der Grenzlinie des harten Knochens durch kalklose Regionen getrennt sind. (S. Fig. 32.) Eine krümelig körnige Zone begleitet in allen eben geschilderten Formen den Contour der harten Knochenpartien. Derartige körnige Streifen und Flecke sind auch häufig innerhalb ganz harter Knochenpartien zu finden. Es gehört zu den fast in jedem Gesichtsfelde wiederkehrenden Erscheinungen, dass eine schwache Körnung die Knochencanälchen begleitet und die Knochenkörperchen umzieht, dass sie entlang den Lamellen und quer durch dieselben von den weichen Zonen aus in den harten Knochen hineingreift (s. Fig. 33, 35, 37), dass ein körniger Streifen an der inneren concaven Fläche der Kittlinien dahinzieht, die dabei oft durch ihren hohen Glanz auffallen und scheinbar als doppelt contourirte Wällchen den Knochen durchlaufen. (S. Fig. 30, 31, 35.)

Rindfleisch gibt an[1], dass in osteomalacischen Knochen die weiche Grundsubstanz feinstreifig ist und „nur hie und da noch kleine Schattenstriche als letzte Überreste früher vorhandener Knochenkörperchen erkennen lässt“; es scheine eine Aufquellung der Intercellularsubstanz im Begriffe zu sein, „sämmtliche Knochenlacunen und ihre Fortsetzungen zum Verschwinden zu bringen“. Diese „Veränderung“ lässt R. nicht zweifeln, dass hier eine Entkalkung des Knochengewebes stattgefunden habe.

Ich habe von solchen Veränderungen in der weichen Knochensubstanz osteomalacischer Knochen, nichts gefunden. Dieselbe zeigte an Präparaten, welche in Wasser, Kali acet. oder ähnlichen Zusatzflüssigkeiten von geringem Brechungsexponenten untersucht wurden, ihre fibrilläre, sei es lamellöse oder geflechtartige Structur sehr deutlich. Die Knochenkörperchen und -canälchen

[1] l. c. S. 532.

sind nicht weniger sichtbar, als im gewöhnlichen Knochen, der mittelst der salzsäurehältigen Kochsalzlösung v. Ebner's entkalkt wird. Dabei lassen sich die Knochencanälchen der körnigen Zonen deutlich in die der kalklosen und kalkhältigen Partien hineinverfolgen.

Die kalklosen Antheile osteomalacischer Knochen fand ich sehr häufig eben in Apposition begriffen, sei es indem sie von einfachen oder mehrfachen Osteoblastenlagen überkleidet waren, oder dass die kalklosen Partien in ein Cambiumreticulum ausliefen oder eine der übrigen Appositionsformen zeigten. Dem entsprechend finden sich auch in grosser Verbreitung und Häufigkeit geflechtartig gebaute kalklose Knochenpartien (s. Fig. 36) und zwar an Stelle lamellös gebauter Knochensubstanz in der Rinde von Röhrenknochen u. s. w., so dass wir sicher sein können, dass wir es hiebei mit neu gebildeten und kalklos gebliebenen Knochen zu thun haben.

Andererseits wieder wurde ich durch unzweideutige Bilder überzeugt, dass in osteomalacischen Knochen Entkalkung wirklich vorkommt. Es finden sich nämlich die Lamellen, welche von durchbohrenden Gefässen quer durchschnitten werden, beiderseits von diesen, bei der Betrachtung eines den Canal quer treffenden Schnittes rings um denselben, auf eine Strecke hinein weich, kalklos, jedoch in ihrer Structur ungeändert.

Dabei ist nirgends eine Unterbrechung des Zusammenhanges der weichen Lamellenstücke mit den kalkhältigen Lamellen zu sehen. Es lassen sich die Lamellenzüge aus dem kalkhältigen Knochenfelde bis an die zackige Unterbrechung durch das durchbohrende Gefäss Schritt für Schritt verfolgen.

Die Grenze zwischen den kalklosen und den kalkhältigen Lamellentheilen ist gerade oder kleinzackig, indem die Kalkkrümeln und -körnchen, welche in der Grenzzone die Knochensubstanz durchsetzen, an einzelnen Punkten weiter in die kalklosen Lamellenantheile vorreichen.

Die Annahme, dass diese Lamellenantheile kalklos geblieben seien, während in den übrigen, vom durchbohrenden Gefässe entfernter gelegenen Partien der betreffenden Lamellenzüge die Kalkablagerung erfolgt sei, ist für Stellen, wie die in Fig. 36 abgebildete unhaltbar.

Es lassen derartige Stellen nur die Annahme zu, dass die betreffenden Lamellenstücke ihres Kalkgehaltes beraubt wurden.

Die nähere Begründung dieses Urtheiles und die Darlegung der Verhältnisse, unter denen die erstere der beiden eben erwähnten Annahmen für andere Stellen (vergleiche Fig. 37) mehr oder minder stichhältig ist, muss ich auf später verschieben. Ebenso bietet sich hier nicht der Platz, um die mannigfaltigen Bilder, welche man bei der Untersuchung osteomalacischer und rachitischer Knochen findet, näher, mit Bezug auf die Ähnlichkeit derselben und mit Rücksicht auf die Frage nach dem Wesen der Osteomalacie und Rachitis zu besprechen.

Thatsache ist es, dass es bei der Osteomalacie sowohl zur Neubildung kalklos, respective kalkarm bleibenden Knochengewebes als zur Entkalkung des alten kalkhältigen Knochens kommt; ersterer Vorgang überwiegt entschieden. Wollte man trotzdem annehmen, dass in osteomalacischen Knochen alle kalklos angetroffenen Stellen durch Entkalkung entstanden seien, so müsste man doch die Ansicht aufgeben, dass sich für das Fortschreiten der Entkalkung eine bestimmte Form feststellen lasse, wie dies Rindfleisch meint. Denn wir müssten dann in diesem Falle auch die mannigfachsten, nicht lacunären Bilder auf Entkalkung beziehen, und es könnte in der Entstehung der Lacunenlinie nicht mehr eine Eigenthümlichkeit des Flüssigkeitstransportes im Knochen gesehen werden.

Ferner spricht gegen Rindfleisch's Anschauung die Thatsache, dass dort, wo wirklich die erfolgte Entkalkung nachweisbar ist, keineswegs die Grenze zwischen kalkhältigem und kalklosem Knochen lacunär ist. Endlich ergibt die Untersuchung solcher Stellen, von welchen Rindfleisch bei der Aufstellung seiner Ansicht ausging, dass die Lacunenlinie durchaus nicht kalkhältige und kalklose Partien eines Lamellensystems von einander trennt, sondern dass dieselbe ein kalkloses, in sich geschlossenes System von einem anderen kalkhältigen, nicht vollständigen abgrenzt, dem statt eines fehlenden Theiles das erstere anliegt. Mit anderen Worten: Die von Rindfleisch zwischen den kalkhältigen und kalklosen Theilen osteomalacischer Knochen beschriebene Lacunenlinie ist nichts als die Kittlinie v. Ebner's, welche in diesem Falle nicht zwei kalkhältige, sondern ein kalk-

loses und ein kalkhältiges Knochenstück von einander abgrenzt. Die von Rindfleisch so sehr zu Wichtigkeit gebrachten Bilder osteomalacischer Knochen stellen also nur Appositionsbilder dar, die sich insoweit von anderen ihresgleichen unterscheiden, als hier die nach der Resorption eines kalkhältigen Knochenstückes neuangelagerte Knochensubstanz kalklos blieb.

Eine andere, jedoch minder wahrscheinliche Erklärung dieser Bilder könnte dahin gehen, dass eine fortschreitende Entkalkung eben bis zur Kittlinie und noch nicht weiter vorgedrungen sei. Dieser Erklärung würde dabei der Umstand zu statten kommen, dass die in der Kittlinie zusammenstossenden Knochenstücke nach v. Ebner's[1] Unteruchungen nicht nur ihrem Baue nach, sondern auch besonders wegen des Umbiegens der Knochencanälchen in der Nähe der Appositionsfläche vollständig von einander unabhängig sind.

Jedoch auch diese letztere Erklärung bietet der Rindfleisch-schen Annahme keine Stütze, da nach dieser Erklärung die Lacunenlinie nicht überall, sondern nur dort die Grenze zwischen kalkhältigem und kalklosem Knochen bilden könnte, wo die Entkalkung eben bis zu der präexistenten Kittlinie vorgedrungen wäre.

Auch Cohnheim[2] spricht sich, obwohl nicht auf eigene Anschauung gestützt[3], gegen Rindfleisch's Annahmen aus und sagt, dass die „osteogenen“ Zonen bei der Osteomalacie „lediglich und allein durch Apposition entstanden sein“ können. Soborow[4] hingegen fügt seiner übrigen ganz mit Rindfleisch's Meinung übereinstimmenden Darstellung noch die Angabe bei, dass er bei Versuchen an Knochen mit Salzsäure durch den Fortschritt der Entkalkung halbkreisförmige Linien entstehen sah. Einige Erfahrungen, die ich gelegentlich bei nicht völlig durch die Knochenpräparate durchgedrungener künstlicher Entkalkung machte, lassen mich vermuthen, dass es sich bei den Linien Soborow's um die Kittflächen handelt, welche dem Weitervordringen der Flüssigkeit Widerstand entgegensetzten.

---

[1] l. c. S. 42, 49. Vergl. Ranvier l. c. S. 290.
[2] Vorlesungen über allg. Pathologie. Berlin, 1877. I. Bd., S. 516.
[3] l. c. S. 515.
[4] Centralbl. f. d. medic. Wiss. 1871, Nr. 16.

Es erübrigt jetzt noch die Frage zu besprechen, ob sich in der Knochengrundsubstanz jenseits der Lacunengrenzen die lacunäre Resorption vorbereitende oder begleitende Veränderungen auffinden lassen.

Ich muss zuerst darauf hinweisen, dass überall, wo weiche Knochenpartien vorkommen, diese unter Umständen auch in lacunärer Resorption getroffen werden können. Obwohl sich aber, wie ich bereits erwähnt habe, unverkalkte Knochenanlagerungen allgemein und zwar häufig vorfinden, so bieten uns doch nur die ausgedehnten weichen Partien osteomalacischer und rachitischer Knochen Gelegenheit, zahlreiche Lacunen in kalklosen Knochen einbrechen zu sehen. In anderen Knochen finden wir nur sehr selten Lacunen, die in kalklose Knochensubstanz eindringen.

Beispiele von solchen Lacunen geben bereits Volkmann[1] und Kölliker[2] an. Volkmann sagt, dass an den feinen kalklosen Bälkchen, welche er bei Caries gefunden, „die Destruction in gleicher Weise wie am kalkhältigen Knochen unter Bildung der bekannten Lacunen fortschreiten zu können scheint“; und Kölliker berichtet, dass sich an den Rändern von Embryonenkiefern, also an Gebilden, „die offenbar noch keinen Kalk aufgenommen hatten“, Ostoklasten fanden.

Ferner kommt, ehe wir die gestellte Frage beantworten, noch in Betracht zu ziehen, dass Lacunen auch in die krümelig körnigen Partien, welche sich im osteomalacischen und rachitischen Knochen häufig, in anderen Knochen seltener, jedoch auch vorfinden, eingreifen können.

In Lacunen, welche bis an die Grenze der weichen oder der gekörnten Knochenstellen vorgedrungen sind und von diesen nur mehr kleine Reste bestehen lassen, könnte leicht der Beweis gesehen werden, dass der Lacunenbildung eine mehr oder minder energische Kalkentziehung vorangehe.

Gegen diese Auffassung spricht vor allem, dass die eben besprochenen Bilder nur sporadisch oder in beschränkter Ausdehnung vorkommen. Die ungeheure Mehrzahl der Lacunen,

[1] Arch. f. kl. Chir. l. c. S. 451.
[2] l. c. S. 32.

welche in normal kalkhältigen Knochen einbrechen, ist jenseits ihrer scharfen oder doppelt contourirten, glänzenden Grenzlinie von gänzlich ungeänderter, normal kalkhältiger Knochensubstanz umgeben. Es ist also auf keinen Fall die Entstehung der Lacunen an eine Veränderung der Knochengrundsubstanz gebunden, sonst könnte ich nicht sowohl bei osteomalacischen und rachitischen, als in anderen jugendlichen und atrophischen Knochen in der Nähe der imposanten Überzahl von Lacunen die Knochensubstanz gänzlich ungeändert antreffen.

Jedoch auch gegen die Annahme, dass die Bilder, in denen der Lacunengrenze kleine Partien gänzlich kalkloser oder gekörnter, daher kalkarmer Knochengrundsubstanz benachbart sind, eine Ausnahme der eben constatirten Regel darstellen, muss ich mich aussprechen. So lange wir noch innerhalb der gesetzmässigen Verhältnisse eine Erklärung für auffällige Befunde finden können, dürfen wir keine Ausnahmen statuiren. Nun liegt eben gar kein Grund vor, um für die kleinen kalklosen oder kalkarmen Streifchen oder Stellen, welche Howship'sche Lacunen begrenzen, eine andere Annahme zu machen, als die, dass es sich hiebei um schmale kalklose Anlagerungen an Lacunen oder um Reste kalklos oder kalkarm gebliebener Knochensubstanz handle, die bei dem Vorgreifen der Lacunen davon noch vorhanden blieben. Oft kann man auch als Bestätigung dieser Annahme in der unmittelbaren Nähe solcher Stellen weiche, eben in Apposition begriffene Partien oder breitere kalklose oder kalkarme Knochenantheile sehen, die bereits wieder von Lacunen angenagt sind.

Ich halte daher den Schluss Ribbert's [1] „dass alle Resorptionsvorgänge am Knochensysteme so vor sich gehen, dass erst nach primärer Entkalkung die Grundsubstanz der Zerstörung anheimfällt", für nicht gerechtfertigt. Es kann als eine feststehende Thatsache angesehen werden, dass es bei dem Entstehen der Howship'schen Lacunen jenseits der Lacunengrenzen zu keiner Veränderung der Knochengrundsubstanz kommt. Damit stimmen zahlreiche Angaben der Literatur überein, so die ausdrücklichen Worte Volkmann's [2], die sich ebenfalls auf die Untersuchung

---

[1] l. c. S. 446.

[2] Arch. f. klin. Chir. l. c. S. 446.

unentkalkter Knochenpräparate stützen. Volkmann sagt, dass die Intercellularsubstanz um Howship'sche Lacunen keine vorausgehende Veränderung zeige.

Auch bei anderer Gelegenheit[1] vertritt Volkmann diesen Standpunkt und sagt ausdrücklich, dass, wenn auch das Resultat der Knochenentzündung im Groben eine Malacie sei, die feinere Untersuchung immer nachweist, dass „alles, was stehen geblieben ist, normale Festigkeit und normalen Kalkgehalt behalten hat".

Kölliker[2] spricht sich dahin aus, dass die Howship'schen Grübchen „ohne Ausnahme von ganz normalem Knochengewebe begrenzt" sind.

Cohnheim[3] sagt, dass, wenn Knochengewebe aufgesaugt wird, stets die Howship'sche Lacune, aber „in keinem Stadium ein osteoides kalkfreies Gewebe" entsteht. Es ist also die lacunäre Resorption an eine vorhergehende oder begleitende Veränderung der Knochengrundsubstanz ebenso wenig gebunden als an einen der verschiedenen Zustände, in welchen sie die Knochensubstanz antreffen kann. Die lacunäre Resorption dringt ohne Wahl vor, sei es in die noch kalklos gebliebenen Anlagerungen, sei es in die krümelig-körnigen, kalkarmen Knochenpartien, oder sei es in die normal kalkhältige, harte Knochensubstanz. Die Lacunen zeigen auch keinen durchgreifenden Unterschied in Form, Grösse oder Inhalt, ob dieselben in kalklosen, kalkarmen oder normal kalkhältigen Knochen einbrechen; wohl aber fiel es mir bei der Untersuchung osteomalacischer Knochen öftere Male auf, dass die Lacunen, welche in die weiche Knochensubstanz eingriffen, seichter waren als die des harten Knochens. Die Lacunen brechen in die weichen Zonen osteomalacischer oder rachitischer Knochen ein, legen so die harten Antheile der Knochen blos und greifen auch in diesen weiter. So kommt es gar nicht selten zur Entstehung von Bildern, wo Lacunen, indem sie an der Grenze der kalkhältigen und kalklosen Knochensubstanz vordringen, theils die eine, theils die andere annagen (vgl. Fig. 36), und dass eine mit einer einzigen Riesenzelle versehene Lacune zur einen Hälfte

---

[1] Handbuch l. c. S. 256.
[2] l. c. S. 20.
[3] l. c. S. 516.

von harter, zur anderen von weicher Knochensubstanz begrenzt wird. Derartige Bilder lassen in ihrer Deutung keine Zweifel zu.

Wenn ich jetzt das in diesem Abschnitte Auseinandergesetzte in wenige Worte zusammenfassen soll, so kann ich nur nochmals wiederholen, dass ich einen Beweis für die Annahme, dass die Knochengrundsubstanz befähigt sei, active Veränderungen einzugehen, nicht finden konnte. Für eine ganze Reihe von Bildern, die diese Annahme stützen sollen, lässt es sich nachweisen, dass dieselben auf Täuschung beruhen. Die Knochengrundsubstanz verhält sich also überhaupt und so auch gegenüber der lacunären Resorption völlig passiv. Die lacunäre Resorption ist auch an keine vorbereitende Entkalkung der Knochengrundsubstanz gebunden, es geht derselben keinerlei Veränderung des Knochens voraus und wo, wie in osteomalacischen Knochen, unzweifelhaft Entkalkung vorkommt, dort erfolgt diese nicht in lacunärer Form. Eine die lacunäre Resorption bedingende Veränderung der Knochengrundsubstanz gibt es nicht, vielmehr dringen die Lacunen ohne Rücksicht auf den Kalkgehalt des Knochengewebes ebensowohl in kalklosen als in kalkhältigen Knochen ein.

III. Über die Beziehung der Knochenzellen zur lacunären Resorption.

Das Verhalten der Knochenhöhlen und ihrer Ausläufer, also der sogenannten Knochenkörperchen und Knochencanälchen bei der lacunären Resorption ist ein ebenso passives als das der Knochengrundsubstanz, und auch die Zellen oder Reste von zelligen Gebilden, welche ich stets als Inhalt der Knochenhöhlen antraf, stehen der lacunären Resorption passiv gegenüber.

Die Knochenhöhlen und Knochenzellen zeigen, auch wenn sie in nächster Nähe und ganz im Bereiche der Howship'schen Lacunen angetroffen werden, keinerlei Veränderung; ebenso zeigte mir kein Präparat eine Änderung der Zellen, welche in den Knochenhöhlen eingeschlossen sind. Sehr häufig fand ich in meinen Präparaten die Knochenhöhlen von Lacunen eröffnet und durchschnitten, so dass von denselben nur mehr grössere oder geringere Antheile erhalten waren, während der übrige Theil der Knochenhöhle mit der angrenzenden Knochensubstanz zugleich der Resorption verfallen war. Ich sah solche Eröffnungen und

Durchtrennungen der Knochenkörperchen, wie sich dieselben bei Volkmann[1], Kölliker[2], Ranvier[3], v. Ebner[4], Thierfelder[5], Kassowitz[6] u. A. angegeben finden, sehr oft, so z. B. in Präparaten vom ostitischen Talus (10), vom Femurcarcinom (17), von einer atrophischen Rippe (24), beim Scheitelbeinsarcom (19), u. s. w. (S. Fig. 16.)

Was aus der Knochenzelle oder dem Inhalte der Knochenhöhle wird, wenn die Knochenhöhle eröffnet ist, konnte Kölliker[7] nicht ermitteln. Ranvier[8] meint, dass die offenen Knochenkörperchen ihre Zellen entlassen, die sich dann mit den Zellen des Markraumes vermengen. Es lässt sich über diese Frage nur schwer Bestimmtes aussagen. Immerhin sah ich mehrere Bilder, welche dafür sprachen, dass die Knochenzellen, beim Weitergreifen der Lacunen mit den Riesenzellen in Berührung kommend, mit diesen zu einem Protoplasmakörper zusammenfliessen können, respective von den Riesenzellen aufgenommen werden. So lässt sich dies für die in der Fig. 11 gezeichnete Stelle vermuthen, wo wir die Riesenzelle mit einem Fortsatze von der Form einer Knochenzelle in den Knochen vorgreifen sehen. Es liegt hier wohl die Vermuthung nahe, dass dieser Fortsatz wirklich in einer bereits durch die Resorption etwas erweiterten Knochenhöhle liegt, und dass hiebei die Knochenzelle von der Riesenzelle aufgenommen worden sei.

Auf jeden Fall wird erst dann die Wand der Knochenhöhlen in die Resorption einbezogen, wenn die Knochenhöhle von der Lacune eröffnet ist und in diese einmündet.

Im Gegensatze zu dieser Darstellung wurde den Knochenzellen eine active Betheiligung bei der lacunären Resorption zugeschrieben und geradezu die Entstehung der Lacunen auf Ver-

---

[1] Arch. f. klin. Chir. l. c. S, 446.

[2] Die norm. Resorption l. c. S. 20.

[3] Manuel d'histologie pathologique par V. Cornil et L. Ranvier. Première et deuxième partie. Paris 1869—1873. pag. 344.

[4] l. c. S. 42.

[5] l. c. Taf. XXVI, Fig. 2a.

[6] l. c. S. 402.

[7] l. c. S. 20.

[8] l. c. S. 343.

änderungen der Knochenhöhlen und Knochenzellen zurückgeführt.

Virchow[1] begründete diese Ansichten, indem er lehrte, dass nicht nur am Knochenrande, sondern auch mitten im festen Knochengewebe Lücken entstehen, die mit einer weichen endlich löslichen Masse erfüllt sein und die jedesmal dem Gebiete eines Knochenkörperchens, also einem Zellenterritorium entsprächen. Auch später[2] behielt Virchow seine Ansicht bei und äusserte sich dahin, dass die Knochenkörperchen in dem Masse, als sie sich selbst veränderten, die umgebende Intercellularsubstanz bestimmen, in die Veränderung einzugehen.

Die Virchow'sche Lehre bekam zahlreiche mehr oder minder vorbehaltlose Anhänger, so Rokitansky[3], Foerster[4], O. Weber[5], Klebs[6] u. A. m., und wurde von Bredichin[7] noch schärfer definirt, indem dieser sagte, dass die Riesenzellen Knochenzellen seien, „welche nebst ihren Territorien (deren Befreiung von ihren Erdsalzen vorangeht) von der übrigen Knochenmasse, bei gleichzeitiger Vermehrung der Kerne abgetrennt sind". Nach Bredichin „verwandelt" sich der Knochen in Riesenzellen und durch die Abtrennung dieser kommen die Lacunen dann zum Vorscheine.

Nach Rindfleisch[8] erweitern sich, wenn das Quantum der in der Zeiteinheit das Knochengewebe passirenden Flüssigkeit wächst, die Knochenkörperchen. Rindfleisch glaubt, „dass diese Erweiterung auf einer directen Auflösung der Intercellularsubstanz in der durchpassirenden Flüssigkeitsmenge selbst beruht". Von dem Inhalte der Howship'schen Lacunen spricht Rindfleisch an derselben Stelle als „Einwucherungen", die auch nicht gedacht

---

[1] V. A. l. c. S. 305.

[2] Die Cellularpathologie 4. Aufl. Berlin, 1871, S. 521.

[3] l. c. S. 118.

[4] Handbuch der spec. patholog. Anatomie. 2. Aufl. Leipzig, 1863, S. 904.

[5] Virchow's Archiv. 29. Bd. S. 96.

[6] l. c. S. 442.

[7] Centralbl. f. d. medic. Wiss. 1867, S. 563 ff.

[8] l. c. S. 513.

werden könnten „ohne ein reichlicheres Zuströmen von Ernährungsflüssigkeit“.

Gelegentlich der Besprechung der Resorptionszone eines Unterkiefersarcoms beschreibt Rindfleisch vielkernige Riesenzellen in die Howship'schen Lacunen eingebettet und nimmt an, dass diese Myeloplaxen „durch eine Metamorphose der bei der fortschreitenden Auflösung der Knochengrundsubstanz von Zeit zu Zeit freiwerdenden Knochenzellen entstehen“ [1].

Andere Autoren, so Stricker[2], Cecchèrelli[3], Hofmokl[4], Kolaczek[5], Lang[6], Redtenbacher[7], Rustitzky[8] geben zumeist auf Basis von Entzündungsexperimenten an, dass die Knochenzellen geschwellt, grösser, mehrkernig und so zu Ostoklasten werden, wobei gleichzeitig die Knochenhöhle sich erweitere und die Resorptionsgrube darstelle.

Alle diese Angaben von Umwandlungen der Knochenzellen sammt deren Territorien oder der freigewordenen Knochenzellen allein in Riesenzellen, die Angaben von Erweiterungen der Knochenhöhlen sei es durch einen lösenden Flüssigkeitsstrom oder durch die gewucherten Knochenzellen, werden schon durch die Thatsache erschüttert, dass die Entstehung der Lacunen durchaus nicht an die Localisation und auch nicht an die Existenz der Knochenzellen gebunden ist. Die Annahme von Umwandlungen der Knochenterritorien in Riesenzellen ist auch schon durch die Ergebnisse des zweiten Abschnittes abgewiesen. Auch lassen sich Momente auffinden, welche erklären können, wie die Autoren zu den aufgezählten Ansichten gelangt sein dürften.

Die Ansicht, dass die Entstehung der Lacunen an einen von den Knochenzellen oder Knochenhöhlen ausgehenden Process geknüpft sei, stützt sich zumeist auf die Angabe, dass man mitten

---

[1] l. c. S. 544.

[2] Vorlesungen über allgem. und experim. Pathologie, II. Abth. Wien 1878, S. 326.

[3] l. c. S. 157.

[4] Med. Jahrb. 1874, S. 361.

[5] l. c. S. 364.

[6] Med. Jahrb. 1871, S. 35.

[7] l. c. S. 347.

[8] Med. Jahrb. 1871, S. 548.

in Knochenbalken, entfernt vom Rande derselben, Lacunengruben finde.

Auch mir begegneten solche Bilder. Sie mögen besonders dann, wenn solche Lacunengruben, die rings umgeben von Knochensubstanz im Schnitte uns vor Augen liegen, mit einer Riesenzelle oder mit dem körnig protoplasmatischen Stücke einer Riesenzelle gefüllt blieben, zu Täuschungen Veranlassung geboten haben. Es wäre möglich, das Kolaczek[1] derartige Bilder meinte, als er die „körnige Umwandlung“ der Knochensubstanz beschrieb, und solche Stellen mögen auch die Basis für die angenommene Umwandlung der Zellenterritorien abgegeben haben. Einem besonderen Zufalle ist es zu verdanken, wenn man hie oder da im Grunde einer solchen rings von Knochensubstanz umgebenen Lacunengrube ein Knochenkörperchen sieht. Mir kamen derartige Bilder öfters unter, und in einigen war durch die körnige Protoplasmamasse, welche die Lacunengrube ausfüllte, hindurch das Knochenkörperchen sichtbar, welches zufällig im Grunde der Lacunenmulde lag. Es erinnerte mich dieser Anblick an die Angabe Virchow's[2], dass derselbe in den körnigen trüben Haufen, welche als runde oder etwas längliche Massen die Howship'schen Lacunen ausfüllten, nur selten das eigentliche Knochenkörperchen und seine Canälchen wahrnehmen konnte.

Billroth[3] und Volkmann[4] warnten zuerst solchen Bildern gegenüber vor Täuschungen. Wenn Lacunen zufällig nicht von Schnitten getroffen werden, die in radiärer Richtung den betreffenden Resorptionsraum durchsetzen, sondern von Schnitten, welche den Resorptionsraum tangential berühren, so müssen in der Schnittfläche rundliche Lücken oder die Muldengruben der durchschnittenen Lacunen rings umgeben von ungeänderter Knochengrundsubstanz zur Ansicht gelangen (vergl. Fig. 19). Solche Bilder werden um so häufiger angetroffen, je tiefer die Lacunen der Resorptionsräume in den Knochen eindringen. Auch der Umstand, dass öfters Lacunen von ihrer Richtung abbiegen, begünstigt die Entstehung solcher Bilder. Und wenn dünnere

---

[1] l. c. S. 359.

[2] V. A. l. c. S. 305.

[3] Beiträge etc., S. 54.

[4] Arch. f. klin. Chir. l. c. S. 449.

Knochenbalken von tief und in verschiedener Richtung einbrechenden Lacunen durchsetzt werden, dann kann eine Reihe von Schnitten Gitterwerke darstellen.

Ausser den eben besprochenen Bildern dürfte eine Quelle der Täuschungen auch in den grossen, unregelmässigen Knochenhöhlen und Knochenzellen neu angelagerten, nicht lamellös gebauten Knochengewebes zu suchen sein. Die Zellen neu angelagerten Knochens dürften in all' den Fällen, wo auf Basis von Entzündungsexperimenten die Ansicht aufgestellt wurde, dass die Schwellung und Wucherung der Knochenzellen die Entstehung der Lacunen verursache, mit den Zellen der alten Knochensubstanz verwechselt worden sein. Es sprechen die Zeichnungen und Schilderungen der betreffenden Abhandlungen sehr für diese Vermuthung. Noch kräftiger jedoch wird die Annahme, dass die den Knochenzellen zugeschriebene active Betheiligung an der Entstehung der Lacunen auf Täuschung durch Bilder neu angelagerten Knochens beruhe, durch die Experimente v. Mandach's[1] gestützt, welche zu ganz entgegengesetzten Resultaten als die früher citirten Entzündungsversuche geführt haben. Es ist auch für den uns eben beschäftigenden Gegenstand von grossem Interesse, dass v. Mandach dadurch zu seinen den zahlreichen früheren Experimenten widersprechenden Resultaten kam, dass derselbe das Periost von der Reizungsstelle wegschob. So vermied v. Mandach sorgfältig Täuschungen durch periostitische Knochenneubildung. Er fand, soweit die Ernährungsstörung reichte, niemals Kerntheilung oder Proliferation, sondern fettigen oder einfachen Zerfall der Knochenzellen[2].

Übrigens ist es auch möglich, dass die grossen Zellen geflechtartig gebauter fötaler Knochensubstanz, von der sich noch nach Jahren Reste im Knochen erhalten finden[3], da oder dort zur Täuschung Veranlassung geben.

Es wurde ausser dem Versuche, die lacunäre Resorption durch progressive Veränderungen der Knochenzellen zu erklären, auch noch die Fettdegeneration der Knochenzellen mit der lacunären

---

[1] Entzündungsversuche am Knochen. Arch. f. experim. Pathologie und Pharm. XI. Bd., 1879. S. 184 ff.

[2] l. c. S. 194.

[3] Vergl. v. Ebner l. c. S. 60.

Resorption, mit der Knochenentzündung und mit der Caries in Zusammenhang gebracht. Selten sprach man sich jedoch klar darüber aus, wie man sich diesen Zusammenhang denken solle.

So führt Virchow[1] an, dass er bei der Knochenentzündung „nicht constant, aber oft genug“ Fettmetamorphose der Knochenzellen gefunden habe. O. Weber[2] gibt an, dass sich die Knochenkörperchen mit Fett füllen, und dass von diesen aus unter Erweiterung der Knochenhöhlen eine Einschmelzung der Substanz stattfindet. Während weiters Volkmann[3] Vergrösserung der Knochenzellen und Fettmetamorphose derselben als Ausnahme anführt, erwähnt Birch-Hirschfeld[4] bei der Caries fungosa in den Knochenkörperchen Fetttröpfchen als etwas Häufiges. Ranvier[5] aber lässt die Fettmetarmorphose der Knochenzellen eine sehr grosse Rolle spielen, indem derselbe die Caries auf die Fettdegeneration der Knochenzellen zurückführt. Ranvier nimmt nämlich an, dass die Fettdegeneration den Beginn der Erkrankung bilde, indem sie initial auftretend, den Tod der zelligen Elemente der Knochenbalken bedinge, worauf sich um diese als ebenso viele fremde Körper das zweite, das entzündliche Stadium der Caries einstelle. Ranvier sagt ausdrücklich[6], dass die fettige Transformation der Knochenzellen nur bei der Caries existire.

Mit dieser Auffassung der Caries kann ich mich durchaus nicht befreunden. Es dürfte mittheilenswerth sein, dass ich wiederholt in Knochen alter und kachektischer Individuen (so in den Fällen 22, 23, 28), und zwar in grosser Ausdehnung die Knochenkörperchen mit Fetttröpfchen gefüllt fand. Ich sah in diesen Knochen nicht häufiger oder ausgedehnter, als es der Norm entspricht, Lacunen und konnte kein Symptom von Entzündung respective Caries auffinden.

Die fettige Transformation der Knochenzellen wird also dem Knochen nicht so unheilvoll als Ranvier annimmt, und kann nicht das Wesen der Caries ausmachen.

---

[1] V. A. l. c. S. 304.
[2] l. c. S. 96.
[3] Handbuch l. c. S. 256.
[4] Lehrbuch der patholog. Anatomie. Leipzig 1877, S. 282.
[5] Manuel l. c. p. 361—363.
[6] l. c. p. 363.

So sehen wir denn, dass ebenso wenig als eine progressive auch nicht eine regressive Veränderung der Knochenzellen aufzufinden ist, auf die sich die Entstehung der Lacunen zurückführen liesse. Es geht der lacunären Resorption keine active Veränderung und keine Erweiterung der Knochenhöhlen voran, sondern Knochenzellen wie Knochenhöhlen spielen bei der lacunären Resorption eine gänzlich passive Rolle. Zu eben demselben Urtheile gelangten auch schon Billroth [1], Kölliker [2], Wegner [3], Busch [4] und viele Andere. Ziegler [5] spricht sich gleichfalls in diesem Sinne aus. Unter pathologischen Verhältnissen jedoch sollen nach Ziegler die Knochenzellen activen Antheil an der Resorption nehmen [6]; so beschreibt Ziegler bei einem Sarcom des Schenkelhalses gewucherte Knochenzellen [7].

Es obliegt mir noch, von dem Verhalten der Knochenzellen in den von mir untersuchten Knochentumoren zu berichten.

Die von mir untersuchten Fälle, in denen sich Neugebilde, meist allerdings von secundärer Natur, im Knochen fanden, zeigten durchgehends keine activen Veränderungen, keine Umwandlungen der Knochenzellen in Zellen der Neugebilde. Die Knochenzellen verhielten sich dabei ebenso wie die Knochengrundsubstanz völlig passiv.

Auch Billroth [8] spricht sich entschieden gegen die Abstammung der Krebszellen von den Knochenzellen aus, während Rindfleisch [9] „eine lebhaftere active Betheiligung der Knochenzellen an der Neubildung“ in Ausnahmsfällen für constatirt ansieht und angibt, dass die Riesenzellen der vom Marke ausgehenden Riesenzellensarcome Knochenzellen seien, „welche bei der Resorption des Knochens freigeworden und darauf in den eigenthümlichen hypertrophischen Zustand übergegangen sind“ [10].

---

[1] Beiträge etc. S. 53. Die allgem. chirurg. Pathologie. Berlin 1869, S. 196.
[2] l. c. S. 20.
[3] l. c. S. 531.
[4] D. Zeitschr. f. Chirurgie, VIII. Bd., S. 312.
[5] l. c. S. 366.
[6] l. c. S. 373.
[7] l. c. S. 367.
[8] l. c. S. 56.
[9] l. c. S. 548.
[10] l. c. S. 543.

Volkmann[1] lässt die Umwandlung der Knochenzellen in Carcinom- respective Sarcomzellen für die malacische Form der Knochencarcinome und -sarcome zu.

Ich verweise bezüglich der von Volkmann angenommenen malacischen Knochengeschwülste auf das im zweiten Abschnitte Erörterte. Die Stelle der Fig. 207, auf welche sich Rindfleisch (l. c.) beruft, erklärt sich durch lacunäre Resorption, ohne dass es nothwendig wäre, eine Metamorphose der Knochenzellen anzunehmen. Und bei der Fig. 208 Rindfleisch's müsste erst der Einwurf, ob es sich dabei nicht um auflagernde Sternzellen und um Anbildung handelt, abgewiesen werden, ehe man eine „krebsige Degeneration" acceptiren könnte.

IV. Über die in den Howship'schen Lacunen sich vorfindenden Zellen und von den Theorien der lacunären Resorption.

Den ersten Gegenstand dieses Abschnittes bildet die Morphologie der zelligen Gebilde und das Verhältniss derselben zu den Howship'schen Lacunen, in welchen dieselben angetroffen werden; hieran schliesst sich eine kurze Erörterung über die Abstammung und das Endschicksal der in den Howship'schen Lacunen enthaltenen Riesenzellen.

Die zweite Aufgabe wird darin bestehen, die Resultate meiner Untersuchungen den verschiedenen in der Literatur niedergelegten Ansichten über die Entstehung der Resorptionsgruben gegenüberzustellen.

Unter den Zellen, welche in deutlich als Resorptionsgruben charakterisirten Lacunen liegen, haben wir solche zu unterscheiden, von denen je eine in einer einzigen Lacune enthalten ist, dann solche, von denen eine mehrere Lacunen ausfüllt, endlich Zellen, deren mehrere eine Lacune einnehmen.

Ich gehe nun zuerst auf die Besprechung derjenigen Zellen ein, von denen je eine in einer Howship'schen Lacune enthalten ist. Unter den derartigen Zellen herrscht sowohl in Beziehung auf Form als auf Grösse die auffallendste Mannigfaltigkeit. Alle die mannigfachen Formen und Grössen, wie sie von Kölliker[2] und

[1] Handbuch S. 358.

[2] Die norm. Resorption. S.19 ff.

Wegner[1] geschildert worden, traten auch mir im Laufe der Untersuchung entgegen.

In einer durch ihre bedeutende Anzahl dominirenden Reihe von Bildern waren die Lacunen von mehrkernigen Riesenzellen oder Myeloplaxen ausgefüllt, die Kölliker ebenfalls bei seiner Schilderung der Ostoklasten in den Vordergrund gestellt hat. Doch hatte ich auch sehr oft Gelegenheit kleine Lacunen zu finden, in welchen je eine völlig hineinpassende kleine, einkernige Zelle lag. Solche kleine Lacunen waren entweder seicht, flach oder grubig, tief. Dem entsprechend fanden sich in diesen Lacunen entweder wie plattgedrückt aussehende, schmächtige, schmale Spindelzellen, so z. B. in den zahlreichen kleinen flachen Lacunen, welche die Knochenbalken der fungös ostitischen Phalanx und Trochlea (3, 4) zeigten, oder einkernige Rundzellen, so z. B. in einzelnen halbkugelig geformten kleinen Grübchen an den Balken der Ulna (2), der Trochlea (4), des Fingers mit Enchondrom (15) (vergl. Fig. 14). In den platten Spindeln konnte ich oft keinen Kern entdecken. Auch bei Kölliker[2] finden sich kleine, einkernige und auch kernlose Ostoklasten angegeben.

An diesen kleinen, einkernigen Zellen herrscht, nicht nur in Bezug auf die Form und Ausdehnung der Berührungsfläche, sondern auch betreffs des Volumens der Zelle, Übereinstimmung mit den betreffenden Lacunen. Bei den Riesenzellen finden wir häufig dasselbe Verhältniss zu den zugehörigen Lacunen, meist jedoch erstreckt sich die Übereinstimmung nicht auf das Volumen, sondern nur auf die Form und Ausdehnung der Berührungsfläche. Auf das Zusammenpassen der Berührungsflächen der Zellen und Lacunen ist daher das Hauptgewicht zu legen.

Ich zeigte bereits im ersten Abschnitte, dass sich die Übereinstimmung der Form der Berührungsflächen auch auf die Unebenheiten erstreckt, welche die Lacunen den Riesenzellen entgegenstellen. Es entsprechen den Faser- und Wimpersäumen der Lacunen geriffte stachelige Riesenzellen oder solche, deren Contactfläche in dichtstehende feine Wimper ausläuft. Hie und

---

[1] Myeloplaxen und Knochenresorption. Virchow's Archiv; 56. Bd., S. 524.

[2] l. c. S. 23.

da finden sich theils tiefe, theils sehr seichte Lacunen uneben, zackig contourirt. Die anliegende Fläche der Riesenzelle passt genau in diese Unebenheiten. Ich sah solche zackig begrenzte Lacunen und Riesenzellen besonders in Präparaten vom Falle 17 und 19 (vergleiche Fig. 19 und deren Erklärung S. 120).

Die Zacken, Riffe und Stacheln der Riesenzellen sind ganz gleichartig mit dem Protoplasma des Zellkörpers, so dass an ihrer protoplasmatischen Natur nicht gezweifelt werden kann. Jedoch lässt sich diese auch für die hyalinen Wimperfortsätze annehmen, welche die Riesenzellen gegen die wimperigen Säume der Lacunen hin besetzen. In dem Umstande, dass die Wimperbesätze der Riesenzellen keine deutliche Körnung zeigen, kann kein Grund zur Abweisung dieser Annahme gefunden werden, da es ja an Beispielen von hyalinen Zellfortsätzen durchaus nicht mangelt. So beschrieb Ziegler[1] solche an Riesenzellen gelegentlich seiner Untersuchungen über die Tuberkelelemente. Das grossartigste Paradigma hyaliner Zellfortsätze geben aber die Pseudopodien der Rhizopoden ab.

Ich kann daher der Annahme Kassowitz's[2] nicht beipflichten, welcher den Wimperbesatz der Riesenzellen auf Reste leimgebender Fibrillen zurückführt und überhaupt in allen Riesenzellen, die sich stärker mit Carmin färben und glänzen, Reste der Knochenfibrillen vermuthet[3]. Ich halte es für viel wahrscheinlicher, dass die Wimperfortsätze der Riesenzellen, ebenso wie die Zacken, Riffe und Stacheln derselben diejenigen Theile des Zellenprotoplasmas sind, welche in die Wimper- und Faserbesätze und zwischen die zackigen Unebenheiten der Lacunen vordringen. Jedoch sah ich auch in der unmittelbaren Nähe vollkommen glatt begrenzter Lacunen Riesenzellen liegen, welche mit Riffen und Stacheln versehen waren. (S. Fig. 7.) Eine Beobachtung, die immerhin die Annahme zulässt, dass das Protoplasma der Riesenzellen, trotz der gegentheiligen Angaben Kölliker's[4] und

---

[1] Experim. Unters. über die Herkunft der Tuberkelelemente etc. Würzburg 1875, S. 43.

[2] l. c. S. 445.

[3] l. c. S. 413.

[4] l. c. S. 22.

Rustitzky's[1] contractile Eigenschaften besitzt. Übrigens gibt Kölliker[2] selbst die Möglichkeit zu, dass die cilienartigen Fortsätze der Ostoklasten Beweglichkeit besitzen und in das Knochengewebe eindringen.

Ausser in den eben besprochenen Fällen, wo die Riesenzellen die Abdrücke der verschiedenen Faser- und Wimpersäume der Lacunen zeigen, kommt die Übereinstimmung in der Form der Riesenzellen und Lacunen am deutlichsten an den Lacunen zum Ausdrucke, welche tief in die Knochensubstanz eindringen. Es liegen in solchen Lacunen oft Riesenzellen, deren Volumen und deren Gestalt sich mit der Grösse und Form der Lacunen vollständig decken.

In weniger tief eindringenden und endlich sehr flachen Lacunen erstreckt sich die Übereinstimmung der Form der Lacunen mit der Form der Riesenzellen nur auf einen grösseren oder geringeren Abschnitt der Oberfläche der letzteren. Die seichten Lacunen sind oft nur mit einem bezüglich der Grösse und Ausdehnung des Zellkörpers klein zu nennenden Antheile der Oberfläche der Riesenzelle in Berührung. Der übrige Theil des Körpers derselben erstreckt sich in verschiedener Ausdehnung und Gestalt in den Resorptionsraum hinein.

In den meisten der Bilder, wo ein grosser Theil des Körpers der Riesenzelle in den Resorptionsraum hineinragt, ist die Form dieses Theiles anscheinend von der Umgebung nicht beeinflusst. Die Gestalt der Myeloplaxen ist da oval oder unregelmässig bucklig oder nähert sich der Kugelform.

Bei der Untersuchung des Femurcarcinoms (17) begegnete ich jedoch Stellen, die darauf hinwiesen, dass das Wachsthum der in den Resorptionsraum hineinragenden Leiber der Riesenzellen in seiner Form durch den gegenseitigen Druck mehrerer dicht aneinander liegender bestimmt werden könne. Es fanden sich nämlich Reihen von grossen keulenförmig gestalteten Myeloplaxen, die mit ihrem breiten gewölbten Ende je einer halbmondförmigen Lacunengrube anlagen, während ihre sich verschmälernden Körper, enge aneinander gedrängt, radiär in den Resorptionsraum

[1] V. A. l. c. S. 212.

[2] l. c. S. 22. Centralbl. f. 1872, Nr. 23.

hineinstanden und in je einen dünnen Faden ausliefen, der sich im zellenreichen Inhalte nicht weiter verfolgen liess. Auch Klebs[1], Ranvier[2] und Andere machten eine ähnliche Annahme, indem sie die Cylinderepithelform der Osteoblasten durch den gegenseitigen Druck der dicht aneinander liegenden Zellen zu erklären suchten. In Präparaten desselben Falles (17) fand ich auch Bilder, in denen langgestreckte Riesenzellen nur mit dem einen abgerundeten Ende in je einer Lacune lagen, während die übrigen Partien der Zellenleiber über die benachbarten gleichgestalteten sich hinüberlegten. Es überdeckten sich so mehrere Riesenzellen gleichsam dachziegelförmig. Diese Bilder sprechen in demselben Sinne, als die vorher geschilderten.

Eine grosse Anzahl von Riesenzellen wölbt sich jedoch nur mit einem geringen Theile ihres Körpers aus der Lacune in den Resorptionsraum hinein. Sehr oft sah ich auch Riesenzellen, die aus den Lacunen nicht hervorragten, obwohl diese nicht tief waren. Derartige Myeloplaxen waren breitgestreckt, im Durchschnitte von walzen- oder wurstförmiger Gestalt, ihre Kerne lagen oft nur in einer einzigen Reihe nebeneinander. Es gibt auch Riesenzellen, welche unter dem Niveau der Circumferenz der Lacunen liegen.

Die betreffenden Riesenzellen sind auf dem Durchschnitte halbmondförmig, also von der Gestalt einer convexconcaven Linse. Die convexe Oberfläche solcher Riesenzellen steht mit der Lacune in Contact, die concave Depression wendet sich gegen den Resorptionsraum hin. Diese Riesenzellen werden dabei besonders in ihren peripheren Antheilen sehr dünn. Und ich fand auch ausgedehnte Antheile von Riesenzellen so flächenhaft, wie das schon Wegner[3] angab, und so dünn, dass dieselben trotz der feinen Körnung ihres Protoplasmas schleierähnlich durchsichtig waren. Dabei liess sich in derartigen Partien von Riesenzellen oft kein Kern entdecken.

Die eben auseinandergesetzten Beobachtungen konnte ich an vielen der untersuchten Fälle anstellen, in keinem jedoch so

---

[1] l. c. S. 440.

[2] Techn. Lehrb. S. 415.

[3] l. c. S. 524.

häufig als bei der Untersuchung des Femurcarcinoms (17), des Epithelialcarcinoms im Alveolarfortsatze des Unterkiefers (18), ferner an den Lacunen osteomalacischer Knochen. In vielen Resorptionsräumen des angeführten Femurcarcinoms waren die breitgestreckten Riesenzellen in der Majorität, ausserdem lagen in solchen Resorptionsräumen schmale, wie plattgedrückte Spindelzellen den kleineren seichten Lacunen an. Es erregte dieses Überwiegen der breitgestreckten Zellformen unwillkürlich die Idee, dass durch den Druck des Inhaltes der betreffenden Resorptionsräume die Gestalt der den Lacunen anliegenden zelligen Gebilde bestimmt und diese gleichsam breitgedrückt wurden.

Zu Gunsten dieser Anschauung sprach noch besonders der Umstand, dass sich in die Resorptionsräume des Femur und des Kiefers (17, 18) aus epitheloiden Zellen zusammengesetzte Carcinomzapfen tief hineinerstreckten. Die Durchschnitte dieser Carcinomzapfen lagen in der Mitte der Resorptionsräume, berührten nirgends den Knochenrand, sondern waren durch Markgewebe von den Riesenzellen, respective von der lacunären Knochenfläche getrennt.

Auch Ranvier [1] gibt an, und bereits in Billroth's Beiträgen zur pathologischen Histologie [2] findet sich die Darstellung, dass das Gewebe der Tumoren von der Knochensubstanz durch eine Schichte embryonalen Gewebes isolirt ist.

Als Gegensatz zu den bisher besprochenen Bildern, in denen wir zahlreiche Riesenzellen nebeneinander in ebenso vielen Lacunen liegen sehen, muss berücksichtigt werden, dass man auch ganz vereinzelte Lacunen mit hineinpassenden Riesenzellen antreffen kann. Es boten sich solche Stellen nur äusserst selten bei der Untersuchung entzündeter oder von Neugebilden eingenommener Knochen, so zum Beispiele im Talus (10). In atrophischen Knochen jedoch fand ich ziemlich häufig an einer völlig glatten Knochenfläche einzeln oder zu zwei oder drei nebeneinander liegende Lacunen mit hineinpassenden Riesenzellen. Öfters sah ich auch, so zum Beispiele in der atrophischen Rippe (24), dicht neben solchen isolirt liegenden, von je einer Riesenzelle

[1] Manuel etc. pag. 374.
[2] S. 56.

erfüllten Howship'schen Gruben eine in fortschreitender Apposition begriffene, noch kalklose Anlagerungspartie. Ich werde hierauf bezügliche Abbildungen bei einer anderen Gelegenheit vorführen, und gebe nun auf diejenigen Riesenzellen über, von denen je eine zwei oder mehr Lacunen ausfüllt.

Der überaus grossen Häufigkeit der Bilder gegenüber, in welchen je eine Riesenzelle in einer Howship'schen Lacune liegt, sind diejenigen Stellen, wo eine Riesenzelle über mehrere Resorptionsgruben sich erstreckt, geradezu eine Rarität. Auch an solchen jedoch lässt sich wieder und ganz besonders deutlich die Übereinstimmung nachweisen, welche in der Form der Berührungsflächen der Lacunen und der Riesenzelle herrscht. Schon Kölliker[1] hob hervor, dass auch Ostoklasten von zusammengesetzter Form ganz ähnlich gestalteten Howship'sche Grübchen entsprechen. Und Wegner[2] gibt an, dass auch die durch ihre Ausläufer in einem Netzwerke zusammenhängenden Myeloplaxen in die Gruben des Knochens hineinpassten.

Es war mir ebenso wenig wie Kölliker[3] möglich, die Ausläufer und Fortsätze der Riesenzellen miteinander im Zusammenhange zu finden, obwohl die Riesenzellen meiner Präparate nicht selten Ausläufer besassen. Es kann die Ursache davon, dass ich keine Myeloplaxennetze fand, vielleicht darin liegen, dass bei meinen Untersuchungsobjecten an die planmässige Herstellung von Flächenschnitten, auf welche Wegner[4] seine Angaben basirt, nicht gedacht werden konnte.

Die Bilder, in welchen ich eine Riesenzelle mehrere Lacunen ausfüllen sah, waren ziemlich einförmig beschaffen.

Ich fand Riesenzellen mit buckligen Verdickungen, in welchen Verdickungen einzelne oder Gruppen von Kernen lagen.

Diesen Buckeln entsprechend, hatte die betreffende Lacune secundäre Ausbuchtungen, die je nach der Grösse und Form der Anschwellungen der Riesenzelle verschieden gross und verschieden gestaltet waren. (Vgl. Fig. 25.)

---

[1] l. c. S. 22.
[2] l. c. S. 525.
[3] l. c. S. 25.
[4] l. c. S. 530.

Ferner sah ich, so in den bereits angeführten Carcinomfällen (17, 18), in der Rippe (24), in der Trochlea (4) und auch anderwärts hie und da, eine breitgestreckte Riesenzelle zwei benachbarte, verschieden oder gleich grosse Lacunen überdecken. Die Grenze der beiden Mulden war da gewöhnlich nicht scharfkantig, wie sonst meist die Kämme erscheinen, welche die Lacunenmulden scheiden, sondern convex, abgerundet. An der dieser Grenze entsprechenden Stelle wölbte sich die Riesenzelle gegen den Markraum vor. Der Leib solcher Myeloplaxen passte völlig in die betreffenden Howship'schen Gruben hinein.

Ich habe hier noch von einer anderen eigenthümlichen Form, in welcher eine Riesenzelle zwei Lacunen einnehmen kann, zu berichten. Ich fand öfters den Knochensporn, welcher in den Verästigungswinkel zweier Gefässcanäle des Knochens hineinragt, auf jeder seiner beiden Seiten von je einer seichten Lacune angenagt, welche Lacunen an der Spitze des Sporns zusammenstiessen. In diese beiden Lacunen passten die darüber liegenden Theile einer Riesenzelle genau hinein; der Körper der Riesenzelle überwölbte den Knochensporn.

Besonders schöne derartige Bilder sah ich in Präparaten von der fungös ostitischen Phalanx und Trochlea (3, 4). In dem letzteren Falle lag in dem spitzen Winkel, welchen ein durchbohrendes Gefäss mit dem Gefässstamme bildet, eine dem entsprechend keilförmig gestaltete Riesenzelle, deren dickerer, dem vorragenden Knochensporn anliegender Antheil in zwei Schenkel auslief. Diese Schenkel legten sich in die den Knochensporn von beiden Seiten her verschmälernden Lacunen ein. Es reitet da förmlich die Riesenzelle auf dem so gebildeten Giebel.

Alle die bisher geschilderten Zellformen haben das Gemeinsame, dass zwischen ihnen und der Lacunenfläche keine anderen freiliegenden Gebilde anzutreffen sind. Wir finden dabei die Zelle entweder im innigsten Contact mit der Fläche der Lacune, oder sie zeigt sich von dieser etwas abgehoben. Die Flächen, welche Lacunen und Zellen einander zuwenden, passen ihrer Form und Ausdehnung nach genau ineinander. Es gilt dies ebenso für die grossen und kleinen als für die tiefen und seichten Lacunen, wenn jede derselben, wie es die Regel ist, ihre eigene Zelle enthält,

und auch in den selteneren Fällen, wo zwei oder mehr Resorptionsgruben von einer Riesenzelle völlig ausgefüllt sind.

Es muss noch bemerkt werden, dass ich auch Riesenzellen sah, die eine Lacune ganz ausfüllten, die benachbarten aber nur zum Theil bedeckten. Diese äusserst seltenen Bilder fand ich nur in Präparaten vom Femurcarcinom (17). Es zeigte sich an solchen Stellen der Leib einer breitgestreckten, im Durchschnitte schmalstreifig aussehenden Riesenzelle, deren Kerne in einer Reihe nebeneinander lagen, einer seichten, breiten Lacune eingepasst. Die Endstücke der Riesenzelle legten sich, wurmförmig gebogen, über die bucklig convexen Grenzen der Lacune in die anstossenden Partien der beiden benachbarten, ebenfalls seichten Grübchen hinein.

Ich habe nun noch diejenigen Bilder zu besprechen, wo man zwei oder mehr Zellen in einer Lacune antrifft.

Es finden sich hie und da zwei oder auch mehrere mehrkernige Zellen in eine grosse Lacune bezüglich ihrer Grösse und Form in der Art hineingepasst, dass die Flächen, welche sie der Lacunenfläche zukehren, zusammengenommen völlig der Form und Grösse der Lacunenmulde entsprechen; so z. B. in Präparaten der Trochlea (5). Dabei differiren solche Zellen untereinander gewöhnlich in beträchtlichem Masse und zwar sowohl bezüglich ihrer Grösse als rücksichtlich ihres Kerngehaltes.

In einer Anzahl von Lacunen fand ich ferner zwischen Riesenzellen und der Lacunenfläche einzelne kleine Rund- oder Spindelzellen liegen, deren Form der Lacunenlinie durchaus nicht angepasst war; in anderen Bildern wieder waren mehrere spindelförmige, einkernige, jedoch protoplasmareiche Zellen zwischen die Lacune und die Riesenzelle eingeschoben; oft hatte sich schon zwischen den einkernigen Zellen und der Lacunengrenze ein schmaler Streifen homogen oder feinfaserig erscheinender, neuer Knochensubstanz abgelagert. (S. Fig. 28.)

In einer Reihe von Howship'schen Lacunen traf ich in diesen nur Lager von spindelförmigen oder von dichtgedrängten cylindrischen, einkernigen Zellen und keine Riesenzelle mehr. Da ist es dann etwas Gewöhnliches, dass solche Zellenlagen durch einen schmäleren oder breiteren Streifen neuer Knochensubstanz von der Lacunenlinie getrennt sind. Wiederholt konnte

ich mich an solchen Streifen neuer Knochensubstanz, sowie an anderen Appositionsbildern davon überzeugen, dass einzelne Zellen mit einem Fortsatze oder mit dem Zellleibe selbst ohne Unterbrechung in die Knochensubstanz übergehen, was schon Waldeyer[1], Rollett[2], Kutschin[3] und Andere beschrieben und abgebildet haben. Zellen, die mit einem Fortsatze direct in die neuangelagerte Knochensubstanz übergehen, können ihren Zellenleib in eine diesem ähnlich geformte Vertiefung des neugebildeten Knochens einlegen. Ich sah dies an einzelnen und auch an zwei Zellen nebeneinander, so an den mit spindelförmigen Osteoblasten überkleideten Balken des Femurcondylus (6).

Wo wir, wie eben beschrieben worden, Zellen in Knochensubstanz übergehen oder von neu angelagerter Knochenmasse umschlossen sehen; wo sich unter einem Lager von Spindel- oder cylindrisch geformten Zellen in die Lacunenmulde neue Knochensubstanz eingeschoben hat, da können wir überzeugt sein, dass die betreffenden Zellen Osteoblasten sind. Aber auch wenn noch keine neue Knochenanlagerungsschichte sichtbar ist, werden einkernige, in einfacher oder mehrfacher Reihe aneinander gedrängt liegende, cylindrisch oder spitzkugelig oder spindelförmig gestaltete Zellen, ob dieselben allein oder neben Riesenzellen Lacunen ausfüllen, aller Wahrscheinlichkeit nach Osteoblasten sein. Es fällt uns bei diesen Zellen auf, dass dieselben, aneinander gedrängt, innig der Lacunenfläche anliegen. Jedoch den einzelnen Zellindividuen entsprechen da nicht eigene Facetten in der Lacunenfläche. Sie liegen nicht in übereinstimmend geformten Grübchen, sondern bedecken eine ihrer Form und ihrer Grösse nicht entsprechende Fläche dadurch so innig, dass sie ineinander geschoben sind.

Lacunen, die durch secundäre, kleine, seichte Grübchen facettirt sind und in jeder ihrer Facetten je eine in diese hineinpassende einkernige Rundzelle enthielten, sind mir wirklich untergekommen, so in der ostitischen Trochlea (4); ferners fand ich in Präparaten des Femurcarcinoms (17), des Scheitelbeines (11)

---

[1] l. c. S. 372.
[2] l. c. S. 102.
[3] l. c. S. 62.

secundäre Vertiefungen grosser Lacunen von je einer plattspindelförmigen Zelle eingenommen.

In einem Präparate der Trochlea (4) sah ich auch sechs oder sieben kleine, einkernige, rundlich polyedrische Zellen, dicht ineinander gefügt, die Höhlung einer Lacune ausfüllen, ohne dass den peripher liegenden Zellen entsprechende secundäre Grübchen im Lacunenrande zu finden waren. Ein paar ähnliche Bilder traf ich beim Oberarmcarcinom (16). Es lagen da in Howship'schen Lacunen Complexe von Zellen, die denen der Zellennester des „fibrösen Carcinoms" überaus gleichsahen. Auch Volkmann[1] gibt an, in Howship'schen Lacunen epitheloide Zellen angetroffen zu haben, und eine ähnliche Angabe findet sich bei Ceccherelli[2] und bei Ziegler[3]. Auf diese schwer deutbaren Bilder komme ich noch zurück.

Nicht zu selten sieht man die Lacunen von dem Fasergerüste des Markgewebes mit den meist runden, verschieden grossen Markzellen eingenommen. Auch Capillarendurchschnitte mit Blutkörperchen, auch Fetttropfen und Fettzellen sah ich in dem Markgewebe, welches Howship'sche Lacunen ausfüllte.

Wichtig ist es, dass die Zellen des Markinhaltes solcher Lacunen ebenso wie die runden oder plumpspindelförmigen Zellen, welche vereinzelt und lose neben Riesenzellen oder allein in Lacunen liegen, ihre eigene Form haben und keine Übereinstimmung mit der Form der Lacunenfläche zeigen, dass also diesen Zellen keine eigenen Facetten des Lacunenrandes entsprechen. Ich muss hier noch eines eigenthümlichen, in meinen Erfahrungen fast isolirt dastehenden Fundes gedenken, den ich in einem Präparate des Talus (10) machte. Ich fand da nämlich in der Bucht einer grossen Lacune neben einer grobkörnigen Riesenzelle, die einer kleinen Capillare innig anlag, einen nur um Weniges kleineren Fettballen, der sich in die Lacunenmulde knapp einlegte. Die Schwarzfärbung durch Osmiumsäure liess daran keinen Zweifel bestehen, dass sich hier Fett der Configuration der Lacune angepasst hatte. Ob dieser Fettballen frei oder in einer Zelle eingeschlossen war, konnte ich nicht entscheiden.

---

[1] Handbuch S. 441.

[2] l. c. S. 160.

[3] l. c. S. 368.

Wenn wir nun auf die verschiedenen Bilder, in denen mehrere Zellen in einer Lacune liegen, zurückblicken, so bemerken wir, dass es sich dabei durchaus nicht um Gleichwerthiges handelt.

Wir werden die seltenen Bilder, wo jede der Zellen in einer Facette der Lacune liegt, zu der grossen Classe von Zellen rechnen müssen, von denen jede in ein Resorptionsgrübchen hineinpasst.

Eine grosse Anzahl von Bildern ist durch Knochenanlagerungsschichten, durch das Übergehen von Zellen in neue Knochensubstanz zweifellos als Apposition gekennzeichnet. In einer anderen Gruppe von Bildern sehen wir ineinander geschoben einkernige, verschieden gestaltete, meist cylindrische und spindelförmige Zellen der Lacunenfläche innig anliegen. Durch den Vergleich derartiger Bilder mit unzweifelhaften Appositionsstellen gelangen wir zu dem Urtheile, dass wir es hier aller Wahrscheinlichkeit nach ebenfalls mit Osteoblasten zu thun haben.

Dann führte ich einige Bilder auf, wo ein Complex von mehrkernigen oder einkernigen, rundlich polyedrischen Zellen die Lacune ausfüllt, deren Gesammtoberfläche mit der Lacunenfläche übereinstimmt.

Endlich finden wir in Lacunen Zellen liegen, deren Form und Grösse gar nicht der Lacunengrösse entspricht.

Es erübrigt nun noch, auf diejenigen Formen des Lacuneninhaltes hinzuweisen, wo die Zellen in den Hintergrund treten. Es kann das Fasergerüste des Markgewebes sehr prävaliren, wie z. B. in den Lacunen mancher Markräume des gummös ostitischen Scheitelbeines (11), der cariösen Trochlea (5).

Dass ich häufig, besonders an atrophischen Knochen, sehr zellenarmes Bindegewebe, namentlich faseriges Periostgewebe Howship'sche Lacunen bedecken sah, wurde bereits im ersten Abschnitte erwähnt. Dort ergab es sich auch, dass die bei der lacunären Resorption in gewissen Fällen zurückbleibenden Knochenfibrillen und Fibrillengruppen in dem Inhalte der Lacunen vorwiegen können. Ferner wurde bereits dort geschildert, dass der Inhalt der Howship'schen Lacunen auch aus verkästen Granulationsmassen und aus einer mehr oder minder trüben Fetttröpfchen, Pigmentkörnchen u. dgl. führenden, amorphen Masse bestehen kann.

Nachdem ich nun die Unterschiede im Inhalte der Howship'schen Lacunen auseinandergesetzt habe, sind noch einige Befunde zu schildern, welche sich auf die Frage nach der Abstammung und dem Endschicksale der Riesenzellen beziehen, die in den Howship'schen Lacunen angetroffen werden.

Ich wendete bei der Durchsuchung meiner Präparate besondere Aufmerksamkeit der Frage zu, ob für die Riesenzellen, welche in Howship'schen Lacunen liegen, an einer oder der anderen Stelle die Abstammung von Blutgefässen sich nachweisen lasse. Wegner[1] schildert seine Myeloplaxen immer in einem bestimmten Verhältnisse zu den Blutgefässen. Er beschreibt die Gefässwand mit Myeloplaxen gepanzert, sagt, dass man statt der einkernigen Zellen der Gefässwand mehrkernige Platten antreffe, und möchte die Myeloplaxen „für wahre Sprossen, Auswüchse der Gefässwandung" ansehen. Brodowsky[2] bezieht hingegen die Riesenzellen nicht auf die Wandung ausgebildeter Blutgefässe, sondern gibt an, dass die Riesenzellen grösstentheils von den Keimen neuer Blutgefässe ihren Ursprung nehmen, und dass es ihm gelungen sei, die protoplasmatischen Brücken, welche beide miteinander verbinden, vom Blutgefässe aus zu injiciren. — Die Bilder, welche die Abstammung der Riesenzellen von den Blutgefässen beweisen sollen, müssen viel klarer sein als z. B. die von König[3] gezeichnete Fig. III. Es gelang mir nicht, die langen Ausläufer mancher Riesenzellen bis zu ihrer Endstelle zu verfolgen. Auch an dünnen Schnitten verhinderte das Markgewebe die Verfolgung des weiteren Verlaufes derselben. Stellen aber, wo Riesenzellen noch durch die scharf definirte Gefässadventitia oder Gefässwand von dem Inhalte der Blutgefässe getrennt sind, können zur Entscheidung der vorliegenden Frage nicht verwendet werden. (Vgl. Fig. 24.)

Schliesslich fand ich jedoch auf Querschnitten des Femur mit dem metastatischen Carcinom (17) in Resorption begriffene Havers'sche Canäle, deren Gefässendothelien zu Riesenzellen geworden waren.

---

[1] l. c. S. 531, 532.

[2] Virchow's Archiv, 63. Bd., S. 116, 119.

[3] Deutsche Zeitschrift für Chirurgie, II. Bd., S. 508.

So sehen wir z. B. (s. Fig. 25) zwei feinkörnige, kernreiche Protoplasmamassen von keulenförmiger Gestalt den Inhalt des Havers'schen Canales umschliessen. Dieser Inhalt besteht aus wenigen rothen, reichlichen ungefärbten Blutkörperchen und ausserdem aus grösseren, unregelmässig oder kugelig geformten, glänzenden Zellen. Die dickeren Enden der beiden Riesenzellen liegen in tiefen, mit ihnen übereinstimmend geformten Gruben, deren schief abfallende Mulden noch zum Theil in den Schnitt fielen. Der Leib der einen Riesenzelle legt, indem er, bogig gekrümmt, mehr als die halbe Circumferenz des oval geformten kleinen Resorptionsraumes umzieht, in mehrere kleine, grubige Vertiefungen der Lacune, diesen entsprechend grosse, bucklige Anschwellungen hinein.

In einem anderen Bilde (s. Fig. 27) legt eine Riesenzelle zwei hörnerförmige Fortsätze feinkörnigen, glänzenden Protoplasmas um den Canalinhalt. Die Fortsätze bilden zusammenlaufend einen Ring. Die Riesenzelle stellt einen, diesem Ringe an Grösse fast gleichen Ringknopf dar und liegt mit dem grössten Theile ihrer Peripherie in einer ihr gleich geformten Lacune; ebenso ist auch der Ring nur an einem Dritttheile seines Umfanges vom buchtigen Knochencanalrande durch kleine und durch eine grössere spindelförmige Zelle abgetrennt. Ehe wir diese Bilder deuten, müssen wir in Erwägung ziehen, woraus der Inhalt der Havers'schen Canälchen unter normalen Verhältnissen besteht.

Budge [1] und Schwalbe [2] beschreiben in den Havers'schen Canälchen je ein aus spindelförmigen Endothelien zusammengesetztes Capillargefäss, um welches sich noch ein äusserer Spindelzellenmantel bemerkbar macht. Den Zwischenraum zwischen den beiden aus Spindelzellen zusammengesetzten Röhren fassen Schwalbe und Budge als „perivasculären Lymphraum" auf; Arnold [3] gibt demselben die Bezeichnung des „adventitiellen Raumes".

Langer [4] gibt an, dass nur wenige der Havers'schen Gefässe so fein sind, dass sie als Capillaren zu bezeichnen sind. Die

[1] Arch. f. mikr. Anatomie, XIII. Bd., S. 88.

[2] l. c. S. 134.

[3] Virchow's Archiv, 71. Bd., S. 20 ff.

[4] „Über das Gefässsystem der Röhrenknochen", Denkschriften der k. Akad., 30. Bd., Wien, 1876, S. 7.

kleineren haben nach Langer ebenfalls oft in Form einer zweiten Gefässscheide dichtstehende Kerne; die grösseren, sehr dünnwandigen, mit einzelnen spindelförmigen Kernen dürften nach Langer Venen sein [1].

Nach v. Mandach [2] fehlt den Capillaren der Knochenrinde eine eigentliche Adventitia, „nur da und dort liegen vereinzelte Spindelzellen der Capillarwand auf". In meinen Präparaten besassen die kleinsten Havers'schen Canäle gewöhnlich nur ein Gefässrohr, welches aus spindelförmigen Endothelien zusammengesetzt war. Zwischen dem Gefässlumen und der Canalwand sah ich häufig Spindelzellen liegen und zwar theils vereinzelt, theils rings um das Gefässlumen, so dass sie im letzteren Falle eine geschlossene Scheide darstellten. Oft fehlten auch die Spindelzellen zwischen dem Gefässlumen und der knöchernen Canalwand und das Gefässrohr selbst besass auf manchen Schnitten nur eine kernhältige Anschwellung oder gar keine solche. Im letzteren Falle bestand das Gefässrohr aus einer zarten Membran, nämlich aus den zarten Flügeln der Endothelzellen allein.

In den früher geschilderten Bildern grenzten die Riesenzellen direct an den Gefässinhalt, innerhalb derselben liess sich von der gewöhnlichen Gefässwand keine Spur auffinden. Wir sind daher zu der Annahme genöthigt, dass sich die Endothelien, welche die Gefässwand zusammensetzten, in die Riesenzellen umgewandelt haben. Die Figur 27 zeigt uns auch noch den geschlossenen Ring der Gefässwandung; die eigenthümliche Form der Riesenzelle und deren Fortsätze, welche den Ring schliessen, lässt nur die Annahme zu, dass in diesem Bilde gerade ein solches Stück des Gefässrohres getroffen wurde, welches nur eine kernhältige Endothelstelle enthielt. Diese Stelle wurde zur ringknopfförmigen Riesenzelle, die zarten Flügel der Endothelzelle schwollen zu dem protoplasmatischen Reife des Ringes an.

Die Figur 25 würde sich bei dieser Auffassung dadurch erklären lassen, dass die zu Riesenzellen gewordenen Endothelien des Havers'schen Gefässes ihren Zusammenhang verloren. Dass

---

[1] l. c. S. 9.
[2] l. c. S. 196.

auch die zarten Endothelflügel zu einer breiten, kräftigen Protoplasmamasse werden können, dafür gibt die Figur 26 einen Beleg ab.

Wir sehen da in einem Havers'schen Raume neben wenigen Zellen und Fäserchen einen fast durchaus gleichbreiten Bandring aus körnigem Protoplasma liegen, welcher zwar leer ist, aber trotzdem schon seiner Form wegen für nichts anderes als für einen Querschnitt eines derart veränderten Gefässes angesehen werden kann. Eigenthümlicherweise liegt dieser Ring ziemlich weit von dem viel grösseren Umfange des Knochencanales weg. Dieser Knochencanal ist aber auffallend rund und dennoch ganz deutlich als Resorptionsraum charakterisirt.

Da diesem Ringe keine knopfförmige Anschwellung eigen ist, so scheint mir die Annahme plausibel, dass derselbe aus einem Stücke eines Havers'schen Gefässes entstanden ist, welches Stück aus keinem Kernantheil, sondern nur aus den zarten Flügeln der Endothelzellen bestand.

Ich fand in den betreffenden Präparaten sehr häufig Havers'sche Resorptionsräume, in deren Inhalte grosse Protoplasmagebilde lagen, die einen völlig geschlossenen Ring, oder viel öfter nur ein verschieden grosses Stück eines Ringes darstellten, und die sich durch gelbliche Färbung und durch Glanz auszeichneten. Meist zeigten diese Ringstücke knopfige Anschwellungen oder die Gestalt von Halbmonden oder Posthörnern. Dabei waren diese verschiedengestaltigen Riesenzellen oft von der Lacunenfläche durch rundliche, lose liegende Zellen getrennt; in sehr vielen Bildern sah ich sie jedoch noch im innigsten Contact mit der Lacunenmulde. So zeigt die Figur 29, welche von einem etwas dickeren Präparate herrührt, den grössten Theil eines strotzend gefüllten Havers'schen Gefässes von einer einzigen, verschieden breiten, hornähnlich geformten Protoplasmamasse umgeben. Diese Riesenzelle liegt zum Theile der Lacunengrenze innig, wie eingefilzt an. Ihre körnige Substanz liess an eben dieser Stelle eine feine, radiär gerichtete Strichelung erkennen, die jedoch in der Zeichnung nur schwer in ihrer natürlichen Zartheit und Deutlichkeit zugleich darstellbar ist. Ein Theil der Protoplasmamasse ist aus seiner Mulde herausgefallen. Der Ring ist daher nicht geschlossen. (Vgl. die Erklärung der Fig. 29, S. 121.)

Auf Grund der eben besprochenen Bilder kann es wohl als eine feststehende Thatsache angesehen werden, dass die Endothelzellen der Havers'schen Gefässe in Riesenzellen sich umwandeln können.

Auch auf die Frage, was aus den Riesenzellen der Howship'schen Lacunen werde, geben mir meine Präparate einige Aufklärung. Ich werde im Folgenden auf die Schilderung der diesbezüglichen Bilder eingehen.

Dass eine Theilung der Riesenzelle stattfinden könne, wurde mir durch mehrere Bilder wahrscheinlich. So fand sich in einem Präparate der ostitischen Trochlea (4) in einer Howship'schen Lacune lose eingelagert eine Riesenzelle, deren Leib durch zwei parallel miteinander verlaufende Einschnürungen in drei ungleich grosse, rundlich würfelige Stücke eingetheilt erschien. Die betreffenden Stücke waren noch im völligen Zusammenhange miteinander. Auch Bilder, welche auf eine Spaltung der Riesenzellen in Spindelzellen hindeuteten, wie solches Wegner[1] und Andere angaben, konnte ich auffinden und zwar in Präparaten von dem Femurcarcinom (17). Ich sah da an mehreren Stellen grosse, riesenzellenähnliche Gebilde vom Lacunenrande abgehoben, die wie aus parallel geordneten Spindelzellen zusammengesetzt erschienen. Ferner fand ich ebenda in einer grossen Lacune mehrere verschieden grosse auch mehrkernige Spindelzellen, die sich dachziegelförmig überdeckten und dabei ihre dem Lacunenrande zugewendeten Partien in secundäre Facetten desselben einlegten.

Es bleibt natürlich der Fund von zweifellosen Theilungsbildern immer eine Sache des Zufalls, so oft sich auch die Gelegenheit bietet, zwischen Riesenzelle und Lacunenmulde die bereits besprochenen Lager spindelförmiger Osteoblasten anzutreffen.

Öfter konnte ich mich überzeugen, dass Riesenzellen in den Höhlungen ihres Protoplasmas einzelne oder mehrere Zellen eingeschlossen enthalten.

So lagen in einigen der Riesenzellen, welche die Resorptionszone des Sarcoms des Scheitelbeines zusammensetzten (Fall 19),

---

[1] l. c. S. 532.

den Zellen der Geschwulst ähnliche Gebilde eingeschlossen. (S. Fig. 23.) Es stehen möglicherweise die letzteren zu ersteren in einer genetischen Beziehung.

Eine der in Figur 25 dargestellten Riesenzellen enthält innerhalb einer kugeligen Höhle mehrere verschieden grosse, homogen glänzende Zellen. Diese Höhle ist gegen den Gefässinhalt nicht mehr durch Protoplasma begrenzt und möglicherweise im Begriffe, ihren Inhalt in das Gefäss zu entlassen. Wenigstens erscheint mir diese Annahme wahrscheinlicher als die, dass es sich dabei um eine Aufnahme der Zellen von Seite der Riesenzelle handle.

Am meisten jedoch spricht für die Annahme, dass sich in Riesenzellen einkernige Zellen differenziren und frei werden können, eine Beobachtung, welche ich an einer Stelle der fungösostitischen Trochlea (4) machte. (S. Fig. 28.) Es enthalten da zwei Riesenzellen innerhalb scharf begrenzter, heller Lücken kernhältige Zellen. Eine dritte Riesenzelle entlässt eben aus einer glockenförmigen Höhle eine Zelle. Diese Zelle steckt noch zur Hälfte in der Höhle, die andere Hälfte ragt daraus hervor. Es liegt hier keine Täuschung durch Auflagerung vor; man kann über der in der Höhle steckenden Zellenhälfte deutlich das Protoplasma der Riesenzelle darüberziehen sehen und durch den Wechsel der Einstellung den Eindruck einer Höhle gewinnen. Ich versuchte diesen Eindruck auch in der Figur 28 wiederzugeben.

Dieselbe Figur bezweckt auch, den höchst eigenthümlichen Befund zu reproduciren, welchen die mittlere der drei bereits angeführten Riesenzellen darbot. Diese Riesenzelle ist nämlich in ihrer äusseren Partie wie durchlöchert; zwischen den einzelnen Lücken, in welchen einkernige Zellen liegen, bleiben nur schmale Brücken von Protoplasma. Diese Protoplasmabrücken gehen nun, an drei Stellen deutlich verfolgbar, ohne Unterbrechung in ein feinfaseriges, reticulirtes Gewebe über, welches in seinen Maschen theils kleinere, theils grössere Zellen und kleine spindelige Reste von Zellen einschliesst. Wir sehen da also das Protoplasma der Riesenzelle direct in Intercellularsubstanz übergehen, die ihrerseits wieder ohne Grenze an das benachbarte, neugebildete Knochengewebe sich anlegt. (Vgl. Fig. 28.)

An dieser Stelle betheiligen sich präformirte Faserbündel an der Knochenanlagerung, indem sie sich zwischen den Osteoblasten in die Knochensubstanz einpflanzen.

Unter den Riesenzellen, zwischen diesen und der flachlacunären Resorptionslinie, findet sich jedoch ein Lager von ineinandergeschobenen meist spindelförmigen Zellen und eine homogen erscheinende Anlagerungsschichte neuen Knochens.

Dieses Bild stellt also den Beginn der Apposition nach Beendigung der Resorption dar. Es vermag uns zu überzeugen, dass sich in Riesenzellen, welche in Howship'schen Lacunen angetroffen werden, Zellen differenziren und daraus frei werden können, und dass das Protoplasma der Riesenzellen selbst in Intercellularsubstanz, nämlich in faseriges Bindegewebe übergehen kann.

Die Umstände, unter welchen wir hier eine Zelle aus einer Höhle einer Riesenzelle frei werden sehen, machen es wahrscheinlich, dass solche freigewordene Zellen osteoblastische Functionen ausüben können.

Dass sich das Protoplasma von Riesenzellen in Zellen und in Zwischensubstanz differenzirt, wurde übrigens bereits von Ziegler[1] gesehen und ausführlich besprochen. Es ist jedenfalls interessant, dass die Riesenzellen, welche sich bei der Resorption des Knochens finden, dasselbe Schicksal haben können, als diejenigen, welche Ziegler bei seinen Plättchenversuchen fand. Da ich jedoch nur an der einen Stelle, welche in Figur 28 gezeichnet ist, ein derartiges Bild sah, so dürfte die Differenzirung des Protoplasmas der Riesenzellen, welche in Howship'schen Lacunen liegen, in Zellen und Zwischensubstanz ein relativ seltener Ausgang sein. Häufiger dürften diese Riesenzellen entweder durch Theilung oder durch endogene Zellbildung zum Verschwinden kommen. Es sprechen in diesem Sinne ausser den Angaben der Literatur einige früher erwähnte Bilder und die Thatsache, dass man so häufig die Riesenzellen bei beginnender Apposition auf Osteoblastenlagern aufliegen findet.

Ich gehe nun an die Besprechung einer Reihe von verschiedenen Theorien, welche über die Entstehung der Howship'schen

[1] „Untersuchungen über pathologische Bindegewebs- und Gefässneubildung." Würzburg 1876, S. 12 ff.

Lacunen vorgebracht wurden, nämlich der Ansichten von Virchow, Rindfleisch, Heitzmann, Kassowitz, Löwe, Ziegler, Krug, Flesch, Tillmanns, Lovén, Billroth und Kölliker.

Die von Virchow und seinen Anhängern angenommene Veränderung der Knochenzellen, Umwandlung der Zellterritorien, Erweiterung der Knochenhöhlen wurde bereits im dritten Abschnitte widerlegt. Ebenso fand die von Rindfleisch u. A. auf die Annahme gewisser Eigenthümlichkeiten des Flüssigkeitstransportes im Knochen gestützte Auffassung der lacunären Resorption schon im zweiten Abschnitte ihre Widerlegung.

Heitzmann sprach sich anfänglich[1] im Sinne Virchow's aus und gab an, dass es „unter Vergrösserung des Zellleibes und Theilung seiner Kerne" zu einer completen Einschmelzung der Grundsubstanz komme, welche von der Lösung der Kalksalze eingeleitet werde.

Ein Jahr später[2] stellte Heitzmann auf Grund seiner Protoplasmatheorie den Satz auf: „Man kann sich überzeugen, dass nicht der centrale Knochenkörper (Knochenzelle) vergrössert wird, sondern stets nur ein Schwund der Grundsubstanz erfolgt, welcher zum Freiwerden des Protoplasmas führt. Das Protoplasma, welches vor der Entzündung nur am Knochenkörperchen sichtbar war, wird jetzt in der ganzen Gewebseinheit sichtbar". Dabei nahm H. an[3], dass in Form buchtiger Felder, welche die „Gewebseinheit (das Territorium)" nicht immer ganz, „sondern häufig nur theilweise" betreffen, die Lösung der Kalksalze der Grundsubstanz vorausgehe. Später werde die „entkalkte Grundsubstanz ausgelöst" und die nun vorliegenden Protoplasmakörper, innerhalb welcher eine Anzahl neuer Kerne auftaucht, entsprechen „je einer oder mehreren unter einander verschmolzenen Knochengewebseinheiten".

Kassowitz stellte sich auf den Standpunkt Heitzmann's, seine Resorptionstheorie ist daher dem Wesen nach dieselbe als die Heitzmann's.

---

[1] Studien am Knochen und Knorpel, l. c. S. 346.

[2] Untersuchungen über das Protoplasma, V. Sitzb. d. k. Akademie 68. Bd., III. Abth., S. 91.

[3] l. c. S. 90.

Auch er sieht die in den Howship'schen Grübchen vorhandenen, protoplasmatischen Massen als die „Residuen des Knochengewebes“ an, „nachdem die Kalksalze gelöst und die Fibrillen entfernt worden sind“[1]. Da Kassowitz jedoch die Überzeugung gewann, dass der Lacunenrand auch die Knochenkörperchen durchschneidet, so konnte er die Form der Lacunen nicht wie Heitzmann auf die Knochengewebseinheiten zurückführen. K. sucht die Ursache der lacunären Form der Knocheneinschmelzung „in dem Saftstrome, welcher von jedem einzelnen capillaren Blutgefässe nach allen Richtungen hin sich verbreitet“. Dass grosse mit centralem Gefässlumen versehene Lacunen von vielen kleinen Lacunen besetzt sind, erweckt bei K. den Gedanken, „dass der Saftstrom zwar im Grossen und Ganzen concentrisch von dem Gefässe fortschreitet, dass aber gewisse Stellen der Capillarwand viel leichter durchgängig sind, als die anderen, dass also von diesen Stellen ein verstärkter Saftstrahl hervordringt und dass dieser es ist, welcher die secundären Lacunen als Segmente von kleineren Kugelflächen bildet“. Der Saftstrom bewirkt zunächst die Auflösung der Kalksalze, fast gleichzeitig aber die Auflösung oder Erweichung der leimgebenden Fibrillen“. „Es bleiben die Knochenzellen mit ihren Verzweigungen und das zwischen den Fibrillen vorhandene lebende Kittgewebe“[2]. Darin erfolgt dann nach Kassowitz „eine Vermehrung des körnigen Protoplasmas und eine Vermehrung der Kerne“, so dass sich „die grossen, vielkernigen Protoplasmamassen an der Stelle des erweichten Kochengewebes“ vorfinden[3]. Dabei sollen nach K. die Knochenzellen schon früher schwinden und die Kerne der Myeloplaxen nicht von diesen abstammen[4]. Die Ursache der stärkeren Strömung findet K. in Erweiterung sowie in Annäherung des Gefässes[5].

Auch Löwe theilt die Ansicht, dass der Zellenleib der Myeloplaxen seinem Materiale nach mit der Knochengrundsub-

---

[1] l. c. S. 412.

[2] Die Bildung und Resorption d. Knochengewebes etc. Centralbl. f. d. medic. Wiss. 1878, Nr. 44, S. 788. Vergl. Med. Jahrb. l. c. S. 412, 413.

[3] l. c. S. 789. Vergl. Med. Jahrb. l. c. S. 413.

[4] l. c. S. 413.

[5] l. c. S. 407.

stanz identisch sei[1]. Das ursprüngliche Bild der Myeloplaxen gleicht nach L. ganz einem abgebrochenen Knochenstückchen. Die Ursache des Abbröckelns liegt nach Löwe „unzweifelhaft" in dem Wachsthumsdrucke des Markgewebes, dessen Kraft mikroskopische Knochenstückchen lossprengt[2].

Vor Allem habe ich zu bemerken, dass keine der eben auseinandergesetzten Ansichten eine Erklärung der Entstehung der Lacunenform zu geben vermag.

Die Annahme von „Gewebseinheiten" ist mit dem im dritten Abschnitte Erörterten nicht vereinbar und, was noch schwerer in die Wagschale fällt, im feineren Baue der Knochensubstanz nicht begründet. Die Annahme, dass es sich bei den Myeloplaxen um losgebrochene Knochenstückchen handle, kann niemals die Lacunenform erklären und ist überhaupt durch gar nichts irgendwie gestützt. Gegen die Saftstrahlen lassen sich viele Gründe aufführen. Es spricht dagegen, dass zwischen den Lacunen zarte Stäbchen und Gitterwerke stehen bleiben können; dass, wie es im zweiten Abschnitte sich ergab, die Flüssigkeitsbewegung im Knochen nicht in lacunärer Form erfolgt; ferners sprechen Bilder dagegen, welche, wie die Fig. 27, im engen Umkreise eines Havers'schen Gefässes neben sehr tiefer Lacune ganz seichte Buchten zeigen; dann die Thatsache, dass jenseits der Lacunengrenze die Knochengrundsubstanz ungeändert bleibt. Ein derartiges Auswählen und scharfes Abgrenzen eines Flüssigkeitsstromes lässt sich nicht annehmen.

Abgesehen von dem allen ist die von Heitzmann, Kassowitz und Löwe vertretene Ansicht, dass die Knochengrundsubstanz in Protoplasma sich umwandle, völlig unhaltbar. Die bereits mitgetheilten Erfahrungen geben zahlreiche Gegengründe ab. Ich stelle voran die Thatsache, dass es wirklich eine Kalkberaubung des Knochens gibt, wobei die Knochensubstanz völlig ungeändert bleibt.

Diese im zweiten Abschnitte erörterte Thatsache beseitigt eine der Hauptstützen der Ansicht Kassowitz's u. A. — Kassowitz[3]

---

[1] Arch. f. mikr. Anatomie, XVI. Bd., S. 620.
[2] l. c. S. 621.
[3] l. c. S. 419.

behauptet nämlich: „in der Wirklichkeit findet aber eine Lösung der Kalksalze unter keiner Bedingung statt, ohne dass auch unmittelbar darauf die ganze Knochenstructur durch die Beseitigung der Fibrillen aufgehoben würde, weil dasselbe Agens, welches allein die Kalksalze wieder lösen kann, nämlich die verstärkte Saftströmung, auch die Fibrillen zum Schwinden bringt".

Einen weiteren Gegengrund geben die Bilder ab, in welchen Riesenzellen den Inhalt Havers'scher Gefässe umgeben; sollten diese Riesenzellen umwandelter Knochen sein, so müssten wir annehmen, dass die Gefässwand überhaupt fehle.

Würde man ferner das „lebende Kittgewebe" zum Protoplasma werden lassen, so bliebe es unbegreiflich, dass die kleinen Antheile der Kittsubstanz davon eine Ausnahme machen konnten, von welchen bei Gelegenheit der in Folge unvollständiger Resorption zurückbleibenden Fibrillengruppen in den Abschnitten I. und II. bereits die Sprache war.

Übrigens brauchen wir uns nur zu erinnern, dass v. Ebner[1] die organische Kittsubstanz des Knochens durch Entkalken ausgekochter Knochenschliffe als sehr durchsichtigen Rest darstellte, in welchem noch die ganze Knochenstructur sichtbar war, um einzusehen, dass diese Kittsubstanz mit dem Protoplasma der Riesenzellen keinerlei Ähnlichkeit hat.

Gänzlich unmöglich werden aber alle Theorien, welche die Entstehung der Lacunen durch Umwandlung der Knochensubstanz in Riesenzellen erklären, durch die Erfahrungen Billroth's[2], der schon vor langer Zeit nachwies, dass todte Knochen, so Elfenbeinstifte, in den Knochen lebender Thiere oder Menschen eingeschlagen, derselben lacunären Resorption verfallen als lebende Knochen.

Die bisher aufgeführten Theorien der lacunären Resorption sind also an und für sich unhaltbar und auch durchaus nicht im Stande, die Entstehung der Form der Howship'schen Lacunen zu erklären.

Ziegler will den Grund der Resorption in dem Ableben, in der „Senescenz" von einzelnen Knochenpartien finden. Die rege

---

[1] l. c. S. 18.

[2] Über Knochenresorption. Arch. f. klin. Chirurgie, II. Bd., S. 121.

Anbildung auf einer Seite eines Balkens mache es begreiflich, dass das Nährmaterial nicht ausreicht, dass einzelne Theile wieder eingehen, und dass das Material anderweitig verbraucht wird[1]. Dabei gibt Z. zwar selbst zu, dass damit die Ursache der Lacunenform nicht aufgeklärt sei, doch führt er an, dass er bei einem Knochencarcinom einzelne Knochenterritorien eigenthümlich gekörnt gefunden habe[2], und vertritt die Ansicht Rindfleisch's, dass der Schwund der Kalksalze exquisit lacunär erfolge[3].

Diese letzteren Angaben wurden schon im zweiten Abschnitte widerlegt, respective erklärt.

Für die Annahme aber, dass die Senescenz einzelner Knochentheile die Ursache der lacunären Resorption sei, lässt sich keine einzige Thatsache als Stütze aufführen.

Eine gewisse Ähnlichkeit mit der Voraussetzung, welche Ziegler seiner Annahme einer Senescenz des Knochengewebes zu Grunde legt, hat die Vermuthung Krug's[4], dass, wo immer Knochenbildung vor sich geht, auch durch die hiebei eintretende Änderung des Concentrationsgrades der im Knochen kreisenden Flüssigkeiten die Bedingungen zur Lösung seiner Bestandtheile gegeben sein müssen.

Flesch und Tillmanns wiesen auch nach, dass der Knochen von gewissen Flüssigkeiten gelöst werde. Flesch[5] leitete in Wasser, in welchem Knochenpulver suspendirt war, Kohlensäure. Schon nach wenigen Stunden liessen sich in dem Wasser phosphorsaure Kalksalze und Spuren von eiweissartigen Substanzen nachweisen. Flesch knüpft daran die Vermuthung, dass eine Stauung der Kohlensäure gleichzeitig die Auflösung der Kalksalze und die Entstehung der Riesenzellen veranlasse und möglicherweise sich eben bei der von Ziegler angenommenen mangelhaften Ernährung finde.

---

[1] V. A. 73. Bd., S 372.

[2] l. c. S. 373.

[3] l. c. S. 367.

[4] Die Absorption todter Knochen durch lebende Gewebe. Inaug. Dissert. Giessen 1865, S. 54 und 55.

[5] Centralbl. f. d. med. Wiss. 1876, Nr. 30, S. 524 ff.

Tillmanns[1] fand, dass eine alkalische Lösung von phosphorsaurem und kohlensaurem Natron Elfenbeinstäbchen, die in Quarzsand stacken, nicht veränderte, dass jedoch der Rand von Elfenbeinstäbchen in Wasser, welchem der Zutritt der Kohlensäure nicht verwehrt war, biegsam und körnig wurde. Wenn T. der erwähnten Salzlösung Kohlensäure zuführte, dann zeigte sich die Spitze des Elfenbeins nicht nur biegsam, sondern auch rauh, mit unregelmässigen, kleinen Vertiefungen versehen und in der Nähe dieser von körniger Beschaffenheit. Bei 38° C. trat in der Salzlösung völlige Auflösung und Schwund früher entkalkter Elfenbeinstäbchen und zwar innerhalb einiger Tage ein. Obwohl Tillmanns meint, dass dieselben Verhältnisse auch im lebenden Körper bestehen, so knüpft er doch selbst an die Mittheilung dieser Versuchsresultate die Äusserung, dass es ihm fraglich erscheine, ob die Kohlensäure, also eine längerdauernde Asphyxie des Knochens, genügt „um pathologische Processe, d. h. Usur des lebenden Knochens einzuleiten"[2].

Keine der Annahmen, dass durch Flüssigkeiten, speciell durch kohlensäurehältige Salzlösungen, die lacunäre Resorption des Knochens erfolge, ist im Stande, die scharfe Abgrenzung der Lacunen zu erklären.

Die Experimente Tillmanns's zeigen selbst, dass über der unregelmässig rauhen Auflösungsgrenze der Elfenbeinstifte die Substanz dieser körnig verändert, ihrer Kalksalze also zum Theil beraubt ist.

Im zweiten Abschnitte ergab es sich jedoch, dass die lacunäre Resorption durch keine Änderung der Knochengrundsubstanz vorbereitet wird; ferner ist der Thatsache gegenüber, dass zwischen den Lacunen zarte, scharfbegrenzte Knochenstäbchen und Gitterwerke stehen bleiben, die Annahme, dass eine Flüssigkeit die lacunäre Resorption besorge, völlig unhaltbar.

Es kann uns keine Theorie der Knochenresorption befriedigen, die nicht Sorge trägt, die Morphologie der Howship'schen Lacunen zu erklären.

---

[1] D. Zeitschr. f. Chirurgie, 1877, VII. Bd., S. 533 ff.

[2] l. c. S. 544.

Billroth war es, der zuerst in deutlichen Worten die Weichgebilde, welche den Howship'schen Gruben anliegen, für die Form dieser verantwortlich machte. Er trat mit der Auffassung hervor, dass die Resorption der Knochensubstanz „hauptsächlich mechanisch durch den Druck der sich fortwährend vermehrenden Granulationsmasse bewirkt“ werde[1].

Eine ähnliche Anschauung äusserte Lovén[2]; während jedoch Billroth die Knochenzellen bei der lacunären Resorption unverändert fand, meinte Lovén, dass die Myeloplaxen möglicherweise durch Kernwucherung der freigewordenen Knochenzellen entstehen könnten.

Billroth verliess später selbst die Annahme der rein mechanischen Druckwirkung der Granulationen[3] und nahm an, dass die Granulationen die Träger einer Substanz seien, die die Knochenerde in ein lösliches Salz umsetzt, welches dann die Gefässe der Granulationen resorbiren; die rundlichen Defecte der Howship'schen Lacunen entsprechen dabei nach Billroth theils grossen vielkernigen Zellen, theils Schlingen der Granulationsgefässe[4]. Gegen die weitere Annahme Billroth's, dass die Ursache der Resorption eine Säure, wahrscheinlich die Milchsäure, sei[5], wurde bereits von Volkmann[6] eingewendet, dass unter dieser Voraussetzung der „Knochenknorpel“ unaufgelöst zurückbleiben müsste, während jedoch die Lacunenbildung auf einer „gleichmässigen Zerstörung des aus Kalk und Knorpel bestehenden Knochengewebes“ beruht. Später[7] zog Billroth die Alternative in Erwägung, dass die entzündliche Neubildung zunächst die organische Grundlage des Knochens löse, die Kalksubstanz aber entweder zerbröckelt und eventuell ungelöst abgeführt oder durch die Milchsäure gelöst werde.

---

[1] Beiträge etc., S. 52.

[2] Verhandl. d. physikal. medic. Ges. in Würzburg, N. F. IV. Bd. S. 10, 11.

[3] Arch. f. klin. Chir. l. c. S. 124.

[4] l. c. S. 123.

[5] l. c. S. 126.

[6] Arch. f. klin. Chir. l. c. S. 446.

[7] Pathologie l. c. S. 196.

Die Thatsachen sprechen jedoch nicht zu Gunsten dieser Auffassung. Der Umstand, dass die Knochengrundsubstanz jenseits der Lacunenlinie ungeändert bleibt, spricht gegen die Annahme, dass eine freie Säure die Lösung der Kalksalze bewirke. Auch können wir dem Granulationsgewebe als solchem die Fähigkeit, die organische Grundlage des Knochens aufzulösen, nicht zuschreiben. Wir können z. B. nicht den intercellularen oder den faserigen Bestandtheilen des Granulations- oder Markgewebes so hohe Lebensäusserungen zumuthen, als angenommen werden müssen, um die Resorption der Knochensubstanz zu erklären. Nirgends finden wir auch Abdrücke der Intercellularsubstanz an der Lacunenfläche, sondern nur Formen von Gruben, in welche Zellen hineinpassen. Es kann also nicht das Mark- oder Granulationsgewebe in toto für die Auflösung des Knochens in der Form der Howship'schen Lacunen verantwortlich gemacht werden, sondern nur die zelligen Elemente der Granulationen z. B., und zwar diejenigen, welche in die Resorptionsgruben hineinpassen. Billroth hat auch selbst, wie schon erwähnt wurde, als Inhalt der Howship'schen Lacunen Riesenzellen und Gefässschlingen angeführt, und also die zelligen Gebilde der Granulationen als Träger der Resorption hervorgehoben.

Damit wären wir aber auf dem Standpunkte der Resorptionstheorie Kölliker's angelangt.

Es hat sich ergeben, dass keine der verschiedenen Resorptionstheorien, die bisher besprochen wurden, die Entstehung der Howship'schen Lacunen befriedigend zu erklären im Stande ist. Ich glaube durch Beibringung von Thatsachen alle diejenigen Annahmen, welche die Form der Lacunen aus supponirten Zellenterritorien des Knochens oder aus der Eigenartigkeit der dem Flüssigkeitsverkehre dienenden Wege im Knochen ableiten, noch etwas unwahrscheinlicher, ja unmöglicher gemacht zu haben, als sie es in hohem Grade bereits durch die Errungenschaften der Histologie sind. Auch die Annahme, dass die lacunäre Resorption auf einer thätigen Betheiligung der Knochenzellen beruhe, hat sich neuerdings als völlig unhaltbar erwiesen. Und für die Meinung, dass das „Protoplasma in der Knochensubstanz“ bei der lacunären Resorption „frei“ werde, dass die Form der Lacunen von hypothetischen Abstufungen des Säftestromes her-

rühre, fand ich in meinen Untersuchungen ebensowenig eine Stütze, als für die Annahme, dass die Ursache der lacunären Resorption in dem „Ableben" oder in dem „Abbrechen" von Knochenstückchen beruhe.

Es sind diese Hypothesen völlig unbegründet und ganz besonders ist die Annahme, dass die Knochengrundsubstanz, respective ihre Kittsubstanz in das Protoplasma der Zellen sich umwandle, welche in den Howship'schen Lacunen angetroffen werden, im directen Widerspruche mit den gesicherten Erfahrungen der Zellenlehre. Ich verweise in dieser Beziehung auf die Ausführungen Rollett's[1], überhaupt auf die Lehren der Physiologie und Histologie, die alle darauf hinführen, dass die Intercellularsubstanzen nur einen geringen Theil der Lebenseigenschaften des Protoplasmas behalten, oder dass das Protoplasma nach der Schaffung der neuen specifischen Form seine Thätigkeit ganz abschliesst. Demgemäss stimmen auch alle Thatsachen, welche die mikroskopischen Untersuchungen des Knochens bisher wirklich sicherstellen konnten, darin überein, dass sich die Knochensubstanz den verschiedensten Processen gegenüber gänzlich passiv verhält, und so auch der lacunären Resorption gegenüber. Wir können daher für die Entstehung der Howship'schen Lacunen nur in denjenigen Annahmen eine Erklärung finden, welche weder den Knochenzellen noch der Knochensubstanz eine active Rolle zumuthen. Wie es sich im Vorhergehenden zeigte, können uns wieder unter den derartigen Annahmen alle die, welche die Entstehung der Howship'schen Lacunen auf die auflösende Thätigkeit gewisser Flüssigkeiten oder der Granulationen, im allgemeinen Sinne gesprochen, zurückführen, nicht befriedigen.

Nur eine Auffassung gibt es, die mit den gefundenen Thatsachen in Übereinstimmung steht. Es ist das die Annahme, dass die Entstehung der Howship'schen Lacunen der Effect zelliger Gebilde sei, welche dem Knochen anliegen und unter gewissen Umständen die Knochensubstanz zu resorbiren vermögen. Und so gelangen wir also auf dem Wege der Ausschliessung aller übrigen Resorptionstheorien zu der von Kölliker gegründeten.

---

[1] Über die Erscheinungsformen des Lebens und über den beharrlichen Zeugen ihres Zusammenhanges. (Vortrag gehalten in d. k. Akademie zu Wien, 15. Juli 1872, S. 9.)

Ich werde im Folgenden noch die gegen die einzelnen Punkte der Resorptionstheorie Kölliker's erhobenen Einwendungen besprechen und dabei zugleich den Nachweis liefern, dass die Ergebnisse meiner Untersuchungen die Anschauungen Kölliker's bestätigen und zwanglos denselben sich beigesellen lassen.

Nach Kölliker entstehen die Howship'schen Lacunen durch die Thätigkeit von Zellen.

Diese Zellen nannte Kölliker Ostoklasten und beschrieb von denselben die verschiedensten Grössen und Formen und bedeutende Unterschiede bezüglich des Kerngehaltes derselben[1]. Die Ostoklasten K's. liegen dem Knochen in seichten Grübchen an oder sind in den Knochen verschieden tief eingelassen. Es entsprechen ihnen ganz ähnlich geformte Howship'sche Grübchen[2].

Bezüglich der Art der Einwirkung der Ostoklasten vermuthet Kölliker, dass dieselben „wahrscheinlich auf chemischem Wege die leimgebende Substanz der Knochen zusammen mit den Erdsalzen langsam auflösen, ohne dass das Knochengewebe hiebei irgendwie sich betheiligt und mit seinen zelligen Elementen eine Rolle spielt“[3].

Bezüglich der Abstammung der Ostoklasten hält es K. für wahrscheinlich, dass dieselben aus den Osteoblasten hervorgehen. Die Ostoklasten zeigen sich an vielen Schnitten vereinzelt mitten in der Lage der Osteoblasten, sind anfangs nur wenig grösser als diese und nehmen erst nach und nach die vielen Kerne und erheblicheren Umfang an. Kölliker sah an seinen Objecten keine Beziehung der Ostoklasten zu den Gefässen, hält jedoch desshalb die Annahme Wegner's nicht für entkräftet[4].

Bezüglich des Endschicksals der Ostoklasten schliesst Kölliker daraus, dass die Resorptionsflächen so häufig zu Appositionsflächen werden, „dass die Ostoklasten durch wiederholte Theilung in Osteoblasten sich umbilden“[5].

---

[1] l. c. S. 21—23.
[2] l. c. S. 19, 22.
[3] l. c. S. 81.
[4] l. c. S. 26, 32.
[5] l. c. S. 27.

Bezüglich der Momente, die an bestimmten Stellen eine Entwicklung der Ostoklasten und Resorption des Knochens hervorrufen, äussert Kölliker die Vermuthung, „dass es in erster Linie ein von den die Knochen umgebenden und denselben anliegenden Weichtheilen ausgeübter Druck ist, der hier von Einfluss ist". Kölliker bekennt sich hiemit zu der Lehre Fick's, dass die Knochen nur in die Lücken der Weichtheile oder in die Gegenden sich hineinbilden, wo die letzteren keinen Widerstand entgegensetzen, während sie an den Orten des Druckes der Weichtheile schwinden. In diesem Drucke liegt, nach Kölliker, die reizende Ursache, welche in den Osteoblasten neue besondere morphologische Vorgänge anregt, wodurch sie sich zu Riesenzellen umbilden und zugleich neue physiologische Wirkungen entfalten. Schwindet die reizende Ursache, so bilden sich die Ostoklasten zu Osteoblasten zurück. Kölliker verschliesst sich dabei nicht der Erwägung, dass die Erklärung der Resorption im Innern des Knochens noch immer grosse Schwierigkeiten bietet, wo man nicht einsieht, warum der Druck des wuchernden Markes nur an bestimmten Stellen einwirkt[1].

Nachdem ich so die Resorptionstheorie Kölliker's skizzirt habe, gehe ich zu den gegen dieselbe angeführten Einwänden über.

Gegen die Existenz eigener Ostoklasten wurde von Strelzoff[2] behauptet, dass es ziemlich willkürlich sei, ein beliebiges histologisches Element, welches man an einer Knochenfläche trifft, für einen Ostoklasten zu erklären. Es ist diese Behauptung Strelzoff's ebenso unrichtig, als die Angabe desselben[3], dass „es ganz von der Willkür abhängt, ein gegebenes Gebilde für ein Resorptionsgrübchen oder für eine unschuldige (Übergangs-) Lacune zu halten". Ebensowenig ist auch Ranvier im Rechte, wenn er auf Grundlage der Thatsache, dass Osteoblasten auch in den Gruben angetroffen werden, welche in dem Knochen unter dem Einflusse der entzündlichen Resorption entstehen[4], den Satz

---

[1] l. c. S. 81, 82.

[2] Untersuchungen aus dem patholog. Institute zu Zürich, II. Heft S. 144, Leipzig 1874.

[3] l. c. S. 148.

[4] Techn. Lehrbuch, S. 414.

aufstellt, es seien „Markzellen, Osteoblasten, Ostoklasten, Osteophagen eben so viele verschiedene Namen, mit denen man die nämlichen Elemente bezeichnete, je nach der Natur und Bedeutung die man ihnen zuschrieb“[1].

Man kann sich leicht überzeugen, dass die Ostoklasten trotz der Verschiedenheiten in Form und Grösse unverkennbare Charaktere besitzen. Es können nicht alle die Zellen als Ostoklasten angesehen werden, welche in Resorptionsgruben liegen, sondern unter diesen nur diejenigen, von welchen jede in ein oder in mehrere Grübchen zugleich hineinpasst.

Denn wenn wir Zellen eine knochenresorbirende Thätigkeit zuschreiben sollen, so muss jedes Zellindividuum eine Unterbrechung der gegebenen Structurverhältnisse des Knochens zu Stande bringen, welche der Grösse und Form der Berührungsfläche der Zelle mit der Knochensubstanz entspricht.

Es dürfen daher vor Allem die Charaktere der Resorptionslacunen nicht ausser Acht gelassen werden, wie dies Strelzoff that, der die Übergangsgrübchen den Resorptionslacunen gegenüberstellte. Denn die Übergangsgrübchen Kölliker's sind auch Resorptionslacunen und zwar jene kleinen Grübchen, welche sich häufig an der Grenze der Resorptionsbezirke finden[2] und der schwächeren Resorption entsprechen. Wenn man mit Strelzoff alle „Grübchen“ zusammenwirft[3], dann muss man selbst auf das gefürchtete „Chaos“[4] gefasst sein.

Ranvier anderseits übersah, dass überall, wo auf Resorption Apposition folgt, Resorptionsgruben mit Osteoblasten bedeckt sein müssen. Darin kann nicht, wie Ranvier[5] meint, ein Beweis gegen die „specifische“ Function der Osteoblasten erblickt werden.

Osteoblasten und Ostoklasten lassen sich sehr wohl unterscheiden und auseinanderhalten, wenn das Verhältniss beachtet

---

[1] l. c. Anm. zu S. 415.

[2] Kölliker l. c. S. 20.

[3] Untersuchungen aus dem patholog. Institute zu Zürich. Leipzig 1873, 1. Heft S. 70, 2. Heft S. 145—150.

[4] Strelzoff l. c. S. 87.

[5] l. c. S. 415.

wird, in welchem eine Zelle zu dem betreffenden Resorptionsgrübchen steht. Isolirte Zellen gestatten kein sicheres Urtheil.

Ich habe auf die Momente bereits im ersten Theile dieses Abschnittes Rücksicht genommen, welche uns die Differenzialdiagnose zwischen Osteoblasten und Ostoklasten ermöglichen.

Wir finden in Howship'schen Lacunen sowohl Ostoklasten als Osteoblasten. Die verschiedenen Formen und Grössen, unter welchen Ostoklasten in meinen Präparaten vorkamen, konnten nicht das allen gemeinsam Eigenthümliche übersehen lassen. Ich machte bereits darauf aufmerksam, dass die Übereinstimmung der Berührungsflächen der Zellen und der von denselben eingenommenen Resorptionsgrübchen als ein Criterium der Ostoklasten anzusehen ist. In der überwiegendsten Mehrzahl entspricht jedem Ostoklasten eine Lacune oder eine Façette einer grossen Resorptionsgrube. In selteneren Fällen erfüllt ein Ostoklast mehrere Howship'sche Lacunen. Nur an einigen ganz vereinzelten Stellen fand ich, dass ein Ostoklast von einer Lacune aus sich über die benachbarten Theile der angrenzenden Grübchen hinübererstreckte, ohne diese auch in ihrer ganzen Ausdehnung zu erfüllen. Sonst entsprachen immer jedem Ostoklasten je eine oder mehrere Howship'sche Lacunen zugleich und ganz.

Wenn mehrere Zellen eine Lacune einnehmen, ohne dass jeder Zelle eine Façette des Lacunenrandes entspricht, so liegt kein Grund vor, dieselben für Ostoklasten zu halten.

Ein grosser Theil von den hieher gehörigen Bildern ist, wie ich bereits ausführte, durch die Anlagerung neuer Knochensubstanz, durch das Übergehen von Zellen in diese, durch die gedrängte Aneinanderreihung einkerniger, zumeist spindelig oder cylindrisch gestalteter Zellen von denen der Resorption unterschieden und auf Apposition zu beziehen. Die Zellen, welche unter solchen Verhältnissen Howship'sche Lacunen erfüllen, sind also Osteoblasten.

Es frägt sich nun noch, welches Urtheil wir uns über die Bilder machen sollen, in denen wir Howship'sche Lacunen durch Zellencomplexe ausgefüllt finden, die nicht als Osteoblasten deutlich charakterisirt sind und die auch nicht in knochenresorbirender Thätigkeit begriffen sein können, da den einzelnen Zellen nicht eigene Grübchen entsprechen.

Ich habe derartige Bilder bereits geschildert und hege die Vermuthung, dass es sich hiebei um den Zerfall eines Ostoklasten in eine Anzahl von ein- oder mehrkernigen Zellen handeln dürfte, welche momentan weder in ostoklastischer, noch in osteoblastischer Function angetroffen werden. Es würde sich dadurch die Übereinstimmung der Form des Zellencomplexes mit der des betreffenden Howship'schen Grübchens ungezwungen erklären. Zu einer Änderung und Erweiterung des Begriffes der Ostoklasten, welcher auch diese in Lacunen hineinpassenden Zellencomplexe in sich schliessen würde, nöthigt kein Umstand, solange wir für diese Bilder noch eine andere Erklärung haben.

Dabei halte ich jedoch die von Feurer ausgesprochene Vermuthung[1], dass Lacunen, welche mehrere Riesenzellen enthalten, durch das Verschmelzen mehrerer Grübchen entstanden seien, nicht für wahrscheinlich, wenn den Zellen nicht Façetten des Lacunenrandes entsprechen, die einen Anhaltspunkt für das Fortbestehen der ostoklastischen Zellenthätigkeit abgeben würden.

Noch sind diejenigen Bilder zu berühren, wo Zellen, welche die Charaktere der Ostoklasten besitzen, von der Lacunenfläche durch andere Gebilde getrennt werden. Hier müssen die ostoklastischen Functionen jener Zellen als abgelaufen angesehen werden; ebenso bei Riesenzellen, die nicht mehr in ihre Lacunen passen.

Ein Rückblick auf das Besprochene dürfte ergeben, dass bei genauer Würdigung des Verhältnisses, in welchem sich die Lacunenflächen zu den ihnen anliegenden Zellgebilden befinden, in der überwiegenden Mehrzahl von Bildern ein ganz bestimmtes Urtheil gefällt werden kann, ob wir es im gegebenen Falle mit Ostoklasten oder Osteoblasten zu thun haben. Es können nicht beliebige histologische Elemente Ostoklasten genannt werden und es sind diese durchaus nicht das Nämliche, als wie die Osteoblasten.

Nur zu häufig wurden die Ostoklasten mit Riesenzellen identificirt.

Aus diesem Umstande erklärt es sich, dass Kassowitz[2] die Erfahrung, dass sich Riesenzellen an Rändern, die noch keine

---

[1] l. c. S. 93.

[2] l. c. S. 448.

Resorption zeigen, also vor begonnener Zerstörung, nicht finden lassen, als Einwand gegen die Ostoklastentheorie Kölliker's aufführt.

Auf einem ähnlichen Wege gelangt Rustitzky zum Zweifel, ob die Riesenzellen die Grübchen bohren oder sich desswegen bilden, weil diese vorhanden sind[1]. R. lässt die so aufgeworfene Frage, was hiebei Ursache und was Folge sei, ohne Antwort, berichtet jedoch ausdrücklich, dass er Knochenstücke in dem Lymphsacke des Frosches zwei Monate lang liegen liess, ohne Lacunen entstehen zu sehen, „während sich Riesenzellen in dem Lymphsacke hinreichend entwickelt hatten“[2].

Aus dem Irrthume, dass Ostoklasten und Riesenzellen identisch seien, entsprang auch die Meinung, dass in dem Vorkommen von Riesenzellen an anderen Stellen als in den Howship'schen Lacunen ein mit der Ostoklastentheorie unverträgliches Factum vorliege.

So legt Bidder Gewicht darauf, dass er Riesenzellen auch in der Mitte der Markräume und an Knochenbalken antraf, die in deutlicher Anbildung begriffen waren, und sagt, er habe „eine nähere Beziehung der Riesenzellen zur Resorption des Elfenbeins und zur Ostitis mit Sicherheit noch nicht finden können“[3].

Diese und alle ähnlichen Einwendungen basiren auf einer Missdeutung der Lehre Kölliker's, die mir um so weniger begreiflich ist, da dieser wiederholt davon spricht, dass die Ostoklasten wachsen, dass aus kleinen einkernigen Zellen endlich Riesenzellen werden[4].

Die Ostoklasten sind sehr oft grosse mehrkernige Zellen, also Riesenzellen, aber sie wachsen zu solchen aus einkernigen kleinen Zellen heran, und sehr häufig finden wir so kleine Lacunen, dass nur eine einkernige Zelle darin Platz hat. Wenn wir diese kleinen Lacunen mit den in dieselben hineinpassenden Zellformen auf die beginnende oder auf die aus localen oder allgemeinen Ursachen geringgradig bleibende Resorption beziehen, so gewinnen wir eine natürliche, allen Verhältnissen völlig entsprechende Auf-

[1] V. A. l. c. S. 221, 223.
[2] l. c. S. 225.
[3] l. c. S. 625.
[4] l. c. S. 26, 32.

fassung. Die Riesenzellen stellen eine Form der Ostoklasten dar, in welcher diese häufig vorkommen.

Aber ebensowenig als alle Riesenzellen Ostoklasten sind, hat der Satz Giltigkeit, dass alle Ostoklasten Riesenzellen sind.

Es kann gar nicht erwartet werden, dass an Knochenrändern, ehe die Resorption bis zu einem gewissen Grade gediehen ist, Riesenzellen liegen sollen. Ebensowenig aber könnten wir auch kleine Zellen, die nicht in conformen Grübchen liegen, als Ostoklasten ansprechen. Dass aber Riesenzellen im Markgewebe, in Geschwülsten und Granulationen, und an Reizungsstellen überhaupt vorkommen, ist eine bekannte Thatsache, die sich sehr wohl damit verträgt, dass Ostoklasten in der Ausübung ihrer resorbirenden Thätigkeit zu Riesenzellen werden können.

Auch der Umstand, dass die Ostoklasten eine so verschiedene Form haben, wurde gegen die Ansicht Kölliker's eingewendet. So führt z. B. Kassowitz an, dass die Form der Lacunen von den Myeloplaxen nicht bestimmt werden könne, da diese keineswegs kugelig, sondern vielgestaltig sind[1].

Wir sehen ohne Ausnahme die Form der Lacune dem in ihrem Bereiche liegenden Antheile der Oberfläche des Ostoklasten genau entsprechen. Auf mehr kommt es aber hier nicht an und zwar ebensowenig als bei irgend einem Prägungsvorgange z. B., bei welchem ja immer nur Eines in Betracht zu ziehen ist, nämlich die Anpassung der prägenden und der geprägten Berührungsflächen. Dass diejenigen Antheile der Ostoklasten, welche der Lacune nicht anliegen, verschiedene Formen besitzen, kann nicht gegen die formbestimmende Eigenschaft der Ostoklasten angeführt werden.

Schwieriger wäre die Frage, wodurch es denn bedingt werde, dass die Antheile der Ostoklasten, welche dem Knochen zugewendet sind, zumeist die Form von Kugelflächenstücken oder von ähnlichen gebogenen Flächen annehmen, während der übrige Zellleib so verschiedene Gestalten zeigt, welche ich vorher geschildert habe.

Bei der Beantwortung dieser Frage muss jedenfalls auf mehrere Momente Rücksicht genommen werden, so vor Allem

---

[1] l. c. S. 443.

auf den Wachsthumsdruck der ostoklastischen Zelle, ferner auf den Widerstand, welchen die Knochensubstanz demselben entgegenstellt. Mehrere der von mir geschilderten Bilder weisen direct darauf hin, dass die Gestalt des Ostoklasten auch von dem Drucke beeinflusst wird, welcher in dem betreffenden Resorptionsraume herrscht. Ich meine da diejenigen Bilder, in welchen die Ostoklasten wie plattgedrückt aussehen, oder wo sie durch eine concave Depression die Gestalt convexconcaver Linsen annehmen. Einzelne der hiehergehörigen Bilder lassen die Quelle des Druckes, welcher im betreffenden Resorptionsraume die Gestalt der Ostoklasten so auffallend beeinflusst, in dem Hineinwuchern von Neugebilden vermuthen.

Unter allen Verhältnissen aber wird nicht zu vergessen sein der Druck der Gewebsflüssigkeit, welcher in dem Resorptionsraume, respective in dem Bereiche der Resorptionsfläche vorhanden ist, und von dem später nochmals gesprochen werden muss.

An einigen Stellen meiner Präparate lagen auch Ostoklasten so nahe an einander, dass sich an denselben Formeigenthümlichkeiten einstellten, die auf die Wechselwirkung des Wachsthumsdruckes der einzelnen Zellen bezogen werden müssen.

Der Wachsthumsdruck der Ostoklasten und der Flüssigkeitsdruck sind sehr variable Grössen; der Widerstand der Knochensubstanz hingegen kann wohl fast als constant angesehen werden. Je nachdem nun die variablen Momente sich ändern, wird auch ihr Resultat ein verschiedenes sein.

Die Form der Ostoklasten ist also die Resultirende einer Anzahl von Kräften.

Man muss sich vorstellen, dass in jedem Falle ein bestimmter Wachsthumsdruck der Zelle, ein bestimmter Flüssigkeitsdruck in dem Resorptionsraume, respective im Bereiche der Resorptionsfläche und der Widerstand der Knochensubstanz concurriren.

Um auch die Form derjenigen Ostoklasten zu erklären, von denen je einer zwei oder mehr Lacunen ausfüllt, wird noch auf andere Momente Rücksicht zu nehmen sein.

Manche der hiehergehörigen Bilder sprechen dafür, dass gewisse Partien der Ostoklastenleiber eine grössere Wachsthumsenergie besitzen. Dabei hat die Annahme alle Wahrscheinlichkeit für sich, dass die partiell gesteigerte Wachsthumsenergie zu der

Kernvertheilung in Beziehung steht. An einigen meiner Präparate wurde es mir höchst wahrscheinlich, dass bei der Umwandlung von Gefässendothelien zu Ostoklasten die kernhältigen Stellen der Endothelzellen viel stärker und rascher wachsen, als die zarten Flügel derselben. Es muss demzufolge eine bedeutende Verschiedenheit in der Form und Tiefe der Lacunen, welche von einem derartigen Ostoklasten zugleich eingenommen sind, resultiren.

Für die Ostoklasten, welche, wie beschrieben wurde, in Knochensporne von zwei Seiten Lacunen eingraben, finde ich keine andere Erklärung als die Annahme, dass im Scheitel des Gefässverästigungswinkels der Druck geringer ist, als an den Schenkeln desselben.

Für manche Bilder kann vielleicht eine Verschmelzung der Ostoklastenleiber angenommen werden, wenigstens wird diese durch die Schilderungen der Myeloplaxennetze Wegner's in das Bereich der Möglichkeiten gezogen.

Für die nur ein paarmal beobachtete Form von Ostoklasten, wo ein solcher eine Lacune ganz, von den benachbarten Grübchen aber nur die angrenzenden Antheile bedeckt, ist die Möglichkeit vorhanden, dass es sich hiebei um die Ausbreitung eines Ostoklasten über ein grösseres bereits von Lacunen eingenommenes Gebiet handelt.

Jede dieser angeführten Eventualitäten, welche die Thatsache, dass in selteneren Fällen ein Ostoklast zwei und mehrere Lacunen zugleich ausfüllt, zu erklären suchen, hat mehr Existenzberechtigung, als der Schluss Kassowitz's[1], dass wegen derartiger Bilder die Fähigkeit der Ostoklasten, die Form der Lacunen zu bestimmen, fraglich werde. Es können vielmehr manche dieser Bilder geradezu als Beweise für die formbestimmende Thätigkeit der Ostoklasten angesehen werden.

Eine weitere Reihe von Einwendungen gegen die Ostoklastentheorie Kölliker's stützt sich auf die Thatsache, dass sich in Howship'schen Lacunen ein anderer Inhalt als wie Riesenzellen vorfinden kann.

---

[1] l. c. S. 443.

So finden wir bei Ziegler[1] die Behauptung, dass die Annahme einer directen Abhängigkeit der lacunären Resorption von entsprechenden mehrkernigen Ostoklasten sehr erschüttert werden müsse, „wenn man die schönsten Howship'schen Grübchen ohne dieselben findet". Z. scheint dabei solche Lacunen im Auge zu haben, in denen er bei der Untersuchung von Knochengeschwülsten dieselben Elemente antraf, welche diese zusammensetzen.

Bidder stützt seine früher citirte Anschauung auch darauf, dass er oft „eine ganze Reihe von Lacunen nur mit gewöhnlichen Markzellen ausgefüllt" fand[2]. Ebenso folgert Feurer aus dem Umstande, dass er statt der Myeloplaxen in den Lacunen Markgewebe fand, dass die lacunäre Zerstörung des Knochens auch „hie und da ohne dieselben", also vom „Markgewebe" bewerkstelligt werde[3].

Dabei sieht Feurer in den flachen Ausbuchtungen, welche die Knochenbalken in einem Spondylitisfalle zumeist zeigten, eine „Reparationserscheinung", indem er annimmt, dass die Vorsprünge der früher vorhandenen Howship'schen Lacunen geschwunden seien, „vielleicht durch die kleinen lymphoiden Zellen, die stellenweise in den flachen Vertiefungen liegen"[4].

Ich brauche diesen Einwendungen gegenüber wohl nur darauf hinzuweisen, dass durch zellige Gebilde, welche nicht die früher besprochenen Charaktere der Ostoklasten haben, die Entstehung der Lacunen nicht bewerkstelligt sein kann. Zellen, welche nicht genau in eigene Grübchen hineinpassen, können bei der Frage, ob sie ostoklastische Functionen ausüben, gar nicht in Betracht kommen.

Die „gewöhnlichen Markzellen" Bidder's können die Lacunen ebensowenig gebildet haben, als die „kleinen lymphoiden Zellen" Feurer's im Stande sind, flache, also ihrer Form gar nicht entsprechende Ausbuchtungen in den Knochen einzugraben. Wir müssen vielmehr annehmen, dass sich in den betreffenden Lacunen Ziegler's, Bidder's und Feurer's desshalb Ge-

[1] l. c. S. 367.
[2] l. c. S. 624.
[3] l. c. S. 94.
[4] l. c. S. 118.

schwulstzellen, Markgewebe, Markzellen oder lymphoide Zellen vorfanden, weil die Resorption abgelaufen und die Ostoklasten der Lacunen geschwunden waren, ohne dass es zur Entstehung von Osteoblasten und zur Anlagerung neuer Knochensubstanz an die Lacunenfläche gekommen wäre.

Nicht anders kann ich diejenigen meiner Befunde deuten, wo in Howship'schen Lacunen faseriges Bindegewebe, atrophische Markmasse, verkästes Granulationsgewebe, Markzellen und Markgewebe, oder Geschwulstzellen lagen. Ebenso entfallen die Gründe, welche Volkmann gegen die Annahme Billroth's, dass die Lacunen von den Granulationen geformt werden, anführte.

Volkmann[1] verwies nämlich darauf, dass bei Gelenksvereiterungen oder -verjauchungen die Howship'schen Lacunen nur von Eiter oder Jauche bespült sich vorfinden, und stützte sich ferner darauf, dass beim peripherischen, senilen Knochenschwunde nur atrophisches Bindegewebe die buchtig angenagten Knochen bedeckt. Diese Angaben konnten nicht die Anschauung Billroth's widerlegen; ebensowenig würden sie sich gegen die Ostoklastentheorie zu Felde führen lassen. Auch die spätere Angabe[2] Volkmann's, dass der Schwund der tela ossea „auch da, wo sie ulcerös zerfällt, unter Bildern jener eigenthümlichen Annagungen oder Lacunen“ erfolge, ist nicht als bewiesen anzusehen. Wir haben uns überzeugt, dass die Entstehung der Howship'schen Lacunen ohne die Ostoklasten nicht gedacht werden kann. Die angeführten Einwendungen können daran um so weniger ändern, da sich der Fund der verschiedenartigsten Gebilde in bereits gegebenen Lacunen mit der Ostoklastentheorie Kölliker's sehr gut verträgt.

Gegen die Ausführungen Volkmann's lässt sich auch die wiederholt experimentell geprüfte Erfahrung geltend machen, dass keine Knochenresorption mehr erfolgt, wenn Eiter die Knochenstücke bedeckt. Ich verweise diesbezüglich auf die Angaben Volkmann's[3] selbst, Billroth's[4], Krug's[5] u. A.

[1] Arch. f. kl. Chirurgie, IV. Bd., S. 447.
[2] Handbuch etc. S. 317.
[3] Handbuch S. 289.
[4] Arch. f. kl. Chirurgie l. c. S. 123, 125.
[5] l. c. S. 17.

Auch gegen die bereits citirte Vermuthung Feurer's, dass die flachen Grübchen des Knochenrandes in einem seiner Fälle durch den Schwund der Vorsprünge der Howship'schen Lacunen, die früher vorhanden gewesen sein sollen, entstanden seien, muss ich mich aussprechen.

Ich sehe in diesen flachen Ausbuchtungen nicht, wie Feurer[1], den Nachweis geliefert, „dass und wie die Lacunen verschwinden, wenn die chronische Entzündung und die Knochenresorption aufhört“.

Flache Grübchen können dort erwartet werden, wo die Resorption erst begonnen hat, oder wo sie schwach oder behindert ist. Aus den ersteren Gründen finden wir dieselben an dem Übergangsgebiete zwischen den Resorptions- und Appositionsbezirken.

Wegen der Schwäche der Resorption dürften sich auch in atrophischen Knochen so häufig flache Lacunen finden. Einige meiner Fälle lassen mich ferner annehmen, dass bei Behinderung des Zellenlebens, sei es in Folge eintretender Verkäsung, Verjauchung oder Vereiterung, oder in Folge einer zu excessiven Steigerung des Gewebsdruckes die Resorptionslacunen flach bleiben.

Die Howship'schen Grübchen können also aus verschiedenen Ursachen flach sein und müssen nicht durch den Schwund der Vorsprünge zwischen Howship'schen Lacunen flach werden.

Wir müssen nicht in flachen Grübchen eine „Reparationserscheinung“ erblicken. Und noch mehr: wir dürfen uns nicht vorstellen, dass diese sogenannte „Reparation“ ein häufiger oder regelmässig vorkommender Vorgang sei. Kölliker spricht allerdings die Muthmassung aus, dass die Theilstücke, in welche die Ostoklasten bei der Theilung zerfallen, die Fähigkeit zu resorbiren noch behalten, wenn auch in geringerem Masse. Dem entsprechend sollen die Grübchen immer seichter werden, bis die Fähigkeit zu resorbiren in den Theilstücken der Ostoklasten ganz erlischt „und nach einiger Zeit der entgegengesetzten Platz macht“[2]. Dabei sagt jedoch Kölliker selbst, dass beim Menschen der Übergang der Resorptionsflächen in Wachsthumsflächen in

[1] l. c. S. 118.
[2] l. c. S. 30.

der Regel kein unmerklicher ist[1]. In demselben Sinne sprechen noch zwei Umstände: erstens die Thatsache, dass die grössere Anzahl der Kittlinien von tiefbuchtiger Form ist; zweitens der Umstand, dass sich so oft tiefe Lacunenbuchten mit Osteoblasten ausgefüllt und durch solche von den noch auflagernden Riesenzellen geschieden finden.

Würde wirklich in der Regel der Übergang der Ostoklasten in Osteoblasten ein allmäliger sein, würden in der Regel die Theilstücke der Ostoklasten zur Bildung seichter Grübchen Veranlassung geben, so könnten nicht so häufig die tiefsten Lacunen in Anbildung gefunden werden, und es könnten nicht die Kittlinien so oft tiefbuchtig gestaltet sein.

Ich halte es daher für das entschieden häufigere Vorkommniss, dass die ostoklastische Thätigkeit bereits vor der eintretenden Theilung der Riesenzellen oder zugleich mit der Theilung derselben erlischt.

Ausser den bisher aufgeführten Einwürfen gegen die Resorptionstheorie Kölliker's wurde noch der Umstand in demselben Sinne verwerthet, dass man unter Verhältnissen, die den Fund von Lacunen und Ostoklasten erwarten liessen, diese nicht angetroffen habe.

So gibt Ziegler[2] an, dass die Ostoklasten bei den stürmischen Vorgängen der Entzündung wenigstens in der ersten Zeit fehlen und dass sie auch bei Resorption durch Geschwülste nicht immer vorhanden seien. Gegen den ersten Theil dieser Behauptung sprechen die Resultate der Entzündungsexperimente; gegen dis zweite Angabe kommt in Betracht, dass es mit Stillstand oder Verlangsamung des Wachsthums von Geschwülsten auch zur Unterbrechung der Resorption und zu neuer Anbildung des Knochens kommen muss.

Ebensowenig stichhältig wären Folgerungen, welche aus der Thatsache gezogen würden, dass man Pacchioni'sche Gruben oder andere durch Druck atrophisch gewordene Knochenpartien glatt und ohne Lacunen und Riesenzellen findet. Rustitzky[3]

---

[1] l. c. S. 41.
[2] l. c. S 374.
[3] V. A. l. c. S. 214.

und Murisier[1] zogen aus derartigen Befunden den Schluss, dass es durch Druck zur „einfachen Atrophie“ ohne Lacunenbildung kommen kann. Es wurde dieser Schluss trotzdem gezogen, obwohl sich beide Autoren überzeugten, dass Howship'sche Lacunen mit darin liegenden Riesenzellen bei Experimenten auftraten, welche darin bestanden, dass Murisier Glasstäbchen zwischen Periost und Knochen einschob[2], während Rustitzky Knochen einklemmte[3]. Auch Kassowitz[4] sah in Folge von Ligaturen an Knochen Howship'sche Lacunen entstehen.

Es lassen sich diese Experimentalbefunde ganz leicht mit den Resultaten der Untersuchung von Druckatrophien, die schon eine lange Zeit bestehen, vereinbaren.

Ich fand selbst vielfach bei der Untersuchung Pacchioni'scher Gruben nahe an der glatten oder in Bindegewebsbündel auslaufenden Oberfläche derselben — und diese begleitend — Kittlinien dahinziehen, welche darauf hindeuteten, dass die lacunäre Resorption vorhanden war, aber neuer Knochenanlagerung Platz machte. Wir können also desshalb die Flächen der Pacchioni'schen Gruben und anderer durch lang dauernden Druck entstandener Usuren des Knochens glatt finden, weil die Resorptionslacunen mit neuer, jedoch dünn bleibender Knochenablagerung überkleidet werden. Schon Förster[5] constatirte diese Thatsache, indem er angab, dass der Usur gleich ausglättende Neubildung folgt.

So wenig als es in Folge von Druck zu einer „einfachen Atrophie“ ohne Lacunenbildung kommt, ebensowenig ist es nachgewiesen, dass es eine „glatte Resorption“ gibt. Um jedoch auf die darauf bezüglichen Angaben von Rindfleisch[6], Busch[7] u. A. einzugehen, wird sich bei einer anderen Gelegenheit die passendere Stelle und der nöthige Raum bieten.

Ein Rückblick auf die gemachten Auseinandersetzungen ergibt, dass die Gründe, welche gegen den ersten und wichtigsten

[1] Arch. f. exp. Pathologie, III. Bd., S. 335.
[2] l. c. S. 336.
[3] l. c. S. 216.
[4] l. c. S. 411.
[5] l. c. S. 860.
[6] l. c. S. 511.
[7] Arch. f. klin. Chir., XX. Bd., S. 244., XXI. Bd., S. 178 ff.

Punkt der Kölliker'schen Ostoklastentheorie angeführt wurden, gänzlich unhaltbar sind. Die Howship'schen Lacunen sind also das Werk von Zellen, die obwohl von verschiedener Grösse und Form doch durch ihr eigenartiges Verhalten zu den Lacunen als diejenigen Gebilde deutlich gekennzeichnet sind, welche die Lacunen zur Entstehung bringen und die Form derselben bestimmen.

Der zweite Punkt der Ostoklastentheorie, nach welchem die Ostoklasten auf chemischem Wege die leimgebende Substanz und die Erdsalze des Knochens auflösen, wurde nur wenig angefochten; gleichwohl wurde es vielfach als wunderlich angesehen, dass die weichen Zellgebilde den harten Knochen zum Schwinden bringen können.

Es gibt in der Natur genug Beispiele, dass selbst tropfbare Flüssigkeiten feste Körper in ihrer Form ändern. Geschieht dies nun auf mechanischem oder chemischem Wege, immer ist es Bedingung, dass der Contact zwischen dem formbestimmenden Agens und der festen Materie ein inniger sei. Einen Beleg hiefür liefert die Arbeit der Pflanzenwurzeln an festen Gesteinen, welche überhaupt viele Analogien mit der Knochenresorption bietet[1].

Auch bei der resorbirenden Thätigkeit der Ostoklasten muss der innige Contact dieser mit dem Knochen als Grundbedingung angesehen werden. Dabei kann uns die Annahme Wegner's[2], dass die Ostoklasten den Knochen „durch ihren Wachsthumsdruck zur Resorption bringen", allein nicht völlig genügen. Denn es lässt sich nicht leicht vorstellen, dass die Ostoklasten in den Knochen sich „einschieben", „eingraben" (Wegner), ohne dass ein Moment wirksam wäre, welches die Ostoklasten dazu zwingt in den harten Knochen hineinzuwachsen. Ich kann mir den Umstand, dass die Ostoklasten nicht lieber nur in die Weichgebilde des Markraumes z. B. hineinwachsen, nicht anders als durch die Annahme erklären, dass die Ostoklasten durch den Druck der Gewebsflüssigkeit hieran gehindert sind. Je nach dem Verhältnisse, in welchem der Wachsthumsdruck der Ostoklasten zu dem Gewebsdrucke und zum Widerstande der Knochensubstanz steht,

---

[1] Vgl. Sachs' Handbuch der Experimental-Physiologie der Pflanzen. Leipzig, 1865, S. 188 ff.

[2] l. c. S. 533.

wird die Form der Ostoklasten und die Tiefe der Lacunen verschieden ausfallen.

Wenn wir uns nun fragen, ob die Resorption des Knochens durch die Ostoklasten auf mechanischem oder chemischem Wege erfolge, so werden wir nicht lange zögern, sondern uns für die letztere Annahme entscheiden. Denn für die mechanische Erklärung lässt sich keine Vorstellung gewinnen. Ich muss der Annahme Heuberger's[1] widersprechen, dass Bewegungen der Ausläufer der Ostoklasten auf den Knochen einwirken könnten, wenn derselbe dabei etwas anderes meint, als das Vordringen des wachsenden Protoplasmas in die Knochensubstanz hinein.

Für die chemische Erklärung lässt sich jedoch nicht schwer eine Vorstellung erlangen. Dass das Protoplasma die Fähigkeit habe, die organische Grundlage der Knochensubstanz zu assimiliren und aufzunehmen, kann nach all' dem, was uns die Physiologie über die vitalen Eigenschaften der Zelle lehrt, nicht bezweifelt werden. Es können dagegen auch nicht jene Unterschiede geltend gemacht werden, welche Kölliker[2] zwischen der Substanz der Ostoklasten und dem gewöhnlichen Zellenprotoplasma beobachtete. Kölliker beschreibt nämlich, dass die Hauptmasse der Ostoklasten im Wasser nicht quillt, sich darin wenig verändert und einen bedeutenden Druck erträgt. Er folgert daraus: „sie möchte demnach wie die Substanz der Nervenzellen eine weiche, aber mit einer gewissen Zähigkeit begabte Masse sein.“ Es hat aber gewiss Kölliker am wenigsten die Absicht, dieser Unterschiede wegen den Ostoklasten die vitalen Eigenschaften des Protoplasmas streitig zu machen, und daher ist es auch, meiner Meinung nach, nicht zu missbilligen, wenn, trotz der angegebenen Unterschiede zwischen der Hauptmasse der Ostoklasten und dem Protoplasma anderer Zellen, stets vom Protoplasma die Rede war und ist, so oft es sich um Lebenseigenschaften handelt, die ja allen Zellen als die Bedingungen ihrer Ernährung und Function supponirt werden müssen, so oft also von Assimilation und Aufnahme der Nahrung, eventuell von Secretion, Wachsthum, Fortpflanzung und Bewegung gesprochen wird.

---

[1] Verhandlungen der physikal. medicin. Gesellschaft in Würzburg. N. F. VIII. Bd., S. 33—34.

[2] l. c. S. 23.

Ich halte also die Annahme für geboten, dass das Protoplasma der ostoklastischen Zellen die organische Knochensubstanz als Nahrungsmateriale assimilire und aufnehme und gleichzeitig die Auflösung der Erdsalze besorge.

Auf die Frage, wie das letztere geschehe, gibt es nur zwei Antworten: wir können uns vorstellen, dass das Protoplasma der Ostoklasten eine die Kalksalze lösende Säure erzeuge oder dass es nur der Träger von Flüssigkeiten ist, die noch Basen aufzunehmen im Stande sind, wie dies z. B. Maly[1] für das Blutserum nachgewiesen hat.

Aus Gründen, die schon früher vorgebracht wurden, lässt sich nicht annehmen, dass die Flüssigkeiten, welche noch Basen aufzunehmen im Stande sind, getrennt von den Ostoklasten auf den Knochen einwirken.

Wir fanden ja keine Anhaltspunkte für die Ansicht, dass eine vorbereitende Veränderung der Knochengrundsubstanz, eine Kalkberaubung derselben, der Resorption durch die Ostoklasten vorausgehe. Es bleibt uns daher nur die Annahme, dass das Protoplasma der Ostoklasten aus der Gewebsflüssigkeit diejenigen Substanzen an sich zieht, gleichsam concentrirt, welche die Fähigkeit haben, noch Basen aufzunehmen, womit auch die Anschauungen Kossel's[2] über die elective Thätigkeit der Drüsenzellen übereinstimmen würden, oder wir müssen uns vorstellen, dass die Ostoklasten eine die Kalksalze lösende Säure erzeugen.

Ich halte das erstere nach den Untersuchungen Maly's über die Mittel zur Säurebildung im Organismus für das wahrscheinlichere. Da wir jedoch auch in dem Falle, dass die Verbindungen, welche noch Basen aufzunehmen geeignet sind, aus dem Diffusat des Blutes stammen, eine eigene concentrirende oder elective Thätigkeit des Protoplasmas der Ostoklasten nicht umgehen können, so müssen wir auch die Lösung der Erdsalze des Knochens bei der Entstehung der Lacunen nicht minder wie die Assimilation und Aufnahme der leimgebenden Knochensubstanz als eine Function des Protoplasmas der Ostoklasten auffassen.

---

[1] Zeitschr. f. physiol. Chemie, I. Bd., S. 183 ff.

[2] Über die chemischen Wirkungen der Diffusion. Zeitschr. f. physiol. Chemie, III. Bd., S. 210, 211.

Ich halte dieses daher für den Träger aller der genannten Functionen.

Diese Functionen des Protoplasmas der Ostoklasten halten in der Regel, innig aneinander geknüpft, gleichen Schritt.

In manchen Fällen jedoch, von denen ich im ersten und zweiten Abschnitte berichtete, widerstehen die Fibrillen des Knochens in grösserer oder geringerer Zahl und Länge, allein oder sammt einzelnen dieselben verklebenden Antheilen der Kittsubstanz, der assimilirenden und resorbirenden Thätigkeit der Ostoklasten.

Für diese Annahme sprechen direct die Bilder, welche Ostoklasten in grob oder fein wimperig umsäumte Lacunen wie eingefilzt oder von dem Faserbesatze der Lacunen gleichsam aufgespiesst zeigen.

Es geben uns dieselben genug Anhaltspunkte, um vermuthen zu können, wie es in den Lacunen früher ausgesehen haben mag, die jetzt mit dem Faserbesatze, jedoch ohne Ostoklasten angetroffen werden. Wir müssen daher annehmen, dass in all' den Bildern, welche ich auf unvollständige Resorption bezog, eine ungleichmässige Entwicklung der verschiedenen Functionen des ostoklastischen Protoplasmas die Ursache der Erscheinung abgibt.

Bezüglich der Abstammung der Ostoklasten steht die Lehre Kölliker's ebenfalls wohl fundirt da. Die häufig vorkommende und so rasch sich vollziehende Umwandlung von Anlagerungsflächen in Resorptionsflächen spricht sehr zu Gunsten der Annahme Kölliker's, dass die Ostoklasten aus den Osteoblasten sich entwickeln.

Es wird jedoch in diesen nicht die alleinige Quelle der Ostoklasten zu erblicken sein.

F. v. Mandach[1] gibt in Bezug auf die Resorption des perivasculär neugebildeten Knochens an, dass es die der Capillarwand aufliegenden Spindelzellen höchst wahrscheinlich sind, „welche durch Vergrösserung und Theilung bei der Entzündung das die Gefässe umgebende zellenreiche Gewebe, die Riesenzellen, Spindel und Rundzellen liefern; wenigstens sieht man im Anfang des Entzündungsprocesses statt der schmalen Spindelzellen

[1] l. c. S. 196.

grössere protoplasmareiche Spindeln der Capillarwand anliegen". Und Schwalbe[1] vermuthet, dass im Falle der Knochenresorption wahrscheinlich das Endothelhäutchen der inneren Knochenfläche durch eine Ostoklastenschichte ersetzt werde.

Ich halte diese Annahmen Mandach's und Schwalbe's für berechtigt. Auch meine Präparate sprechen vielfach dafür, dass die Endothelien der Lymphräume des Knochens zu Ostoklasten werden können. Ja ich möchte sogar vermuthen, dass die Ostoklasten sehr häufig von den Endothelzellen der perivasculären und perimyelären und subperiostalen Lymphräume abstammen.

Für die Endothelien der Havers'schen Gefässe kann auf Grund meiner Bilder die Möglichkeit der Umwandlung in Ostoklasten nicht bezweifelt werden.

Wir können wohl annehmen, dass das Protoplasma von all' den Zellen, welche der Knochensubstanz nahe anliegen, unter Umständen ostoklastische Functionen übernimmt.

Diese Erweiternng der Resorptionslehre Kölliker's ist meinem Dafürhalten nach geboten.

Ich sehe übrigens in der Annahme, dass die Ostoklasten genetisch verschieden sind, nicht, wie Ziegler[2] meint, eine Gefahr für die Haltbarkeit der Ostoklastenlehre selbst, da hieraus nicht gefolgert werden kann, dass die Ostoklasten desshalb auch bezüglich ihrer Function nicht so eng „specifisch" aufzufassen sind.

Auch bezüglich des Endschicksals der Ostoklasten führt mich die Betrachtung der verschiedenen Appositionsbilder zur Übereinstimmung mit Kölliker, welcher annimmt, dass die Ostoklasten zu Osteoblasten werden. Ich halte es für wahrscheinlich, dass dies nicht nur auf dem Wege der Theilung, sondern auch durch das Freiwerden von endogen in den mehrkernigen Ostoklasten differenzirten Zellen vor sich gehe. Über das Schicksal der klein und einkernig bleibenden Ostoklasten könnte ich nur Vermuthungen aussprechen. Wohl aber nöthigen die Erfahrungen an den erkrankten und atrophischen Knochen zu der

---

[1] l. c. S. 138.
[2] l. c. S. 367.

Annahme, dass unter gewissen localen oder in Allgemeinzuständen begründeten Verhältnissen die Ostoklasten nicht Osteoblasten liefern. Es finden sich so häufig Howship'sche Lacunen von Markgewebe, von Bindegewebe bedeckt oder auch mit zerfallenen und amorphen Massen erfüllt, dass wir annehmen müssen, dass die Ostoklasten auch Zellen entwickeln können, die keine osteoblastischen Functionen haben und dass sie, wie es ja selbstverständlich ist, bei pathologischen Processen ebenso zu Grunde gehen können, als alle übrigen Zellgebilde. Die Ursachen für alle Veränderungen der Ostoklasten, welche nicht zur Entstehung von Osteoblasten führen, müssen aber in local oder allgemein herrschenden abnormen Zuständen, nicht in den Ostoklasten selbst gesucht werden.

Manche meiner Bilder könnten die Vermuthung stützen, dass aus Ostoklasten auch Zellen von Neugebilden entstehen können. Und einmal konnte ich den unmittelbaren Übergang des Protoplasmas eines Ostoklasten in reticulirtfibrilläre Intercellularsubstanz constatiren.

Mit Rücksicht auf die Pathologie der Knochen ist also eine Erweiterung des Theiles der Resorptionstheorie Kölliker's ebenfalls geboten, welcher von dem Schicksale der Ostoklasten handelt. Aus den Ostoklasten können nicht nur Osteoblasten, sondern Zellen von verschiedenem Charakter entstehen; die Ostoklasten können sich in Zellen und Zwischensubstanz differenziren und bei Aufhebung der genügenden Ernährung zu Grunde gehen.

Es erübrigt nun noch die Besprechung des letzten Punktes der Ostoklastentheorie. Kölliker nimmt an, dass das Protoplasma (der Osteoblasten) durch den Druck zur Entfaltung der ostoklastischen Eigenschaften gereizt werde.

Schon die Ergebnisse der Experimente, welche die Einwirkung des Druckes auf den Knochen zum Gegenstande hatten, sprechen sehr zu Gunsten dieser Annahme.

Die Erklärung, welche Kassowitz dem Auftreten der lacunären Resorption bei Einwirkung von Druck, z. B. unter angelegten Ligaturen, zu Grunde legt, scheint mir nicht stichhältig. Kassowitz meint nämlich, dass unter solchen Verhältnissen die Annäherung der Gefässe an den Knochen die Ursache

der lacunären Resorption sei [1]. Wenn wir nun die engen Havers'schen Canäle betrachten, so wird es undenkbar, dass sich hier durch eine kaum mehr mögliche noch gesteigerte Annäherung ein so sehr von der Norm abweichender Zustand, wie es die Entstehung der Howship'schen Lacunen ist, herbeiführen liesse. Ich kann daher Kassowitz, welcher überhaupt die Resorption auf eine Annäherung, die Apposition auf eine Entfernung der Gefässe respective ihrer „Saftströmung" zurückführen will, nicht beipflichten und ebensowenig Schulin [2], der einen ähnlichen Gedanken aussprach.

Ausser den angezogenen Experimenten sprechen noch alle Erfahrungen, welche man bei den in Knochen hinein vordringenden Geschwülsten machen kann, entschieden für die Ansicht Kölliker's, dass der Druck eine Grundbedingung der lacunären Resorption sei. Es ergab auch die Betrachtung der verschiedenen Formen der Ostoklasten und die Überlegung, dass ausser dem Wachsthumsdrucke noch andere Momente bei der formbestimmenden Thätigkeit der Ostoklasten angenommen werden müssen, neue Gründe für die Annahme Kölliker's.

Wenn wir uns daher nach einer Reizursache für die Erwerbung der ostoklastischen Eigenschaften von Seite der Zellen umsehen, so wird nach alledem die Annahme, dass der Druck diesen Reiz abgebe, am meisten Wahrscheinlichkeit für sich haben.

Diese Annahme kann aber nur dann aufrecht erhalten werden, wenn es sich nachweisen lässt, dass nicht nur auf der äusseren Oberfläche des Knochens, sondern auch in den Binnenräumen desselben ein Druck existire.

Kassowitz [3] wendet gegen die Existenz eines solchen ein, dass in der Markhöhle neben den fortgesetzten Einschmelzungen ein Druck unmöglich sei. Und Rindfleisch folgert aus der Schwierigkeit, mit der Injectionen des Knochenmarkes gelingen, dass für dieses das Circulationsschema der übrigen Organe nicht

---

[1] l. c. S. 407, 444 und Medic. Jahrb. 1880, 3. Heft, S. 347.

[2] Zeitschr. f. Anatomie und Entwicklungsgeschichte. II. Bd. 1877. S. 206.

[3] l. c. S. 444.

passe. Ebenso verhalte es sich mit dem auch in eine knöcherne Kapsel eingeschlossenen Centralnervensysteme[1]. Rindfleisch nimmt an, dass die Schädelkapsel durch die Hirnsubstanz hindurch den Gefässwandungen eine feste Stütze verleihe, dass die Strömung sich mehr wie in starren Röhren fortbewege, indem der Druckunterschied fast ganz in Geschwindigkeit und nur wenigentheils in Wandspannung übergeführt werde. Da jedoch der liquor cerebrospinalis noch entweichen kann, so habe das Gesagte beim Centralnervensystem nur beschränkte Geltung. Anders sei es im Knochenmarke[2]. R. sagt hierüber Folgendes: „Von irgend einem Drucke, der unparirt von der knöchernen Kapsel auf der Stelle ruhte, wo der Blutstrom das Knochenmark berührt, also auch an der Stelle der Gefässwand, ist gar nicht die Rede". Steigerung des Blutdruckes vor dem Knochen bewirke nur grössere Geschwindigkeit im Knochenmarke, u. s. w.[3] Rindfleisch stützt sich dabei darauf, dass nach seinen Untersuchungen die Venen des rothen Knochenmarkes und der grösste Theil der Capillarenbahnen gar keine eigenen Wandungen besitzen, und dass die Dickenentwicklung der Gefässwandung im geraden Verhältnisse zum Druck stehe[4].

Wenn diese letztere Annahme richtig wäre, und in den Venen des Knochenmarkes und in den betreffenden Capillarbahnen kein Druck existirte, so müsste das auch in den wandungslosen Blutbahnen der Milz[5] der Fall sein. Diese Annahme lässt sich nicht halten; dabei fehlt der Milz aber die knöcherne Kapsel, welche nach Rindfleisch den Blutdruck „pariren" könnte.

Ferner lässt sich wohl nur annehmen, dass der Markmantel, welcher nach Rindfleisch den Leimabgüssen der Venen des Knochenmarkes anhaftet, die Stelle der Gefässwand vertritt, da es ja nicht bezweifelt werden kann, dass sich das Blut durch das Knochenmark in präformirten Bahnen bewegt. Auch hat ander-

---

[1] Über Knochenmark und Blutbildung. Arch. f. mikr. Anatomie, XVII. Bd., S. 5.

[2] l. c. S. 6.

[3] l. c. S. 7.

[4] l. c. S. 8.

[5] Vgl. Stricker's Handbuch, Cap. X. Die Milz, von W. Müller, S. 258.

seits Langer[1] die Venen des Knochenmarkes nur als sehr dünnwandig beschrieben. Langer meint nur, dass der Druck im Bereiche der Venen auf ein Minimum sinken und der Blutlauf sehr retardirt sein müsse, wobei jedoch Klappen den Rücktritt des Blutes hindern.

Ich glaube also, dass das Argument, welches Rindfleisch in der von ihm angenommenen Wandungslosigkeit der Venen und Capillarenbahnen des Knochenmarkes für seine Ansicht finden will, nicht zureichend ist.

Die Annahme, dass die knöcherne Kapsel den Blutdruck in den Gefässen parire, wäre höchstens dann in Betracht zu ziehen, wenn die Gefässe der Knochencanäle und des Knochenmarkes direct von der Knochensubstanz ummauert wären. Dies ist jedoch durchaus nicht der Fall. Wohin käme es auch, wie könnte das Leben der zelligen Gebilde erhalten bleiben, wenn es keine Transsudation aus den Blutgefässen und keinen Lymphstrom gäbe? Bereits v. Recklinghausen legte dar, dass die Triebkraft der Lymphe zum grössten Theile aus dem Blutgefässsysteme stammt, und dass der Austausch der Gewebsflüssigkeit nothwendig ist. Die Abfuhr dieser ermöglicht den weiteren Übertritt von Flüssigkeit aus dem Blute in das Gewebe und verhindert, dass der Druck im Gewebe dem Blutdrucke gleich wird[2].

Es wäre also das Leben im Knochen unter den Umständen, welche Rindfleisch annimmt, gar nicht möglich. Seine Anschauung von den Circulationsverhältnissen im Knochenmarke verliert aber vollends ihren Halt gegenüber den physikalischen Experimenten, welche Moriz Körner seiner Abhandlung: „Die Transfusion im Gebiete der Capillaren und deren Bedeutung für die organischen Functionen im gesunden und kranken Organismus"[3] zu Grunde gelegt hat.

---

[1] l. c. S. 7.

[2] Das Lymphgefässsystem. Stricker's Handbuch, S. 214.

[3] Allgem. Wiener medicin. Zeitung 1873, Nr. 17 ff. 1874, Nr. 1 ff.

Da die Experimente Körner's, sowie die Lehren, welche derselbe darauf basirte, nur wenig Beachtung fanden, so lasse ich die Skizze eines seiner Versuche folgen.

Körner's Experiment besteht darin, dass in ein Glasreservoir Wasser gethan und ein dünnwandiges Darmrohr durchgeleitet und wasserdicht eingefügt wird. Durch das Darmrohr lässt man, da es sich bei dem

Auch die Einwendung, welche Kassowitz gegen das Herrschen eines Druckes in den Resorptionsräumen erhob, kann nicht gebilligt werden. Man kann alles früher aus der Erweiterung eines Raumes folgern als, dass hiebei das Bestehen eines Druckes in dem betreffenden Raume unmöglich sei.

Ich bin daher überzeugt, dass Kölliker's Annahme, dass ein Druck das Protoplasma zur Entfaltung seiner ostoklastischen Thätigkeit reizt, auch in den Binnenräumen des Knochens am Platze ist. Ja diese Annahme scheint mir die einzig mögliche zu sein. Sie gibt uns eine Erklärung für die Entstehung der Ostoklasten, sie lässt uns verstehen, wie die Ostoklasten veranlasst werden in den harten Knochen hineinzuwachsen, sie ist unentbehrlich, um die verschiedenen Formen der Ostoklasten und Lacunen zu erklären.

Versuche nur um das Studium der hydraulischen Verhältnisse und nicht um Diffusion handelt, Wasser unter constant bleibendem Drucke durchströmen. Sowie es der Fähigkeit aller thierischen Membranen und gewiss nicht minder der der Capillarenwand entspricht, transsudirt in Folge des Druckes Flüssigkeit in das Reservoir.

Um die Druckwerthe in der das Darmrohr umgebenden Flüssigkeit des Reservoirs („Gewebsflüssigkeit"), sowie die Druckwerthe in dem zum Darmrohre zuleitenden („arteriellen") und davon ableitenden („venösen") Glasrohre zu bestimmen, werden Manometer angebracht.

Bald nachdem der Flüssigkeitsstrom eröffnet worden, beginnt der Druck des Reservoirmanometers („Gewebsdruck") zu steigen, zugleich nimmt der „arterielle" Druck zu, der „venöse" ab, endlich sinkt letzterer immer mehr und damit auch das Ausflussquantum. Der Druck der Gewebsflüssigkeit beginnt sich der Höhe des arteriellen Druckes zu nähern. Das Darmrohr wird zuletzt in der Nähe des venösen Abflusses zusammengedrückt und endlich gänzlich verschlossen, womit der Ausfluss aufhört.

Dies alles desshalb, weil während des Flüssigkeitsstromes immer mehr Flüssigkeit in das Reservoir übertrat, und hier den äusseren Druck bis zur gänzlichen Überwindung des Innendruckes im Darmrohr, der in der Nähe des Abflusses am geringsten sein muss, steigerte.

Dass trotz dieser physikalischen Verhältnisse der Blutstrom und damit das Leben bestehen kann, liegt nur darin begründet, dass die Natur für abführende Bahnen gesorgt hat.

Es bleibt der geschilderte Erfolg des physikalischen Experimentes aus, wenn das Flüssigkeitsreservoir eine die Verhinderung des Überdruckes ermöglichende Abflussvorrichtung hat, durch die alles, was durch das

Doch hielte ich es für gerechtfertigt, statt Druck präciser zu sagen: Steigerung des Blutdruckes und dadurch bedingte quantitative und qualitative Änderung der Gewebs-, d. i. der Ernährungsflüssigkeit. Dadurch gewinnen wir einen einheitlichen Standpunkt, von welchem aus wir uns das Auftreten der Howship-schen Lacunen ungezwungen erklären können, ob es sich um Druckatrophien, um Druckexperimente, um die typischen Resorptionen der wachsenden Knochen, oder um die lacunäre Resorption handelt, welche die Entzündung und alle Erkrankungen des Knochens begleitet.

Freilich lässt es sich nicht läugnen, dass es doch einen Punkt gibt, welcher gegen die vertretene Auffassung sprechen könnte. Ich meine den Umstand, dass Howship'sche Lacunen ganz isolirt und knapp neben fortbestehender Apposition vorkommen können. Es scheint uns an solchen Stellen schwer denkbar, dass auf so geringe Distanzen Unterschiede in den Druckverhältnissen bestehen sollten, wie dies nach dem Vorhergehenden angenommen werden müsste.

Ich kann aber diesem einen Punkte, der vielleicht doch einmal seine befriedigende Lösung finden dürfte, nicht die Entscheidung über die Ostoklastentheorie Kölliker's anheimgeben, und zwar aus einem guten Grunde. Es bereitet nämlich die Erklärung des isolirten Vorkommens einzelner Howship'scher Lacunen und des nachbarlichen Verhältnisses, welches oft zwischen Re-

---

transfusible Rohr in die Gewebsflüssigkeit in Folge des Druckes hinaustritt, auch wieder abgeht.

Ohne die so physikalisch geforderten Abflussbahnen könnte der Organismus nicht existiren. Es sind diese auch in den Saftbahnen, Lymphräumen, in den Lymphcapillaren und Lymphgefässen gegeben und fehlen, wie bekannt, auch den Knochen nicht.

Wenn man, wogegen kein genügender Grund vorliegt, das an Wasser so überaus reiche Knochenmark mit dem Wasser des Reservoirs des beschriebenen Experimentes in Bezug auf die obwaltenden hydraulischen Momente in Parallele stellt, so kann man in dem skizzirten Experimente Körner's ein Schema der Verhältnisse erblicken, welche innerhalb der starren Kapsel der Knochenröhre bestehen.

Ich habe diese Experimente in den Vorlesungen des verstorbenen Professors Körner und seitdem wieder in denen des Prof. R. Klemensiewicz wiederholt gesehen.

sorption und Apposition angetroffen wird, allen Resorptionstheorien dieselben Schwierigkeiten. Keine unter allen hat hiefür eine passende Deutung. Während jedoch die Ergebnisse dieser Untersuchungen mit der Resorptionstheorie Kölliker's sich völlig vertragen und diese bestätigen, konnte keine andere aller Ansichten über die Entstehung der Howship'schen Lacunen mit den Thatsachen vereinbart werden. Nur die Kölliker'sche Ostoklastenlehre allein entspricht den thatsächlichen Verhältnissen.

Verzeichniss der untersuchten Fälle.

1. Quere Fractur des linken Oberarms, 12 Tage bestehend.
   11 Monate alter Knabe.
2. Fungöse Caries des Elbogengelenkes.
   65 Jahre alter Maurer.
3. Fungöse Gelenksentzündung der 1. Phalanx des 5. Fingers.
4. Fungöse Caries des linken Elbogengelenkes.
   28 Jahre alter Knecht.
5. Tuberculöse Caries des linken Elbogengelenkes.
   15 Jahre alte Magd.
6. Chronische eiterige Gonitis sinistra.
   35 Jahre alter Sattler.
7. Caries der linken Fusswurzelknochen.
   60 Jahre alter Schuhmacher.
8. Caries der Fusswurzelknochen.
9. Caries der rechten Fusswurzelknochen.
   44 Jahre alte Magd.
10. Caries der linken Fusswurzel.
    56 Jahre alte Bedienerin.
11. Syphilitische Ostitis des Schädels.
    34 Jahre alter Apotheker.
    Im angulus frontalis des linken Scheitelbeines eine durchgreifende, bohnengrosse, buchtige mit graurothem, gallertigem Gewebe ausgefüllte Lücke. In der Umgebung die tabula vitrea 1 Mm. tief exedirt und ringsherum nur mit dem Messer von der halb bis 1 Cm. dicken callösen Dura meninx abzulösen. Dabei syphilitische Leptomeningitis, Arteriitis und Encephalitis; syphilitische Atrophie des Schädels, seicht gelappte Leber.

12. Syphilitische Atrophie der Scheitelbeine.
    52 Jahre alter Zimmermann.
13. Syphilitische Ostitis des Schädels.
    43 Jahre alte Taglöhnersfrau.
    Die Innenfläche der rechten Stirnbeinhälfte mit der Dura durch käsig-gelbe Granulationen verbunden, unregelmässig zernagt und weit um diese über thalergrosse Stelle mit Osteophyten bewachsen. Daneben syphilitische Caries der linken und rechten Clavicula und der rechten Tibia. Defect des mittleren Theiles des linken Schlüsselbeines.
14. Pacchionische Usur der Scheitelbeine.
    51 Jahre alter Taglöhner.
15. Peripheres Enchondrom des Zeigefingers der rechten Hand.
    23 Jahre alter Knecht.
16. Metastatisches fibröses Carcinom des rechten Oberarmhalses nach Exstirpation eines rechtseitigen Brustdrüsencarcinoms.
    47 Jahre alte Magd.
17. Metastatisches Carcinom des rechten Femur.
    63 Jahre alte Inwohnerin.
    Die Femurmitte durch die ziemlich trockene, griesige Aftermasse spindelförmig aufgetrieben, darunter quer fracturirt.
    Der grosse Trochanter davon substituirt. Daneben Carcinom des rechten Oberarmkopfes, der 6. linken Rippe. Carcinom der rechten Lunge.
18. Epithelialcarcinom im Alveolarfortsatze des Unterkiefers.
    42 Jahre alter Schmied.
19. Metastatisches Sarcom des linken Scheitelbeines.
    58 Jahre alter Taglöhner.
    Die Dicke des linken Scheitelbeines bis auf eine dünne, äussere, geröthete Schichte von einer bohnengrossen, grauröthlichen, durchscheinenden Aftermasse eingenommen. Der linkseitige harte Gaumen und Alveolarfortsatz des Oberkiefers von der ähnlichen, zerfallenden, blutenden Neubildung substituirt und besetzt.
20. Das Olecranon und Capitulum radii des linken Armes.
    36 Jahre alte Fabriksarbeiterin.
    Die Obduction ergab hochgradige Abzehrung in Folge tuberculöser Lungenphthise; allgemeinen Hydrops.
21. Brüchige Rippe.
    84 Jahre alter Taglöhner.
22. Brüchige Rippe, 4. linkerseits.
    52 Jahre alte Inwohnerin.
    Die Obduction ergab Brightische Nieren mit allgemeinem Hydrops.
23. Diaphyse des linken Femur.
    70 Jahre alte Pfründnerin.
    Die Rinde des Femur von gewöhnlicher Compactheit und Dicke. Tod in Folge Gangraena senilis pedis sin.

24. Fracturirte 4. und 5. linke Rippe; compl. Fractur des grossen Trochanters des linken Oberschenkels; Crista ossis ilei dextri.
 75 Jahre alte Keuschlerin.
 Hochgradiger Marasmus; Curvatur der Wirbelsäule; grosser Decubitus. Rechterseits die 3., 4. und 5. Rippe gegen die Axillarlinie zu gebrochen, linkerseits die 2.—8. Rippe in einer schief in die Axillarlinie ziehenden Linie. Zellgewebe und Pleura diesen Stellen entsprechend suffundirt. Ebenso das Zellgewebe und die Muskeln an der Bruchstelle des linken Femur, dessen Bruchstücke zum Theil abgeschliffen erscheinen. Sämmtliche Knochen stark porotisch. Das Mark braunroth, sehr weich, fast zerfliessend. Das Rückenmark blutarm, feucht, im Übrigen für das freie Auge normal.
25. 3. rechte und linke Rippe; crista ossis ilei dextri; 3. Lendenwirbelkörper.
 47 Jahre alte Taglöhnersfrau.
 Die Obduction ergab Abzehrung in Folge tuberculöser Lungenphthise; Pyopneumothorax.
26. Anchylose des linken Kniegelenkes mit hochgradiger exc. Atrophie der Patella und der Condylen des Femur.
 71 Jahre alte Inwohnerin.
 Die angegebenen Knochen mit gelbem, öligem Fette erfüllt. Dabei der l. Musc. quadriceps lipomatös; chronische indurirende Pneumonie. Marasmus.
27. 3. rechte Rippe.
 70 Jahre alter Gärtner.
 Die Rippe liess sich leicht mit der Schere schneiden und brechen.
 Tod in Folge tuberculöser Lungenphthise.
28. 4. und 5. linke Rippe; crista ossis ilei sin; 4. Lendenwirbelkörper; Diaphyse der linken Tibia.
 82 Jahre alte Inwohnerin.
 Die Rippen ziemlich schwer zu knicken, auch die übrigen Knochen schwer sägbar. Das Mark derselben rothbraun, in der Tibia aber gelb. Tod an eiteriger rechtseitiger Pneumonie.
29. Carcinommetastase in der 4. rechten Rippe.
 64 Jahre alter Knecht.
 Carcinoma med. der linken Niere; Metastase in den Lungen.
30. 3. und 4. linke, 3. und 5. rechte Rippe.
 79 Jahre alter Mühlknecht.
 Die Rippen ziemlich leicht knickbar.
 Chron. Tuberculose der Lungen. Endarteriitis der Aorta.

Erklärung der Abbildungen.

[Sämmtliche Bilder wurden mit der Camera lucida (Oberhäuser) entworfen und bei der Benützung derselben die von Malassez[1] und Sachs[2] gegebenen Rathschläge befolgt.

Die Präparate wurden entweder von entkalkten oder unentkalkten Knochen genommen. Die Entkalkung mittelst Chromsäure wird stets mit Cr, die mittelst Müller'scher Flüssigkeit, welche nur unvollständig entkalkt, jedoch gut schnittfähig macht, mit M. Fl., die mittelst salzsäurehältiger Kochsalzlösung mit HCl + ClNa bezeichnet werden. Die verschiedenen Einschliessungsflüssigkeiten mache ich durch Gl (Glycerin), K. a. (Kali aceticum), F. L. (Farrants Lösung) erkennbar.]

Tafel I.

Fig. 1. Ausfaserung von Lacunen mit glänzendem Rande, bis zu welchem die Knochencanälchen zu verfolgen sind. Die Fasern zart, wellig, zum Theil in Bündelform dicht gestellt, zum Theil durch den Versuch, dieselben wegzupinseln und wegzuzupfen, zerrissen. Fall 11. Cr + HCl. Safranin. Gl. 420.

„ 2. Zwei Lacunen eines Havers'schen Resorptionsraumes senden radiär auf die Lamellenzüge stehende Fasern aus. Fall 17. HCl + ClNa. Carmin Gl. 420.

„ 3. Ein zarter glänzender Rand umsäumt die meisten Lacunen. Dabei Ausfaserung derselben. Die Resorption nähert sich beiderseits Kittlinien. Links begrenzt den Schnitt ein Markraumrand. Fall 13. Cr. F. L. 420.

„ 4. Eine grosse lacunäre Bucht im Durchschnitte, zwei benachbarte, in verschiedener Höhe gekappt; von diesen die der ersteren nahen Partien gezeichnet.
Die Mulden derselben mit starren Faserstücken gefüllt und belegt. In der ersteren entspringen solche direct der Wand und füllen auch den Hohlraum; darin eine central lagernde Riesenzelle, deren Kerne bläschenförmig sind; dieselbe unten zu ohne scharfe Grenze. Die Ränder der Lacune ohne glänzenden Saum. Fall 19. Cr. F. L.

---

[1] Note sur la mesure des grossissements microscopiques. Arch. de phys. etc. 1878, pag. 79.

[2] Centralblatt f. d. m. Wiss. Nr. 41, 1879 im Referate über [1].

Fig. 5. Der glänzende Rand der seichten Lacunen gezähnelt. Der Inhalt der einen grossen Zelle fettig glänzend, intensiv gefärbt von Safranin. Nur wenige Fasern durchziehen die feinkörnige, an Markzellen arme Masse, welche sich zum Theil von dem Knochenrande ablöst. Fall 20. Cr + HCl. Safranin. Gl. 420.

„ 6. Eine tiefe lacunäre Bucht mit glänzendem Saume. Fall 15. Cr. F. L. 420.

„ 7. Die tiefe Einstellung zeigt die Kämme zwischen den Lacunen als glänzende Säume. Eine riffige Riesenzelle liegt nahe. Wie Fig. 6.

„ 8. Die glatte Oberfläche eines Balkens, mit in Reihen angeordneten, glänzenden Erhabenheiten überkleidet; s. Text. Fall 2. M. Fl. F. L. 420.

„ 9. Lacune in Ausfaserung zarter glänzender Saum. An beiden Flanken ist der Schnitt etwas dicker und zeigt Abschnitte der Lacunenfläche. Fall 13. Cr. F. L. 420.

„ 10. Lacunen dringen in der Richtung einer Kittlinie tief ein, ihr Rand zum Theil glänzend gezähnelt, zumeist jedoch in Ausfaserung. Die Fasern starr. Fall 22. Cr. + HCl. K. a. 420.

„ 11. Faseriges Gitterwerk bleibt bei der Resorption erhalten und wird zum Gerüste des Sarcoms. Die zwei Riesenzellen zeigen eine riffige Oberfläche und greifen mit Zapfen in den Knochen vor. Die Lacunenränder glänzend, theils glatt, theils gezähnelt, auch ausfasernd, besonders die muldig vertiefte Partie zwischen den beiden Riesenzellen. Ein dreieckiges Knochenstückchen liegt fast gänzlich von der Lacunenlinie losgetrennt. Fall 19. Cr. F. L. 420.

„ 12. Seichte Lacunen mit hellglänzendem, wallartigen Rande, dessen scheinbar dickere Stelle, oben, die Einstellung als eine Knickungsstelle des Schnittes aufklärt. (S. Text.) Die mattbräunliche, geronnene Markmasse enthält zahlreiche Körnchen und einige Blutkörperchen. Eine krümelige Zone und grössere, gelb pigmentirte Zellen begrenzen gegen den Markraum zu den Schnitt. Fall 22. Cr + HCl, K. a. 420.

„ 13. Ein durchbohrender Gefässcanal mit hellglänzenden, zackigen Rändern. Erweiterte Knochenkanälchen und eröffnete Knochenhöhlen münden ein. Fall 3. Cr. F. L. 420.

„ 14. Der Lacunengrund wie von glänzenden Tröpfchen besetzt, die an den Lacunenrändern in die gezähnelten und glatten glänzenden Säume übergehen. Eine Lacune sehr klein mit innelagernder Rundzelle. (S. Text.) Fall 2. M. Fl. F. L. 420.

„ 15. Die Einmündungsstelle eines durchbohrenden Gefässcanals von glänzenden, unregelmässig breiten Säumen umgeben, die zwei Knochenkörperchen in sich einschliessen und zum Theil von Osteoblasten bedeckt sind. Apposition. Fall 15. Cr. F. L. 420.

Fig. 16. Zwei Lacunen, die eine schräg, die andere im scharfen Profil durchschnitten. Erstere zeigt daher einen halbmondförmigen Abschnitt ihrer Aushöhlung, die bis auf einen durchziehenden Kamm und bis auf einige feine Stricheln glatt erscheint; zwei kleine Fetttröpfchen liegen ihr auf. Die andere besitzt einen dicht wimperigen Saum, in welchen ein Knochenkörperchen ausmündet. Fall 17. Cr.+HCl. Safranin. Gl. 420.

„ 17. Der glänzende, wie überwulstete Saum der seichten Lacune ist mit feinen Spitzen besetzt. Fall 20. Cr.+HCl. 420.

„ 18. Seichte Lacunen mit glänzendem, doppeltcontourirten Rande, der theils in hoher, theils in tiefer Einstellung gezeichnet ist. Das sonst schleimig reticuläre Markgewebe hier faserig mit kleineren und zwei grösseren Zellen. Eine Lacune mit Spitzchen besetzt. Fall 20. Cr.+HCl. Safranin. Gl. 400.

„ 19. Ein dicker Schnitt enthält eine in der Weise doppelt gekappte Lacune, dass die darin liegende Riesenzelle von einer Knochenbrücke niedergehalten ist. Der Kopf der Riesenzelle besitzt Zacken, welche genau den Unebenheiten der correspondirenden Lacunenwand entsprechen. Der übrige Rand der Lacune überall glatt und glänzend, wie aufgewulstet. (Hier, bei tieferer Einstellung gezeichnet, nur an dem oberen Pole deutlich.) Die Riesenzelle greift in eine Kittlinie vor. Fall 19. Cr. F. L. 420.

„ 20. Seichte Lacune mit gezähneltem, glänzendem Saume. Aus der Tiefe leuchten an ihrem Abhange helle „Perlen“ empor, die, wie die tiefere Einstellung noch deutlicher zeigt, auch reihig angeordnet sind.

Feiner und gröber granulirte, braunpigmentirte Masse trennt den Knochen von einem Zuge faserigen Bindegewebes, der besetzt ist von granulirten und homogen glänzenden Zellen von verschiedener Form. Daneben auch rothe Blutkörperchen. Fall 22. Cr.+HCl. K. a. 400.

„ 21. Übersichtsschnitt des Schädelsarcomknotens. Fall 19. Rechts (innen) neugebildete Knochenbalken im Knoten; links (aussen) Rest des compacten Knochens mit seiner Riesenzellenzone. S. Text. Vergrösserung 6 (linear).

Tafel II.

Fig. 22. Eine grobgranulirte Riesenzelle liegt dem Knochen innig an und erscheint in dieser Zone deutlich gestrichelt. Die Grenze des Knochens zackig, starkfaseriges Sarcomgewebe schliesst sich der Riesenzelle an. Fall 19. Cr. F. L. 420.

„ 23. Eine Riesenzelle sondert sich deutlich in einen — den Sarcomzellen ähnlich — homogen glänzenden, gelblichen Klumpen und in eine körnige, oberflächlich stachelige, kernlose, blasse Protoplasmazone.

Der feinwimperige Lacunenrand aussenzu glänzend umsäumt. Fall 19. Cr. Gl. 420.

Fig. 24. Ein Gefäss, dessen Adventitia zwei Riesenzellen anliegen. Glänzende Lacunensäume. Lacunenmulden. Wie Fig. 23.

„ 25. Zwei Riesenzellen umfassen den aus rothen und ungefärbten Blutkörperchen und aus grösseren, homogen glänzenden, verschieden gestalteten Zellen bestehenden Inhalt eines Havers'schen Canals. S. Text. Fall 17. HCl + ClNa nach M. Fl. Carmin. Gl. 420.

„ 26. Ein protoplasmatischer Ring, vielfach verbogen und geknickt, liegt im zellenarmen Inhalt eines Havers'schen Raumes, dessen fast kreisförmiger Contour zum Theil die Lamellen durchschneidet, zum Theil denselben entlang von verschieden breiten und hellglänzenden Säumen umzogen ist. An dem Reste eines eingeschachtelten Lamellensystems liegen in mehreren kleinen Gruben spindelförmige Zellen. Der Havers'sche Raum communicirt mit einem benachbarten Markraum, den eine von Carmin rothgefärbte Schichte (Anlagerung) umzieht. Fall 17. Nach M. Fl. HCl + ClNa. Carmin. Gl. 420.

„ 27. S. Text. Wie Fig. 26.

„ 28. Drei Riesenzellen werden durch Osteoblasten vom Knochen getrennt. S. Text.

Die obere Partie des Bildes zeigt die Anbildung des Knochens unter Vermittlung präformirter Faserstränge, zwischen denen grosse Osteoblasten reihig angeordnet lagern.

Unmittelbarer Zusammenhang des hier gebildeten, homogen glänzenden Knochens mit dem unter den Riesenzellen angelagerten Knochen und mit dem fibrillär reticulirten Gewebe, in welches das Protoplasma der mittleren Riesenzelle unmittelbar übergeht. Fall 4. Cr. Pikrocarmin. Gl. 420.

„ 29. Der aus dichtgedrängten Blutkörperchen bestehende Inhalt eines Havers'schen Gefässes ist von einer hornförmig gestalteten, körnigen Protoplasmamasse derart umgeben, dass sich bei hoher Einstellung das — wahrscheinlich in Folge einer Biegung des Gefässes etwas verzogene — Lumen unmittelbar davon umgeben zeigt. Bei tieferer Einstellung scheidet sich scheinbar die Riesenzelle durch eine scharfe dunkle Linie von dem Blutinhalt.

Statt eines abgerissenen Theiles der Riesenzelle liegt die feinchagrinirte Lacunenmulde frei zu Tage. Die Protoplasmakeule enthält mehrere Kerne und liegt theils als körnige, fein radiär gestrichelte Masse dem Lacunenrande innig an, theils hebt sie sich von dessen glänzendem Saume etwas ab. Das betreffende Havers'sche System ist durch Einschachtelung sehr complicirt. Die tiefere Einstellung zeigt unter der Riesenzelle wellige Linien, die in einer Flucht in die Kittlinien-Contouren des eingeschachtelten Systemes übergehen.

An zwei Seiten bilden die Grenze: Theile von aus quer durchschnittenem Sehnengewebe bestehenden Schaltstücken, auf den beiden anderen Seiten: verschmolzene Lamellensysteme. Fall 17. Nach M. Fl. HCl + Cl Na. Carmin. Gl. 225.

Fig. 30. Rhachitis. Stirnbein.

Ein Markraum wird von einem grünlich gefärbten, feinstreifig lamellösen Ringe weichen Knochens umgeben, in dem mehrere Knochenkörperchen und auch einzelne Knochencanälchen sichtbar sind. Nach aussen stösst an denselben der körnige Saum des hellglänzenden, kalkhältigen Knochens, aus dem zwei Knochenkörperchen mit ihren körnigen, glänzenden Halbringen in die weiche Zone vorragen. Das kalkhältige Knochengewebe reicht theils bis zur Kittlinie, der entlang auch Kalkkörner und -bröckeln liegen, theils wird es von dieser durch einen Fleck weichen, ungeordnet fibrillär gebauten Knochens getrennt. Durch den kalkhältigen Knochen dieses Markraumsystems zieht sich ein körniger Streifen bis zur glänzenden Kittlinie; jenseits dieser enthält der Knochen auch einen körnigen Streifen. Die Körnung folgt im Übrigen den Knochencanälchen und greift durch die Kittlinie in die Kuppe eines fremden Systems, in der die recurrirenden Knochencanälchen deutlich sind. An einer Stelle bildet der glänzende Lacunensaum eines Resorptionsraumes die Grenze des Bildes.

14 Monate in M. Fl. Querschnitt. Mit Carmin färbten sich die kalklosen Partien dunkel kirschroth, die Färbung schwand wegen K. a. 250.

„ 31. Osteomalacie. 6. linke Rippe. Fall F.

In einem Havers'schen und benachbarten Markraumsysteme liegen in den Buchten der Kittlinien und diesen entlang theils körnige, theils bröckelige, auch inselförmig um Knochenkörperchen angeordnete Kalkmassen. Die Körnung zieht ferner in Streifen entlang den Lamellen. Im Havers'schen Canale nebst wenigen Zellen und Fasern zwei Gefässdurchschnitte. Zwei Wochen in M. Fl. Carminfärbung der weichen Knochenpartien erhalten. Gl. 225.

„ 32. Osteomalacie. 4. linke Rippe. Fall M.

Im Verlaufe einer Kittlinie liegen drei Knochenkörperchen, umgeben von kalkhältigen, glänzend krümeligen Höfen, welche von den Knochencanälchen durchsetzt sind. Der umgebende weiche Knochen zeigt die fibrilläre und lamellöse Structur sehr deutlich, weniger deutlich die Knochencanälchen und die Kittlinien. 3 Wochen in M. Fl. K. a. 250.

„ 33. Osteomalacie. Crista ossis ilei d. Fall R.

Der kalkhältige Knochen ist periostalerseits von einer schmalen, gegen den nahen Markraum von einer breiten, kalklosen, lamellösen Zone umgeben. Seine Grenze feinkörnig und bröckelig; Körnung entlang den Knochencanälchen, an den Confluenzen dieser und ent-

lang den Sharpey'schen Fasern. Die Knochencanälchen lassen sich, eine Strecke in die kalklose Zone hinein verfolgen. Frisch in Alkohol. Querschnitt. K. a. 280.

Fig. 34. Osteomalacie. Rechter Humerus. Fall R.
An der Grenze zweier weicher Havers'scher Lamellensysteme finden sich glänzende, kalkhältige, unregelmässig bogige, in der Form von Kittlinien miteinander verbundene Zacken, die in den weichen Knochen eingreifen. Eine Woche in M. Fl. Alkohol. Ziemlich dicker Querschnitt. K. a. 225.

„ 35. Osteomalacie. Aus der Nähe von Fig. 33.
Eine Kittlinie bildet zum Theil die Grenze zwischen kalkhältigem und kalklosem, eigenthümlich bröckelig aussehenden Knochen; zum Theil jenseits der Kittlinie ebenfalls weiche Knochensubstanz von glänzenden, kalkhältigen Bröckeln durchsetzt, die bis zu dem halbkreisförmigen Contour einer anderen Kittlinie reichen.

Zwei grössere, kalkhältige Knochenpartien sind von einem in ihrer Mitte liegenden keilförmigen Knochenstücke durch breite, körnige, zum Theil geröllartig aussehende Partien getrennt, welche auch in den weichen, lamellösen Knochen, streifig angeordnet, hineinragen. Die Knochencanälchen lassen sich vielfach aus dem harten Knochen in den weichen hinein verfolgen. Frisch in Alkohol. Querschnitt. K. a. 420.

„ 36. Osteomalacie. Gebogene Partie des linken Femur. Fall R.
Die kalkhältigen umfassenden Lamellensysteme der Rinde, an deren Kittlinien hie und da begleitende Körnung bemerkbar ist, werden von innen her von einem durchbohrenden Gefässe durchsetzt, in dessen Umgebung die Lamellen weich sind. Das Gefäss liegt nur zum Theile im Schnitte; es ist deutlich durchgeschnitten.

Weicher, geflechtártiger Knochen lagert sich als zellenreiches Balkenwerk aussenzu (Osteophyt) und auch innen auf, hier in glatter oder leicht muldenförmiger Linie auf eine kalklose Schichte von lamellösem, den umfassenden Lamellen parallel ziehendem Knochengewebe, welches mit körniger Zone in den harten Knochen übergeht.

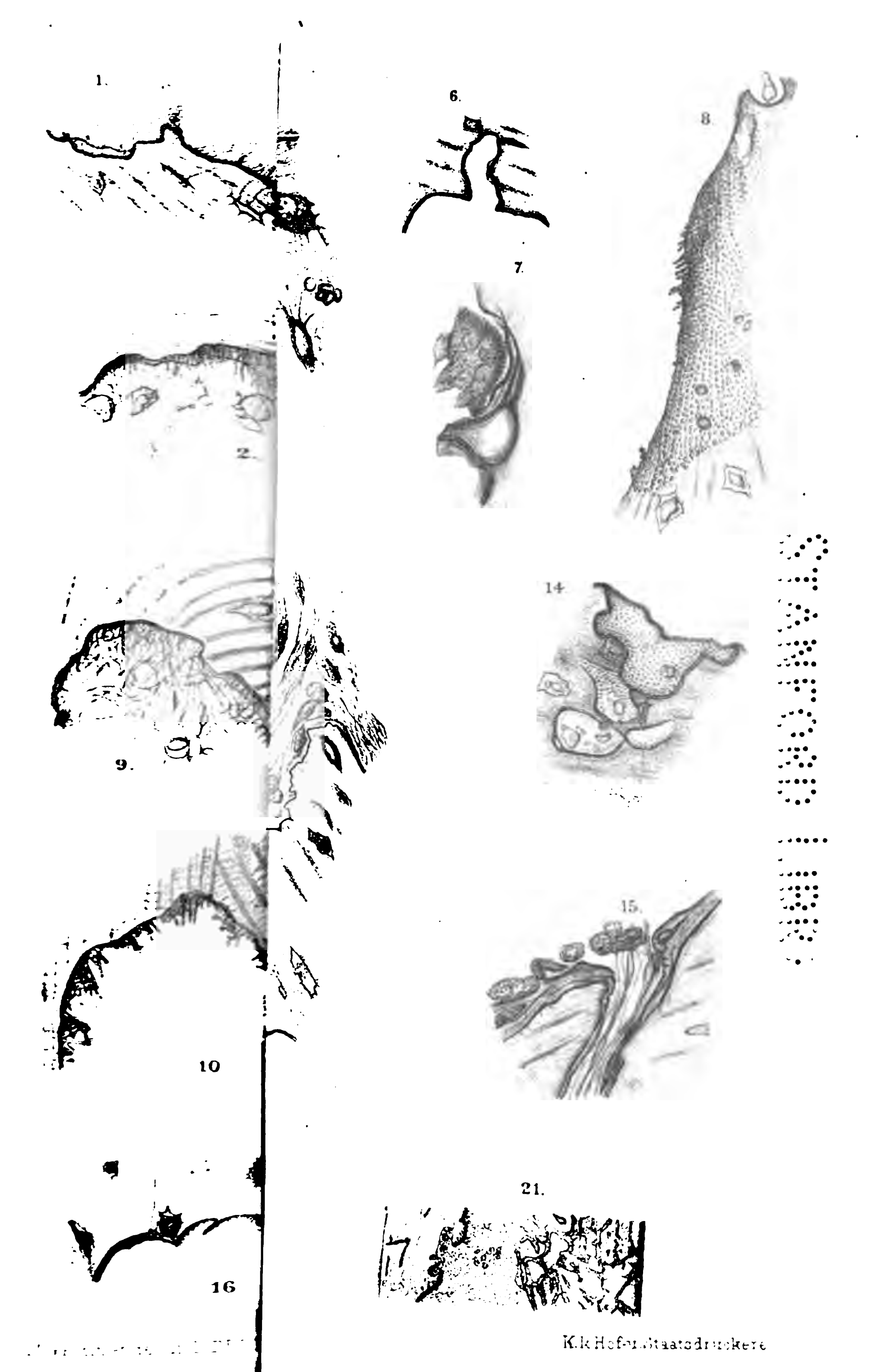
Ein Resorptionsraum greift mit seinen Lacunen sowohl in den harten als in den weichen Knochen (Osteophyt) hinein. Die Lacunen des ersteren sind theilweise bereits auf Basis einer neuen, homogen erscheinenden weichen Anlagerung mit mehreren Schichten epithelartig zusammengedrängter grosser Osteoblasten und zwischen diesen liegenden mehrkernigen Riesenzellen ausgefüllt; ebensolche finden sich in den Lacunen der weichen Knochenpartie.

Das Mark des Balkenwerks ist zumeist sehr reich an Zellen, peripher liegen vielfach Osteoblasten in Reihen dem geflechtartigen Knochen an. Fettzellen und kleine Fetttröpfchen (schwarz gezeichnet) finden

sich häufig eingestreut, besonders in dem mehr faserigen, zellenarmen Markinhalte unter dem durchbohrenden Gefässe. Frisch in Alkohol. Querschnitt. K. a. 70.

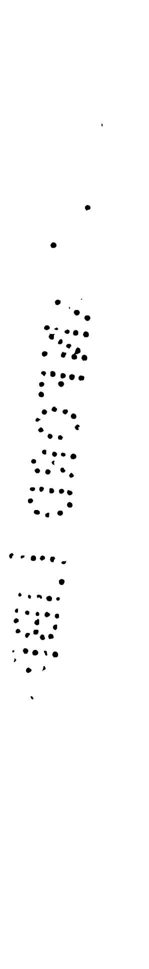
Fig. 37. Rhachitis. Diaphyse des Femur eines einjährigen Kindes in der Nähe einer Infractionsstelle.

In die harten umfassenden Lamellen des Femur greifen weiche, von Karmin rothgefärbte Partien hinein, die der Pheripherie durchbohrender Gefässe entsprechen. Von diesen liegen nur geringe gekappte Antheile innerhalb des Schnittes. Die Grenze zwischen hartem und weichem Knochen gekörnt. Die Lamellenstreifen der weichen Partien lassen sich deutlich in die harten Knochenzungen hinein und hindurch verfolgen. Die Ausläufer der Knochenkörperchen sehr zahlreich. (In der Nähe der Schnittstelle begannen bereits die äusseren weichen Callus-Massen.) 3 Wochen in M. Fl. Alkohol. Carmin. Gl. 225.



K.k.Hof-u.Staatsdruckerei





III. SITZUNG VOM 20. JÄNNER 1881.

Herr Prof. Dr. Richard Maly in Graz übersendet den ersten Theil seiner gemeinsam mit Hrn. F. Hinteregger ausgeführten „Studien über Caffeïn und Theobromin."

Die Herren Prof. J. Habermann und M. Hönig in Brünn übersenden eine vorläufige Mittheilung: „Über die Einwirkung von Kupferoxydhydrat auf einige Zuckerarten."

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. „Untersuchungen über die Anatomie, Physiologie und Entwicklung von Sternaspis", von Herrn Dr. F. Vejdovský, Docent für Zoologie an der Universität und an der böhmisch-technischen Hochschule zu Prag.
2. „Der Flug der Libellen. Ein Beitrag zur Anatomie und Physiologie der Flugorgane", von Herrn stud. phil. R. v. Lendenfeld an der Universität zu Graz.
3. „Beiträge zur Construction eines Kegelschnittbüschels mit vier imaginären Mittelpunkten", von Herrn F. Bergmann, Lehrer an der Staatsrealschule in Jägerndorf.

Das w. M. Herr Prof. v. Barth überreicht eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit des Herrn Dr. M. Kretschy: „Untersuchungen über die Kynurensäure." I. Abhandlung.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ritter v. Brücke überreicht zu seiner Mittheilung vom 7. Jänner l. J. „Über eine durch Kaliumhypermanganat aus Hühnereiweiss erhaltene stickstoff- und schwefelhaltige unkrystallisirbare Säure" eine nachträgliche Berichtigung.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Academia real de ciencias medicas, fisicas y naturales de la Habana. Anales. Entrega 197. Tomo XVII. Diciembre 15. Habana, 1880; 8°.

Académie de Médecine: Bulletin. 15ᵉ Année, 2ᵉ série. Tome X. Nrs. 1 u. 2. Paris, 1881; 8°.

Accademia, R. dei Lincei: Atti. Anno CCLXXVIII. 1880—81. Serie terza. Transunti, Vol. V. Fascicolo 2. Roma, 1881; 4°.

Akademie der Wissenschaften, königl. zu Berlin: Abhandlungen aus dem Jahre 1879. Berlin, 1880; gr. 4°.

— kaiserliche Leopoldino-carolinische deutsche der Naturforscher: Leopoldina. Heft XVI. Nr. 23—24. Halle a. S. December 1880; 4°.

Ackerbau-Ministerium, k. k.: Statistisches Jahrbuch für 1879. 3. Heft, 2. Lieferung. Wien, 1880; 8°.

Apotheker-Verein, allgem. österr.: Zeitschrift (nebst Anzeigen-Blatt). XIX. Jahrgang, Nr. 2. Wien, 1880; 8°.

Chemiker-Zeitung: Central-Organ. Jahrgang V, Nr. 1 u. 2. Cöthen, 1881; 4°.

Comptes rendus des Séances de l'Académie des Sciences. Tome XCII. Nr. 1. Paris, 1881; 4°.

Geschichtsverein und naturhistorisches Museum in Kärnthen: Carinthia, Zeitschrift. LXX. Jahrgang 1880. Klagenfurt; 8°.

Gesellschaft, deutsche chemische: Berichte. XIII. Jahrgang. Nr. 19. Berlin, 1881; 8°.

Journal für praktische Chemie. Neue Folge, Band 23. 1. u. 2. Heft. 1881. Leipzig; 8°.

— the American, of Science. Third Series. Vol. XXI. (Whole Number, CXXI.) Nr. 121 — January, 1881. New Haven; 8°.

Marburg, Universität: Akademische Schriften pro 1879—80. — 37 Stücke; 4° & 8°.

Nature: Vol. XXIII. Nr. 585. London, 1881; 8°.

Observatoire de Moscou: Annales. Volume VII, 1ʳᵉ Livraison. Moscou, 1880; 4°.

Osservatorio del reale Collegio Carlo Alberto in Moncalieri Bullettino meteorologico. Anno XV. 1879—80. Nr. 7. — Giugno 1880; 4°.

Société des Ingénieurs civils: Mémoires et compte rendu des travaux de la Société. 4e série, 33e année, 11e cahier. Novembre 1880. Paris, 1880; 8°.

Society, the American geographical: Bulletin. 1879. Nr. 5. New York 1880; 8°.

— the Royal geographical: Proceedings and Monthly Record of Geography. Vol. III. Nr. 1. January 1881. London; 8°.

United States, Departement of the Interior: Bulletin of geological and geographical Survey of the Territories. Vol. V. Number 4. Washington, 1880; 8°.

Verein der czechischen Chemiker: Listy chemické. V. Jahrgang Nr. 1—4. Prag, 1880—81; 8°.

Vierteljahresschrift, österreichische für wissenschaftliche Veterinärkunde. LIV. Band. — 2. Heft. (Jahrgaag 1880. IV.). Wien, 1880; 8°.

Wiener Medizinische Wochenschrift. XXXI. Jahrgang, Nr. 3. Wien, 1881; 4°.



SITZUNGSBERICHTE

DER

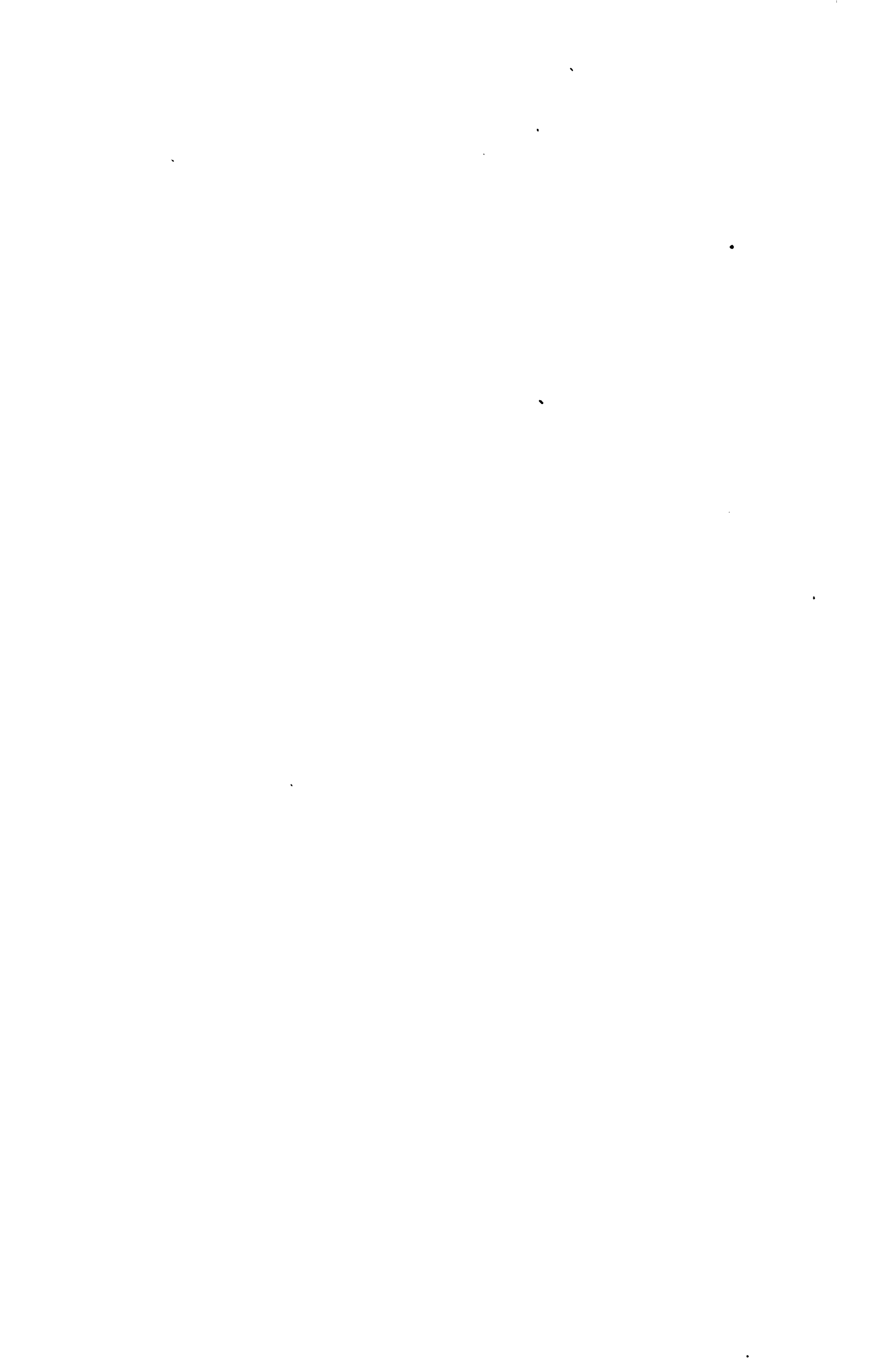
KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LXXXIII. Band. II. Heft.

DRITTE ABTHEILUNG.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Physiologie, Anatomie und theoretischen Medicin.



IV. SITZUNG VOM 3. FEBRUAR 1881.

Das Präsidium der Handels- und Gewerbekammer für das Erzherzogthum Österreich unter der Enns in Wien übermittelt ein Rundschreiben, betreffend die internationale Ausstellung elektrischer Maschinen und Apparate zu Paris 1881.

Die Adria-Commission legt den eben im Druck erschienenen „V. Bericht an die kaiserl. Akademie der Wissenschaften" vor. Dieser Bericht, welcher zugleich den letzten der von der Adria-Commission herausgegebenen Berichte bildet, ist redigirt von den Herren Ministerialrath Dr. J. R. Ritter v. Lorenz und Vice-Director der meteorolog. Centralanstalt Prof. F. Osnaghi.

Das c. M. Herr Professor Dr. E. Ludwig übersendet eine Abhandlung von den Herren Dr. J. Mauthner und Dr. W. Suida welche sich auf eine im Laboratorium für medicinische Chemie in Wien ausgeführte Arbeit: „Über gebromte Propionsäuren und Acrylsäuren" bezieht.

Herr Prof. A. Wassmuth an der Universität in Czernowitz übersendet eine Abhandlung: „Über die Magnetisirbarkeit des Eisens bei hohen Temperaturen."

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. „Zur wissenschaftlichen Behandlung der orthogonalen Axionometrie" (Zweite Mittheilung), von Herrn Prof. C. Pelz an der technischen Hochschule zu Graz.
2. „Über Momente höherer Ordnung", von Herrn Ferd. Wittenbauer, diplom. Ingenieur und Privatdocent an der technischen Hochschule zu Graz.

Das wirkliche Mitglied Herr Director Dr. J. Hann überreicht eine Abhandlung: „Über den täglichen Gang einiger meteorologischer Elemente in Wien."

Das w. M. Herr Hofrath Ritter von Hauer überreicht eine Mittheilung aus dem geologischen Institute der Universität zu Prag: „Zur Kenntniss der Juraablagerung von Sternberg bei Zeidler in Böhmen" von Herrn G. Bruder.

Das c. M. Herr Professor Dr. Sigm. Exner in Wien überreicht eine Abhandlung unter dem Titel: „Zur Kenntniss vom feineren Bau der Grosshirnrinde".

Herr Dr. L. Grossmann in Wien überreicht eine Abhandlung: „Integration der linearen Differentialgleichung von der Form $y'' + Ay' + By = 0$".

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique: Bulletin. 49ᵉ année, 2ᵉ série, tome 50. Nr. 12. Bruxelles, 1880; 8°.

— — — Annuaire 1881. 47ᵉ année. Bruxelles, 1881; 8°.

Academy, the New-York of Sciences. Annals. Vol. I. Nrs. 9, 10, 11—13. New-York, 1879—80; 8°. — Vol. XI, Nr. 13. Index and Contents. New-York; 8°.

Akademie der Wissenschaften k. bayr. zu München: Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Classe. XIII. Band, III. Abtheilung. München, 1880; 4°.

— — Das bayrische Präcisions-Nivellement. V. Mittheilung von Carl Max v. Bauernfeind. München, 1879; 4°. — Ergebnisse aus Beobachtungen der terrestrischen Refraction, von Carl Max v. Bauernfeind. I. Mittheilung. München, 1880; 4°. — Beiträge zur Anatomie des Gorilla, von Dr. Th. L. W. v. Bischoff. München, 1879; 4°. — Über die äusseren weiblichen Geschlechtstheile des Menschen und der Affen. Nachtrag von Dr. Th. L. W. v. Bischoff. München, 1880; 4°. — Über die Berechnung der wahren Anomalie in nahezu parabolischen Bahnen; von Theodor Ritter v. Oppolzer. München, 1879; 4°. — Über den geologischen Bau der lybischen Wüste, von Dr. Karl A. Zittel. München, 1880; 4°.

Apotheker-Verein, allgem. österr.: Zeitschrift (nebst Anzeigen-Blatt). XIX. Jahrgang, Nr. 3 u. 4. Wien, 1881; 8°.

Central-Commission, k. k. statistische: Ausweise über den auswärtigen Handel der österr.-ungarischen Monarchie im Jahre 1879. XL. Jahrgang, II. Abtheilung. Wien, 1880; 4°.

Chemiker-Zeitung: Central-Organ. V. Jahrgang, Nr. 3 u. 4. Cöthen, 1881; 4⁰.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome XCII. Nrs. 2 & 3. Paris, 1881; 4⁰.

Elektrotechnischer Verein: Elektrotechnische Zeitschrift II. Jahrgang. 1881. Heft I., Januar. Berlin, 1881; 8⁰.

Gesellschaft, Deutsche geologische: Zeitschrift. XXXII. Band, 3. Heft Berlin, 1880; 8⁰.

— k. k. geographische, in Wien: Mittheilungen. Band XXIII, (N. F. XIII.), Nr. 12. Wien, 1880; 8⁰.

— österr., für Meteorologie: Zeitschrift. XV. Band März- und December-Heft 1880. Wien, 1880; 8⁰.

Gewerbe-Verein, nied.-österr.: Wochenschrift. XLII. Jahrgang, Nr. 1—4. Wien, 1881; 4⁰.

Helsingfors, Universität: Akademische Schriften pro 1879 bis 1880; 4⁰ u. 8⁰

Ingenieur- und Architekten - Verein, österr.: Wochenschrift VI. Jahrgang, Nr. 1—4. Wien, 1881; 4⁰.

— — Zeitschrift. XXXII. Jahrgang. XII. Heft. Wien, 1880; gr. 4⁰.

Institute, the Essex: Bulletin. Vol. XI. Nrs. 1—12. Salem, 1879; 8⁰.

Militär-Comité, k. k. technisches und administratives: Mittheilungen über Gegenstände des Artillerie- und Genie-Wesens. Jahrgang 1880. XII. Heft. Wien, 8⁰.

Mittheilungen aus Justus Perthes' geographischer Anstalt, von Dr. A. Petermann. XXVII. Band, 1881. I. Gotha; 4⁰.

Moniteur scientifique du Docteur Quesneville: Journal mensuel. 25ᵉ année. 3ᵉ série. Tome XI. 470ᵉ Livraison-Fevrier 1881. Paris; 8⁰.

Nature, Vol. XXIII. Nrs. 586 & 587. London, 1881; 8⁰.

Ossolinski'sches National-Institut: Sprawozdanie z czynności za rok 1880. We Lwowie, 1880; 8⁰.

Observatory, the Cincinnati: Publications. Micrometrical Measurements of Double Stars. 1878—79. Cincinnati, 1879; 8⁰.

Reichsanstalt, k. k. geologische: Verhandlungen. Nr. 17. 1880. Wien; 8⁰.

Reichsforstverein, österr.: Österr. Monatsschrift für Forstwesen. XXX. Band. Jahrgang 1880. December-Heft. Wien; 8°. XXXI. Band, Jahrgang 1881. Jänner-Heft. Wien; 8°.

Société Belge de Microscopie: Procès-verbal. Nrs. 1—3, 5—12. Bruxelles, 1880; 8°.

Society the royal astronomical: Monthly notices. Vol. XLI. Nr. 2. December 1880. London; 8°.

— the American philosophical: Proceedings. Vol. XVIII. Nr. 106. Philadelphia, 1880; 8°. — List of the Members March 15, 1880. 8°.

Verein, militär-wissenschaftlicher: Organ. XXII. Band, 1. Heft. 1881. Wien; 8°.

Wiener Medizinische Wochenschrift. XXXI. Jahrgang. Nr. 4 & 5. Wien, 1881; 4°.

Wissenschaftlicher Club in Wien: Monatsblätter. II. Jahrgang. Nr. 4 — Ausserordentliche Beilage Nr. III. Wien, 1881; 8°.

Zur Kenntniss vom feineren Baue der Grosshirnrinde.

Von Prof. **Sigm. Exner,**

Assistenten am physiologischen Institute in Wien.

(Mit 1 Tafel.)

Vor mehr als zwei Jahren, als ich für das von mir gearbeitete Capitel in Hermann's Handbuch der Physiologie eine Abbildung eines mikroskopischen Schnittes der Grosshirnrinde herzustellen suchte, härtete ich eine Windung in Osmiumsäure, verfertigte von dem kohlschwarz gewordenen Präparate Schnitte und färbte sie in stark ammoniakalischem Carmin. In Glycerin durchsichtig gemacht, zeigte mir jeder solcher Schnitt ein mikroskopisches Bild, das mich durch seine Fremdartigkeit in Erstaunen setzte. Fachgenossen, denen ich die Präparate zeigte, ging es ebenso. Durch anderweitige Arbeiten gedrängt, liess ich die weitere Untersuchung der Objecte liegen, und kam erst jetzt dazu, dieselbe wieder aufzunehmen.

Dasjenige, was mir und Anderen, die gewohnt waren, das Centralnervensystem an Chromsäurepräparaten und ähnlichen zu studiren, so auffallend war, besteht in einem verwirrenden Reichthum von markhaltigen Nervenfasern, die in jeder Schichte der Grosshirnrinde in den verschiedensten Richtungen verlaufend, und von den verschiedensten Dimensionen, ohne Weiteres sichtbar sind. Die Ganglienzellen hingegen sind wenig auffallend.

Methode der Untersuchung. Die zu untersuchenden Abschnitte des Centralnervensystemes wurden in möglichst frischem Zustande in Stücken, die höchstens die Grösse von 1Cc. hatten, in $1^{0}/_{0}$ Osmiumsäure gelegt. Es ist gut, wenn das Volumen derselben das des Präparates um wenigstens das Zehnfache übertrifft. Nach zwei Tagen wird die Osmiumsäure durch frische ersetzt, bei grösseren Präparaten wird diese Erneuerung nach einigen Tagen wieder vorgenommen. Nach 5—10 Tagen sind die

Stücke gewöhnlich durchgefärbt. So weit meine Erfahrungen reichen, bleiben die Objecte in brauchbarem Zustande, wenn man sie jetzt auch noch einige weitere Wochen in Osmiumsäure liegen lässt; nach Monaten und Jahren aber werden sie merklich schlechter.

Nun wurde ein solches Stück oberflächlich in Wasser abgespült, und auf einige Secunden in Alkohol gelegt, letzteres nur zu dem Zwecke, um es besser in Öl-Wachs-Masse einbetten zu können. Dies geschah in einem Mikrotom. Dann wurde mit in Alkohol befeuchtetem Messer geschnitten. Die Schnitte, die wegen der intensiven Schwärzung des Präparates sehr dünn sein müssen, werden in Glycerin gelegt,—längerer Aufenthalt in Alkohol schadet ihnen—und dann auf einen Objectträger gebracht, auf dem sich ein Tropfen starken Ammoniakwassers befindet. Das Glycerin, das am Schnitte haftet, genügt, ihn durchsichtig zu erhalten. Es ist gut, einige Minuten mit dem Aufsetzen des Deckgläschens zu warten bis das Ammoniak genügend eingewirkt hat. Ich benütze diese Zeit dazu, mit Filtrirpapier etwas Flüssigkeit abzusaugen, da wenigstens ein grösserer Schnitt immer zu viel Glycerin auf den Objectträger mitbringt, und ein Paar Deckglasstützen aus Blumenpapier aufzusetzen. Das Deckglas wird rasch aufgesetzt, da im entgegengesetzten Falle der durch das Ammoniak schleimig gewordene Schnitt sich faltet oder verzerrt. Es ist gut, das Präparat gleich anzusehen, da es in diesem Momente am besten ist, und von da ab täglich an Schönheit abnimmt. Um es doch längere Zeit zu bewahren, umrande ich das Deckgläschen mit Wasserglas.

Das Wesentliche an dieser Procedur ist die Verwendung des Ammoniaks. Anfangs wendete ich ammoniakalischen Carmin als Färbemittel an, fand aber bald, dass die schönen Bilder, die ich bekam, nicht auf der Wirkung des Carmins, sondern auf der des Ammoniaks beruhten. Ammoniak hat nämlich die ausgezeichnete Eigenschaft, das oft besprochene körnige Stützgewebe, Ewald und Kühne's Neurokeratin, zu einer fast homogen aussehenden Masse aufquellen zu machen.[1] Man kann diesen Quellungsprocess an Schnitten mit freiem Auge sehen. Ja, es fällt nicht schwer, selbst an unseren gewöhnlichen Chromsäurepräparaten

[1] Schon Arndt beobachtete die günstige Wirkung von Ammoniak. (Arch. f. mikrosk. Anatom., Bd. III, pag. 445).

durch Ammoniak eine ganze Masse der markhaltigen Nervenfasern der Hirnrinde vortreten zu lassen, von denen man früher nicht viel mehr als Andeutungen sah. Ein Beweis dafür, wie selbst gut formirte Gebilde durch die von der Chromsäure hervorgerufenen Gerinnungen und Schrumpfungen verhüllt werden können. Auch an Schnitten, welche aus frischer, gefrorener Hirnrinde angefertigt und dann mit Ammoniak benetzt sind, sieht man ohne Weiteres die grosse Menge markhaltiger Fasern. Die Ganglienzellen werden durch diese Methode zu kaum sichtbaren Gebilden. Ihre Anwesenheit erkennt man gewöhnlich nur daran, dass sie eine Lücke in dem Fasergewirre bilden, in welcher dann gelegentlich die ursprünglich gelben, jetzt schwarz gefärbten Häufchen Pigmentes oder Fetttröpfchen liegen, die in den Ganglienzellen enthalten sind. Bisweilen sind die Kerne noch schwach sichtbar. Fast gänzlich unsichtbar sind die marklosen Nervenfasern, die Fortsätze der Ganglienzellen. Es muss ein solcher Fortsatz schon sehr dick sein, soll er auf Zellenlänge sichtbar sein. Alle Färbungsversuche, diesem Übel abzuhelfen, scheiterten.

Es geht aus dem Gesagten hervor, dass die in Rede stehende Methode weit davon entfernt ist, ein vollständiges Studium der grauen Substanz zu ermöglichen, sie kann dies so wenig wie die bisher gebräuchliche Methode, hingegen ergänzen sich die beiden insoferne, als die eine sichtbar macht, was die andere uns vorenthält.

Noch ein Paar Worte über das Wasserglas. Es bildet dasselbe mit Glycerin gemischt, eine durchsichtige Flüssigkeit, welche, wenn nicht zu viel Glycerin genommen ist, zu einer glashellen Masse und zwar schon nach wenigen Stunden eintrocknet. Erst nach Tagen und Wochen findet man diese Masse etwas getrübt von herausgefallenen Krystallen. Dieser Umstand, dass Wasserglas sich mit Glycerin und mit allen wässerigen Lösungen mischt, und in dieser Mischung schnell trocknet, macht es zu dem besten mir bekannten Einrahmungsmittel für solche mikroskopische Objecte, welche nicht mit Terpentinöl behandelt werden können. Würden sich nicht im Laufe der Zeit doch Krystalle ausscheiden, so könnte man die Schnitte geradezu in ein Gemenge von Wasserglas und Glycerin einschliessen. Leider geschieht diese Krystallausscheidung, wenn auch in geringem

Maasse, auch wenn man das Wasserglas bloss zur Umrahmung benützt.

Ich theile im Folgenden die Resultate mit, welche ich mit Hilfe dieser Methode bei Untersuchung der Grosshirnrinde erhalten habe. Es handelt sich, wie sich aus dem Mitgetheilten ergibt, in erster Linie um den Nachweis und das Verhalten markhaltiger Nervenfasern.

Die Grosshirnrinde.

Die markhaltigen Fasern dieses grauen Lagers sind wiederholt Gegenstand der Beobachtung gewesen. Die in der Litteratur niedergelegten Angaben über sie zeigen jedoch, dass eine einigermassen vollständige und sichere Darstellung derselben bisher noch nicht gelungen ist. Die sogleich anzuführenden Stellen, den gangbarsten und neuesten Beschreibungen der Rinde entnommen, werden dies zeigen. Seit Langem weiss man, dass die Nervenfasern des Grosshirnmarkes in Büscheln in die Rinde eindringen und in derselben noch als markhaltige Fasern gegen die Oberfläche hinziehen. Dies ist eine allgemein angenommene und feststehende Thatsache. Wie weit diese Faserbüschel aber in die Rinde hinein zu verfolgen sind, ist schon nicht mehr so ausgemacht. Meynert [1] kann sie ausserhalb seiner dritten Schichte nicht mehr erkennen, während Berlin [2] glaubt, sie noch weiter nach aussen verfolgen zu können. Ferner werden jene zwei weisslichen Streifen (Baillarger'sche Streifen), die man gelegentlich an senkrecht auf die Oberfläche geführten Schnitten durch die Rinde schon mit freiem Auge sieht, und welche der Oberfläche parallel verlaufen, ebenso eine weisse Schichte an der äussersten Oberfläche der Rinde, von der Mehrzahl der Autoren [3] als der Ausdruck für Lager von markhaltigen Nervenfasern angesehen, welche auch parallel der Oberfläche verlaufen sollen. Dasselbe gilt von dem im Hinterhauptslappen vorkommenden ähnlichen Vicq d'Azyr'schen Streifen. Aber

---

[1] Stricker's Handb. d. Gewebelehre, pag. 704 und Vierteljahresschr. f. Psychiatrie 1867, 1. Heft.

[2] Beitrag zur Structurlehre der Grosshirnwindungen, Dissert. Erlangen 1858.

[3] Schon von Remak im Jahre 1844. Müller's Arch., pag. 468.

auch darüber sind die Ansichten getheilt [1] und noch mehr divergiren die Anschauungen in Bezug auf markhaltige Fasern, welche ausser den genannten zwei Markstreifen und den radiären Markbündeln etwa vorkommen sollen.

Hören wir, wie sich das neueste ausführliche Handbuch über unseren Gegenstand äussert. [2] Indem der Autor desselben, Schwalbe, die Rinde in eine äussere und eine innere Hauptzone trennt, sagt er, es sei die letztere von der ersteren „dadurch ausgezeichnet, dass sie von zahlreichen rundlichen Bündeln markhaltiger Nervenfasern senkrecht zur Oberfläche durchsetzt wird. Dieselben lösen sich überall aus dem Marklager der Hemisphären ab, steigen vertical zur Oberfläche in die Höhe und verlieren sich in der Mitte der Rindendicke, also an der Grenze zwischen innerer und äusserer Hauptzone, als compacte Stränge. Viele ihrer Fasern setzen den radiären Verlauf in die äussere Hauptzone hinein vereinzelt fort, andere scheinen in eine der Oberfläche parallele Ebene umzubiegen und hier ein Geflecht zu bilden, dessen stärkere Ausbildung vermuthlich den äusseren der beiden Baillarger'schen Streifen hervorruft. Doch ist es selbst nach Osmiumfärbung feiner Schnitte schwer, ein befriedigendes Bild dieser Lage zu erhalten. Man nimmt nur wahr, dass dieselbe sich dunkler braun färbt als die übrigen Rindenpartien, von ihnen aber keineswegs scharf abgegrenzt erscheint, und dieselbe dunklere Färbung zeigen die radiären Nervenfaserzüge und das Hemisphärenmark. Ab und zu sind in den dunklen Streifen Querschnitte kleiner Bündel markhaltiger Nervenfasern zu erkennen. Wenn es nun auch hiernach wahrscheinlich ist, dass an dieser Stelle ein Geflecht markhaltiger Nervenfasern sich zwischen die übrigen Formelemente der Grosshirnrinde einschiebt, so vermochte ich doch nach Anwendung derselben Methode nach innen davon keinen zweiten dunklen Streifen zu erzielen und muss daher die Frage nach der Natur des inneren Baillarger'schen Streifens offen lassen."

---

[1] Huguenin macht bei Gelegenheit des Citates einer Gerlach'schen Beobachtung, die sich auf Fasern dieser Streifen bezog, zu dem „markhaltig" ein Fragezeichen. (Allgem. Pathol. der Krankh. des Nervensyst. I, pag. 241.)

[2] Schwalbe, Lehrb. d. Neurologie 1880, pag. 728.

Dem gegenüber sagt Meynert:[1] „So wie Radiärfasern, so finden sich auch schon in das Rindengrau fibrae arcuatae eingebettet, doch bleiben sie ein sparsames Vorkommniss und eine Dichte der Anordnung, die sich für das freie Auge in Form der (durch Pigmentmangel erklärbaren) hellen concentrischen Linien ausprägen könnte (Kölliker), habe ich nicht aufzufinden vermocht.“ Auch Berlin[2] gibt an, „immer nur zwei durch ihren Verlauf verschiedene Arten von Nervenzügen, die sich unter rechtem Winkel kreuzten“, gefunden zu haben, und ähnlich ist es Stephany[3] ergangen. Henle[4] nimmt nur für die tiefer liegenden Antheile der Rinde tangential verlaufende Nervenfasern an, und stimmt der Erklärung der Baillarger'schen Streifen als Ausdruck von Lagern markhaltiger Fasern nicht bei. Kölliker[5] gibt an, die Markfasern auch noch über den äusseren weissen Streifen verfolgt zu haben. „Indem diese (die Markbündel) nämlich weiter nach aussen gehen, werden sie durch seitliche Faserabgabe und durch Verfeinerung und Auflösung der Elemente immer dünner, bis sie an der grauen Schichte angelangt, dem Blicke sich entziehen, jedoch bei genauer Verfolgung als vielfach verflochtene allerfeinste Fäserchen von kaum noch dunklen Umrissen auch in dieser sich nachweisen lassen. Nur eine gewisse, jedoch geringere Zahl von Fasern gibt, an der reingrauen Schichte angelangt, ihre Breite und dunklen Umrisse nicht auf, sondern setzt in geradem oder schiefem Verlaufe durch dieselbe hindurch, um in der äusseren weissen Schichte wagrecht weiter zu verlaufen.“[6]

Sowohl Kölliker, als auch Arndt fanden hier schleifenförmige Umbiegungen von Fasern, wie sie seinerzeit Valentin beschrieben hatte, deren Convexität nach der Oberfläche sah. Arndt scheint übrigens von allen Autoren die besten Bilder von

---

[1] Stricker's Handb. d. Gewebel.. pag. 709.

[2] Beitrag zur Structurlehre der Grosshirnwindungen. Inaug. Dissert. Erlangen 1858, pag. 15.

[3] Beiträge zur Histologie d. Rinde des grossen Gehirnes. Inaug. Diss. Dorpat 1860.

[4] Handb. d. Anatom. des Menschen, 2. Aufl.

[5] Handb. der Gewebelehre, 1867, pag. 304.

[6] Handb. der Gewebelehre, Leipzig 1867, pag. 304.

den markhaltigen Fasern der Rinde gehabt zu haben, wie aus seinen Abbildungen hervorgeht; trotzdem dürften sie noch recht unvollkommen gewesen sein, denn er sagt an einer Stelle „da jedoch eine Verwechslung der Fasern mit kleinsten Capillaren möglich ist“ . . . .[1]

Indem ich dazu übergehe, über meine eigenen Untersuchungen zu berichten, habe ich vorauszuschicken, dass sie sich hauptsächlich auf die oberen Enden der beiden Centralwindungen beziehen. Die Verschiedenheiten der einzelnen Rindenabschnitte habe ich nicht in das Bereich der Untersuchung gezogen. Bei der Beschreibung halte ich mich an Meynert's Eintheilung der Rindenschichten, und zwar entsprechend meinem Untersuchungsobjecte an dessen fünfschichtigen Typus.[2]

1. Schichte der zerstreuten kleinen Rindenkörper. Diese oberflächlichste Schichte der Rinde hatte ein eigenthümliches Schicksal. Im Jahre 1841 entdeckte Remak[3] eine Lage markhaltiger Nervenfasern an der äussersten Oberfläche der Rinde. Es ist dies nichts Anderes als die von Meynert mit dem obigen Namen belegte Schichte, von der er angibt, dass sie der Hauptmasse nach aus Stützgewebe besteht. Remak hat, wie es scheint, an frischen Präparaten untersucht, und sich an Flächenschnitten von der Existenz der Faserlage überzeugt. Als man später an gehärteten Präparaten untersuchte, fand man nichts mehr von den beschriebenen Nervenfasern, dachte sich also, dass sie wohl eine Schichte von solcher Dünnheit bilden dürften, dass sie sich an den senkrecht auf die Oberfläche geschnittenen Präparaten der Beobachtung entziehe. Die zellenarme Schichte erschien an diesen Präparaten in jenem fein granulirten Ton, der in der Anatomie des Centralnervensystemes schon so viel Verwirrung angestellt hat und der von Vielen als Ausdruck jenes Stützgewebes angesehen wird. Man hielt diese Schichte also für stützgewebiger Natur, und bedeckt mit einem dünnen Überzug markhaltiger Nervenfasern. So zeigt sie die Abbildung

---

1 Arch. f. mikrosk. Anatom. III, pag. 451.

2 Vergl. Meynert, in: Stricker's Handbuch der Gewebelehre und Vierteljahresschr. f. Psychiatr. 1867. I. Heft.

3 Müller's Arch., pag. 506.

Schwalbe's, der bei Besprechung der ersten Schichte Meynert's sagt: „eigenthümlich organisirt ist ihre (der ersten Schichte) äusserste unmittelbar an die Hirnoberfläche grenzende Lage", worauf von den markhaltigen Nervenfasern die Rede ist. Meynert selbst sagt: „Auf der Oberfläche der ersten Rindenschichte findet sich ein sehr zarter Markbeleg . . . An Schnittpräparaten bilden sie (die Nervenfasern) als solche keine bemerkbare Schichte. . . . Jener dünne Markhauch" . . . etc. Auch Henle fasst diese Schichte in ähnlichem Sinne auf und beschreibt in derselben ein eigenthümliches Netzwerk von Stützfasern: „die peripheren Fortsätze der pyramidenförmigen Zellen (der tieferen Schichten) verlieren sich in der Nähe der äusseren Oberfläche und lassen einen schmalen Streifen der grauen Rinde frei. . . . Die Zellen, die er enthält . . . erweisen sich als Bindegewebszellen durch die Verbindung ihrer Ausläufer mit einem sehr feinen rundmaschigen Netz, welches gleichförmig die äussere Schichte der Rindensubstanz durchzieht, und durch ihren Zusammenhang mit den in den perivasculären Räumen ausgespannten Fasern und Plättchen. Die Maschen dieses Netzes haben einen Durchmesser von höchstens 0·006^{mm}. Die Mächtigkeit der netzförmigen Schichte beträgt 0·1, stellenweise 0·135^{mm}. . . . Sie ist Ursache des weissen Schimmers, den die Peripherie der Rindenschichte auf Durchschnitten zeigt, wozu allerdings noch eine Besonderheit der Gefässvertheilung kommt. . . . Einzelne Nervenfasern von stärkerem Caliber als die Fasern der Markleiste schlängeln sich flächenhaft durch das bindegewebige Netz; sie scheinen ebenfalls aus der Gefässhaut herzurühren und mit deren Nervenstämmchen zusammenzuhängen."

Nach meinen Untersuchungen kann man die ganze erste Schichte Meynert's nicht leicht anders bezeichnen, denn als ein Lager markhaltiger Nervenfasern von verschiedener Dicke und verschiedener Verlaufsrichtung. In Fig. I, A 1 ist diese Schichte dargestellt. Die Abbildung zeigt dieselbe ausnahmsweise arm an Nervenfasern, es ist Regel, dass der Reichthum an Fasern ein grösserer, dass das Faserlager ein dichteres ist, als es an dem Schnitt, der der Zeichnung zu Grunde liegt, der Fall war. Man sieht an der Abbildung die grossen Differenzen in der Dicke der Fasern, in der That findet man die feinsten, eben noch als

markhaltig erkennbaren Fasern gemischt mit den dicksten, wie man sie in peripheren Nervenstämmen zu sehen gewohnt ist.

Fertigt man einen Flächenschnitt an, so gewahrt man, dass die Fasern in ihrer der Oberfläche parallelen Ebene kreuz und quer verlaufen, ohne dass eine Richtung besonders prävalirte, ganz so wie dies Remak beschrieben hatte. Dem entsprechend findet man am Präparate viele Quer- und Schiefschnitte von Fasern, deren grössere als aussen dunkle, innen helle Kreise erscheinen, während die feineren nur erkannt werden, wenn eben eine Markanschwellung, eine sogenannte Varicosität, in der Schnittebene liegt. Fast alle Fasern zeigen an dem Schnitt mehr oder weniger regelmässig ausgebildete Varicositäten. Was von denselben im Leben vorhanden, was Folge der Präparation ist, kann ich nicht ermessen.

Die äusserste Oberfläche des Gehirns zeigt der abgebildete und ebenso jeder andere vollständige Schnitt als bedeckt von einem Lager aus eigenthümlich straffen, theils in Bündeln verlaufenden, theils ähnlich einem Hanffaden sich auffransenden Bindegewebe. Dieses färbt sich mit Osmiumsäure auch ganz schwarz; offenbar hängt das damit zusammen, dass die Präparate, um durchgefärbt zu werden, eben verhältnissmässig lange in starker Osmiumsäure liegen müssen. Diese schwarzen Bindegewebsfasern setzen sich nun gegen die eigentliche Hirnsubstanz nicht scharf ab. Bei glücklichem, sehr feinem Schnitte kann man sehen, dass diese Fasern mit Nervenfasern in einer und derselben Ebene verlaufen. Es vermengen sich hier Bindegewebs- und Nervenfasern miteinander. Hier und von da ab in die Hälfte der Tiefe unserer Schichte pflegen die dicksten Nervenfasern derselben vorzukommen; in der unteren Hälfte findet man jene ganz dicken Fasern nicht nur seltener, sondern es lässt sich in derselben überhaupt eine Abnahme im Caliber der Fasern beobachten. Die Abnahme geschieht ganz allmälig gegen die zweite Schichte hin. Ausser den der Oberfläche parallel verlaufenden Fasern findet man auch solche, welche gegen dieselbe in den verschiedensten Winkeln geneigt sind und solche, welche aus den unteren Schichten aufsteigen, um hier im Bogen umzubiegen und der Oberfläche parallel zu werden. Solche umbiegende Fasern sind, so weit meine Beobachtungen reichen, nie von den stärksten

vielmehr gewöhnlich mittelfeine und noch dünnere. Niemals habe ich in der Rinde eine Theilung einer markhaltigen Nervenfaser gesehen.

Ich habe diese Schichte ein Lager markhaltiger Fasern genannt. Ich besitze Schnitte, bei deren Anblick sie Jedermann so nennen wird, denn es zeigt sich der grössere Theil der Masse der ganzen Schichte als aus markhaltigen Fasern bestehend. An anderen Schnitten, die etwa so aussehen, wie der gezeichnete, kann sie wohl füglich auch noch mit diesem Namen belegt werden. Es kann aber geschehen, und ist mir geschehen, dass Schnitte von derselben Stelle entnommen, eine noch geringere Nervenmasse zeigen. Ich versuchte zu ermitteln, ob wir es hier etwa mit Altersunterschieden zu thun haben; die Vermuthung bestätigte sich aber nicht. Hingegen ist es unzweifelhaft, dass Schnitte, die ein dichtes Faserlager gezeigt haben, nach einiger Zeit ein spärliches zeigen. Der Schnitt, nach welchem die Zeichnung angefertigt ist, straft dieselbe heute lügen. Es schwindet eben die Färbung mit der Zeit. Man hat nun die Wahl, ob man annehmen will, dass solche Schnitte, in welchen das Faserlager noch geringer ist als in dem abgebildeten, wirklich weniger Fasern enthalten, oder ob man sie auf minder gelungene Färbung beziehen will.

Ich will hiemit nicht die Vorstellung erwecken, als fände man Schnitte, durch welche der hier geschilderte Charakter der Schichte in Frage gestellt würde, es zeigt die Schichte vielmehr immer in ihrer ganzen Dicke Massen markhaltiger Fasern. Noch auf einen Umstand muss ich aufmerksam machen. Bei der Präparation mit Ammoniak quillt, wie oben gesagt, die Stützsubstanz. Dadurch werden die Nervenfasern unzweifelhaft auseinandergerückt. Die Quellung beträgt, wie man mit freiem Auge sehen kann, gelegentlich ziemlich viel, schätzungsweise ein Drittel der Lineardimensionen. Dem entsprechend müssen wir uns je zwei Nervenfasern, die wir im Schnitte sehen, um ein Drittel ihrer Distanz näher denken, um das dem Leben entsprechende Bild zu erhalten.

Die in Rede stehende Schichte trägt diesen geschilderten Charakter auch bei Thieren. In Fig. 2 habe ich dieselbe vom Occipitallappen des Hundes abgebildet. Bei *a* ist die Oberfläche

des Gehirnes, bei *b* treten die ersten Zellen der zweiten Schichte auf. Beim Hunde ist der Reichthum der Fasern wenigstens an den von mir untersuchten Stellen, nämlich in der Umgebung des Gyrus cruciatus und im Occipitallappen ein geringerer als beim Menschen. Noch geringer ist der Reichthum an Fasern im Gehirn der Taube.

Ich untersuchte bei dieser die als motorisches Rindenfeld bezeichnete Partie ungefähr im Centrum der Convexität der Hemisphäre. [1] Hier fand sich noch eine weitere Eigenthümlichkeit. Es läuft nämlich die Mehrzahl der der Oberfläche parallelen Fasern auch unter einander mehr oder weniger parallel, so zwar dass ich in einem Schnitte das Fig. 3 wiedergegebene Bild fand und in demselben Schnitte 2·5^{mm} von der gezeichneten Stelle entfernt das Fig. 4 dargestellte, welches die Nervenfasern am Querschnitt zeigt.

Es war übrigens schon Remak bekannt, dass die Vögel ein gut ausgebildetes Lager weisser Fasern auf den Hemisphären haben, und man kann dasselbe selbst mit freiem Auge sehen.

Ich habe oben von den Veränderungen gesprochen, welche ein Schnitt mit der Zeit erleidet. Sowie die Deutlichkeit der markhaltigen Nervenfasern schwindet, tritt ein anderes Gewebselement hervor. Es sind dies sehr feine, oft weithin gestreckt oder im Bogen verlaufende Fasern, im Aussehen den elastischen Fasern, wie sie z. B. in der Chorioidea vorkommen, am nächsten stehend. Sie finden sich nicht nur in dieser, sondern in allen Rindenschichten auch im Grau des Rückenmarkes. Genau ebensolche Fasern kommen in Verbindung mit Zellen vor. In Fig. 5 ist eine solche, welche isolirt worden war, gezeichnet. Mit jenem Grade von Bestimmtheit, den überhaupt Aussagen haben, die sich auf anatomische Ähnlichkeit stützen, lassen sich diese Zellen und mithin auch die mit ihnen zusammenhängenden Fasern als nicht nervös, sondern als dem System des Stützgewebes des Centralnervensystems angehörig ansprechen.

Ein sonderbares Vorkommen mag noch erwähnt werden. Bei neugeborenen Kindern findet man in der Rinde noch keine

[1] Vergl. Ferrier, Functionen des Gehirns, übersetzt v. Obersteiner. Braunschweig 1879, pag. 174.

wohl ausgebildeten, markhaltigen Nervenfasern, doch aber ist die erste Schichte schon durch ihre der Oberfläche parallele Streifung gut kenntlich. In ihr findet man nun Zellen, welche in Allem Ganglienzellen gleichen, dieselben sind aber um Vieles grösser als die Ganglienzellen, welche beim Erwachsenen in dieser Schichte gefunden werden. Fig. 6 zeigt eine solche Zelle. Sie liegen gewöhnlich vereinzelt oder zu zweien beisammen, ziemlich spärlich in der äusseren Hälfte unserer Schichte. Da diese selbst dünn ist, so erscheinen die Zellen gewöhnlich, fast an die Purkinje'schen Zellen des Kleinhirnes erinnernd, in eine Reihe gestellt, nur sind sie um Vieles weiter auseinandergerückt wie diese. In einem Schnitte fand ich auf eine Strecke von 2·9^{mm} nur fünf solche Ganglienzellen. Dieselben sind mit Fortsätzen versehen, und es scheint Regel zu sein, dass jede Zelle wenigstens einen Fortsatz gegen das Mark hinschickt. In der Umgebung der Zellen sieht man jene Kerne, die im Gehirn des Neugeborenen überall in grosser Zahl zu finden, und hier wohl als die Anlage der später auftretenden, oder als Kerne der noch undeutlich geformten Ganglienzellen und Stützzellen dieser Schichte zu betrachten sind.

Diese Ganglienzellen des Erwachsenen haben bei meiner Behandlungsweise einen ungefähren Durchmesser — bei der sternartigen Gestalt derselben ist ein bestimmtes Maass nicht anzugeben — von 0·014^{mm}, während der Durchmesser der Ganglienzellen des Kindes 0·03^{mm} beträgt. Letztere sind also ungefähr doppelt so gross (linear) als erstere. Auch diese, die Zellen des Erwachsenen, schicken gewöhnlich wenigstens einen Fortsatz nach der Tiefe der Rinde, wie dies schon Meynert zeichnete.[1] Gelegentlich bekommt man Schnitte zu Gesicht, in welchen diese Ganglienzellen, jede von Pyramidengestalt, hart nebeneinander mit der Basis an die Pia gelehnt in längerer Reihe nebeneinander stehen. Jede schickt dann einen Spitzenfortsatz in die Tiefe. Sie geben so ein Bild, das an die nagelartigen Anschwellungen von Stützfasern erinnert, welche an Gehirnen niedriger Wirbelthiere unter der Pia gefunden werden.

---

[1] Vierteljahresschrift f. Psychiatrie 1867, Taf. II, Fig. 1, 1

Weitere Untersuchungen müssen lehren, ob die genannten Zellen des Neugeborenen sich später verkleinern und zu den gewöhnlichen Zellen dieser Schichte werden, oder ob sie im Laufe des jugendlichen Lebens zu Grunde gehen.

2. Schichte der dichten, kleinen, pyramidalen Rindenkörper. Auch diese Schichte ist (Fig. I, 2) reichlich mit markhaltigen Nervenfasern versehen, doch sind dieselben durchschnittlich dünner als die irgend einer anderen Schichte der Rinde. Auch hier haben sie alle nur erdenklichen Richtungen. Man kann sie oft auf weite Strecken verfolgen. Im oberen Antheil dieser Schichte sah ich einmal eine mässig starke Faser 0·5^{mm} weit der Oberfläche parallel verlaufen.

3. Schichte der grossen pyramidalen Rindenkörper. Was ich von derselben zu sagen habe, zeigt die Abbildung (Fig. I, 3). Die Fasern fangen an sich in Bündel zu gruppiren, die dem Marke zustreben, das Gewirr der in anderen Richtungen verlaufenden Fasern wird nach dem Marke hin immer grösser, es treten dicke Fasern auf, deren Mehrzahl den Bündeln angehört, viele aber auch tangential oder schief gegen die Oberfläche verlaufen. Auffallend dichtere Lagen tangentialer Fasern, welche ohne Weiteres als der Ausdruck der Baillarger'schen Streifen im Sinne einer Anzahl von Autoren zu betrachten wären, sind für gewöhnlich nicht zu sehen. Dennoch glaube ich, dass diese Streifen durch Ansammlungen von markhaltigen Fasern zu Stande kommen. Ich schliesse dies aus Folgendem.

Der Vicq d'Azyr'sche Streifen des Hinterhauptlappens ist bekanntlich weit deutlicher, als die oft gar nicht auffindbaren Streifen Baillarger's. Schneidet man eine Windung des Hinterhauptlappens, an welcher jener Streifen besonders deutlich zu sehen ist, so erkennt man ihn schon mit freiem Auge an jedem Schnitte als dunkles Band, zum Beweise, dass er aus in Osmiumsäure sich stark färbenden Elementen besteht. Unter dem Mikroskop gibt er ein alle Zweifel behebendes Bild. Er besteht aus markhaltigen Nervenfasern, welche aber durchaus nicht alle der Oberfläche parallel laufen. Es mag sein, dass diese Richtung etwas überwiegt, die wahre Veranlassung zur Erscheinung des Vicq d'Azyr'schen Streifens liegt aber darin, dass die Zwischenräume zwischen den senkrecht gegen die Oberfläche aufsteigenden

Markbündeln und den Ganglienzellen durch ein viel dichteres Flechtwerk von nach allen Richtungen verlaufenden Fasern erfüllt sind, als dies ausserhalb des Streifens, sowohl auf der der Pia zugekehrten, als auf der dem Mark zugewendeten Seite der Fall ist.

Nachdem ich mich hievon überzeugt, suchte ich mir eine Stelle aus der übrigen Rinde, an welcher ein Baillarger'scher Streifen besonders deutlich zu sehen war, und härtete sie, indem ich mir die Höhe in der Rindendicke anmerkte, in welcher der Streifen lag. Das Stück war aus dem Schläfelappen genommen, der Streifen in der Tiefe einer Furche fast 1^{mm} vom Mark entfernt, am deutlichsten. Die mikroskopischen Schnitte zeigten, dass in den tieferen Schichten der Rinde auffallend viel tangential verlaufende Fasern von einer Seitenwand der Furche zur anderen hinüberzogen. Die Stelle, an welcher im frischen Zustande der Streifen lag, war auch am Schnitt freilich nur eben erkennbar dunkler gefärbt durch eine grössere Häufung dieser „Associationsfasern" oder „fibrae arcuatae". In diesem Falle also bestand der Baillarger'sche Streifen aus einer dichteren Häufung solcher — wenn man sich die Rinde entfaltet denkt — der Oberfläche parallel verlaufender Fasern. Es wird demnach der Streifen wohl auch in anderen Fällen auf ähnlichen Grundlagen beruhen. Ob hiebei, so wie es beim Streifen des Occipitallappens der Fall ist, auch die in diversen Richtungen verlaufenden Fasern eine Rolle spielen, kann ich nicht bejahen und nicht verneinen.

Dass übrigens eine dichtere Anhäufung weisser Fasern leichter mit freiem Auge als mit dem Mikroskope zu erkennen ist, hat nichts Auffallendes. Blickt man von der Höhe eines Berges auf blühende Repsfelder, so ist der Unterschied im Reichthum der Blüthen der einzelnen Felder durch die verschiedene Schattirung des Gelb auffallender, als wenn man zwischen oder durch die Felder hindurchgeht und jede Blüthe für sich sieht.

Ich will hier nicht unerwähnt lassen, dass das Gebiet des Vicq d'Azyr'schen Streifens in auffallender Weise zusammenfällt mit jenem Theil der Rinde, der sich bei neueren Untersuchungen als das Rindenfeld des Auges mit grosser Wahr-

scheinlichkeit herausgestellt hat.[1] Es liegt nahe, jenen Streifen mit den Functionen des Auges in Verbindung zu bringen.

4. Schichte der kleinen, dichten, unregelmässigen Rindenkörper. Die dem Marke zustrebenden Fasern nehmen so sehr an Zahl zu, dass sie nur mehr wenig Zwischenräume zwischen sich lassen, in denen überwiegend dicke Fasern in allen möglichen Richtungen, aber sich im Allgemeinen der tangentialen Richtung nähernd, verlaufen. Man sieht in den untersten Schichten der Rinde an Alkohol- sowie an Chromsäurepräparaten oft blasenartige Räume von der Grösse wohl ausgebildeter Ganglienzellen. Mit Osmiumsäure lassen sich dieselben als riesige Varicositäten der hier liegenden grossen markhaltigen Fasern erkennen.

Schlussbemerkungen.

Wie erwähnt, habe ich niemals in der Rinde eine Theilung einer markhaltigen Faser gesehen, hingegen verlaufen dieselben, wie häufig zu beobachten, durch verhältnissmässig weite Strecken. Es ergibt sich hieraus, dass wenigstens jene Fasern, welche nicht aus dem Marke in die Hirnrinde einstrahlen, sondern in derselben in einer von der radiären abweichenden Richtung verlaufen, als Verbindungen verschiedener Rindenbezirke anzusehen sind, also als Fasern des Bogensystemes im weitesten Sinne.

Da niemals Theilungen zu sehen sind, kann ich der Schilderung Gerlach's[2] nicht beistimmen, welche lautet: „ausser den schon längst bekannten, aus der weissen in die graue Substanz eintretenden markhaltigen Nervenfasern, welche in Bündeln geordnet bis nahe an die Oberfläche des Grosshirnes radiär verlaufen, kommen noch zahlreiche, gleichfalls markhaltige, aber horizontal verlaufende Nervenfasern vor, welche . . . . sowohl unter einander, wie mit den radiären in Verbindung treten, wodurch ein grossmaschiges Netzwerk markhaltiger Fasern gegeben ist,

---

[1] Diesbezügliche Untersuchungen von mir sind im Drucke und werden demnächst bei Braumüller in Wien, unter dem Namen: „Untersuchungen über die Localisation der Functionen in der Grosshirnrinde des Menschen“ erscheinen.

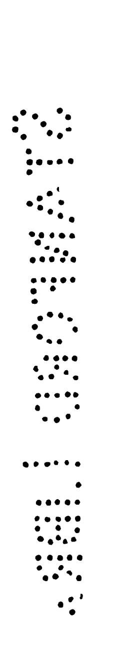
[2] Centralbl. f. d. med. Wiss. 1872, pag. 274.

welches schon bei sechzigfacher Vergrösserung gesehen werd
kann."

Ich kann hiemit nicht übereinstimmen, denn erstens si
die zwischen den Markbündeln vorkommenden Fasern im A
gemeinen nur zum kleineren Theil „horizontal" verlaufen
zweitens gehen die markhaltigen Fasern keine netzartigen V
bindungen in dem Sinne ein, dass irgendwo eine Stelle existi
an der drei Fasernabschnitte nach dem Typus eines *Y* mit e
ander in Communication treten.

Aus dem Mitgetheilten geht weiters hervor, dass ein gros
Theil dessen, was man als Grundsubstanz der Hirnrinde bezeich
hat, aus wohl ausgebildeten markhaltigen Fasern besteht. Es
dies ein Befund, welcher zur Vorsicht jenen Anschauungen geg
über mahnt, nach welchen die „körnig-faserige" Masse a
solche einen physiologisch wichtigen Bestandtheil der grau
Substanz ausmacht.

Endlich sei noch erwähnt, dass ich die hier angewend
Methode auch an anderen Abschnitten des Centralnervensystem
geprüft habe. Es gelingt leicht, am Kleinhirn des Menschen die ma
haltigen Fasern aus der Körnerschichte bis nahe an die Mitte d
grauen Schichte der Rinde vordringen zu sehen, man bekom
hier eine Vorstellung von der Reichhaltigkeit der Körnerschicl
an markhaltigen Nervenfasern u. s. w. Querschnitte durch d
ganze Rückenmark des Menschen zeigen die markhaltigen Fase
der grauen Substanz so gut, dass diese Methode zum Studi
von deren Verlauf die besten Dienste leisten kann.





Erklärung der Abbildungen.

Fig. 1. Die Schichten der Hirnrinde auf vier Abtheilungen vertheilt. Sie sind so aneinander gelegt zu denken, dass auf *a b*, *b c* folgt u. s. w. Die Nummern bedeuten die 1., 2., ... Schichte Meynert's, bei x_1 x sind Blutgefässe. Der Schnitt ist durch die Kuppe des oberen Endes des Gyrus centralis ant. und nahezu senkrecht auf die Oberfläche desselben geführt. Vergrösserung: 175.

Fig. 2. Die erste Rindenschichte Meynert's aus dem Occipitallappen des Hundes. Die in der Höhe von *b* sichtbaren Kerne gehören schon den Zellen der zweiten Schichte an.

Fig. 3 und 4 zeigen dieselbe Schichte von der Taube. Da die Fasern bei Vögeln mehr oder weniger parallel unter einander verlaufen, so bietet die Schichte je nach der Schnittrichtung verschiedene Bilder. Fig. 3 Längsschnitt. Fig. 4 Querschnitt durch die Fasern. Beide Abbildungen sind einem Schnitt entnommen und liegen in demselben 2·5^{mm} von einander entfernt. Der Schnitt gehört jener Stelle der Rinde an, welche ungefähr dem motorischen Rindenfelde der Taube entspricht, also dem Centrum der Convexität einer Hemisphäre.

Fig. 5. Eine wahrscheinlich dem Stützgewebe zuzuzählende Zelle aus dem Gyrus centralis post. des Menschen. Sie schwamm isolirt in einer Rissstelle eines Schnittes, neben ihr eine zweite ähnliche. Vergrösserung: 600.

Fig. 6. Eine Ganglienzelle aus der ersten Rindenschichte vom neugeborenen Kinde. Der vertical gezeichnete Durchmesser der Zelle beträgt 0·03^{mm}, während die Durchmesser der an derselben Stelle liegenden Zellen des Erwachsenen circa 0·014^{mm} betragen.

V. SITZUNG VOM 10. FEBRUAR 1881.

Das c. M. Herr Prof. C. Heller in Innsbruck übersendet eine Abhandlung, in welcher er auf Grundlage mehrjähriger Beobachtungen eine Übersicht: „Über die Verbreitung der Thierwelt im Tiroler Hochgebirge“ gibt.

Das c. M. Herr Prof. E. Weyr übersendet eine Abhandlung: „Über biquadratische Evolutionen erster Stufe“.

Herr Prof. Dr. Richard Maly in Graz übersendet den zweiten Theil seiner gemeinsam mit Herrn F. Hinteregger ausgeführten „Studien über Caffeïn und Theobromin“.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. „Studien über die Bewegung im widerstehenden Mittel“, I. und II. Abtheilung, von Herrn Adalbert Jäger, Lehrer am zweiten Staats-Realgymnasium in Prag.
2. „Über ein Nullsystem zweiten Grades“, von Herrn Adolf Ameseder, Assistenten an der technischen Hochschule in Wien.

Das wirkliche Mitglied, Herr Hofrath v. Hochstetter legt eine für die Denkschriften bestimmte Abhandlung unter dem Titel: „Die Kreuzberghöhle bei Laas in Krain und der Höhlenbär“ vor.

Herr Dr. J. Puluj, Privatdocent und Assistent am physikalischen Cabinete in Wien, überreicht eine zweite Abhandlung über: „Strahlende Elektrodenmaterie“.

Ferner überreicht derselbe eine Mittheilung, betitelt: „Bemerkungen zum Prioritätsschreiben des Herrn Dr. E. Goldstein“.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Akademie der Wissenschaften, königl. Preussische zu Berlin: Monatsbericht. September und October 1880. Berlin, 1881; 8°.

Budapest, Universität: Akademische Schriften aus den Jahren 1879—80; 4° & 8°.

Chemiker-Zeitung: Central-Organ. Jahrgang V, Nr. 5, Cöthen, 1881; 4°.

Comptes rendus des Séances de l'Académie des Sciences. Tome XCII. Nr. 4. Paris, 1881; 4°.

Gesellschaft, Deutsche chemische: Berichte. XIV. Jahrgang, Nr. 1. Berlin, 1881; 8°.

— gelehrte Estnische zu Dorpat: Verhandlungen. X. Band, Heft 3. Dorpat, 1880; 8°.

— österr. für Meteorologie: Zeitschrift. XVI. Band. Februar-Heft. 1881, Wien; 8°.

Göttingen, Universität: Akademische Schriften pro 1879—80. 67 Stücke 8° & 4°.

Landwirthschafts-Gesellschaft, k. k., in Wien: Verhandlungen und Mittheilungen. Jahrgang 1880, 5. u. 6. (Schluss) Heft. Wien, 1880; 8°.

Nature. Vol. XXIII. Nr. 588. London, 1881; 8°.

Observatory, the; A monthly review of Astronomy. Nr. 46. 1881, February 1. London; 8°.

Smithsonian Institution: Annual Report of the Board of Regents for the year 1878. Washington, 1879; 8°.

— Smithsonian Contributions to Knowledge. Vol. XXII. City of Washington, 1880; gr. 4°.

— Miscellaneous Collections. Vol. XVI. & XVII. Washington, 1880; 8°.

Society, the Philosophical of Washington: Bulletin. Vol. I. March 1871 — June 1872. Washington, 1874; 8°.

— the royal geographical: Proceedings and monthly Record of Geography. Vol. III. Nr. 2. February, 1880. London; 8°.

United States, Engineer-Department, U. S. Army: Report upon United States geographical Surveys west of the one hundredth Meridian. Vol. II. — Astronomy and barometric Hypsometry. Washington, 1877; gr. 4°.

United Report upon geographical and geological Explorations and Surveys west of the one hundredth Meridian. Vol. III. Geology. Washington, 1877; gr. 4°.

— — Report upon U. St. geographical Surveys west of the one hundredth Meridian. Vol. IV. — Paleontology. Washington, 1877; gr. 4°.

— — — Report upon geographical and geological explorations and surveys west of the one hundtredth Meridian. Vol. V. — Zoology. Washington, 1875; gr. 4°.

Verein für Erdkunde zu Halle a. S.: Mittheilungen. 1878, 1879 & 1880. Halle; 8°.

Wiener Medizin. Wochenschrift. XXX. Jahrgang, Nr. 6. Wien, 1881; 4°.

VI. SITZUNG VOM 17. FEBRUAR 1881.

Das w. M. Herr Prof. L. Schmarda übersendet die von Herrn Henry Brady in New-Castle ausgeführte wissenschaftliche Bearbeitung der während der österreichisch-ungarischen Nordpolexpedition gesammelten Tiefseeproben unter dem Titel: „Arctic Foraminifera from Sountings obtained on the Austro-Hungarian North-Pol-Expedition of 1872—1874."

Das w. M. Herr Director Dr. Steindachner übersendet eine Abhandlung über einige neue und seltene Fische des Wiener Museums unter dem Titel: „Ichthyologische Beiträge" (X.).

Das c. M. Herr Prof. E. Weyr in Wien übersendet eine Abhandlung: „Über Involutionen zweiter Stufe."

Ferner übersendet Herr Prof. Weyr eine Abhandlung des Herrn Prof. Dr. C. Le Paige in Lüttich: „Bemerkungen über cubische Involutionen."

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. „Studie über Energie producirende chemische Processe", Mittheilung aus dem chemischen Laboratorium der deutschen technischen Hochschule zu Prag, von Herrn F. Wald.
2. „Das Problem der vier Punkte im Sinne der neueren Geometrie", von Herrn Prof. W. Binder an der n.-ö. Landes-Oberreal- und Maschinenschule in Wiener Neustadt.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ritter v. Brücke berichtet über ein Verfahren zur Reindarstellung der von ihm am 7. Jänner d. J. beschriebenen stickstoff- und schwefelhaltigen Säure.

Das w. M. Herr Director E. Weiss überreicht eine Abhandlung: „Über die Berechnung der Differentialquotienten des Radius-Vectors und der wahren Anomalie nach der Excentricität in stark excentrischen Bahnen."

Herr J. V. Rohon in Wien überreicht einen Bericht über den von ihm mit Unterstützung der kais. Akademie der Wissenschaften untersuchten „Amphioxus lanceolatus".

Herr Dr. Zdenko Hanns Skraup in Wien überreicht eine von ihm im Universitätslaboratorium des Prof. Lieben ausgeführte Arbeit, betitelt: „Synthetische Versuche in der Chinolinreihe."

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Abetti, Antonio, Dr.: Sulla Determinazione del tempo coll'osservazione dei passaggi delle stelle pel verticale della polone. Venezia. 1880; 8°. — Osservazioni e Calcoli eseguiti sulla Cometa Swift. Venezia, 1880; 8°.

Academia, real de ciencias medicas, fisicas y naturales de la Habana. Tomo XVII. Entrega 198. Enero 15. Habana, 1881; 8°.

Académie de Médecine: Bulletin. Nrs. 4—6. Paris, 1881; 8°.

Accademia, R. dei Lincei: Atti. Anno CCLXXVIII. 1880—81. Serie terza. Transunti. Vol. V. Fascicolo 4°. Seduta del 16. Gennaio 1881. Roma; 4°.

Akademie, Kaiserliche Leopoldino - Carolinisch - Deutsche der Naturforscher: Leopoldina. Heft 17, Nr. 1—2. Halle a. d. S., Januar 1881; 4°.

Annuario marittimo per l'anno 1881. XXXI. Annata. Trieste, 1880; 8°. — Repertorio delle leggi ed ordinanze marittime e dei trattati dal 1835 al 1881. 8°.

Apotheker-Verein, allgem. österr.: Zeitschrift (nebst Anzeigen-Blatt). XIX. Jahrgang, Nr. 5. Wien, 1881; 8°.

Astronomische Mittheilungen von Dr. Rudolf Wolf. LI; 8°.

Chemiker-Zeitung: Central-Organ. Jahrgang V. Nr. 6. Cöthen, 1881; 4°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome XCII. Nr. 5. Paris, 1881; 4°.

Gesellschaft, k. k. geographische, in Wien: Mittheilungen. Band XXIV. (N. F. XIV), Nr. 1. Wien, 1881; 4°.

Journal für praktische Chemie. (N. F.) Band XXIII, 3. und 4. Heft. Leipzig, 1881; 8°.

— the American of Otology. Vol. III, Nr. 1. January 1881. New-York; 8°.

Leiter Josef: Ein neuer Wärmeregulator zur Wärmeentziehung und Wärmezufuhr für den erkrankten menschlichen Körper und ein neuer Irrigationsapparat. Wien 1881; gr. 8°.

Museum of Comparative Zoology at Harvard College: Bulletin. Vol. VIII. Nrs. 1 und 2. Cambridge, 1881; 8°.

Nuovo Cimento, il 3ª serie. Tomo VIII. Novembre e Dicembre 1880. Pisa, 1881; 8°.

Pickering, William, H.: Photometric Researches. Cambridge, 1880; 8°.

Reichsanstalt, k. k. geologische: Verhandlungen. Nr. 1—3. Wien, 1881; 8°.

— — Jahrbuch. Jahrgang 1880. XXX. Band. Nr. 4. October, November, December. Wien, 1880; 8°.

— — Die Gasteropoden der Meeres-Ablagerungen der ersten und zweiten miocänen Mediterran-Stufe in der österreichisch-ungarischen Monarchie von R. Hoernes und M. Auinger. 2. Lieferung. Wien, 1880; gr. 4°.

Società degli Spettroscopisti italiani: Memorie. Dispensa 9ª. Settembre, 1880. Roma, 1881; gr. 4°.

Société des Ingénieurs civils: Mémoires et compte rendu des travaux. 4ᵉ série, 33ᵉ année, 12ᵉ cahier. Paris, 1880; 8°.

— géologique de France: Bulletin. 3ᵉ série, tome VII. — 1879. Nr. 8. Paris, 1878—79; 8°.

— ouralienne d'Amateurs des sciences naturelles: Bulletin. Tome V, livr. 3. Jekaterinburg, 1880; 4°. — Tome VI, livr. 1. Jekaterinburg, 1880; 4°.

United States: Message from the President communicating Information in relation to the proceedings of the International Monetary Conference held at Paris in August, 1878. Washington, 1879; 8°.

Upsala, Universität: Akademische Schriften pro 1878, 1879 und 1880. — 25 Stücke 4° und 8°.

Verein der Freunde der Naturgeschichte in Mecklenburg: Archiv. 34. Jahr. (1880). Neubrandenburg, 1880; 8°.

Wiener Medizin. Wochenschrift. XXXI. Jahrg., Nr. 7. Wien, 1881; 4°.

Nachtrag zu der am 7. Jänner gemachten Mittheilung über eine durch Oxydation von Eiweiss erhaltene unkrystallisirbare Säure.

Von dem w. M. **Ernst Brücke.**

Der besagten Mittheilung und der Berichtigung vom 20. Jänner habe ich Folgendes hinzuzufügen: Ich löste die Substanz, wie ich sie in diesen Berichten Bd. LXXXIII, 3. Abtheilung, S. 7 beschrieben habe, und wie sie mir als Rest geblieben war, ohne zu Erwärmen in Wasser auf, dem ich Ammoniak hinzugefügt hatte. Nach vollendeter Lösung neutralisirte ich den nicht beträchtlichen Überschuss des letzteren genau mit Essigsäure und goss unter Umrühren die so erhaltene Flüssigkeit in eine grössere Menge Weingeist von 95 Volumprocent.

Anfangs trat nur eine geringe Trübung ein; dann aber wurde dieselbe stärker und stärker und endlich ballte sie sich zu einem wolkigen Niederschlage, der sich sehr langsam senkte.

Nachdem dies geschehen war, sammelte ich den letzteren auf dem Filtrum.

Dieser, den flockigen Niederschlägen, welche ich früher von der Säure erhalten hatte, schon in seinem Aussehen ganz unähnliche Niederschlag bestand, wie zu erwarten war, nicht aus der Säure als solcher, sondern aus einer Ammoniakverbindung derselben. Als ich eine Probe desselben frisch vom Filtrum nahm, löste sie sich mit Wasser übergossen auf, und als ich jetzt Essigsäure hinzufügte, so fiel die Säure wieder heraus, und zwar, wie sich später zeigte, mit ihren früheren Eigenschaften. Ich habe in Rücksicht auf die letzteren meiner Publication vom 7. Jänner nichts hinzuzufügen, da ich wegen des beschränkten Materiales nur die alten Versuche wiederholte und keine neuen angestellt habe.

Obgleich uns nun hier weder Krystallform, noch Schmelzpunkt, noch Siedepunkt zur Seite steht, so scheint mir aus dem bisher Gesagten doch hervorzugehen, dass die Säure als solche existirt, und dass man sie so weit rein darstellen kann, dass sie für eingehendere chemische Untersuchungen geeignet ist.

Es ist doch in der That sehr unwahrscheinlich, dass ein Gemenge alles das durchmachen sollte, was die Substanz bereits durchgemacht hatte, und dass dann die Ammoniakverbindungen der Gemengtheile, oder ein Gemengtheil und die Ammoniakverbindung des anderen, sich mit einander so aus der weingeistigen Lösung ausscheiden sollten, dass bei der Zersetzung des Niederschlages durch eine Säure wiederum dasselbe Gemenge mit denselben Eigenschaften erhalten wird.

In Rücksicht auf die Beschaffenheit dieses Niederschlages und die Reindarstellung der Säure aus demselben will ich noch einige Worte hinzufügen.

Er stellt eine durchscheinende, in dünnen Schichten durchsichtige, halb kleisterartige, halb gelatinöse Masse dar. Anfangs enthält er noch sehr viel Weingeist, der indessen mehr und mehr, wenn auch keinesweges vollständig, abtropft.

Auf ein feuchtes blaues Lackmuspapier geworfen, macht er einen rothen Fleck, und seine wässerige Lösung, die selbstredend gleichfalls Lackmus röthet, entfärbt eine verdünnte Lösung von rosolsaurem Ammoniak. Als ich aber in das weingeistige Filtrat etwas Rosolsäure warf, so löste sie sich darin mit zwiebelrother Farbe, während sie sich in dem zu dem Versuche verwendeten Weingeist mit rein gelber Farbe löste. Während also zwei neutrale Flüssigkeiten gemischt wurden, war der Niederschlag sauer, die denselben umspülende Flüssigkeit alkalisch geworden.

Da der wässerigen Lösung, die ich in den Alkohol hineingegossen hatte, etwas Essigsäure zugesetzt war, um den Überschuss an Ammoniak im Lösungsmittel zu sättigen, so war es denkbar, dass sich durch Diffusion die Essigsäure mehr in den Niederschlag gezogen hatte, das mit ihr vorher verbundene Ammoniak in der Flüssigkeit geblieben war. Die Möglichkeit eines solchen Vorganges ist nach den Erfahrungen, die wir über Diffusion besitzen, nicht von der Hand zu weisen. Näher liegt

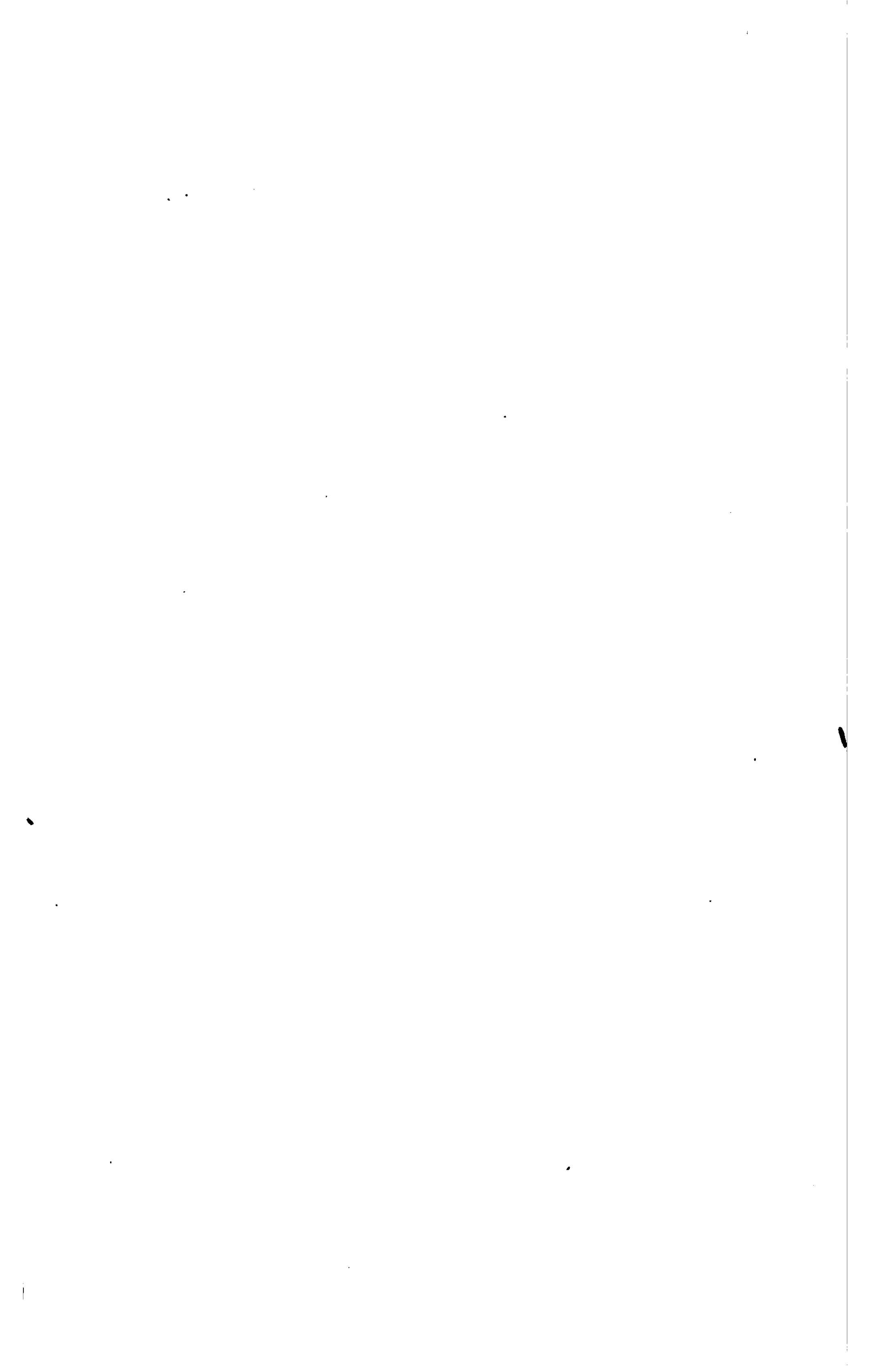
aber wohl die Annahme, dass unsere Säure selbst zwei Ammoniumverbindungen eingeht, von denen die eine, die normale, in Weingeist leichter löslich, die andere, die saure, in Weingeist schwerer löslich ist, und dass das Lösungsmittel eine theilweise Zersetzung des neutralen Salzes hervorrief. Bedenken erregt es nur, dass man dabei unserer doch nur schwachen Säure noch für das zweite Ammoniakmolekül eine solche Anziehung zutrauen soll, dass sie es der damit verbundenen Rosolsäure entzieht.

Zur weiteren Reinigung dieser Verbindung würde gewiss das rationellste Verfahren sein den Weingeist abzusaugen, sie wieder in wenig Wasser aufzulösen und ein zweites Mal durch Alkohol zur Ausscheidung zu bringen; ich musste aber, da dies nur unter grossem Verlust hätte geschehen können, um mein Material zu schonen, davon absehen. Auch waschen konnte ich den Niederschlag nur unter grossem Verlust, und ich versprach mir ausserdem bei der gelatinösen Beschaffenheit desselben nicht viel davon. Ich hob desshalb das Filtrum aus dem Trichter, schob es in zwei grössere, trockene, alternirend in einander gesteckte Filtra und bog den Rand um. Das Ganze legte ich unter eine gut schliessende, aber nicht evacuirte Glocke. Die äusseren Filtra wurden so lange gewechselt bis der Weingeist nahezu aufgesaugt war, ich liess aber dabei den Niederschlag nicht austrocknen. Nun brachte ich ihn wieder in wässerige Lösung und wiederholte mit dieser, beziehungsweise mit der aus ihr abgeschiedenen Säure oder deren mittelst Ammoniak bewirkter und neutralisirter Lösung meine früheren Versuche.

Es war mir auffallend, dass beim Ausfällen der Säure die Ausbeute für das Auge viel reichlicher ausfiel, als ich nach dem Aussehen des in der weingeistigen Lösung erschienenen Niederschlages erwartet hatte. Es hing dies wahrscheinlich damit zusammen, dass jetzt der Unterschied zwischen dem Brechungsindex des Niederschlages und dem der Flüssigkeit grösser war.

Über den von mir vermutheten zweiten Bestandtheil kann ich nichts Sicheres aussagen, und ich muss die Möglichkeit offen lassen, dass ich durch eine Veränderung, welche die Säure selbst beim Eindampfen ihrer weingeistig-ammoniakalischen Lösung und Trocknen im Wasserbade erlitten hatte, auf einen Irrweg geführt worden bin. Bemerken will ich noch, dass ich beim Aufarbeiten

des weingeistigen Filtrats, beziehungsweise seines Rückstandes ein Verfahren gesucht und gefunden habe, um die Säure aus einer wässerigen Flüssigkeit möglichst vollständig zu entfernen, ein Verfahren freilich, durch welches auch viel Anderes mit entfernt wird. Ich fällte erst mit verdünnter Schwefelsäure und filtrirte. Als ich nun Phosphorwolframsäure hinzufügte, so entstand noch einmal eine Trübung, von der die Kupferprobe nachwies, dass sie unserer Säure angehörte. Letztere konnte ich in der Flüssigkeit nicht mehr nachweisen, nachdem ich auch von dieser Trübung abfiltrirt hatte.



SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LXXXIII. Band. III. Heft.

DRITTE ABTHEILUNG.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Physiologie, Anatomie und theoretischen Medicin.



VII. SITZUNG VOM 10. MÄRZ 1881.

In Verhinderung des Vicepräsidenten übernimmt Herr Dr. L. J. Fitzinger den Vorsitz.

Der Secretär legt zwei Dankschreiben vor, und zwar von Herrn Dr. H. Weidel, Adjuncten am ersten chemischen Laboratorium der Wiener Universität, für die ihm zur Fortsetzung seiner Untersuchungen über die Pyridin- und Chininreihe sowie der Alkaloide, dann von Herrn Dr. M. Kretschy, Assistenten an diesem Universitäts-Laboratorium, für die ihm zur Fortführung seiner Untersuchung der Kynursäure bewilligte Subvention.

Herr Prof. Dr. P. Weselsky übersendet eine von ihm in Gemeinschaft mit Herrn Dr. R. Benedikt im Laboratorium für analytische Chemie an der technischen Hochschule in Wien ausgeführte Arbeit: „Über die Einwirkung der salpetrigen Säure auf Pyrogallussäureäther“.

Das c. M. Herr Regierungsrath Prof. Dr. Adolf Weiss übersendet als achten Beitrag seiner „Mittheilungen aus dem pflanzenphysiologischen Institute der Prager Universität“ eine Abhandlung des Assistenten dieses Institutes und Privatdocenten Herrn Dr. J. Kreuz unter dem Titel: „Entwicklung der Lenticellen an beschatteten Zweigen von *Ampelopsis hederacea* Mch.“

Herr Prof. J. V. Janovsky an der höheren Staatsgewerbeschule in Reichenberg, übersendet eine Abhandlung: „Über eine neue Azobenzoldisulfosäure.“

Herr Dr. Max Margules, Privatdocent an der Universität in Wien, übersendet eine Abhandlung: „Über die Bestimmung des Reibungs- und Gleitungscoëfficienten aus ebenen Bewegungen einer Flüssigkeit.“

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. „Zur Reduction Abel'scher auf elliptische Integrale", von Herrn Dr. Max Ungar in Wien.
2. „Von den Curven einer Fläche, welche die Krümmungscurven derselben unter constantem Winkel schneiden", von Herrn Dr. Ed. Mahler in Wien.
3. „Centigrad-Photometer. Neues optisches Instrument zur directen Bestimmung der Intensität jedweder künstlichen Lichtquelle", von Herrn Dominico Coglievina, Ingenieur in Wien.
4. „Das Archimedische Gesetz des Sehens", von Herrn Vendelin Muschek in Prag.

Das w. M. Herr Director J. Hann überreicht eine Abhandlung: „Über den täglichen Gang des Luftdruckes, der Temperatur, der Feuchtigkeit, Bewölkung und Windstärke auf den Plateaux der Rocky Mountains".

Das w. M. Herr Professor von Barth überreicht eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit: „Über die Einwirkung von Schwefelsäure auf Mono-, Di- und Tribrombenzol", von Herrn Dr. J. Herzig.

Das w. M. Herr Professor Ad. Lieben überreicht eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit: „Über krystallinische Verbindungen von Chlorcalcium mit Alkoholen," von Herrn J. B. Heindl.

Das w. M. Herr Hofrath Ritter v. Brücke überreicht eine Arbeit aus dem physiologischen Institute der Wiener Universität: „Über die Nervenendigung in den glatten Muskelfasern", von Herrn stud. med. Alexander Lustig.

Herr Prof. Dr. Franz Toula in Wien erstattet Bericht über die im Auftrage der kaiserlichen Akademie im Spätsommer 1880 unternommene Reise zur Fortsetzung der von ihm im Jahre 1875 begonnenen geologischen Untersuchungen im westlichen Balkan und überreicht eine Abhandlung unter dem Titel: „Grundlinien der Geologie des westlichen Balkan", nebst einer geologischen Übersichtskarte des Gebietes von der Wasserscheide zwischen Isker und Vid bis an die Nišava, als die Ergebnisse seiner beiden Reisen.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Academia nacional de ciencias de la Republica Argentina: Boletin. Tomo III. Entrega 2 y 3. Cordoba 1879; 8°.

Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique. 50ᵉ Année, 3ᵉ série, tome I, Nr. 1. Bruxelles, 1881; 8°.

— de Médecine: Bulletin. 45ᵉ Année, 2ᵉ série, tome X, Nrs. 3, 7, 8 & 9. Paris, 1881; 8°.

— impériale des sciences de St. Pétersbourg: Bulletin. Tome XXVII, Nr. 1. St. Pétersbourg, 1881; 4°.

Akademie der Wissenschaften, k. zu München: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe, 1881. Heft 1, München, 1881; 8°.

Annales des Mines: 7ᵉ série, tome XVIII. 5ᵉ livraison de 1880. Paris, 1880; 8°.

Apotheker-Verein, allgem. österr.: nebst Anzeigen-Blatt. XIX. Jahrgang, Nr. 6 & 7. Wien, 1881; 8°.

Bibliothèque universelle: Archives des sciences physiques et naturelles. 3ᵉ période. Tome V, Nr. 1. — 15. Janvier 1881. Genève, Lausanne, Paris, 1881; 8°.

Central-Commission, k. k., zur Erforschung und Erhaltung der Kunst- u. historischen Denkmale: Mittheilungen. VII. Bd., 1. Heft. Wien, 1881; 4°.

— k. k. statistische: Ausweis über den auswärtigen Handel der österr.-ungar. Monarchie im Jahre 1879. VI. Abtheilung, XL. Jahrgang. Wien, 1880; gr. 4°.

Chemiker-Zeitung: Central-Organ. Jahrgang V. Nr. 7—9. Cöthen, 1881; 4°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Tome XCII, Nrs. 6—8. Paris, 1881; 4°.

Elektrotechnischer Verein: Elektrotechnische Zeitschrift. II. Jahrgang, 1881. Heft II, Februar. Berlin, 1881; 4°.

Genootschap, provincial utrechtsch van Kunsten en Wetenschappen: Verslag gehouden den 24. Juni 1879 und 29. Juni 1880. Utrecht, 1879—1880; 8°.

— — Aanteekeningen van het Verhandelde in de Sectie-Vergaderingen gehouden den 24. Juni 1879. Utrecht, 1879: 8°.

Gesellschaft, Deutsche chemische: Berichte. XIV. Jahrgang, Nr. 2 & 3. Berlin, 1881; 8⁰.

— österr., für Meteorologie. Zeitschrift. XVI. Band. März-Heft 1881. Wien, 1881; 8⁰.

— k. k. mährisch-schlesische, zur Beförderung des Ackerbaues, der Natur- und Landeskunde in Brünn: Mittheilungen. 1880. LX. Jahrgang. Brünn; 4⁰.

Gewerbe-Verein, n.-ö.: Wochenschrift. XLII. Jahrgang. Nr. 5—9. Wien, 1882; 4⁰.

Ingenieur- und Architekten-Verein, österr.: Wochenschrift, VI. Jahrgang, Nr. 5—9. Wien, 1881; 4⁰.

Institut, königl. preussisches geodätisches: Publication. Winkel- und Seitengleichungen; von Dr. Alfred Westphal. — Über die Beziehung der bei der Stations-Ausgleichung gewählten Nullrichtung; von Wilh. Werner. Berlin, 1880; 4⁰.

Instituut, koninklijk nederlandsch meteorologisch: Jaarboek voor 1876. XXV. Jahrgang. 2. Deel. Utrecht, 1880; quer 4⁰.

Militär-Comité, technisches und administratives: Mittheilungen über Gegenstände des Artillerie- und Genie-Wesens. Jahrgang 1881. I. Heft. Wien, 1881; 8⁰.

Mittheilungen aus J. Perthes' geographischer Anstalt, von Dr. A. Petermann. XXVII. Band, 1881. II. Gotha, 1881; 4⁰.

Moniteur scientifique du Docteur Quesneville: Journal mensuel. 25ᵉ Année, 3ᵉ série, Tome XI, 471ᵉ livraison. Mars 1881. Paris; 8⁰.

Nature. Vol. XXIII. Nrs. 590—592. London, 1881; 4⁰.

Nuovo Cimento, il: Giornale. 3ᵃ serie, tomo IX. Gennaio 1881. Pisa; 8⁰.

Observatory, the: A monthly review of Astronomy. No. 47. March, 1881. London; 8⁰.

Reichsanstalt, k. k. geologische: Verhandlungen. 1881. Nr. 4. Wien; 8⁰.

Repertorium für Experimental-Physik etc. von Dr. Ph. Carl. XVII. Band, 4. Heft. München und Leipzig. 1881; 8⁰.

Rostock, Universität: Akademische Schriften pro 1879—1880. 20 Stücke 4⁰ & 8⁰.

Société mathematique de France: Bulletin. Tome IX, Nr. 1. Paris, 1880; 8⁰.

Société botanique de France: Bulletin. Tome XXVII, (2e série Tome II). Paris, 1880; 8°.
— hollandaise des sciences à Harlem: Archives néerlandaises de sciences exactes et naturelles. Tome XV, 3e—5e livraisons. Harlem, Paris, Leipzig, 1880; 8°.
— Néerlandaise de Zoologie: Tijdschrift. V. Deel. 3e Aflevering. Leiden, 1881; 8°.
Society, the royal astronomical: Monthly notices. Vol. XLI. Nr. 3. January 1881. London; 8°.
— the royal geographical: Proceedings and monthly Record of Geography. Vol. III. Nr. 3. March 1881. London; 8°.
Wiener medizinische Wochenschrift. XXXI. Jahrgang. Nr. 8 bis 10. Wien, 1881; 4°.
Wissenschaftlicher Club in Wien: Monatsblätter. II. Jahrgang, Nr. 5. Wien, 1881; 8°.
— Ausserordentliche Beilage Nr. IV.
— — Jahresbericht 1880/1881. V. Vereinsjahr. Wien, 1881; 8°.
Zoologische Station zu Neapel: Mittheilungen, zugleich ein Repertorium für Mittelmeerkunde. II. Band, III. Heft. Leipzig, 1881; 8°.

Über die Nervenendigung in den glatten Muskelfasern.

Von stud. med. **Alexander Lustig.**

(Aus dem physiologischen Institute der Wiener Universität.)

(Mit 1 Tafel.)

Bevor ich die Methode und die Resultate meiner Untersuchungen über die Nervenendigung in der glatten Muskulatur darstelle, möchte ich eine kurze Übersicht der Literatur dieses Gegenstandes geben.

Es ist mir nicht bekannt, dass von irgend Jemandem Kölliker[1] die erste Arbeit auf diesem Gebiete zugeschrieben worden sei, und doch scheint mir dies geschehen zu müssen.

Dieser Forscher untersuchte die Harnblase und den Oesophagus des Frosches. Er ist der Ansicht, dass die Nervenröhren sich in feine Fäserchen theilen, die sich wieder verästeln und frei enden, und dass es nicht denkbar sei, dass alle Muskelzellen mit Nervenenden in Berührung kommen.

Klebs[2], nachdem er durch die Isolirungsmethode zu keinem bestimmten Resultate gekommen, setzte seine Untersuchungen am unverletzten Gewebe der Frosch-Harnblase fort. Nach einer Beobachtung glaubt er die Vermuthung aussprechen zu dürfen, dass ein Zusammenhang zwischen Muskel und Nerv existire.

Durch einen Raum von der Breite der Muskelfaser von dieser getrennt, verlief in gleicher Richtung eine feine Nervenfaser, die gegenüber der Kernanschwellung der Muskelfaser

---

[1] A. Kölliker. Über die letzte Endig. d. Nerven in den Muskeln des Frosches. (Eine vorläuf. Mittheilung Würzburger naturwiss. Zeitschrift, Bd. II, 1862.)

[2] Klebs. Die Nerven d. organ. Muskeln. Centralblatt f. d. med. Wissenschaft, I. Jahrg. 1863. Derselbe. Die Nerven d. organ. Muskelfasern, Virchow's Archiv, Bd. 32, 1865.

gegen diese umbog, und, wie es schien, mit dem Rande der letzteren zusammenhing.

Die Nervenfaser über den Rand der Muskelfaser weiter hinaus zu verfolgen, war ihm unmöglich.

Die Untersuchungen Frankenhäuser's[1] und Arnold's[2] führen zum Schlusse, dass in der Harnblase des Frosches ein intramuskuläres Nervennetz vorkomme; aus diesem ziehen dicke Fäden gegen den Kern der Muskelzelle, die Fäserchen treten in die Kernkörperchen ein, verlassen aber in entgegengesetzter Richtung die Substanz des Kernes und laufen in das intramuskuläre Netz zurück.

Es ist zu betonen, dass diese Forscher in Chromsäure gehärtete Präparate zu ihren Untersuchungen verwendeten.

Ganz entgegengesetzt lauten Engelmann's[3] Angaben. Er untersuchte die Muskulatur des Ureter und der Harnblase des Frosches. Er hat nie einen Zusammenhang zwischen Muskelkern und Nerven gesehen.

Tolotschinoff[4] hat ebenfalls die Nerven der Froschharnblase studirt. Über Endverbindungen ist aus seiner Arbeit nichts zu entnehmen.

Krause[5] hält das sogenannte Nervennetz Arnold's für elastisches Gewebe, obwohl er dieselbe Präparationsmethode (Chromsäurehärtung) angewendet hatte.

Er untersuchte vorzugsweise den *M. rectococcygeus* von jungen Kaninchen.

Unterdessen hatte die histologische Technik bedeutende Fortschritte gemacht, und Löwit[6] benützte die Goldfärbung zur

---

[1] Frankenhäuser. Die Nerven der Gebärmutter und ihre Endigung in den glatten Muskelfasern, Jena, F. Mauke 1867.

[2] J. Arnold. Die Gewebe der organischen Muskeln, Leipzig, Verlag W. Engelmann, 1869.

[3] Th. W. Engelmann. Zur Physiologie des Ureters, Archiv f. d. gesammte Physiologie von Pflüger, 1869, Jahrg. II.

[4] Tolotschinoff. Über das Verhalten der Nerv. z. d. glatten Muskelfasern der Froschharnblase. Archiv f. mikroskop. Anatom., Bd. V, 1869.

[5] Krause. Die Nervenendigung in den glatten Muskeln. Archiv f. Anatom., Physiolog. u. wissensch. Medicin. Jahrg., 1870.

[6] M. Löwit. Die Nerven der glatten Muskulatur. Sitzungsberichte d. k. Akad. d. Wissenschaften in Wien, 1875.

Untersuchung der Nerven der glatten Muskulatur des Frosches und verschiedener anderer Thiere.

Seine Untersuchungen brachten ihn zum Schlusse, dass die Berührungsstelle zwischen Muskel und Nerv in der Nähe des Muskelkernes vorkomme. „Direct mit dem Kerne hängt aber die Endfibrille nie zusammen“.

A. Mayer[1] verwendete zu seinen Untersuchungen die Iris, er hat nie einen Zusammenhang der Nervenfäden mit dem Kerne der Muskelfaser gesehen.

R. Gscheidlen[2] sagt in seiner später erschienenen, aber gleichzeitig mit Löwit gemachten Arbeit (S. 326): „Wenn wir nun das Resultat unserer Beobachtung über das Verhältniss der Nerven zu den glatten Muskelfasern des Frosches und des Salamanders mittheilen sollen, so stehen dieselben in Übereinstimmung mit den Angaben Löwit's“.

Er sah, besonders wenn viele Muskelfasern neben einander verliefen, oft als ob sich ein Fäserchen aus der Terminalfibrille abzweige und in den Muskelkern ginge, bei näherer Untersuchung glaubt er aber, dies als Irrthum erkennen zu müssen. Unter Terminalfibrille versteht er nach Löwit's Auffassung die letzten Verzweigungen jenes Ästchens, das von einer Muskelzellenreihe zu anderen zieht.

Zu meinen Untersuchungen über die Nervenendigung in der glatten Muskulatur verwendete ich vorzugsweise Säugethiere; immerhin benützte ich auch die Harnblase des Frosches, den Schliessmuskel des *Mytilus edulis* und der Anodonta.

Die Arbeiten Henocque's. (Du mode d. distribution et de la terminaison des nerfs dans l. muscles lisses. Archiv d. physiol. norm. et pathol., T. III, 1870), die von Hertz (Zur Structur d. glatten Muskelf. u. Nervenendig. in einem weichen Uterus-Myom, Virchow's Archiv, Bd. 46) und Popoff (Die Nerven d. Gallenblase, Hoffmann u. Schwalbe's Jahresberichte über Fortschr. d. Anatom. u. Physiol., Bd. I, 1873) sind übereinstimmend mit den Angaben Arnold's.

[1] A. Mayer, Die Nerven in der Iris. Archiv f. mikroskop. Anatom., Bd. XVII.

[2] R. Gscheidlen, Beiträge z. Lehre d. Nervenendig. in den glatten Muskelfasern. Archiv f. mikroskop. Anatom., Bd. XIV.

Am geeignetsten schienen mir aber die Harnblase des Schweines, des Pferdes und des Meerschweinchens, von letzterem auch der Darm.

Besonders die Harnblase und der Darm des Meerschweinchens sind reich an Nerven und bestehen aus leicht isolirbaren Muskelfasern, verhältnissmässig gross, mit wenig Bindegewebe und elastischen Fasern durchsetzt. Sie waren daher ein geeignetes Material für meine Untersuchungen. Nach wiederholten Versuchen wandte ich in der Folge Löwit's Färbungsmethode als die zweckmässigste an, jedoch mit einigen wenigen Modificationen.

Ich füllte unmittelbar nach dem Tode die Harnblase oder ein Stück Darmrohr des zum Versuche bestimmten Meerschweinchens prall mit einer Mischung von Ameisensäure und Wasser in gleichen Theilen, und legte diese Organe für eine halbe Stunde in eine gleiche Flüssigkeit. Nach diesem Verfahren brachte ich die Objecte in destillirtes Wasser, und konnte mit grosser Leichtigkeit an den noch immer prallgefüllten Eingeweiden den Peritonealüberzug mit zwei Pincetten abpräpariren.

Jetzt erst eröffnete ich dieselben und vermochte die Muscularis von der Mucosa ohne weiters zu trennen. Durch diese Maceration ging ein Theil des Bindegewebes zu Grunde, was meinen Untersuchungen zu Gute kam.

Nun brachte ich Stücke der Muscularis in eine 1percentige Goldchloridlösung, bis ich eine schön orangegelbe Färbung des Objectes wahrnahm; das dauerte gewöhnlich 25 bis 35 Minuten.

Darauf wusch ich die Präparate mit destillirtem Wasser ab, und legte sie in die Pritschard'sche Säurelösung. (1 Theil Ameisensäure, 1 Theil Amylalcohol, 100 Theile Wasser.)

Die Reduction geht in einem dunklen Raume, wie Löwit angibt, binnen 24 Stunden vor sich.

Mittelst dieses Verfahrens erhalten die Nerven eine dunkle bis schwarze, die Muskelfasern eine röthlich-violette, die Muskelkern-Contouren auch eine dunkle Färbung.

Diese schöngefärbten Präparate wurden zerzupft in Glycerin untersucht, jedoch erschwerten die Aufeinanderlagerung der Muskelschichten, das unvollständig geschwundene Bindegewebe und das dichte Nervennetz eine genauere Untersuchung der ein-

zelnen Muskelfasern und der mit ihnen zusammenhängenden Nerven.

Daher schritt ich zur Isolirung der Muskelfasern, welche ich nach mannigfachen fruchtlosen Versuchen durch eine Mischung von gleichen Theilen Wasser, Glycerin und Salpetersäure erreichte. Die nach der früher angeführten Methode gefärbten und in dieser Mischung durch 24 bis 36 Stunden gelegenen Präparate untersuchte ich ohne weiteres in Glycerin. Ich fand stets vollständig isolirte oder zu kleineren Gruppen vereinigte Zellen. Dabei sah ich neben den mit den Muskelzellen in inniger Verbindung stehenden Nervenfasern auch viele Nervenfibrillen frei, was bei der leicht zerstörbaren Verbindung und zarten Beschaffenheit beider Elemente erklärlich erscheint.

Das Bindegewebe und grösstentheils auch die Gefässe gehen in dieser Flüssigkeit zu Grunde.

Die Muskelzellen der Harnblase des Meerschweinchens und Schweines — ich führe diese beiden Objecte an, weil meine beiliegenden Zeichnungen sich auf dieselben beziehen — sind, wie bekannt, spindelförmig, in expandirtem Zustande platt gedrückt, an den Rändern scharf contourirt und in der Mitte, wo die Kernanschwellung liegt, am breitesten.

Der Kern in der Muskelfaser der Harnblase des Meerschweinchens ist walzenförmig. An jedes seiner Enden schliesst sich ein protoplasmatischer, durch Gold intensiv tingirbarer Fortsatz an, der mehr oder weniger weit verfolgbar, bisweilen korkzieherförmig gewunden ist. Ich will denselben im Laufe der Untersuchung Protoplasma- oder Kernfortsatz nennen.

Die Kerne der Schweinsharnblase sind bedeutend kleiner, von unregelmässiger Gestalt, mit kurzen, geraden und feinen Fortsätzen.

Die Kerne beider sind sehr oft von dunklen Streifen durchzogen.

Diese Vorbemerkungen vorausgeschickt, schreite ich zur Betrachtung der nervösen Elemente. Da ich zum Studium der Nervenendigungen die Isolirungsmethode als die günstigste anwandte, konnte ich mich nicht mit der Untersuchung der Nervenplexus beschäftigen. Es geschah dies sehr ausführlich von Klebs, Löwit und Anderen.

Die Fragen, die ich über die Nervenendigung in den glatten Muskeln zu beantworten versuchen möchte, sind:

Existirt eine Verbindung zwischen Muskelzelle und Nerv? Nehmen auch der Kern und die Kernfortsätze (Protoplasmafortsätze) daran Theil?

Versorgt eine Nervenfaser mehrere Muskelfasern und wie verhält sie sich dabei? und endlich, welches ist das Zahlenverhältniss zwischen Muskelzellen und Nervenenden?

Auf die erste Frage kann ich mit Sicherheit bejahend antworten, ich werde diess an der Hand der Abbildungen beweisen und dabei zugleich die übrigen Fragen so weit beantworten, als es mir möglich ist.

Fig. I stellt eine Nervenfaser vor, die gegenüber dem Muskelkern mit der Zelle in Berührung tritt; sie schickt einen deutlichen Endast zum Protoplasmafortsatze. Es bleibt ungewiss, ob nicht ausserdem noch Verbindungen mit den Zellkerncontouren selbst vorhanden sind.

Was davon im Präparate zu sehen war, ist in der Zeichnung so naturgetreu als möglich wiedergegeben.

Fig. II zeigt uns einen Nerven, der sich an einer Kernstelle in einen dickeren und in einen dünneren Zweig theilt; letzterer tritt, nachdem er noch einen Seitenast abgegeben hat, mit einer Muskelzelle gegenüber dem Muskelkerne in Berührung, er schickt noch zwei Äste ab, die parallel mit dem Rande der Muskelfaser verlaufen, während der Hauptast weiter zieht, voraussichtlich zu noch anderen Muskelzellen.

Ferner sind wohl Nerven-Terminalfibrillen in Verbindung mit dem Protoplasmafortsatze sichtbar. Von diesen Verbindungen werde ich später eingehender sprechen.

Dass ein wahrer Zusammenhang zwischen Muskel und Nerv existire, davon habe ich mich überzeugt, da ich das Präparat, das unter dem Mikroskop in Glycerin lag, wiederholte Male durch einen Druck mit der Zupfnadel auf verschiedene Stellen des Deckglases in Bewegung brachte. Die Muskelzelle bewegte sich mit dem Nerv, und auch bei heftigeren Bewegungen trennten sie sich nicht von einander.

Ich will bei dieser Gelegenheit hinzufügen, dass ich diesen Versuch an jedem Präparate anstellte.

Fig. III. Ein durch Gold dunkel gefärbter Nerv, der mit birnförmigen Kernen versehen dem Muskelzellenrande parallel verläuft, schickt einen Endast zum Kern. Hier war die Verbindung mit dem dunklen Kerncontour selbst ganz deutlich, während es ungewiss blieb, ob der daneben verlaufende schwächere Streif als Verbindung mit dem Protoplasmafortsatze zu deuten sei. Auf dem Kerne sieht man divergirende Streifen, welche als Fortsetzungen des Nervenendastes erscheinen. Ich habe solche Bilder mehrmals gesehen.

Fig. IV zeigt Verbindungen eines und desselben Nervenendes, das sich durch sein Aussehen für mich unzweifelhaft als solches charakterisirte, mit den Protoplasmafortsätzen zweier nebeneinander liegender Muskelzellen. Ich habe solche Bilder mehrmals gesehen.

Fig. V zeigt ein abgerissenes Nervenende in Verbindung mit dem Protoplasmafortsatze. Ausserdem scheint eine die Muskelzelle entlang laufende Nervenfaser eine directe Verbindung zum Kerncontour zu senden.

Fig. VI zeigt ein abgerissenes Nervenende in directer Verbindung mit dem Kerncontour. Wir haben hier also ein Analogon mit Fig. III, aber mit dem Unterschiede, dass hier der Nerv nicht an derselben Muskelzelle entlang läuft, sondern seinen Längsverlauf offenbar zwischen anderen Muskelzellen machte und einen queren Endast zu der abgebildeten hinüberschickte. Verschiedenen Präparaten zufolge kann ich aussagen, dass gelegentlich ein parallel zur Muskelfaser und an ihrem Rande verlaufender Nerv in der Gegend des Muskelkerns mit der Muskelzelle in Berührung tritt, dann seinen Weg parallel mit dem Muskelzellenrande weiter verfolgt; oft aber theilt sich ein zur Muskelfaser senkrecht oder unter einem anderen Winkel einlaufender Nerv in der Nähe des Muskelkerns in zwei divergirende Äste, die mit dem Muskelzellenrande parallel verlaufen. Nicht in jedem Präparate ist derselbe Verlauf zu beobachten. Trotzdem die Verbindung mit dem Kerne, wie aus der früher gegebenen Literaturskizze hervorgeht, oft geleugnet wurde, existirt sie zweifellos wenigstens in dem Sinne, dass der Nerv entweder mit dem Protoplasmafortsatze oder dem Kerncontour zu Eins zusammenschmilzt. Nach dem bisher Gesagten habe ich nun noch die Frage zu erörtern, ein wie grosser Bruchtheil der Muskelzellen etwa Nervenenden erhält.

In der Harnblase des Meerschweinchens fand ich neben beiläufig jeder vierten bis fünften Faser einen parallel laufenden Nerven, Verbindungen mit dem Kerne oder dessen Protoplasmafortsatze konnte ich nur in einer geringeren Anzahl von Fällen constatiren.

Nichts destoweniger kann ich Denjenigen nicht beistimmen, welche für unmöglich erklären, dass jede Muskelfaser mit einem Nerv in organischer Verbindung ist. Ich habe schon oben erwähnt, dass ich mehrmals abgerissene Nervenenden mit den Protoplasmafortsätzen zweier neben einander liegender Muskelfasern in deutlicher Verbindung gesehen habe. Ich habe ferner mehrmals gesehen, dass eine Nervenfaser, indem sie über eine Muskelfaser hinlief, an den Kern, beziehungsweise den Protoplasmafortsatz eine ganz kurze Verbindung abgab, während sie offenbar in ihrem weiteren Verlaufe noch andere Muskelfasern zu versorgen hatte.

Bedenkt man nun, dass man beim Abreissen einer solchen kurzen Verbindung von ihrer Insertion kein Mittel hat, die Spur derselben wahrzunehmen, und berücksichtigt man, dass es gar nicht unwahrscheinlich ist, dass hier die meisten Nervenenden abreissen, so wird man diese meine Reserve durchaus in der Ordnung finden.

Erklärung der Abbildungen.

Fig. 1. Eine Muskelzelle aus der Harnblase des Meerschweinche[illegible] Nervenfaser *n* tritt gegenüber dem Zellkerne mit dersel[illegible] Berührung; man sieht ausserdem einen deutlichen End[illegible] Protoplasmafortsatze ziehen und ungewisse Verbindungen [illegible] Zellkerne, Ameisensäure-Gold-Präparat, durch 24 Stunden [illegible] Isolirungsflüssigkeit gelegen, gezeichnet bei III/X Hartnac[illegible]

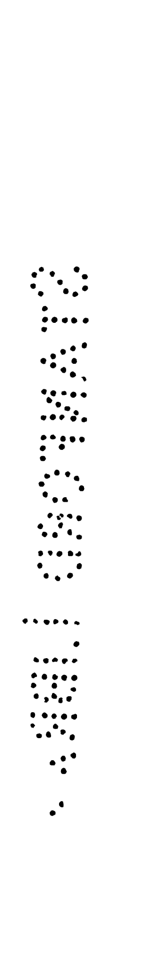
„ 2. Eine Muskelzelle aus der Harnblase des Meerschweinchens; m[illegible] einen Nerv, der sich an einer Kernstelle in zwei Äste thei[illegible] dünnere Ast tritt, nachdem er noch einen Seitenast abgege[illegible] gegenüber dem Zellkerne mit der Muskelzelle in Berühru[illegible] schickt zwei Äste $n^1 n^2$ ab, die parallel mit dem Rande der [illegible] faser verlaufen. Der Hauptast *n* geht weiter. Präparations[illegible] wie oben, gezeichnet bei III/X Hartnack Imm.

„ 3 Zeigt eine Muskelfaser der Harnblase des Schweines, an d[illegible] einen dunkelgefärbten Nerv mit birnförmigen Kernen sieht, [illegible] einen deutlich sichtbaren Endast zum Zellkerne schickt und [illegible] schwach gefärbten Streifen zum Protoplasmafortsatze. A[illegible] Kerne erblickt man zwei dunkle divergirende Streifen al[illegible] setzung des Endastes. Sechs Stunden nach dem Tode der o[illegible] Procedur unterworfen, gezeichnet wie oben.

„ 4. Zwei Muskelfasern des Meerschweinchendarmes. Zeigt Verbind[illegible] eines und desselben Nervenendes mit den Protoplasmafort[illegible] zweier neben einander liegender Muskelzellen. Gewöhnliche [illegible] parationsmethode, gezeichnet wie oben.

„ 5. Eine Muskelfaser der Harnblase des Meerschweinchens; ein [illegible] gerissenes Nervenende *t*, in Verbindung mit dem Protoplasma[illegible] satze. Ausserdem scheint eine die Muskelfaser entlang laufe[illegible] Nervenfaser *n* eine directe Verbindung zum Kerne zu send[illegible] Gewöhnliche Präparationsmethode, gezeichnet wie oben.

„ 6 Zeigt eine Muskelzelle aus der Harnblase des Meerschweinche[illegible] Ein abgerissenes Nervenende steht in directer Verbindung mit d[illegible] Kerne. Ameisensäure-Gold-Präparationsmethode, durch 36 Stund[illegible] in der Isolirungsflüssigkeit, gezeichnet wie oben.



VIII. SITZUNG VOM 17. MÄRZ 1881.

Das w. M. Herr Hofrath Ritter v. Brücke übermittelt die Jahrgänge 1879 und 1880 der von dem ausländischen e. M. Herrn Prof. Karl Ludwig herausgegebenen „Arbeiten aus der physiologischen Anstalt zu Leipzig".

Das c. M. Herr Prof. Dr. August Toepler übersendet eine Abhandlung des Herrn Dr. F. Streintz, Assistenten des physikalischen Laboratoriums am königl. sächs. Polytechnikum in Dresden: „Über die durch Entladung von Leydener Flaschen hervorgerufene Zersetzung des Wassers an Platinelektroden".

Das c. M. Herr Prof. J. Wiesner übersendet eine von Herrn Prof. E. Ráthay in Klosterneuburg ausgeführte Arbeit, welche den Titel führt: „Über die Hexenbesen des Kirschbaumes und über *Exoascus Wiesneri* n. sp."

Das c. M. Herr Prof. L. Boltzmann in Graz übersendet eine Abhandlung, betitelt: „Entwicklung einiger zur Bestimmung der Diamagnetisirungszahl nützlicher Formeln". I und II.

Ferner übersendet Herr Prof. Boltzmann eine im physikalischen Institut der Universität in Graz von dem Assistenten dieses Institutes Herrn Dr. Ign. Klemenčič ausgeführte Arbeit: „Zur Bestimmung des Verhältnisses zwischen der elektromagnetischen und mechanischen Einheit der Stromintensität".

Die Herren Prof. Dr. Edm. Reitlinger und Dr. Fr. Wächter in Wien übersenden eine gemeinsam verfasste Abhandlung: „Über Disgregation der Elektroden durch positive Elektricität und die Erklärung der Lichtenberg'schen Figuren".

Der Secretär legt eine von Herrn Regierungsrath Prof. Dr. Gust. A. V. Peschka an der technischen Hochschule in Brünn

eingesendete Abhandlung vor, betitelt: „Normalenfläche einer Developpablen längs ihres Durchschnittes mit einer krummen Fläche“.

Ferner legt der Secretär ein versiegeltes Schreiben von den Herren Prof. Dr. P. Weselsky und Dr. R. Benedikt in Wien vor, welches laut Aufschrift die Beschreibung technisch zu verwerthender Farbstoffe enthält.

Das w. M. Herr Hofrath Petzval überreicht eine Abhandlung des Herrn Prof. Lorenz Zmurko an der Universität zu Lemberg, betitelt: „Beitrag zur Theorie der Auflösung von Gleichungen, mit Bezugnahme auf die Hilfsmittel der algebraischen und geometrischen Operationslehre“.

Das w. M. Herr Hofrath Ritter v. Hauer überreicht eine Mittheilung aus dem geologischen Institute der Universität zu Prag: „Die Flora des tertiären Diatomaceenschiefers von Sulloditz im böhmischen Mittelgebirge“ von Herrn J. Wentzel.

Der Secretär Herr Hofrath J. Stefan überreicht eine Abhandlung: „Über das Gleichgewicht eines festen elastischen Körpers von ungleichförmiger oder veränderlicher Temperatur.“

Das w. M. Herr Prof. Ad. Lieben überreicht eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit: „Über die Oxydation von Borneolacetat“ von Herrn Hugo Schrötter.

Herr Prof. Dr. Ernst v. Fleischl in Wien überreicht eine Abhandlung, betitelt: „Physiologisch-optische Notizen“, in welcher einige Versuche beschrieben werden.

Herr Dr. J. Puluj, Privatdocent an der Wiener Universität, überreicht die dritte Abhandlung über „Strahlende Elektrodenmaterie“.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Accademia R. dei Lincei: Atti. Anno CCLXXVIII. 1880—81. Serie terza. Transunti. Vol. V. Fascicolo 5° & 6°. Roma, 1881; 4°.

— pontificia de' Nuovi Lincei: Atti. Anno XXXIII. Sessione VI^a del 25 Maggio 1880. Roma, 1880; 4°.

Akademie der Wissenschaften, königl. Preussische zu Berlin, Monatsbericht, November 1880. Berlin 1881; 8°.

Akademija umiejętności w Krakowie: Sprawozdanie Komisyi fyzyjograficznéj w roku 1879. Tom cztérnasty. W Krakowie, 1880; 8⁰.

— — Rozprawy i sprawozdania z posiedzen wydzialu matematiczno-przyrodniczego. Tom VII. W Krakowie, 1880; 8⁰.

— — Zbiór wiadomości do Antropologii krakowéj. Tom IV. Krakow, 1880; 8⁰.

— — Rocznik. Rok 1879. W Krakowie, 1880; 8⁰.

Apotheker-Verein, allgem.-österr.: Zeitschrift nebst Anzeigen-Blatt. XIX. Jahrgang. Nr. 8. Wien, 1881; 8⁰.

Archivio per le scienze mediche. Volume IV, fascicolo 4⁰. Torino e Roma 1881; 8⁰.

Bibliothèque universelle: Archives des sciences physiques et naturelles. 3ᵉ période. Tome V. Nr. 2. Genève, Lausanne, Paris, 1881; 8⁰.

Chemiker-Zeitung: Central-Organ. Jahrgang V. Nr. 10. Cöthen, 1881; 4⁰.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome XCII, Nr. 9. Paris, 1881; 4⁰.

Gesellschaft, deutsche für Natur- und Völkerkunde Ostasiens: Mittheilungen. 22. Heft. December 1880. Yokohama; 4⁰.

— naturforschende in Emden: LXV. Jahresbericht 1879—80. Emden, 1880; 8⁰.

— k. k. geographische, in Wien: Mittheilungen. Band XXIV (neue Folge XIV), Nr. 2. Wien, 1881; 4⁰.

— österreichische, zur Förderung der chemischen Industrie: Berichte. II. Jahrgang. Nr. IV. Prag, 1881; 8⁰.

Giessen, Universität: Akademische Schriften pro 1879—80. 9 Stücke; 4⁰ u. 8⁰.

Journal, the American of Science. 3. series. Vol. XXI. (Whole number, CXXI). Nrs. 122 & 123. New Haven, 1881; 8⁰.

Landwirthschafts-Gesellschaft, k. k. in Wien: Verhandlungen und Mittheilungen. Jahrgang 1881. 1. Heft. Wien, 1881; 8⁰.

Ludwig, C.: Arbeiten aus der physiologischen Anstalt zu Leipzig. Jahrgang 1879—80. Leipzig, 1880; 8⁰.

Museo civico di storia naturale di Genova: Annali. Volume XV. Genova, 1880; 8⁰.

Museum of Comparative Zoology at Harvard College: Bulletin. Vol. VIII. Nrs. 3. Cambridge, 1881; 8⁰.

Nature. Vol. XXIII. No. 593. London, 1881; 8⁰.

Osservatorio del R. Collegio Carlo Alberto in Moncalieri: Bullettino meteorologico. Anno XV. 1879—80. Nr. 8 & 9, Luglio & Agosto 1880. Torino; 4⁰

Pexidr, Gustav: Beitrag zur Kenntniss der durch das Erdbeben vom 9. November 1880 hervorgebrachten Erscheinungen der „Sandschlammauswürfe" auf den Erdspalten bei Resnik und Drenje in der Nähe von Agram. Agram, 1880; 8⁰.

Regel, E.: Descriptiones plantarum novarum et minus cognitarum. Fasciculus VII. Petropoli, 1879; 8⁰.

Reichsforstverein, österr.: Österr. Monatsschrift für Forstwesen. XXXI. Band. Jahrgang 1881. Februar- und März-Heft. Wien; 8⁰.

Società, degli spettroscopisti italiani: Memorie. Dispensa 10ª & 11ª. Roma, 1881; 4⁰.

— J. R. agraria di Gorizia: Atti e memorie. Anno XIX. N. S. Nr. 10—11 & 12. Gorizia, 1880; 8⁰.

Société des ingénieurs civils: Mémoires et compte rendu des travaux 5ᵉ série, 34ᵉ année, 1ᵉʳ cahier. Paris, 1881; 8⁰.

Society, the Linnean of New South Wales: Proceedings. Vol. IV, part the fourth. — Vol. V, parts the first & second. Sidney, 1880; 8⁰.

— the royal microscopical: Journal. Ser. 2. Vol. I. Part 1. London and Edinburgh, 1881; 8⁰.

— the royal astronomical: Monthly notices, annual report of the Council. Vol. XLI. Nr. 4. February 1881. London; 8⁰.

Sommerbrodt, Julius Dr.: Die reflectorischen Beziehungen zwischen Lunge, Herz, und Gefässen. Berlin, 1881; 8⁰.

Université de Bruxelles: Annales. Faculté de Médecine. Tome I. 1880. Bruxelles, 1880; 8⁰.

Wiener Medizinische Wochenschrift. XXXI. Jahrgang. Nr. 11. Wien, 1881; 4⁰.

Physiologisch-optische Notizen.

Von Prof. **Ernst v. Fleischl,**
Assistenten am Wiener physiologischen Institute.

I.

In einem Blechschirme, der nahe und parallel der Flamme eines Schmetterling-Brenners aufgestellt wurde, befanden sich zwei runde Löcher von einigen Millimetern Durchmesser in gleicher Höhe und in einer gegenseitigen horizontalen Entfernung, welche der Distanz meiner Pupillen von einander gleichkam. Das Licht, welches von diesen beiden Oeffnungen ausging, wurde nun durch ein System reflectirender und brechender Flächen, die in unsymmetrischer Weise aufgestellt waren, derart im Raume herumgeworfen und von gewissen Stellen des Raumes abgeblendet, dass ein Auge, welches sich in einiger Entfernung vor dem Schirme hin- und herbewegte, in rascher Aufeinanderfolge, aber nach ungleichen Intervallen ein Bild einer Oeffnung erblickte. Die Gasflamme wurde übrigens so eingeschlossen, dass, ausser durch jene beiden Löcher, kein Licht von ihr den Raum erhellte, dieser also fast ganz dunkel war. Ich habe nun mit dieser einfachen Anordnung folgenden Versuch angestellt. Ich setzte mich in einer Entfernung von 1—1½ Meter vor den Schirm und schloss beide Augen, machte dann mit dem Oberkörper oder mit dem Kopf eine Bewegung und öffnete nun die Augen, um sie dann sofort wieder zu schliessen, achtete jedoch darauf, dass ich von dem Momente an, in dem ich die Augen für kurze Zeit geöffnet hatte, keine Bewegung mehr weder mit dem Rumpfe, noch mit dem Kopfe, noch mit den Augen machte. Bei jenem Augenaufschlag hatte ich entweder kein oder ein oder zwei Bilder gesehen, und wenn einer der beiden letzteren Fälle eingetreten war, so versuchte ich nachträglich festzustellen: für den Fall, dass ich ein einziges Bild gesehen hatte, mit welchem der beiden Augen ich es

gesehen hatte, und für den Fall, dass ich zwei Bilder gesehen hatte, ob ich mit jedem Auge eines, oder beide mit demselben Auge, und mit welchem Auge ich sie beide gesehen hatte. Die Richtigkeit meiner Vermuthungen prüfte ich dann, indem ich, ohne meine Stellung verändert zu haben, abwechselnd das eine und das andere Auge öffnete. Hiebei zeigte es sich, dass mein Urtheil ungefähr so oft falsch war, als es falsch sein musste unter der Voraussetzung, dass wir keine Kenntniss davon haben, mit welchem unserer beiden Augen wir etwas sehen; dass ich also z. B.: wenn ich bloss ein Bild erblickt hatte, ungefähr ebenso häufig auf das richtige Auge rieth, wie auf das falsche. Meine Augen wichen in der kurzen Zeit, während welcher ich sie geöffnet hielt, nicht merklich aus ihrer Parallelstellung ab, so dass ich, selbst in dem Falle, dass ich eine der beiden Öffnungen gar nicht, die andere aber mit beiden Augen sah, Doppelbilder erhielt; diese Doppelbilder vermochte ich nicht zu unterscheiden von jenen, die entstanden, wenn ich mit einem Auge gar nichts, mit dem anderen die beiden Oeffnungen sah, so dass ich mich auch für berechtigt halte, den Satz auszusprechen, dass wir keine unmittelbare Kenntniss davon haben, ob wir monoculär oder binoculär sehen.

Diese Beobachtungen lassen sich noch auf mannigfache andere Weisen anstellen, doch ist immer eine gewisse Vorsicht nothwendig, um alle Umstände auszuschliessen, die uns zu Elementen für einen Schluss verhelfen könnten. Wenn man in einem von mehreren Flammen erleuchteten Raume einen Brillanten in solcher Entfernung vor der Nasenwurzel hält, dass es eben noch gelingt, denselben einfach — wenn auch undeutlich — zu sehen und man nun eine ganz kleine drehende Bewegung mit dem Steine ausführt, so gerathen sämmtliche Spectra in Bewegung, einige verschwinden, neue tauchen auf. Man frage sich nun von einem solchen eben aufgeblitzten Spectrum, mit welchem Auge man es sieht, und prüfe dann die Richtigkeit der Antwort durch abwechselndes Schliessen der Augen. Auch hiebei wird man ungefähr ebenso häufig falsch wie richtig rathen.

Aus diesen Versuchen scheint mir hervorzugehen, dass ein „Organgefühl" der Augen in dem Sinne, wie es in neuerer Zeit gelegentlich zur Beantwortung physiologischer und psychologischer

Fragen angenommen wurde, und von welchem sogar unser Raumsinn abzuleiten versucht wurde, nicht existirt. Es mag immerhin zugegeben werden, dass sehr bald nach excessiven adäquaten Sinnesreizen sich Veränderungen in dem gereizten Organe secundär ausbilden, die nun vermittelst der dem Organe angehörigen schmerzempfindenden Nerven wahrgenommen und richtig localisirt werden — eine directe Wahrnehmung der anatomischen Lage des gereizten Sinnesapparates, ein Organgefühl kann selbst bei sehr intensiven Reizen — für das Auge wenigstens — nach dem eben Mitgetheilten nicht zugegeben werden.

II.

Eine bekannte Erscheinung, welche auch in Helmholtz's physiologischer Optik, pag. 161, beschrieben wird, ist folgende: Blickt man durch ein Mikroskop oder Teleskop in ein leeres, helles Gesichtsfeld und versetzt man das Instrument oder den eigenen Kopf in kleine oscillirende Bewegungen, deren Ebene senkrecht steht zur Axe des Rohres, so erblickt man alsdann die sogenannte Purkinje'sche Aderfigur als scharfe dunkle Zeichnung auf hellem Felde. Die Capillargefässe sind ebenso deutlich ausgeprägt wie die grösseren Stämme, die gefässlose Stelle des deutlichsten Sehens auf der Netzhaut erscheint als eine nahezu kreisrunde, ausgesparte, wie chagrinirte Stelle der Zeichnung und man kann, wenn man den Kopf in einer bestimmten Richtung bewegt, leicht beobachten, dass hiebei hauptsächlich diejenigen Gefässe hervortreten, deren wirkliche Verlaufsrichtung auf die Bewegungsrichtung des Kopfes senkrecht steht, während solche Gefässe, deren Richtung mit der Bewegung übereinstimmt, im Bilde ausbleiben und erst dann anfangen sichtbar zu werden, wenn man die Bewegungsrichtung des Kopfes ändert. Beschreibt man mit dem Kopfe kreisförmige Schwingungen, so treten alle Bestandtheile des Bildes gleichzeitig und gleich scharf hervor. Die Erklärung der bisher angeführten Thatsachen ist selbstverständlich.

Doch ist mir bei öfterer Wiederholung des Versuches ein Umstand aufgefallen, dessen Begründung aus den bekannten

Gesetzen nicht ebenso einfach ist. Bei langsamer Bewegung des Kopfes treten nämlich nicht zuerst die stärkeren Theile der Zeichnung hervor, wie man erwarten sollte, sondern im Gegentheile die feinsten. Man findet leicht einen solchen Grad von Geschwindigkeit der Kopfbewegungen heraus, dass alle grösseren Blutgefässe gar nicht erscheinen und man im Bilde ausschliesslich das Capillargefässnetz der Retina vor sich hat, dieses aber mit aller wünschenswerthen und überhaupt erreichbaren Schärfe.

Da die Bewegungen des Kopfes bei diesem Versuche keine andere Bedeutung haben, als die, dass sie — bei der vorhandenen Tendenz, zu fixiren — Bewegungen des Auges veranlassen, so werde ich nunmehr bloss von Augenbewegungen sprechen. Man kann ja bekanntlich die vorerwähnten Erscheinungen sämmtlich auch durch willkürliche Bewegungen des Auges bei ruhigem Kopfe hervorbringen, nur ist diese Methode bei weitem anstrengender und besonders dann, wenn man sich bemüht, die für gewöhnlich zuckenden Blickbewegungen des Auges, bei welchen das besprochene Bild nur intermittirend erscheint, in eine continuirliche Bewegung des Bulbus zu verwandeln, sehr ermüdend und nur immer eine ganz kurze Zeit hindurch anwendbar, während sich bei regelmässig ausgeführten Kopfbewegungen alsbald eine stetig und regelmässig schwingende Bewegung des Auges einstellt, welche auch nicht besonders ermüdend ist und den Versuch durch eine längere Zeit fortzusetzen erlaubt.

Befindet sich das Auge in Ruhe und ist die auf dasselbe wirkende Lichtquelle dem Orte und der Helligkeit nach unveränderlich, so werden die von jener Lichtquelle auf die empfindliche Schichte der Netzhaut entworfenen Schatten der vor dieser Schichte verlaufenden Blutgefässe nicht wahrgenommen aus den bekannten Gründen, nämlich wegen der grösseren Lichtempfindlichkeit und geringeren Ermüdung der beschatteten Netzhautstellen. Diesen schliessen sich noch die von Helmholtz bei Besprechung des blinden Fleckes (phys. Opt., pag. 210 ff. und 574 ff.) gemachten Bemerkungen an.

Bewegt man das Auge vor dem Oculare langsam, so erscheint nichts vom Gefässbaume im Gesichtsfelde, ganz wie

im vorher besprochenen Falle, doch genügen die daselbst angedeuteten Gründe nicht mehr vollständig zur Erklärung dieser Erscheinung.

Bei steigender Geschwindigkeit der Bewegung des Auges (und somit auch der Bewegung der Gefässschatten auf der Netzhaut) werden nach und nach erst die Capillargefässe und später auch die grösseren Stämme sichtbar.

Man könnte nun zunächst daran denken, dass bei derselben Geschwindigkeit der Augenbewegung die Schatten der Capillargefässe in Wirklichkeit schneller über die lichtempfindende Fläche hinwandern als die der grossen Gefässe, und dass also ihre Bewegung wahrgenommen wird, während die der breiteren Gefässe für die Perception zu langsam ist. Diese Annahme wird aber dadurch widerlegt, dass im menschlichen Auge die gröberen Verzweigungen der Retinagefässe in der Nervenfaserschichte, die Capillarnetze aber an beiden Oberflächen der inneren Körnerschichte liegen.[1]

Es werden somit die wandernden Schatten der stärkeren Gefässe trotz der grösseren Dimensionen und grösserer Geschwindigkeit unter Umständen nicht wahrgenommen, welche bereits das deutliche Erscheinen der Capillarschatten bedingen.

Nun könnte man vielleicht glauben, dass die wegen der entfernteren Lage der stärkeren Gefässe breiteren Halbschatten derselben sich zur Erklärung unserer Erscheinung verwenden lassen. Bei geringen Augenbewegungen fällt nämlich der Kernschatten des Gefässes nicht über den früheren Ort seines Halbschattens auf der Retina hinaus, und die gesammte Erscheinung des Gefässschattens an seinem neuen Orte könnte unbemerkt bleiben wegen der geringen und durch allmälige Uebergänge vermittelten Lichtdifferenz zwischen Kernschatten und Halbschatten einerseits und zwischen dem auf bisher unbeschattete Netzhautpartien vorrückenden Halbschatten und der Helligkeit eben dieser Partien andererseits. Nun ist aber erstens die Breite des Halbschattens unter den

---

[1] Siehe die erschöpfende Darstellung dieser Verhältnisse bei His: Abbildungen über das Gefässsystem der menschlichen Netzhaut u. s. w. Arch. f. Anatomie 1880, pag. 224 ff.

gegebenen Verhältnissen im menschlichen Auge äusserst gering, zweitens aber lehrt eine einfache Rechnung oder Construction, dass mit gewissen Beschränkungen, welche aber die Anwendung auf unseren Fall zulassen: dass mit wachsender Entfernung des opaken Objectes vom Schirme, der Weg seines Schattens auf diesem Schirme, bei seitlicher Bewegung der Lichtquelle um eine Längeneinheit, in demselben Verhältnisse wächst, als die Breite seines Halbschattens gewachsen ist. Es ist somit die grössere Entfernung der breiteren Gefässe von der empfindlichen Schichte der Retina ein Umstand, der sich zur Erklärung der uns beschäftigenden Erscheinung nicht verwerthen lässt. Aus der Betrachtung, dass der Weg eines Arterien- oder Venenschattens nie absolut kleiner sein kann, als der gleichzeitig zurückgelegte Weg eines Capillarschattens, und dass der Halbschattenzuwachs der grösseren Gefässe dem Zuwachse des Weges ihres Schattens bei Bewegung proportional ist, folgt zugleich die Unhaltbarkeit aller Erklärungsversuche, welche sich auf die Wirkung von Irradiation (im Sinne Plateau's), von Contrast oder von Nachbildern stützen wollten. Es bleibt nun, so viel ich sehe, nichts übrig, als: das Vorhandensein eines — aus gewissen Gründen für gewöhnlich nicht zu unserem Bewusstsein kommenden — in allen seinen Theilen homogenen, einfachen Bildes von bestimmter Ausdehnung auf der sonst gleichmässig erleuchteten Retina im Sinne der pyschophysischen Theorie für einen (unter der Schwellenhöhe befindlichen) Reiz und die innerhalb einer gewissen Zeiteinheit vor sich gehende Verschiebung dieses Bildes für einen Reizzuwachs anzusehen, welcher nach der Richtung der Verschiebung zu messen und mit der dieser Richtung parallelen Dimension des Bildes als Reizgrösse zu vergleichen wäre.

Wenn wir von der im Obigen erläuterten grösseren Geschwindigkeit der Arterien- und Venenschatten gegenüber den Capillarschatten absehen, so ist der Reizzuwachs, den Arterien- und Capillarschatten bei einer bestimmten Bewegung des Auges erfahren, absolut derselbe, im Verhältnisse zur Reizgrösse hingegen ein sehr verschiedener; ein echter oder unechter Bruch; ja er wird z. B. bei einer gewissen Geschwindigkeit der Bewegung für die grösseren Gefässe ein echter, und für die Capillargefässe ein unechter Bruch sein. Mit Berücksichtigung der etwas

grösseren absoluten Geschwindigkeit der Schatten der von den Zapfen entfernteren, grösseren Gefässe tritt wohl ein etwas anderes Verhältniss ein, welches indessen durch die von vornherein beträchtlichere Reizgrösse (im Nenner) (breiterer Halbschatten), wenn auch nur theilweise compensirt wird. Doch kann man diesen ganzen Unterschied aus Rücksicht auf die grosse Differenz in der absoluten Breite von Arterien und Venen einerseits und von Capillaren andererseits und mit Rücksicht auf die geringe Entfernung beider von der Netzhaut vernachlässigen.

Bei schnellen Bewegungen des Bulbus ist nun der Reizzuwachs, nämlich die Verschiebung des Bildrandes, in der Zeiteinheit sowohl im Verhältnisse zur bedeutenden Reizgrösse der breiten Schatten, als auch selbstverständlich im Verhältnisse zu der geringeren Reizgrösse der schmalen Schatten ausreichend, um eine Empfindung anzuregen. Nimmt aber die Geschwindigkeit der Augenbewegung ab, so nimmt auch der durch die Bildverschiebung gegebene Reizzuwachs an allen Schatten absolut um das Gleiche ab, und wird bei einer gewissen Geschwindigkeit des Auges schon zu klein sein im Verhältnisse zu den breiteren Schatten, als dass er über die Schwelle des Bewusstseins treten könnte; während er im Vergleiche mit der Breite der schmalen Gefässschatten noch gross genug ist, um diese Schwelle zu überschreiten. Sinkt die Geschwindigkeit der Augenbewegung noch weiter, so entzieht sich auch dieses zweite Verhältniss wegen seiner Kleinheit unserer Wahrnehmung. Hieraus erklärt sich die im Anfange vorgebrachte Beobachtung in allen ihren Theilen, besonders das frühere Auftreten der Capillarschatten und das gänzliche Ausbleiben der Erscheinung bei langsamen, wenn auch ausgiebigen Augenbewegungen — beides Beobachtungen, die in keiner anderen mir bekannten Hypothese ihre Erklärung finden. Die Thatsache, dass wir beim gewöhnlichen Gebrauche unserer Augen viel geringere Geschwindigkeiten, als welche hier in Betracht kommen, dennoch wahrnehmen, z. B. die Bewegung des Minutenzeigers einer Taschenuhr, oder eines aus sehr grosser Entfernung angesehenen Eisenbahnzuges, erklärt sich daraus, dass wir in dem mit Objecten angefüllten Gesichtsfelde sehr bald an der Vergleichung vollkommen ruhender mit den bewegten

Objecten, eben deren Bewegung erkennen. Dieses ist bei unserem Versuche, wo das Gesichtsfeld von ruhenden Bildern so gut wie ganz frei ist, nicht möglich. Die mehrmals erwähnte ungemein kleine Verschiedenheit in der Geschwindigkeit der Bewegung der grossen und kleinen Gefässschatten kann hiefür unmöglich verwerthet werden. Auch möchte ich diese Hypothese nicht unnütz auf andere als solche Bedingungen ausdehnen, als unter welchen die durch sie zu erklärende Beobachtung angestellt wird; zu diesen Bedingungen gehört vor allem das nicht Wahrgenommenwerden der ruhenden Schatten und das Freisein des Gesichtsfeldes von Objecten, wenigstens in der Gegend desselben, in welcher die Erscheinung hervortritt.

III.

Bei Gelegenheit der Besprechung entoptischer Objecte (pag. 151) erwähnt Helmholtz in seinem Lehrbuche der physiologischen Optik des Umstandes, dass durch kleine Ansammlungen von Thränenfeuchtigkeit, Secret der Augenliderdrüsen u. s. w., auf der Vorderfläche der Hornhaut Streifen und Tropfen im Gesichtsfelde erzeugt werden, und dass die helle Stelle in der Mitte der Tropfen öfters ein unvollkommenes optisches Bild von der Lichtquelle bildet. „Die Ansammlungen von Flüssigkeit auf der Hornhaut bilden hiebei kleine Convexlinsen, welche hinter sich ein umgekehrtes Bild der vor ihnen liegenden Gegenstände entwerfen.“ Ausser von dieser Art von entoptisch sichtbaren Gegenständen ist bisher noch von keiner anderen bekannt, dass sie Veranlassung zur Abbildung der Lichtquelle werden können, und doch ist dies, wie man sich leicht überzeugen kann, auch für die allergewöhnlichsten entoptischen Objecte, die mouches volantes der Fall. Man braucht nur durch einen dicht vor das Auge gehaltenen Schirm mit einer kleinen irgendwie charakteristisch, etwa T förmig gestalteten Öffnung gegen den hellen Himmel zu blicken, um sofort jede einzelne mouche volante in Gestalt der Spalte im Schirme zu sehen (und ihr gleich orientirt). Auch die einzelnen Perlen in schnurartig aufgereihten mouches volantes nehmen die Gestalt der Lichtquelle an, und zwar

wie die solitären mouches mit grosser Schärfe und Deutlichkeit. Die Erklärung dieser Erscheinung ist so einfach, dass es wohl überflüssig wäre, näher auf dieselbe einzugehen; es liegt eben jener bekannte Fall vor, dass die Gestalt des Schattens nicht der des opaken Gegenstandes, sondern der der Lichtquelle geometrisch ähnlich ist, und alle Einzelheiten dieses Falles finden sich in unserem Experimente wieder; so lassen sich aus demselben auch Schlüsse über die Entfernung der schattengebenden Körper von der Zapfenschichte der Netzhaut ziehen, welche mit den ohnehin über diesen Punkt bekannten Daten in guter Übereinstimmung sind.

Die subjectiven Beobachtungen, welche den hier mitgetheilten Notizen zu Grunde liegen, habe ich nicht allein selbst gemacht, sondern sie wurden von verschiedenen anderen Beobachtern bestätigt.

IX. SITZUNG VOM 31. MÄRZ 1881.

Das w. M. Herr Director Dr. Hann überreicht im Namen des Herrn Dr. H. Wild, Directors des physikalischen Central-Observatoriums und Mitgliedes der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in St. Petersburg, dessen Werk: „Die Temperaturverhältnisse des russischen Reiches."

Das c. M. Herr Prof. L. Pfaundler übersendet eine Abhandlung des Herrn Gymnasialprofessors Dr. F. Hočevar in Innsbruck: „Über einige Versuche mit einer Holtz'schen Influenzmaschine".

Das w. M. Herr Prof. Linnemann übersendet eine im Prager Universitätslaboratorium ausgeführte Arbeit des Herrn Dr. Heinr. Goldschmidt: „Über die Einwirkung von molecularem Silber auf die Kohlenstoffchloride."

Das c. M. Herr Prof. E. Weyr übersendet eine Abhandlung des Herrn Karl Bobek in Prag: „Über metrische Beziehungen, die in einer Congruenz linearer Complexe stattfinden."

Herr Prof. Dr. Rich. Maly in Graz übersendet eine in seinem Laboratorium von dem Assistenten Herrn Rudolf Andreasch ausgeführte Arbeit: „Synthese der methylirten Parabansäuren, der Methylthioparabansäure und des Thiocholestrophans."

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlung vor:

„Ein Beitrag zur Theorie der Maxima und Minima von Functionen", von Herrn F. Haluschka, suppl. Lehrer an der II. deutschen Staatsrealschule in Prag.

Das w. M. Herr Director Dr. Steindachner überreicht eine Abhandlung, welche den Titel führt: „Ornithologische Resultate der Reisen des Dr. Emil Holub in Süd-Afrika, bearbeitet von den Herren Dr. Emil Holub und Custos August v. Pelzeln.

Das w. M. Herr Prof. v. Barth überreicht eine in seinem Laboratorium von Herrn Albert Cobenzl ausgeführte Arbeit: „Beitrag zur Trennung des Wolframs von Antimon, Arsen und Eisen, nebst Analyse eines sogenannten Pseudometeoriten."

Das w. M. Herr Hofrath v. Hochstetter überreicht eine Arbeit des Herrn Dr. Aristides Březina: „Über die Orientirung der Schnittflächen an Eisenmeteoriten mittelst der Widmannstädten'schen Figuren."

Das w. M. Herr Prof. v. Lang überreicht eine Abhandlung: „Über die Dispersion des Aragonits nach arbiträrer Richtung."

Das w. M. Herr Prof. Ad. Lieben überreicht:

1. Eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit: „Untersuchungen über Borneolkohlensäure und Campherkohlensäure", von den Herren J. Kachler und F. V. Spitzer.
2. Eine im Laboratorium der technischen Hochschule des Herrn Prof. Zulkowsky in Brünn ausgeführte Untersuchung: „Über die Sulfochromite" von Herrn Max Gröger.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Académie de Médecine: Bulletin. 2e série, tome X, 45e année, Nos. 10 & 11. Paris, 1881; 8°.

Archiv der Mathematik und Physik. LXVI. Theil, 1. & 2. Heft. Leipzig, 1880—81; 8°.

Chemiker-Zeitung: Central-Organ. Jahrgang V. Nr. 11 & 12. Cöthen, 1881; 4°.

Comité international des poids et mesures: Procès-verbaux des séances de 1880. Paris, 1881; 8°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Tome XCII, Nos. 10 & 11. Paris, 1881; 4°.

Elektrotechnischer Verein: Elektrotechnische Zeitschrift. II. Jahrgang 1881, Heft III. März Berlin; 8°.

Gesellschaft, Berliner medicinische: Verhandlungen aus dem Gesellschaftsjahre 1879/80. Band XI. Berlin, 1881; 8°.

— k. k., der Ärzte: Medicinische Jahrbücher. Jahrgang 1880. IV. Heft. Wien, 1880; 8°.

— Deutsche chemische: Berichte. XIV. Jahrgang. Nr. 4. Berlin, 1881; 8°.

Gesellschaft. königl. bayer. botan. in Regensburg: Flora. oder allgemeine botanische Zeitung. N. R. XXXVIII. Jahrgang, oder der ganzen Reihe. LXIII. Jahrgang 1880. Regensburg; 8⁰.

Journal für praktische Chemie. N. F. Band 23. 5. & 6. Heft. Leipzig, 1881; 8⁰

Mittheilungen aus J. Perthes' geographischer Anstalt, von Dr. A. Petermann. XXVII. Band, 1881. III. Gotha; 4⁰.

Nature. Vol. XXIII. Nr. 594. London, 1881; 8⁰.

Santiago de Chile: Anales de la Universidad. 1ª Seccion. Memorias cientificas i literarias. Entrega correspondiente al mes de enero 1878—junio di 1879. Santiago de Chile, 1878/79; 8⁰.

— — 2ª seccion. Entrega corrrespondiente al mes de enero 1878 — junio de 1879. Santiago de Chile, 1878/79; 8⁰.

— — Revista médica de Chile. Año VII. Nos 1. i 2., 3. i 4., 5. & 6. Santiago de Chile, 1878; 8⁰.

— — Sesiones Ordinarias de la Camara de Senadores en 1878. Nr. 4. Sesiones estraordinarias en 1878. Nr. 2. gr. 4⁰.

— — Sesiones ordinarias de la Camara de Diputados en 1878. Nos. 1 & 2. Sesiones estraordinarias en Mayo de 1878. gr. 4⁰.

— — Memoria de Relaciones esteriores i de Colonizacion presentada al Congreso nacional de 1879. Santiago, 1879; 8⁰.

— — Memoria de Guerra i Marina presentada al congreso nacional de 1879. Santiago de Chile, 1879; 8⁰.

— — Memoria del Ministro de Justicia, Culto e Instruccion publica presentada al congreso nacional de 1879. Santiago, 1879; 8⁰.

— — Memoria de Ministro del Interior presentada al congreso nacional de 1879. Santiago, 1879; 8⁰.

— — Memoria del Ministro de Hacienda presentada al congreso nacional de 1879. Santiago, 1879; 8⁰.

— — Anuario hidrografico de la Marina de Chile. Año V. Santiago, 1879; 8⁰.

— — Anuario estádistico correspondiente a los años de 1876 i 1877. Tomo XIX. Santiago de Chile, 1878; Folio.

— — Estadistica agricola correspondiente a los años de 1877 i 1878. Santiago de Chile, 1879; Folio.

Santiago de Chile: Estadistica bibliografica de la Literatura chilena. Tomo segundo. Santiago de Chile, 1879; Folio.

— — Cuenta jeneral de las Entradas i Gastos fiscales en 1878. Santiago de Chile, 1879. gr. 4°.

— — Jeografia nautica i Derrotero de las costas del Peru. Entrega 1 —3ª. Santiago, 1879; 8°.

— — Anuario de la Oficina central meteorolójica. Años quinto i sesto, correspondiente a 1873—74. Santiago, 1879; 8°.

— — Mineralojia por Ignacio Domeyko, 3. Edicion. Santiago, 1879; 8°.

— — Lei de Presupuestos de los Gastos jenerales de la Administracion publica de Chile para el año de 1879. Santiago de Chile, 1879; 4°.

— — Noticias sobre las Provincias del Litoral correspondiente al Departamento de Lima i de la Provincia constitucional del Callao. Santiago, 1879; 8°.

— — Noticias de los Departamentos de Tacna, Moquegua i Arequipa i algo sobre la Hoya del lago Titicaca. Santiago de Chile, 1879; 8°

— — Noticias del Departamento litoral de Tarapacá i sus Recursos. Santiago, 1879; 8°.

— — Lei de Contribucion sobre los Haberes i Decreto reglamentando su ejecucion. Santiago, 1879; 8°.

— — Proyecto de Codigo rural par la republica de Chile. Santiago, 1878; 8°.

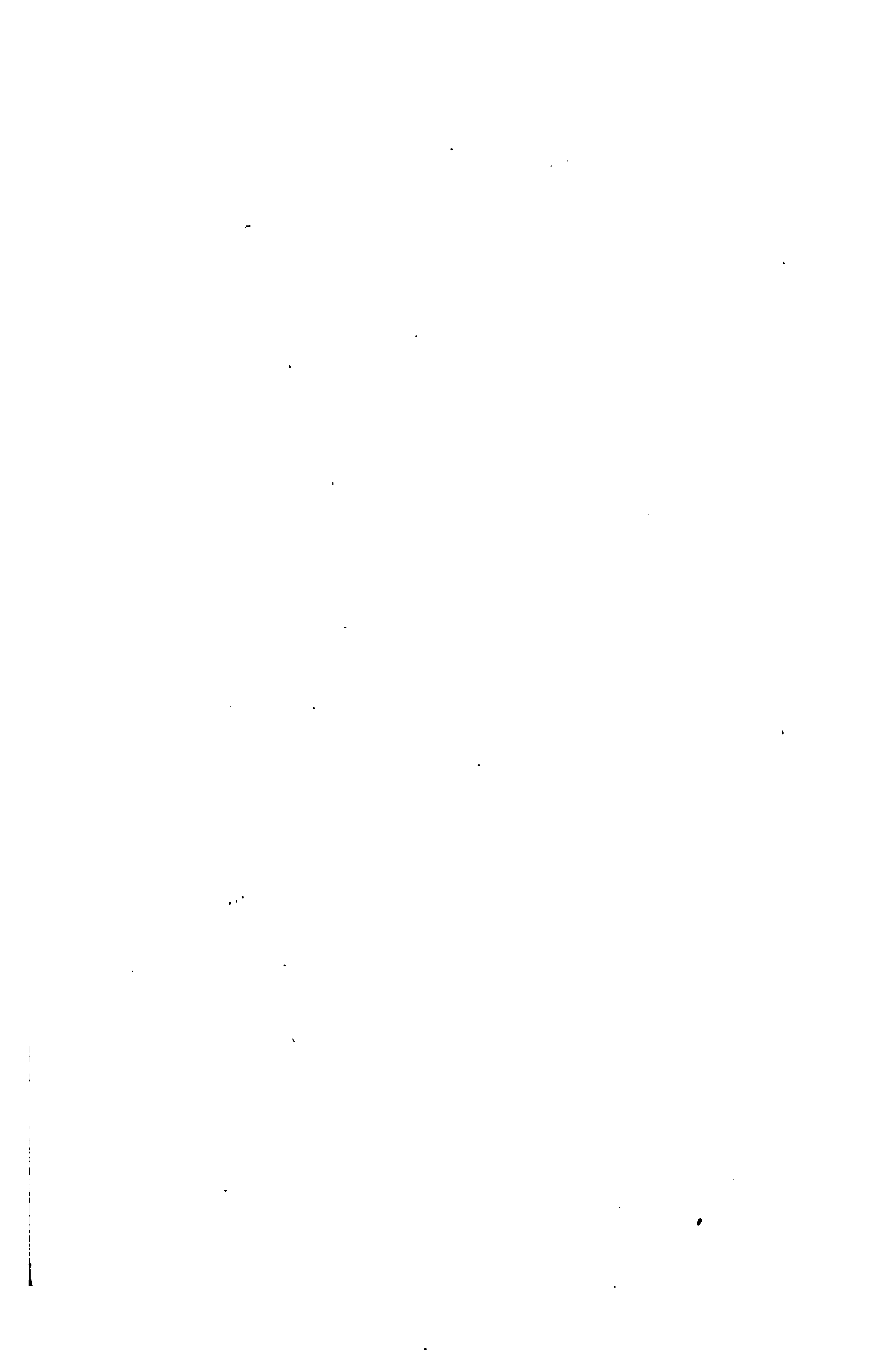
— — Tarifa de Avalúos que deberá rejir en las Aduanas de la Republica de Chile desde el 11 de enero del año 1879. Valparaiso, 1878 4°

Society the American geographical: Bulletin. 1880. Nr. 2. New York 1880; 8°.

Vereeniging, koninklijke natuurkundige: Natuurkundig Tijdschrift voor Nederlandsch-Indië: Deel XXXIX. Zevende serie. Deel IX. Batavia s'Gravenhage, 1880: 8°.

Verein. militär-wissenschaftlicher in Wien: Organ. XXII. Band 2. u. 3. Heft. Wien, 1881; 8°.

— naturwissenschaftlicher von Neu-Vorpommern und Rügen in Greifswald: Mittheilungen. XII. Jahrgang. Berlin, 1880 8°.



SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LXXXIII. Band. IV. Heft.

DRITTE ABTHEILUNG.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Physiologie, Anatomie und theoretischen Medicin.

X. SITZUNG VOM 7. APRIL 1881.

In Verhinderung des Vicepräsidenten übernimmt Herr Dr. L. J. Fitzinger den Vorsitz.

Das c. M. Herr Director C. Hornstein übersendet eine Abhandlung des Herrn Dr. G. Bečka, Assistenten der Prager Sternwarte: „Über die Bahn des Planeten Ino (173)."

Das c. M. Herr Prof. E. Weyr übersendet eine Abhandlung: „Über die Ausartungen biquadratischer Involutionen und über die sieben Systeme der eine rationale Planeurve vierter Ordnung vierfach berührenden Kegelschnitte".

Ferner übersendet Herr Prof. Weyr eine Abhandlung des Herrn A. Ameseder, Assistenten an der technischen Hochschule in Wien: „Über die eine rationale Planeurve vierter Ordnung vierfach berührenden Kegelschnitte, welche ein einzelnes System bilden."

Das c. M. Herr Professor E. Ludwig übersendet eine Mittheilung: „Über eine neue Methode zur quantitativen Bestimmung der Harnsäure."

Herr Professor Ludwig übersendet ferner eine Abhandlung des Herrn Dr. D. Dubelir aus St. Petersburg, über die von demselben im Wiener Universitätslaboratorium für medicinische Chemie durchgeführten Untersuchungen: „Über den Einfluss des fortdauernden Gebrauches von kohlensaurem Natron auf die Zusammensetzung des Blutes."

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. „Elektrostatische Untersuchungen insbesondere über die Verzweigung der Induction beim Differential-Inductometer und Elektrophor", von Herrn Dr. James Moser in London.

2. „Über Deviations-Momente", von Herrn Ingenieur Ferd. Wittenbauer, Privatdocenten an der technischen Hochschule in Graz.
3. „Die abgeleitete Natur-Urkraft", von Herrn H. Wernicke in Philadelphia.

Das w. M. Herr Hofrath Langer überreicht eine Abhandlung des Herrn Dr. M. Holl, Assistenten am Wiener anatomischen Institute, unter dem Titel: „Die Blutgefässe der menschlichen Nachgeburt."

Das w. M. Herr Director Dr. E. Weiss überreicht eine Abhandlung des Herrn Prof. W. Tinter an der technischen Hochschule in Wien: „Zur Bestimmung der Polhöhe auf dem Observatorium der k. k. technischen Hochschule in Wien."

Das w. M. Herr Prof. Ad. Lieben überreicht eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit: „Über Nitroolifine", von Herrn L. Haitinger.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Académie de Médecine: Bulletin. 2ᵉ série. Tome X, 45ᵉ année Nrs. 12 & 13. Paris, 1881; 8°.

Accademia, R. dei Lincei: Atti. Anno CCLXXVIII 1880—81. Serie terza Transunti. Vol. V. Fascicoli 7° & 8°. Roma, 1881; 4°.

Akademie, kaiserliche Leopoldino-Carolinisch-Deutsche der Naturforscher: Leopoldina. Heft XVII. Nr. 3—4. Halle a. S. 1881; 4°.

Apotheker-Verein, Allgem.-österr.: Zeitschrift nebst Anzeigen-Blatt, XIX. Jahrgang, Nr. 9 & 10. Wien, 1881; 8°.

Central-Commission, k. k. statistische: Statistisches Jahrbuch für das Jahr 1878. 8. Heft. Wien, 1881; 8° — für das Jahr 1879, 7. u. 9. Heft. Wien, 1881; 8°.

— Ausweise über den auswärtigen Handel der österr.-ungar. Monarchie im Jahre 1879, I. Abth. XL. Jahrgang. Wien, 1881; gr. 4°.

Central-Station, k. bayerische meteorologische: Übersicht über die Witterungsverhältnisse im Königreiche Bayern während des December 1880, Jänner und Februar 1881; Folio.

Chemiker-Zeitung: Central-Organ. Jahrgang V. Nr. 13. Cöthen, 1881; 4°.
Comptes rendus des Séances de l'Académie des Sciences. Tome XCII. Nr. 12. Paris, 1881; 4°.
Entomologisk Tidskrift. Band I. Häft 2, 3 o. 4. Stockholm, 1880; 8°.
Erdélyi Muzeum. VIII. évfolyam, 1. 2. és 3. sz. 1881; 8°.
Gesellschaft, Deutsche chemische: Berichte. XIV. Jahrgang. Nr. 5. Berlin, 1881; 8°.
— naturwissenschaftliche. Isis in Dresden: Sitzungsberichte. Jahrgang 1880. Januar bis Juli und Juli bis December. Dresden, 1881; 8°.
Gewerbe-Verein, n. ö.: Wochenschrift. XLII. Jahrgang, Nr. 10 bis 13. Wien, 1881; 4°.
Ingenieur- und Architekten-Verein, österr.: Wochenschrift. VI. Jahrgang, Nr. 10—13. Wien, 1881; 4°.
— — Zeitschrift. XXXIII. Jahrgang 1881. 1. Heft. Wien; 4°.
Johns Hopkins University: American Journal of Mathematics. Vol. III. Nrs. 1—3. Cambridge, 1880; 4°.
Journal für praktische Chemie. N. F. Bd. XXIII, 7. Heft. Leipzig, 1881; 8°.
Mittheilungen aus Justus Perthes' geographischer Anstalt von Dr. A. Petermann. XXVII. Band, 1881. IV. Gotha 1881; 4°. — Ergänzungsheft Nr. 64: Fischer, Die Dattelpalme. Gotha, 1881; 4°.
Moniteur scientifique du Docteur Quesneville: Journal mensuel. 25° année. 3° série. Tome XI. 472° livraison. — Avril 1881. Paris; 4°.
Museum, städtisches Carolino-Augusteum zu Salzburg: Jahresbericht für 1880. Salzburg; 8°.
Nature. Vol. XXIII, Nr. 596. London, 1881; 8°.
Observatory, the: A monthly review of Astronomy. Nr. 48. 1881, April 1. London, 1881; 8°.
Osservatorio del Collegio reale Carlo Alberto in Moncalieri: Bullettino meteorologico. Anno XV. 1879—80. Nrs. 2 & 3. Torino, 1880; 4°.
Repertorium für Experimental-Physik etc. von Dr. Ph. Carl. XVII. Band, 5. Heft. München und Leipzig 1881; 8°.

Résumé météorologique de l'année 1879 pour Genève et le Grand Saint-Bernard par E. Plantamour. Genève, 1880; 8°.

Section de Travaux géologiques du Portugal: Étude stratigraphique et paléontologique des terrains jurassiques du Portugal, par Paul Choffat. 1re Livraison. Lisbonne, 1880; 4°.

Società degli Spettroscopisti italiani: Memorie. Dispensa 2a. Decembre 1880. Roma, 1881; 4°. — Indice. Vol. IX. 1880. Roma, 1881; 4°. — Vol. X. Dispensa 1a. Gennaio 1881. Roma, 1881; 4°.

Société d'Histoire naturelle de Colmar: Bulletin. 20e & 21e année. 1879—80. Colmar, 1880; 8°.

— philomatique de Paris: Bulletin. 7e série. Tome IV, Nr. 4, 1879—80. Tome V. Nr. 1. 1880—81. Paris, 1880—81; 8°.

Verein für Natur- und Heilkunde zu Pressburg: Verhandlungen N. F. 3. Heft, Jahrgang 1873—1875. Pressburg, 1880; 8°

— naturforschender in Brünn: Verhandlungen. XVIII. Band. 1879. Brünn, 1880; 8°.

— — Katalog der Bibliothek. I. Supplement-Heft. Brünn, 1880; 8°.

Wiener Medizinische Wochenschrift. XXXI. Jahrg., Nr. 12—14. Wien, 1881; 4°.

Wissenschaftlicher Club: Monatsblätter. II. Jahrgang, Nr. 6 und ausserordentliche Beilage Nr. V. Wien, 15. März, 1881; 8°.

Über die Blutgefässe der menschlichen Nachgeburt.

Von Dr. M. Holl,
Assistenten am Wiener anatomischen Institute.

(Hiezu 2 Tafeln.)

Seit Wrisberg's Observationes de structura ovi et secundinarum, Gött. 1783, sind nur Hyrtl's eingehendere Arbeiten über die beschreibende Anatomie der Placentargefässe zu erwähnen. Das Augenmerk der meisten Schriftsteller, die mit der Anatomie der menschlichen Nachgeburt sich beschäftigten, war nach den Verbindungen der fötalen Blutgefässe mit den maternen, nach der Anzahl der Eihäute, der Structur und Genese derselben gerichtet. In die fehlerhaften Anschauungen, die man über die Placenta gegen das Ende des vergangenen Jahrhundertes hatte, schlug die erste Bresche Hunter; ihm folgten Velpeau, Bischoff, E. H. Weber, Sharpey u. A., welche das Dunkel des Unbestimmten erhellten und auf den richtigen Weg hinwiesen, der aus dem Chaos der Verwicklungen, die sich über diesen Gegenstand gebildet hatte, herausführen sollte. Trotz all den exacten Forschungen dieser hervorragenden Schriftsteller ist aber dennoch die Anatomie der menschlichen Nachgeburt zum noch nicht vollen Abschlusse gebracht und die folgenden Zeilen mögen die Wahrheit des Gesagten bestätigen. Zahlreiche Injectionen menschlicher Nachgeburten mit löslichem Berlinerblau führten mich auf neue bisher nicht beobachtete Gefässverhältnisse und dieselben sind im Stande, die bisherige Ansicht über den Bau der Placenta wesentlich zu modificiren. Bei den Untersuchungen über die Gefässverhältnisse wurde ich genöthigt, auch den Eihäuten mein Augenmerk zuzuwenden, die in neuerer Zeit beschriebenen Membranen, als weitere Eihüllen, näher zu betrachten und so die Angaben der betreffenden Autoren einer Untersuchung zu unterziehen.

Bei jeder ausgetragenen menschlichen Nachgeburt findet man drei Hüllen, welche, wenn man von aussen nach innen dringt, sich wie folgt, der Beobachtung darbieten.

1. Die Producte des Uterus, die Decidua vera mit der Reflexa, 2. das Chorion und 3. Amnion, die Schafhaut. Zwischen Chorion und Amnion findet sich noch eine gallertartige Lage, die nach Kölliker an Spirituspräparaten wie eine weiche Haut erscheint (*Membrana intermedia aut.*). Diese Membrana intermedia ist nichts anderes als der eingedickte Rest der ursprünglich in bedeutender Menge zwischen dem Amnion und Chorion befindlichen eiweisshältigen Flüssigkeit.

1. Membrana decidua.

Als äusserste Hülle erscheint an der Oberfläche der menschlichen Nachgeburt zur Zeit der Niederkunft ein gelblich röthlicher, leicht zerreissbarer, mehr oder wenig dünner, ziemlich undurchsichtiger Überzug, der von dem darunter liegenden Chorion sehr leicht abgehoben werden kann. Dieser Überzug ist die Membrana decidua im weiteren Sinne des Wortes und sie findet sich an der äusseren Fläche der Placenta, als auch unter dem placentaren Chorion als sogenannte subchoriale Lage (Winkler's Schlussplatte) der Decidua placentalis vor, und es lässt sich an jeder Nachgeburt der Zusammenhang jener Decidua Antheile sehr deutlich demonstriren.

Der Ausdruck „Membrana decidua“ ist zu unbestimmt, und es handelt sich, ob dieselbe aus der Decidua vera oder reflexa, oder aus von beiden zusammen hergestellt wird. Dieses führt aber zur Genese der Decidua vera.

Zu Folge neuerer Forschungen ist es auf das Unzweifelhafteste festgestellt, dass die wahre und umgeschlagene, hinfällige Haut Producte der Mutter, also mütterliche Eihüllen sind, entstanden aus der modificirten Uterusschleimhaut. Der Bau der Decidua steht im Einklange mit dem Baue der Schleimhaut der Gebärmutter, wie dieses Kundrat und Engelmann hinlänglich bewiesen haben. Sharpey[1] stürzte durch seine Forschungen die

---

[1] Über die Uterindrüsen und die Bildung der Placenta; in der englischen Übersetzung von J. Müller's Physiologie durch Baly.

ersten bestandenen Meinungen über das Verhalten des Eichens in der Höhle des Uterus. Man nimmt seit der Zeit mit Recht an, wie dies auch Kundrat und Engelmann bestätigen, dass wenn das Eichen in die Gebärmutterhöhle gelangt ist, es sich in eine Falte der gewulsteten Schleimhaut des Uterus, die jetzt den Namen Decidua vera, wahre hinfällige Haut, trägt, einsenke, worauf dann dieselbe das Ei durch Wachsthum überwalle und so vollständig einschliesse. Der das Ei überwuchernde Theil der Decidua vera der modificirten Uterusschleimhaut wird Decidua reflexa, umgeschlagene hinfällige Haut, genannt. Die Stelle der Schleimhaut des Uterus, allwo sich das Eichen festsetzte, ist die Decidua serotina. Es wäre wohl endlich an der Zeit, all diese Namen, die nicht im Geringsten das ausdrücken, was sie bezeichnen sollen, ja das Gegentheil sagen, durch neue passende zu ersetzen. Man sollte lieber schon oftmals vorgeschlagene, bessergewählte Ausdrücke acceptiren, die unter jeder Bedingung das für sich haben, dass sie nicht so gänzlich unlogisch sind, als die althergebrachten Termini. Ich bin, des leichteren Verständnisses halber, leider gezwungen, in dieser Abhandlung die alten fehlerhaften Ausdrücke zu benützen.

Mit der weiteren Entwicklung des Eies, seinem Wachsthume, kommt es im fünften Monate der Schwangerschaft zu einer Verschmelzung der Reflexa mit der Vera und es lässt sich bei dem mikroskopisch ganz gleichen Baue beider Häute keine Grenze zwischen ihnen bestimmen.

Die Reflexa ist im innigen Zusammenhange mit der fötalen Eihülle dem Chorion. Gegen das Ende der Schwangerschaft hin verdünnen sich die verschmolzenen Membranen, Vera und Reflexa, vielleicht schwindet die eine oder die andere; das sei vorläufig dahin gestellt. Das aber kann mit Bestimmtheit constatirt werden, und es wird auch allseitig angenommen, dass die äusserste Schichte der Eihüllen zur Zeit der Niederkunft eine gelblichröthliche Membran ist, die die Aussenfläche des Chorions bedeckt und eine mütterliche Eihülle ist, im Gegensatze zum Chorion, das als eine fötale Eihülle erscheint.

Das Vorhandensein einer mütterlichen Eihülle an der Nachgeburt am Ende der Schwangerschaft wurde bis vor dem Erscheinen der Arbeit Bischoff's vielfach geläugnet, indem die

meisten Autoren annehmen, dass mit der Entwicklung der Frucht in der zweiten Hälfte der Schwangerschaftsperiode von der Decidua vera und reflexa wenig oder gar nichts mehr an der Nachgeburt vorhanden sei, oder deren Reste bei der Entbindung in der Gebärmutterhöhle bleiben und während des Wochenbettes mit den Lochien ausgestossen werden. Nach Bischoff gehen andere Autoren nicht ganz so weit, sondern lassen die Rückbildung der Deciduae so weit fortschreiten, dass nur ein dünner, zerrissener, stellenweiser Überzug des Chorions übrig bleibt; noch wenigere endlich beschreiben die äusserste Haut der Nachgeburt als die Decidua, meist Vera und Reflexa vereinigt, aber zu einem fast unorganisirten Überzug herabgesunken.

Erst Bischoff[1] stellte es fest, dass an jeder Nachgeburt das ganze Chorion von dem Rande der Placenta aus mit der Decidua überkleidet sei, ob Reflexa allein, ob Vera und Reflexa vereint lässt er einstweilen dahingestellt. Er sagt: „Nun aber kann sich Jeder mit leichter Mühe überzeugen und ich bin zu jeder Stunde es zu zeigen bereit, wie an jeder Nachgeburt das ganze Chorion von dem Rande der Placenta aus, von einer hinreichend dicken und zusammenhängenden Membran überzogen wird, die keine andere sein kann und ist, als die Decidua". Nach Kundrat und Engelmann[2] stellen die Eihäute eine $^1/_2$—$^3/_4$ Mm dicke Membran von weisslicher Farbe dar, die an der (dem Fötus zugekehrten) Innenfläche glatt und dicht, an der Aussenfläche aber weich, uneben, mit kleinen gelblichen Gewebefetzen besetzt ist. Sie bestehen nicht bloss aus den fötalen Eihüllen, sondern auch aus der Reflexa und Resten der Decidua vera von verschiedener Dicke und zwar für gewöhnlich aus der obersten Lage der letzteren oder ihrer ganzen Grosszellschichte. Die Richtigkeit der Angaben genannter Autoren wird heute nicht mehr bezweifelt.

Meine Untersuchungen ergaben, dass das Chorion an einer vollständigen Nachgeburt in seiner ganzen Ausdehnung an der äusseren Fläche von der Decidua überkleidet wird, und dass man auch an der fötalen Seite der Placenta unter dem Chorion

---

[1] Beiträge zur Lehre von den Eihüllen des menschlichen Fötus. Bonn 1834, S. 21.

[2] Untersuchungen über die Uterusschleimhaut. Separatabdruck aus den Wiener medicinischen Jahrb., II. Heft, 1873, S. 32.

dieselbe vorfindet. Am Rande der Placenta lässt sich sehr deutlich der Übergang der Decidua des Chorion auf die subchoriale Decidua der inneren Fläche des Mutterkuchens nachweisen. Diese Belege an der äusseren Fläche des Mutterkuchens sind morphologisch als Reste der Decidua serotina aufzufassen, der Stelle der Uterusschleimhaut, allwo sich das Eichen festgesetzt hat; nach der alten Anschauung wären sie Decidua vera plus reflexa.

Die Decidua haftet an der äusseren Fläche des Chorions bei frischen Nachgeburten inniger, als wenn dieselben längere Zeit gelegen sind. Man kann die Decidua durch Zug vom Chorion abheben und so die Loslösung beider bewerkstelligen. Bei diesem Acte gewahrt man wie zarte Fäden die Decidua an das Chorion anheften, die vom Chorion kommen und in die Decidua sich einsenken, zerrissen werden. Diese Fäden werden gegen den Rand der Placenta hin immer stärker und dicker, bilden dann ein ganzes Geflechtwerk (Taf. I Fig. 2, *a*) und es ist unschwer zu erkennen, wie diese letzteren Fäden zum grossen Theile selbst von der äusseren Fläche des bereits placentaren Chorion ausstrahlen und nichts anderes sein können, als obliterirte Gefässe, die eine Verbindung zwischen Chorion und Deciduae bewerkstelligten. Ich komme später bei dem Abschnitte „Chorion“ auf diesen Gegenstand zurück und werde mich darüber des Näheren einlassen.

Ich erwähne nur noch, dass auch Bischoff[1] diese Verbindung der Decidua mit dem Chorion kannte und darüber sich ausspricht. Die Decidua ist sehr leicht, besonders nach einiger Maceration im Wasser, und in einiger Entfernung von dem Rande der Placenta am leichtesten, von dem unter ihr liegenden glatten und durchsichtigen Chorion zu trennen und ist somit die äusserste Hülle, welche das Ei überzieht. Sie ist nicht in allen Fällen gleich dick, oft über eine Linie, oft dünner, aber immer so, dass sie sich als eine zusammenhängende Membran ohne grosse Sorgfalt darstellen lässt.

Besonders aber nach dem Rande der Placenta zu, wo sie immer weit dicker ist, als an dem der Placenta entgegengesetzten Ende des Eies, ist sie oft und meistens so fest mit dem Chorion

[1] l. c., S. 22.

verbunden, dass, wenn nicht einige Maceration vorhergegangen, die Trennung Vorsicht erfordert, um nicht Chorion oder Decidua zu zerreissen. Diese Verbindung aber wird nicht durch den Zusammenhang der Häute selbst bewirkt, sondern durch Fäden, welche von dem Chorion, besonders am Rande der Placenta herum, sehr zahlreich ausgehen, und mit ihren Enden in das innere dem Chorion zugewendete Blatt der Decidua eingesenkt sind, aus dem sie sich besonders nach einiger Maceration zwar auslösen lassen, aber auch leicht Zerreissungen veranlassen. Es sind dieses nämlich die Flocken des Chorion; Bischoff gibt auch in Fig. 7 eine Abbildung des Connexes der Decidua durch die Stränge mit dem Chorion.

Es fragt sich nun, in welcher Weise die Vera und Reflexa an dem Aufbau der äussersten Eihülle, als von der mütterlichen Seite stammend, Antheil nehmen.

Hunter,[1] Krummacher[2] und Meckel[3] halten die äusserste Eihaut für die vereinigte Vera und Reflexa, indem sie annehmen, dass beide miteinander verwachsen sind und als eine Membran sich zur Zeit der Niederkunft präsentiren. Nach W. Hunter[4] wird die Decidua, wenn vera und reflexa verschmolzen sind, nicht nur nicht dicker, sondern dünner. Dieses hat darin seinen Grund, dass die Reflexa ohnehin sehr dünn ist und durch ihr Hinzutreten die Dicke nicht sehr zu vermehren vermag, die Vera aber mit zunehmender Schwangerschaftszeit immer an Dicke abnimmt. Lobstein[5] fand die Reflexa im fünften Monate so fein, dass sie durchsichtig war und an manchen Stellen durchlöchert zu sein schien. Späterhin dagegen ist sie als gesondertes Blatt nicht mehr deutlich zu unterscheiden. Hierin stimmen die meisten Beobachter auch überein, sowie auch in

[1] Anatom. Beschreibung des menschl. schwangeren Uterus, übersetzt von Froriep. Weimar 1802.

[2] Diss. sistens obs. quasdam anat. circa velam. ovi hum. in Schlegel Sylloga, T. I.

[3] Anat. Bd. IV.

[4] G. Valentin, Handb. der Entwicklungsgeschichte des Menschen. Berlin 1835, S. 70.

[5] Über die Ernährung des Fötus, übersetzt von Kestner, S. 8. Strassburg.

dem Punkte, dass die aus beiden wiederum verschmolzene, hinfällige Haut bis zur Geburt verharrt und dann theils mit der Placenta, theils mit den Lochien ausgesondert wird. Carus[1] ist der Meinung, dass die Decidua auf folgende merkwürdige Weise schwinde. Die Flocken des Chorion drängen sich in diese hinein und es entstehen daher in ihr eine Menge Gruben, welche der ganzen Membran ein maschenförmiges Ansehen geben. Indem diese sich nun vergrössern, verwandelt sich die Reflexa in ein das Chorion locker umgebendes Zellgewebe. Heusinger[2] erklärt sich jedoch gegen diese Ansicht, weil die Löcher oder Maschen sich nicht bloss in der zurückgeschlagenen, sondern auch in der wahren hinfälligen Haut finden. Auch läugnet er eine von Carus beschriebene und abgebildete Höhlung zwischen Chorion und Decidua.

Velpeau[3] nimmt an, dass die Decidua vera sive externa bis zum Ende der Schwangerschaft, zumal in der Gegend des Mutterkuchens, ziemlich dick bleibt, die Decidua interna dagegen im Verlaufe der Schwangerschaft immer dünner werde, so dass sie oft am Ende derselben eine äusserst zarte Membran bildet. Gegen den dritten und vierten Monat hin berühren sich beide Häute und bleiben von nun an mehr oder weniger innig aneinander gebunden, ohne jedoch je gänzlich zu verschmelzen. Er schliesst, dass die Decidua reflexa durch das Wachsthum des Eies immer mehr und mehr ausgedehnt werde und dass sie endlich auf die Decidua externa stosse. Beide Lamellen verwachsen nie und können selbst nach der Geburt noch getrennt werden. Rudolph Wagner[4] sagt, dass in den späteren Perioden der Schwangerschaft sich die beiden Nesthäute schwieriger, zuletzt gar nicht mehr von einander trennen lassen, sie verwachsen in Folge der innigen Berührung und des Druckes von sehr vergrössertem Ei, lassen sich aber als einfache, ziemlich dicke und zusammenhängende Membran auch an ausgetragenen Eiern und an der Nachgeburt nachweisen. Noch später, mehrere Wochen nach der

---

[1] Gynäkologie.

[2] Zeitschrift für org. Physik; II, S. 517.

[3] Embryologie und Ovologie des Menschen, übersetzt von Schwalbe. Ilmenau 1834; pag. 8.

[4] Lehrbuch der Physiologie. Leipzig 1839, 1. Abth., S. 116.

Geburt, ist die Uterinalschleimhaut sehr aufgelockert und es stossen sich einzelne Partien fetzenartig los, welche mit der Wochenbettreinigung abgehen. Johannes Müller[1] erwähnt, dass bei fortschreitendem Wachsthume des Eies die Decidua vera und reflexa in Berührung kommen und die Höhle der Decidua im dritten Monate der Schwangerschaft verschwunden und von dem Unterschiede beider Häute schwierig oder gar nichts nachzuweisen sei. Bei dem weiteren Wachsthume des Eies wird die Decidua verdünnt, aber sie vergeht nicht ganz. Bei der Geburt bleibt sie theils noch im Uterus zurück, theils findet sie sich als dünne Lage am Eie selbst noch.

Nach Kundrat und Engelmann (l. c. S. 32) besteht die äusserste Eihülle aus Reflexa und Resten der Decidua vera von verschiedener Dicke und zwar für gewöhnlich aus der obersten Lage der letzteren oder ihrer ganzen Grosszellschichte. Kölliker[2] findet gegen das Ende der Schwangerschaft beide Decidua mit einander verklebt, und zugleich so verdünnt, dass sie an der Nachgeburt nur eine einzige dünne Haut darstellen. Man kann nicht selten, selbst am Ende der Schwangerschaft, da und dort, vor allem am Rande der Placenta, manchmal auf grossen Strecken beide Deciduae künstlich von einander trennen.

Mit diesen Angaben ist im wesentlichen Zusammenhange die Kenntniss der Betheiligung der Blutgefässe. Meckel[3] spricht bei der Beschreibung der hinfälligen Haut, dass sie eine ansehnliche Menge von Gefässen enthält, welche Verlängerungen der Gebärmuttergefässe sind und in schiefer Richtung in sie dringen. Er gibt nicht an, ob diese Gefässe der Vera oder der Reflexa oder beiden angehören. Bei E. H. Weber[4] enthält nur die Decidua vera Blutgefässe, weil nämlich die Decidua reflexa nur aus geronnener Lymphe, nicht zugleich wie die Vera aus verlängerten Blutgefässen des Uterus besteht. Nach Seiler[5] ist die Reflexa gefässlos, die Vera besitzt solche. Velpeau (l. c. S. 11) tritt

---

[1] Handbuch der Physiologie. Coblenz 1840, 2. Bd., S. 709.

[2] Entwicklungsgeschichte des Menschen. Leipzig 1879, S. 330.

[3] Handb. der Anatomie. Halle und Berlin, 1820, 4. Bd., S. 698.

[4] Handb. der Anatomie von Fr. Hildebrandt. Braunschweig 1832, 4. Bd., S. 488.

[5] Die Gebärmutter und das Ei des Menschen.

entschieden gegen die Meinungen Lee's, Radford's, Burns's, Breschet's und Seiler auf, welche behaupten, in der Decidua Blutgefässe und zwar in grosser Anzahl gefunden zu haben, wesshalb dieselbe jene Autoren zu den organischen Gebilden zählen, zu denen sie nach Velpeau's Ansicht in keine Epoche der Schwangerschaft gezählt werden kann und darf. Desshalb sei die Decidua keineswegs ein roher Stoff und wenn er sich des Wortes „unorganisch" zu ihrer Bezeichung bediene, so geschieht es bloss, weil er keinen besseren dafür findet.

Die Decidua habe ihre vita propria, um mit Blumenbach zu reden, ebenso wie die Knorpel, das Email der Zähne, der Schleim und die organischen Flüssigkeiten; sie ist stets weder mit der Gebärmutter, noch mit dem Chorion, die sie während der ganzen Schwangerschaft trennt, in genauer Verbindung, kurz sie sei von beiden unabhängig. Nur ausnahmsweise und in Folge einer Abweichung von ihrem eigentlichen Zwecke verschmilzt sie mit dem einen oder dem anderen und nimmt dann die charakteristischen Zeichen einer wirklichen organisirten Membrane an. Die Verbindung der Gebärmutter mit der Decidua bleibt vom Anfange der Schwangerschaft bis zum Ende derselben ganz dieselbe und ihre Organisation ist sich beständig gleich. Am Ende des zweiten Monates ist die Decidua weich, geschmeidig, spongiös und sehr elastisch, sie liegt nahe an dem Uterus und steht mit dem Chorion bloss durch die Flocken desselben, welche das Ei gewöhnlich bedecken, in so loser Verbindung, dass man beide leicht trennen kann. Gefässe erhält sie durchaus nicht von ihr, denn die Stelle, wo sich beide berühren, sind sogar atrophisch. In den letzten Monaten der Schwangerschaft ist sie noch eben so weich und elastisch, sie hat dieselbe röthlichgraue Farbe und ihre Verbindung mit der Gebärmutter ist nicht fester als anfangs. Die einzig wahrnehmbare Veränderung an ihr ist die, dass durch die bedeutende Ausdehnung ihre innere Lamelle sich sehr verdünnt hat. Die Structur bleibt beständig dieselbe. Sie ist mit einem Worte am Beginne der Schwangerschaft bis zu ihrem Abgange bei der Geburt nichts anderes als eine einfache Concretion, als ein häutiges Gebilde ohne regelmässige Textur. Manchmal hat Velpeau röthliche, sternförmige Flecken, auch wohl Blutstreifen wahrgenommen, die man bei oberflächlicher Untersuchung wohl

für Blutgefässe halten könnte; ja man findet in seltenen Fällen auch an der inneren Fläche ein feines Gewebe, das einer cellulösen Lamelle sehr ähnlich ist, oder noch häufiger scheint ihr Gewebe aus nebeneinander liegenden oder sich kreuzenden Fibern zu bestehen; aber die Flocken, die Blutstreifen, die cellulöse Lamelle beweisen die Gegenwart von Gefässen ebenso wenig, als die Concretionen im Croup oder die polypösen Massen im Herzen, und die fibrösen Streifen sprechen so wenig für eine organische Textur, als einfache, rein fibröse Stricke. Würde nicht die Decidua, wenn sie ein organisches Gebilde wäre und wirklich Blutgefässe besässe, mit dem Chorion oder der inneren Wand der Gebärmutter, an welcher sie sich neun Monate lang so genau anschmiegt, endlich verwachsen?"

Bischoff[1] behauptet mit Recht die Existenz von Blutgefässen in der Decidua und führt überzeugende Beweise an. In Fällen, wo die Decidua dicker ist, sagt Bischoff, lassen sich bei einiger Übung fast an allen Nachgeburten zwei Lagen an ihr unterscheiden, wenn sie sich gleich nicht, besonders nicht die innere, als gesonderte Membranen darstellen lassen. Die innere hat gewöhnlich ein blasseres Ansehen, ist nicht so faserig wie die äussere, mehr breiig und in sie sind, wie gesagt, die von Chorion ausgehenden Fäden eingesenkt, so dass, wenn man sie zurücklässt, man das obere Blatt, freilich nur in zerrissenen Fetzen, mit leichter Mühe, besonders in der Richtung von der Placenta aus, abziehen kann, da jene Fäden dann kein Hinderniss bilden. In dieser Haut lassen sich nun mit grösster Leichtigkeit sehr zahlreiche Gefässe nachweisen. Allein dazu ist es nöthig, dass die Nachgeburt nicht im Wasser gelegen hat, wenigstens gleich davon wieder entfernt worden ist; ja selbst nicht einmal längere Zeit in ihrem eigenen Blutwasser darf sie liegen, sondern am besten ist es, sie gleich nach ihrer Entfernung aus dem Uterus zu betrachten, denn die Wände dieser sehr zahlreichen Gefässe sind so dünn, dass das Wasser sehr bald das Blutroth auszieht, wo sie dann bei dem faserigen Baue der ganzen Haut, selbst mit dem Mikroskope nicht mehr erkennbar sind. Es geschieht dieses aber um so leichter, da die Stämme dieser Gefässe, die von dem

[1] l. c. S. 22.

Uterus kommen, überall abgerissen sind, und somit offen stehen Immer zeigen sich nämlich diese Gefässe mit einem abgerissenen, kurzen Stamme, der auf die Membran stösst und sich sogleich fingerförmig und auf eine ganz eigenthümliche Weise gekräuselt in derselben verbreitet, zum augenscheinlichen Beweise, dass sie dem Uterus, mit dem sie früher in Verbindung waren, angehören. Gleich nach der Entbindung sind sie immer ziemlich stark mit Blut angefüllt, und dann ist ihr ganzes Verhalten so deutlich, dass wenn Velpeau sie einmal so gesehen, er sie nicht mehr für „stries sanguins“ halten wird. Die sorgfältigsten und genauesten Untersuchungen haben mich dabei zugleich belehrt, dass diese Gefässe sich nur allein in dem Gewebe der Decidua verbreiten, und durchaus keine Gemeinschaft mit dem Chorion haben, wie ich solches Anfangs geglaubt.“

Auch Valentin[1] beobachtete die Gefässe der hinfälligen Haut im ganz frischen Zustande und hält sie für Fortsetzungen der Gebärmuttergefässe. Derselben Ansicht ist Johannes Müller (l. c. S. 709), Kundrat und Engelmann sprechen sich über die Gegenwart von Gefässen in der Decidua zur Zeit der Niederkunft nicht ganz deutlich aus, und es ist jedoch anzunehmen, dass sie die Existenz von Gefässen nicht bezweifeln. Kölliker (l. c. S. 329 und 330) gibt an, dass in der Mitte der Schwangerschaft die Reflexa, welche noch 0·5—1·0^{m} misst, ganz gefässlos ist, im vollen Gegensatze zur Vera, die auch am Ende des Fötallebens an Gefässen meist reich ist; doch finden sich auch Fälle, in denen dieselben wenigstens in den innersten Lagen dieser Haut spärlich sind.

Was nun meine Untersuchungen anbelangt, so ergab sich, dass am Ende des Fötallebens die äusserste Eihülle aus den beiden miteinander verwachsenen Deciduae, der Vera und Reflexa besteht, deren Ausbreitung und Form ich früher angegeben habe. An manchen Placenten lässt sich diese äusserste Haut sehr deutlich in zwei Lamelle zerlegen, in eine innere und eine äussere, und an beiden lässt sich mit Bestimmtheit eine reichliche Vascularisation erkennen. Die Gefässe sind äusserst dünnwandig und müssen sehr wohl von den blutgefässartig verzweigten Blutgerinnseln, die für gewöhnlich an der Decidua haften, unterschieden werden. Es ist ferners sehr viel daran gelegen, in

[1] Handb. der Entwicklungsgeschichte. Berlin 1835, S. 61.

welchem Zustande und wann man die Nachgeburten zur Untersuchung bekommt. Es gilt in dieser Beziehung das von Bischoff Gesagte, was früher citirt wurde.

Bei sofortiger Untersuchung der Decidua nach der Geburt lassen sich die Gefässe mit freiem Auge in sehr leichter Weise demonstriren; hatte jedoch die Nachgeburt selbst nur kurze Zeit im Wasser gelegen, so wird der Nachweis der Gefässe zur Unmöglichkeit. Aus diesem Grunde ist es anzunehmen, dass von so vielen Autoren die Existenz von Gefässen in der Decidua geläugnet worden ist. Die Gefässe der Decidua zeigen ein zierliches Netz, und sind immer abgehend von einem dickeren, mehr oder weniger längeren Stamme, welcher an einem Ende, wo er von der Verbindung mit den mütterlichen Gefässen bei der Geburt abgerissen wurde, ein Lumen aufweist. (Tab. Fig. 1 a). Diese Lumina beweisen zu gleicher Zeit die Cohärenz der Gefässe der Decidua mit den maternen Gefässen. Ein in diese Lumina eingeführter Stachel einer mit verdünnter Lösung von Berlinerblau gefüllten Pravatz'schen Spritze ermöglicht, das zierliche Gefässnetz durch Injection anschaulicher zu machen; viel besser gelingt jedoch die Injection durch Einstich des Stachels in das Netz selbst, wobei aber immer zu berücksichtigen ist, dass die Injectionsflüssigkeit stets bei dem abgerissenen Ende des Gefässstammes hervorquillt, welches jedoch eine Füllung der Netze durchaus nicht hindert. Da ich nirgends in der Literatur eine Abbildung derlei injicirter Netze fand, so habe ich ein solches auf Taf. I, Fig. 1 abbilden lassen. Die Ausdehnung dieser Netze ist variant; man trifft sie in ebenso zahlreicher Menge in der Decidua neben dem Rande der Placenta, als auch an dem entgegengesetzten Pole derselben; öfters trifft man sie nur in einzelnen Bezirken an; ich glaube dies Letztere hat darin seinen Grund, dass durch das Liegen der Nachgeburt nach der Entbindung einige durch die Maceration schon zu Grunde gegangen sind, oder dass das Blut aus ihnen während der Geburt herausgeflossen ist. Wenn man diese Gefässnetze einer genaueren Untersuchung unterzieht, so wird man sehr leicht gewahr, dass dieselben sowohl in der inneren als auch in der äusseren Lamelle der künstlich getrennten Deciduae sich vorfinden, ja man kann Stellen finden, wo sich beide Netze decken (Taf. I Fig. 1 b) und ihr Blut in einen gemeinsamen

Hauptstamm rückführen, so dass eine Communication der Gefässbezirke der inneren und äusseren Lamelle unzweifelhaft ist.

Wenn man mit dem Vorausgegangenen die Vascularisation der äussersten Eihaut, als verwachsene Decidua vera und Reflexa (denn sie ist ja nichts anderes) annehmen muss, so entsteht die Frage: in wie ferne Decidua vera und reflexa an der Vascularisation Antheil haben.

Es wird in neuester Zeit, so von Kölliker, angenommen, dass zur Zeit der Niederkunft nur die Vera reich an Gefässen, die Reflexa aber total gefässlos ist. A priori könnte man einwenden, dass, weil ja die äusserste Eihaut in ihrer ganzen Dicke vascularisirt sich vorfindet und dieselbe aus der verwachsenen Vera und Reflexa besteht, die letztere ebenfalls, im Gegensatze zur obigen Ansicht, vascularisirt sein müsse. Andererseits könnte man aber auch annehmen, dass eine Entscheidung, ob Vera oder Reflexa zur Zeit der Niederkunft vascularisirt sei, nicht mehr möglich sei, da die Trennung der Decidua in eine Vera und Reflexa auf einem künstlichen Wege erzeugt wird. Wollte man aber dieses annehmen, so müsste man aber doch die Behauptung aufrecht erhalten, dass auch in der Reflexa sich Gefässe vorfinden, da dieselbe jedenfalls die innerste Lage der Decidua im weiteren Sinne des Wortes aufbaut und in derselben dem Chorion zunächst Gefässe aufweist. Man muss also annehmen, dass zur Zeit der Niederkunft die Decidua vera und reflexa sich der Gefässe erfreuen. Wohl will ich zugeben, dass man Fälle vorfindet, und auch ich habe solche beobachtet, in welchen der Reichthum der Gefässe entweder in der einen oder anderen Schichte der Decidua vermindert gewesen ist. Dieses kann aber auch darin seine Erklärung finden, dass gegen das Ende der Schwangerschaft hin, ein mehr oder minder rasch fortschreitender Verödungsprocess in den Gefässnetzen beginnt, entsprechend dem Ausspielen der Rolle und sich ein diesbeziehender Befund an der Decidua zur Zeit der Niederkunft vorfindet.

Mit dem mikroskopischen Befunde stimmt auch überein das Ergebniss der Untersuchung der Decidua mittelst des Mikroskopes. In der Reflexa sowohl, als auch in der Vera, wurden nach vorhergegangener Injection, auf Durchschnitten Lumina von Gefässen angetroffen.

Es wäre auch kein Grund anzunehmen, warum die Reflexa zur Zeit der Niederkunft sich keiner Gefässe mehr erfreuen sollte, im Gegensatze zur Vera. Sind ja doch beide Membranen aus gleichem Materiale gebildet, beide Abkömmlinge der Uterusschleimhaut, und sind doch beide Membranen in ganz gleicher Weise den verschiedenen Vorgängen während der Schwangerschaftsperiode ausgesetzt.

Wenn man bis jetzt die Vascularisation der Reflexa läugnet, so findet dies seine Erklärung darin, dass man die Gefässe durch Injection sich nicht anschaulich gemacht hat und es wurde ja früher angegeben, wie leicht sich die Gefässe in der Decidua überhaupt der Beobachtung entziehen können, so dass sie selbst, wenn nicht injicirt, mittelst des Mikroskopes nicht mehr nachweisen lassen. Ich erinnere, wie lange hat man die Gefässe in der Decidua überhaupt und dann in der Vera geläugnet (welche heutzutage unzweifelhaft angenommen werden), bis sie Seiler direct mit Blut gefüllt sah und ebenso Bischoff, welcher sie mit Injectionsmassen füllte, welche wohl aber keine Bürgschaft gegen Erzeugung von Artefacten lieferte.

Warum sollte auch die Reflexa der Gefässe entbehren? Ich kann mich nur vollständig der Ansicht Bischoff's anschliessen, welche lautet: [1] „Sind Vera und Reflexa vereinigt, so lässt sich nicht mehr ausmachen, ob die vorhandenen Gefässe allein der Decidua vera oder auch der reflexa angehören. In einer früheren Periode aber, wo beide noch deutlich getrennt sind, habe ich kein Ei beobachten können, welches nicht schon in Wasser oder gar Weingeist gelegen hatte, so dass keine Gefässe weder in der Vera noch Reflexa mehr sichtbar waren. Mein entschiedener Glaube aber ist, dass auch die Reflexa solche besitzt, und dass auch die Beobachter wegen desselben Umstandes an genauer Untersuchung sind gehindert worden, indem auch ihre Präparate durch Wasser oder Weingeist gegangen waren. Ausserdem verlöre für mich die Decidua reflexa ihre halbe Bedeutung, denn ich kann mich nicht überreden, dass sie blos zur Befestigung des Eies dienen sollte, sondern gewiss entnimmt auch aus ihr das Eichen bis zur vollständigen Entwicklung der Placenta seinen

---

[1] l. c. S. 27.

Nahrungsstoff. Endlich würde auch die Vorstellung etwas Anstössiges enthalten, dass das lebende Ei in seinem grössten Umfange von dem lebenden Uterus durch eine fast unorganische, gefässlose Haut (wenn es überhaupt eine solche geben kann) getrennt sei.

2. Von dem Chorion.

Das Chorion bildet an einer ausgetragenen Nachgeburt die nächste Membran nach der Decidua, also die zweite Eihülle. Da die Decidua ein Product des Uterus, das Chorion aber ein fötales Gebilde ist, so hat man das Chorion als eigentliche Eihaut anzusehen. Dasselbe bildet um den Embryo eine Blase, die an ihrer äusseren Fläche von der Decidua *(reflexa)*, an ihrer inneren von dem Amnion bedeckt wird. Es muss jedoch bemerkt werden, dass Chorion und Amnion sich eigentlich nicht directe berühren, da zwischen beiden Membranen eine mehr oder minder reichliche, gallertartige Masse sich vorfindet, das Magma reticulée von Velpeau. Diese Gallertmasse ist gleich nach der Geburt sehr leicht nachweisbar und man kann sie in der Weise demonstriren, indem man das Amnion vom Chorion abhebt. Bei diesem Vorgange gewahrt man, wie gallertige Fäden, die beide Membranen aneinanderhæften sich in die Länge ziehen und endlich zerreissen. Auch findet man Ansammlungen jener Gallerte in grösserer Menge, nahe bei der Insertion des Nabelstranges in die Placenta, in den Winkeln, die die grossen Gefässstämme bei ihren Abgängen erzeugen. so dass daselbst gallertige Polster erscheinen. Wenn die Nachgeburt längere Zeit gelegen ist, so verdunstet zum Theile oder ganz der flüssige Theil der Gallerte, sie wird membranenartig und es gelingt, sie in Form von kleinen Plättchen darzustellen, welche man vom Chorion oder Amnion abziehen kann, je nach dem bei der Loslösung beider Membranen die verdichtete Gallerte an dem Chorion oder Amnion haften geblieben ist. Man muss sich entschieden den Angaben Kölliker's anschliessen, welcher die von mehreren Autoren, als sogenannte mittlere Haut beschriebene Membran, für nichts anderes als aus jenem verdichteten Gallertgewebe dem Magma reticulée von Velpeau hervorgegangen, erklärt. Noch deutlicher lässt sich das Gallertgewebe in eine Membran verwandeln, wenn die Placenta im Alkohol gelegen.

Ich folge in der Schilderung der Entwicklung des Chorion den Angaben Kölliker's. Das Chorion ist bei allen Säugethieren aus zwei Bestandtheilen zusammengesetzt, und zwar: 1. aus einer Epithelialschichte nach aussen, welche auch die Zotten überzieht und 2. aus einer Bindegewebsschichte mit Gefässen nach innen. Die Epithelschichte ist, wie alle bisher angestellten Beobachtungen unzweifelhaft darthun, nichts Anderes als die seröse Hülle, deren Entwicklung mit der Bildung des Amnion in nahem Zusammenhange steht. Die Bindegewebsschichte des Chorion, diese innere Schichte, führt Blutgefässe. Es ist mit viel Wahrscheinlichkeit anzunehmen, dass die Epithelschichte des Chorion von dem Ektoderm der Keimblase abstammt und auf der anderen Seite kann man annehmen, dass die innere gefässhaltige Lage des Chorion einer Umbildung der Allantois ihren Ursprung verdankt. Es lässt sich ferner bestimmt zeigen, dass die Allantois, wenigstens mit ihrer äusseren gefässhaltigen Hülle an der ganzen inneren Oberfläche der serösen Hülle (Chorion) herumwuchert und nicht etwa, wie man auch geglaubt hat, nur an der späteren Placentastelle sich ansetzt. Es hat nämlich vor Allen Coste bewiesen, dass das Chorion in seiner frühesten Zeit und seinem ganzen Umkreise gefässhaltig ist und von den Nabelgefässen versorgt wird. Bei einem kleinen Embryo aus der dritten Woche fand sich nach Coste ein ringsum mit Zotten besetztes Chorion. Die Zotten waren, wie die seröse Hülle, aus Zellen gebildet und nichts als hohle Auswüchse derselben, in welche die bindegewebige Schichte des Chorion nicht einging. Diese breitete sich an der ganzen Innenfläche der zottentragenden, äusseren Eihülle (der serösen Hülle) aus und besass überall Blutgefässe, welche von den Nabelgefässen abstammen. In der dritten und vierten Woche hat Kölliker in zwei Fällen das Chorion ringsherum gefässhaltig gefunden; nur enthielten in diesen Eiern auch die Zotten alle schon eine bindegewebige Axe mit Ausläufern der Nabelgefässe, während zugleich die seröse Hülle oder die Epithelialschichte des Chorions äusserst deutlich war. Haben sich einmal in der vierten Woche die Umbilicalgefässe sammt dem sie tragenden Bindegewebe im ganzen Chorion in die hohlen Zotten der serösen Hülle hineingebildet, so wächst das Chorion eine Zeit lang in allen seinen Theilen gleichmässig fort, bis gegen das Ende des zweiten Monates. Dann erst und im

3. Monate beginnt die fötale Placenta sich zu bilden, indem an der Stelle, mit welcher das Ei der Uteruswand anliegt, die Zotten immer weiter wuchern, während dieselben an den übrigen Stellen im Wachsthume zurückbleiben, weil ihre Gefässe atrophisch werden. So bildet sich nach und nach der Unterschied zwischen dem gefässhaltigen und gefässlosen Theile des Chorion aus.

Das Chorion wird in zwei Abschnitte eingetheilt; der eine Abschnitt, aus dem die Placenta sich entwickelte, ist das Chorion frondosum, der Rest das Chorion laeve. Das Chorion frondosum ist an seiner äusseren Fläche mit vielen dichten, reich verästelten Zotten besetzt und bildet die Placenta foetalis, welche durch die Zotten auf das Innigste mit der Placenta uterina (Decidua serotina) zusammenhängt. Das Chorion laeve, glatte Chorion, zeigt an seiner äusseren Fläche ebenfalls Zotten, in geringerer Anzahl und kleiner, die jedoch mit Ausnahme des Placentarrandes in ziemlich weiten Abständen stehen, wenig verästelt sind, und daher auf den ersten Blick dem Auge sich entziehen. Diese Zotten haften an und in der Decidua reflexa und verbinden diese mit dem Chorion wie durch kleine faserige Fäden.

Chorion laeve. Kölliker schildert dasselbe als eine dünne weissliche, durchscheinende, bindegewebige Haut ohne Blutgefässe, welche durch spärliche, wenig verästelte, kürzere oder längere Zotten, deren Menge in der Nähe des Placentarrandes am bedeutendsten ist und die natürlich auch gefässlos sind, mit der Reflexa verbunden erscheint, jedoch ziemlich gut von derselben sich trennen lässt.

Übereinstimmend mit diesem Befunde, möchte ich noch erwähnen, dass an der äusseren Fläche des Chorion sich eigenthümliche Zeichnungen vorfinden, welche sich in grosser Flächenausbreitung als kleine geschlängelte Linien darbieten und namentlich, wenn man das Chorion ausspannt und gegen das Licht hält, besonders schön sichtbar sind. Es ist schwer, diese Zeichnung zu erklären, und es kann wahrscheinlich nur die Entwicklungsgeschichte darüber nähere Aufklärung geben. Ich vermuthe, dass diese geschlängelten Linien nichts anderes sind als die Residuen der mit ihren Gefässen zu Grunde gegangenen Zotten, so dass noch ein Hinweis stattfindet auf das ehemalige Verhalten des Chorion laeve, welches früher ein frondosum war.

Gegen den Rand der Placenta hin ist die Verbindung des Chorions mit der Reflexa eine sehr innige; indem grosse, vielfach verzweigte Stränge vom Chorion gegen die Reflexa ziehen. Diese Stränge kommen aber hauptsächlich von der äusseren Fläche desjenigen Theiles des Chorion, welcher schon auf der Placenta aufliegt (Taf. I Fig. 2 *a*). Es ist unschwer, diese Stränge als obliterirte Gefässe zu erkennen, und man muss zu dem Schlusse kommen, dass längs des ganzen Randes der Placenta, wo sich die Verhältnisse in der Weise vorfinden, sich ebenfalls ursprünglich Placentarsubstanz vorfand, welch' letztere gegen die Zeit der Niederkunft einem Verödungsprocesse anheimgefallen ist und wovon als deren Reste jene Bindegewebsstränge, die obliterirten Gefässe, erscheinen. Diese Anschauung wird erhärtet dadurch, dass man an verschiedenen Nachgeburten noch Reste von Placentarsubstanz in Form von Inseln vorfindet, die als Placentae succenturiatae bekannt sind. Bei Betrachtung einer grösseren Anzahl von Nachgeburten wird man jene Inseln von verschiedener Grösse finden und man kann alle Stadien wahrnehmen, welche das allmählige Schwinden der Placentarsubstanz demonstriren (Taf. I Fig. 2). Es gibt Placentae succenturiatae z. B. von der Grösse eines Kreuzers und darüber und darunter (Taf. I Fig. 2 *d, b, c*) bis zu der eines Stecknadelkopfes, und endlich findet man Stadien, wo das Placentargewebe des letzteren Falles ganz geschwunden ist (Taf. I Fig. 3 *a*) und nur die ungemein verengten Gefässe, die entweder in einer dicken Bindegewebsscheide stecken oder nicht, noch den Weg zeigen, wo Placentarsubstanz vorhanden gewesen ist; endlich kommt man zu jenen Stadien, in welchen auch die Lumina der Gefässe zu Grunde gegangen sind und die letzteren als derbe, verzweigte Bindegewebsstränge erscheinen, die von den noch functionirenden Stämmen der Umbilicalgefässe nothwendiger Weise entspringen müssen, ausserhalb des Randes der Placenta eine Strecke fortlaufen, sich ramificiren und mit den Ramificationen in die Decidua reflexa sich einsenken (Taf. I Fig. 2 *a*).

Aus diesem Grunde ist zunächst der Randtheil des Chorion laeve neben der Placenta eigentlich nicht als Chorion laeve, sondern als Chorion frondosum, fötale Placenta aufzufassen; dem entsprechend ist der diesbezügliche Antheil der Decidua reflexa als Decidua serotina anzusehen, als zu Grunde gegangener Theil der

Placenta uterina. Es stimmen ja diese Angaben auch vollständig mit der Entwicklung des Chorion überein. Gibt es doch ein Stadium, in welchem das Chorion ganz mit Zotten dicht besetzt ist, welche alle in die Uterinschleimhaut (Decidua) sich einsenken. Durch reichlichere Entwicklung der Chorionzotten sammt deren Gefässen entsteht an einer Stelle des Chorions die Placenta, während die Zotten und Gefässe des übrigen Chorions einen Rückbildungsprocess eingehen. Ein ähnliches Verhältniss findet an dem Randtheile der Placenta auch noch gegen die Zeit der Niederkunft statt. Geraume Zeit vor der Geburt beginnt die Placenta sich am Rande rückzubilden, und das obig Angegebene ist das Product dieses Processes.

Ich finde das Gesagte durch die Angaben Bischoff's (l. c. S. 39) bestätigt, welcher erwähnt, dass jene früher besprochenen strahligen Fäden obliterirte Blutgefässe seien. Die Frage betreffs der Vascularisation des Chorion laeve wird später erörtert werden.

Chorion frondosum. Aus demselben entsteht die Placenta. Dieselbe ist die vollständige Entwicklung und Verzweigung der Flocken des Chorions sammt den entsprechenden Blutgefässen. Durch das enorme Wachsthum und der reichlichen Verzweigung der Zotten, die nichts anders sind als Fortsätze des Chorions, in welchen die Blutgefässe verlaufen und sich vertheilen, ferner durch die Verbindungen mit der mütterlichen Placenta wird das ursprüngliche Bild des Chorion frondosum bedeutend verändert. Die Placenta foetalis besteht aus nichts anderem als aus den vielfach verzweigten Umbilicalgefässen, welche in Scheiden des Chorions gelagert sind; dieselben tragen Fortsätze, eben die Zotten, in colossaler Menge, welche eine Blutgefässschlinge, eigentlich aber die Enden eines Gefässnetzes enthalten. Dieses ist im Grossen und Ganzen die Formation der Placenta um die Zeit des dritten Schwangerschaftsmonats herum, um welche Zeit dieselbe bereits fertig gebildet ist.

Gegen die Zeit der Niederkunft hin treten Veränderungen auf, in der Weise, dass Zotten zu Grunde gehen, deren Gefässe obliterirten, welche Verödungsprocesse sich bis auf die grösseren Gefässstämme als Träger der Zotten sich erstrecken, so dass inmitten der Ramificationen der Umbilicalgefässe sich verzweigte

Bindegewebsbalken vorfinden, die unter dem Namen Septa placentae bekannt sind. Diese Septa der Placenta, als obliterirte Gefässstämme, erscheinen immer als abgehende Zweige der noch Blut führenden grösseren Stämme analog dem Verhalten der Arteria umbilicalis von der A. hypogastrica beim Erwachsenen Diese Rückbildungen trifft man in allen Stadien an. Man findet Gefässstämme, deren Lumen bereits kleiner und deren Wandung und choriale Scheide bedeutend dicker geworden; andererseits wie ein dicker Balken, anscheinend nur aus Bindegewebe bestehend, auf dem Querschnitte noch die äusserst feinen Lumina einer Arterie und Vene birgt (Taf. I Fig. 4 *a*), endlich trifft man solche Balken, die bereits vollständig gefässlos sind, Septa placentae. Diese obliterirten Gefässbalken sind ausser in der Substanz der Placenta auch noch an deren innerer Oberfläche und namentlich am Randtheile sichtbar und diese letzteren sind eben jene Fäden und Stränge, von denen ich früher gesprochen, welche vom Chorion kommen und in die Decidua reflexa sich einsenken. Die Placenta zur Zeit der Reife ist sohin nicht mehr das Organ in toto der früheren Bildung, es ist schon in grosser Menge Placentarsubstanz zu Grunde gegangen, namentlich der Randtheil; daher besitzt sie vor der Zeit der Niederkunft eine viel grössere Flächenausdehnung. Wegen des Schwindens des Randtheiles der Placenta, die sich öfters bis über 5 Cm. erstreckt, ist das nicht mit Placentarsubstanz, sondern mit obgedachten Strängen versehene Chorion nicht Chorion laeve, sondern Chorion frondosum aut. Der entsprechende Antheil der Decidua reflexa ist zu Grunde gegangene mütterliche Placenta (Decidua serotina).

Mit diesem Rückbildungsprocesse der Placentargefässe tritt jedoch auch Bindegewebsneubildung auf, welche mehr weniger reichlicher sich entwickeln kann. Man kann dieselbe als Fibroid der Placenta bezeichnen, und es kann dasselbe einen ganzen Cotyledo ergreifen und stellt an der inneren Oberfläche der Placenta opake, dicke, derbe, weisslich- gelbliche Inseln dar. Und wieder der Randtheil der Placenta trägt jene Charaktere sehr schön ausgesprochen, bekannt unter dem kreisförmigen, weissen Bindegewebswalle, welchen selbst die Hebammen kennen und in deren Munde als „Türkenbund“ cursirt.

Es ist dies der Annulus fibrosus placentae aut. Busch[1], Späth und Wedl[2] haben diese Fibroide genauer untersucht. Diese Ringe, Annulus fibrosus placentae, können mächtig entwickelt sein, so dass sie einen über die innere Oberfläche der Placenta prominirenden Wall bilden, und die Placenta mit dem Ringe eine Art Napf bildet. Hyrtl[3] gedenkt auch dieser fibroiden Ringe und meint, dass die kleineren Ringe aus einer früheren Periode des Fötallebens, die grösseren aus einer späteren datiren und er vermuthet, dass sich aus diesen Ringen öfters die Schwächlichkeit zur Welt gekommener Kinder erklären lasse. Analog dem Fibroidwalle verhalten sich die Inseln von fibroider Substanz an der concaven Oberfläche der Placenta. Es ist einleuchtend, dass mit dieser Degeneration der Placentarsubstanz auch eine entsprechende Verödung der Gefässe mit einhergeht; es scheint jedoch die Verödung der Gefässe öfters nicht gleichen Schritt zu halten, denn in einigen Fällen gewahrt man, wie zu jenen Stellen sehr zarte Gefässchen hineilen und in der derben Masse blind endigen. Ich habe nie gesehen, dass diese Gefässchen noch ein Capillarnetz tragen und man kann daher sagen, dass sie nichts zur Ernährung beitragen können, sondern Residuen jener Placentargefässe sind. Ich bin mit diesem Befunde im Gegensatze zur Anschauung Hyrtl's, welche diese Gefässe unter die Vasa nutrientia chorii reihte, in gleicher Weise wie über dem Rande der Placenta in das Chorion übergreifende Gefässe sich als Residuen in den verschiedensten Stadien sich vorfinden können, die der genannte Autor als Vasa aberrantia, als nutrientia chorii, auffasst.

Nach Hyrtl[3] treten Vasa aberrantia, sowohl Arterien als Venen in drei verschiedenen Formen auf: 1. Als wahre Placentargefässe, 2. als Gefässe von Nebenplacenten und 3. als Vasa nutrientia chorii. Die ersteren sind an den regulären Blutgefässen der Placenta dadurch, dass sie nicht während der ganzen Länge ihres Verlaufes auf der concaven Fläche des Mutterknochens aufliegen, sondern diese verlassen, in das zottenlose Chorion ab-

---

[1] Handb. d. Geburtshilfe p. 183.

[2] Klinik d. Geburtsh. VII, 1851, 2. Bd., S. 806.

[3] Die Bulbi der Placentararterien, k. Akad. d. Wissensch. 1869.

[4] Die Blutgefässe der menschl. Nachgeburt in normalen und abnormen Verhältnissen, Wien 1870.

schweifen, und nach längerem oder kürzerem Verlaufe extra limites placentae wieder in letztere einlenken, um sich nun erst nach Art der gewöhnlichen Placentargefässe zu verzweigen.

Die dritte Form, die Vasa aberrantia als nutrientia chorii, können Reste von Gefässen der Nebenplacenten sein, oder Verlängerungen der Vasa nutrientia chorii auf der concaven Fläche des Mutterknochens über den Placentarrand in das Chorion hinein. Die Vasa aberrantia der ersteren Art, entstehen wie Hyrtl selbst angibt, durch Schwund des Placentargewebes. Geht die Nebenplacenta ein, so kann sich mit dem Untergange ihrer Zotten und Cotyledonen, der arterielle und venöse Hauptstamm mit sehr reducirtem Caliber erhalten und der Injection zugänglich bleiben.

Die zweite Abart der Vasa aberrantia, die Hyrtl als nutrientia chorii beschreibt, sind aber nichts anderes als Residuen von Gefässen ehemaliger Placentarsubstanz, welche endlich auch zum Schwinden gebracht wurden, an Nachgeburten aus früheren Epochen natürlicher Weise noch zahlreicher, als zur Zeit de Niederkunft angetroffen werden, wo sie schon vollständig obliterirt sind. Ich kann daher der Ansicht Hyrtl's nicht beipflichten, welcher ihnen eine nutritive Function zumuthet, da die Gefässe dort vorhanden sind, wo sich keine Zotten mehr vorfinden, respiratorische Gefässe also entfallen. Er sagt aber, dass, da sich dieselben Gefässe nur an einzelnen Placenten und an einzelnen Punkten ihres Randes vorfinden, so lässt sich schliessen, dass die Ernährung des Chorion nicht nothwendig an ihre Gegenwart gebunden ist.

Ich habe schon mehrmals erwähnt, dass ich diese Hyrtl'schen Gefässe durchaus nicht als Nutrientia chorii auffassen kann, sondern dass sie Reste der Umbilicalgefässe sind, deren angehörige Placentarsubstanz geschwunden ist. Dem entsprechend findet man auch alle Stadien des rückschreitenden Processes; man kann, wenn die Zotten geschwunden sind, die feinen Stämmchen der Arterien und Venen durch präcapillare Reiserchen verbunden finden, ja einen arteriellen Stamm in einen venösen direct übergehen sehen, ohne dass sich ein Capillarnetz zwischen beiden einschaltet. Fig. 3 liefert davon ein eclatantes Bild. Diesbezüglich ist auch das Capitel in dem erwähnten Werke, welches von dem unmittelbaren Übergange von nicht capillaren Arterien in Venen handelt aufzufassen.

Abgesehen von diesen Randgefässen, spricht Hyrtl von den Vasis nutrient. chorii, dass sie sich auch an anderen Stellen als am Placentarrande vorfinden. Er sagt (l. c. S. 96): Die Placenta stellt einen Complex kleinerer Parenchymballen (Cotyledonen) dar. Zu jedem derselben begeben sich Arterien, welche von einfachen Venen begleitet werden. Bevor die Arterie in den Cotyledo eintritt, liegt sie oberflächlich an der concaven Placentafläche. Der Eintritt in den Cotyledo erfolgt durch plötzliches Verschwinden von der Oberfläche, also durch scharfe, fast rechtwinkelige (auch spirale) Krümmung in die Tiefe. Aus dieser Krümmung selbst oder kurz vor ihr, erzeugt jede Arterie eines Cotyledo, einfache oder mehrfache, sehr feine Zweigchen, welche nicht in die Tiefe ablenken, mit den Zotten der Cotyledo in gar keine nähere Beziehung treten, sondern oberflächlich und immer geradlinig (wie die feinen Vasa aberrantia am Placentarande) in jener Chorionschichte verbleiben, welche die concave, embryonale Fläche des Mutterkuchens überzieht und ein Stroma von fibrillärem Bindegewebe führt. Nie sieht man eine solche feinste und gestreckte Arterie in die Tiefe des Placentaparenchyms eintauchen, sondern in spärliche, geradlinige Reiserchen zerfahren, welche ähnlichen venösen Gefässchen begegnen, sich mit ihnen verbinden, und ein kleines Circulationssystem mit ihnen herstellen, welches nur der oberflächlichen Schichte des Cotyledo (Chorion) eigen ist. Allerdings erzeugt die dem Cotyledo zugehörige Arterie, bevor sie in die Tiefe geht, auch andere feine Nebenzweige, welche sich wie die Hauptarterie des Cotyledo verhalten und gleichfalls von der Oberfläche durch brüske Krümmung verschwinden. Aber diese Art arterieller Gefässchen besitzt nicht den langgestreckten Verlauf der Vasa nutrientia, sondern ist geschlängelt wie die Hauptarterie, oft sehr auffallend serpentin, und gibt unter rechten Winkeln selbst wieder feinste Arteriae nutrientes ab, welche oberflächlich bleiben. Die beste Ansicht dieser Gefässe erhält man mit Hilfe der Corrosion feiner und bestgediegener Injectionen. Es zeigt sich an corrodirten Cotyledonen, was untertauchende Zottengefässe und was oberflächliche Ernährungsgefässe sind, sehr schön und deutlich. Die letzteren überlagern mit ihren zarten und spärlichen Verzweigungen jene der dicht geballten Zottengefässe und lassen sich von ihnen abheben.

Diese Angaben scheinen mir jedoch nicht ganz richtig; denn wie aus dem Späteren ersichtlich sein wird, habe ich ein dem Chorion wirklich angehöriges Capillarnetz entdeckt, welches nur ihm eigenthümlich ist und zu seiner Ernährung dient. Dieses Capillarsystem ist jedoch ganz anders beschaffen, lässt sich nicht durch Corosion, sondern durch feinste mikroskopische Injectionen mit löslichem Berlinerblau anschaulich machen.

Die Abbildungen der Vasa nutrientia chorii, die Hyrtl auf Taf. XIV gibt, sind gewiss keine solchen; es sind viel zu grobe Stämme, und ebenso stimmt die Beschreibung, die Hyrtl liefert, nicht mit den von mir anzuführenden Vasa nutrientia chorii. Ich bin vollends der Überzeugung, dass diese letzteren Hyrtl'sche Vasa nutrientia chorii nichts anderes sind, als feine Ramificationen der Umbilicalgefässe; denn es gibt solche, feinste Gefässe, welche nicht in die Tiefe dringen, sondern oberflächlich bleiben (Fig. 4 *b*) und sofort in Zotten eindringen, die sich directe an der äusseren Fläche des Chorion's Placenta vorfinden; solche Gefässchen, für die oberflächlichsten Zotten versorgen stets nur eine geringe Zahl derselben, correspondirend der Feinheit des Reiserchens und biegen bald in das venöse Gefäss um. Auch ich habe anfangs jene Gefässchen für Vasa nutrientia gehalten, musste aber allzubald meinen Irrthum einsehen. An corrodirten Placenten ist ganz richtig ersichtlich, wie diese Stämmchen oberflächlich, ober den dichtgeballten Zottengefässen liegen, und machen einen contrastirenden Eindruck. Und doch gehören diese oberflächlichen Gefässchen oberflächlich liegenden, nicht zusammengehäuften Zotten an. Wie an den Zotten der Cotyledoballen, die capillaren Endschlingen durch die Corrosion verloren gegangen sind, in gleicher Weise fand dies an diesen oberflächlichen Gefässchen statt. Die Richtigkeit all' des Gesagten wird später noch deutlicher werden.

Ich glaube, es ist hier die beste Gelegenheit, um das Bewandtniss der von Jungbluth[1] in neuerer Zeit beschriebenen Vasa propria der Placenta zu untersuchen.

Um den Quell des Fruchtwassers experimentell zu eruiren, unternahm Jungbluth an frischen Mutterkuchen aus dem 8., 9.

---

[1] Beitrag zur Lehre von Fruchtwasser und seiner übermässigen Vermehrung. Inaug. diss. Bonn 1869.

und 10. Monate Jnjectionen mit fein vertheilter Leimlösung durch die Nabelarterie vor; er fand, wie die Lösung sehr langsam, aber in die feinsten Gefässfädchen eindrang, welche sich auf der freien dem Amnion zugekehrten Placentarfläche verschiedenartig ausbreiten. Verfolgte er den Lauf eines solchen Gefässchens etwa zum Rande der Placenta hin mit blossem Auge oder mit der Loupe, so bemerkte er, wie es zuweilen über den Rand der eigentlichen Placenta fötalis hinaus in den dünnen Chorion überging. Derartige Gefässchen liegen ganz oberflächlich und man möchte glauben, dass sie in der Wasserhaut selbst lägen. Die abgezogene Wasserhaut zeigte keine Spur von Gefässen; die vorhin genannten Gefässchen treten noch deutlicher hervor. Es war leicht zu sehen, wie sie von dem Hauptacte der oberflächlich verlaufenden Placentagefässe herstammend, an anderen Stellen über solche hinwegziehend, in eine derbere, das Parenchym der Placenta von dem Amnios abgrenzenden Membran verliefen und also ein von den übrigen Placentatheilen getrenntes Netzwerk bilden mussten. Es ist dies eine Erscheinung, welche namentlich bei krankhafter Affection des Parenchyms deutlich sichtbar wird. Unter anderen beobachtete er an einer Placenta, woselbst zum Rande hin eine fettige Degeneration vorhanden, wie über der afficirten, absolut gefässlosen Stelle in der aufliegenden Grenzmembran die Gefässe persistirt hatten und selbst über den eigentlichen Placentarrand von Jnjectionsmasse erfüllt waren. Sofern aber diese mit blossem Auge sichtbaren Gefässe nicht capillar sind, konnte er sie direct nicht als die Producenten des Fruchtwassers proclamiren. Desshalb trennte er an den verschiedenen Stellen der freigelegten Oberfläche kleinere und grössere Hautläppchen ab, um sie mikroskopisch zu untersuchen. Beim Lostrennen bestätigte sich der Eintritt von Gefässfädchen in die membranöse Schichte der Placenta, Indem er nämlich mit dem Scalpell vorsichtig schabend vorging, um die Hautläppchen möglichst frei vom Zottengewebe zu erhalten, sah er sich mehrfach genöthigt, die Übergangsästchen durchzuschneiden, weil sonst die Membran mit den eintretenden Gefässen zerrissen wäre. An jenen Stellen aber, an welchen feinere Gefässe einmal in der Membran verliefen, konnte er schon kräftiger schabend und abziehend vorgehen; denn selbst die feinsten Ramificationen litten, weil sie in der zu lösenden Schicht sassen, nicht

im geringsten. Die grösseren und kleineren Lappen brachte er mit Glycerinzusatz auf den Objectträger des Miskroskopes und konnte bei schwacher (25 — 30facher) Vergrösserung ein deutliches Bild des Vermutheten entnehmen. Weithin liess sich die Injectionsmasse verfolgen; hier hatte sie das noch in den Gefässen befindliche rothe Blut vor sich hergetrieben, in noch feinere, schon mehr netzartig érscheinende Gefässbezirke. Zwischen diesen grösseren Netzen fanden sich bald mehr, bald weniger verbreitete Capillarnetze, welche er als Vasa propria dieses Theiles beschreiben zu dürfen glaubt, denn sie beschränken sich lediglich auf die eine Membranschichte, welche mit der Placenta foetalis verwachsen, denen Amnion fest anliegt. Manchmal fanden sich, namentlich bei den ausgetragenen Placenten, bald mehr bald weniger Vasa propria. Niemals hat Jungbluth auch an ausgetragenen Placenten, falls selbige nur frisch, um nicht zu sagen blutwarm, zur Injection kamen, obliterirende Capillarnetze vermisst. Bisweilen kam es aber auch vor, dass die Capillaren dem kräftigen Eindringen des Blutes nicht Widerstand hielten, so dass frische Extravasate auftraten, während das Capillargefäss auf der anderen Seite doch noch deutlich kenntlich und blutführend blieb. Deutlicher allerdings und zahlreicher noch waren die Capillaren einer Placenta aus dem neunten Monate, einer mit Hydramnios Behafteten entnommen.

Jungbluth ist nun der Meinung, dass die Vasa propria der Quell des Fruchtwasses sind, indem er dieselben bei Hydramnios häufiger und in grösserer Zahl vorfand, als bei normalem Verhalten des Fruchtwassers. Er schliesst[1]: die Amnios-Flüssigkeit ist nicht gebildet im Mutterkuchen (Placenta uterina), sie wird nicht auf der Körperoberfläche der Frucht ausgeschieden, das Fruchtwasser wird ausgeschieden im Fruchtkuchen (Placenta foetalis) und zwar durch die als Vasa propria der Grenzmembran bezeichneten Gefässcapillaren. 2. Hydramnios beruht nach unserem Dafürhalten auf einem ungewöhnlich langem Bestehen dieser Vasa propria, wobei immerhin die Blutmischung der Mutter mitwirken mag. Die Blutmischung der Mutter allein kann nicht Hydramnios erzeugen, wenn nicht das Capillarnetz der Placenta foetalis über

---

[1] l. c. 29.

die Zeit persistirt. 3. Partus siccus könnte auf einer zu frühen Obliteration dieser Gefässe basirt sein.

Ich bin genöthiget, diese Jungbluth'schen Gefässe als Vasa propria zurückzuweisen. Dieselben sind eben auch nichts anderes als Residuen ehemaliger functionirender Placentagefässe; es stimmt dies damit überein, dass Jungblut seine Vasa propria immer am Rande des an die Placenta angrenzenden Chorion fand, namentlich in Fällen, wo der Rand der Placenta erkrankt war, und dass er auch in Obliterirung begriffene Capillarnetze vorfand. Dass Jungbluth noch Capillarnetze vorfand, darf ja nicht Wunder nehmen, da man den Rückbildungsprocess in allen Stadien beobachten kann. Hyrtl kannte auch diese Gefässe ebensogenau wie Jungbluth undgibt an, dass sie nur entstanden sind durch Rückbildungsprocesse, und erklärt sie als Vasa nutrientia chorii, da ihnen keine respiratorischen Functionen mehr obliegen. Ferner möchte ich erwähnen, dass die Erzeugung der Präparate, wie sie Jungbluth vornahm, nicht frei von Fehlern ist; denn durch Abschaben des Zottengewebes erzeugt man sich Kunstproducte, wie ich mir im Anfange meiner Untersuchungen auf gleiche Weise in grosser Anzahl solche Präparate herstellte, wie sie Jungbluth vorweist. Dass mit der richtigen Bedeutung der Vasa popria die ihnen zugemuthete Funktion der Erzeugung des Fruchtwassers wegfällt, ist klar. Jungbluth ist in seiner Erklärung in denselben Fehler verfallen, wie Hyrtl, welcher denselben die nutritive Function zuweist. Dass die Vasa propria bei Hydramnios zahlreicher gefunden werden als anderen Falles, ist auch einleuchtend, weil es bei Hydramnios, durch die Stauung des Blutes in den Placentagefässen, es überhaupt schwerer zu vollständig rückbildenden Processen kommt und so vollständige Obliterationen seltener beobachtet werden als bei normalem Verhalten des Liquor amnii. Es wurde die gänzlich haltlose Theorie von Jungbluth bereits angegriffen, und in einer späteren Arbeit, die von Prof. E. Welponer und mir erscheinen wird, wird in dieses Capitel etwas näher eingegangen werden. Zum Schlusse: Die Jungbluth'schen Vasa propria sind Residuen von ehemals functionirenden Placentagefässen, wie man sie an allen Nachgeburten vorfindet, und haben mit der Erzeugung des Frucht-

wassers nichts, noch weniger mit der übermässigen Vermehrung desselben zu thun.

Ich komme nun zu einem weiteren Abschnitte, zu dem Verhalten der Umbilicalgefässe und deren Ramificationen zum Chorion und in der Placenta foetalis, endlich ob das Chorion eine ein- oder mehrblätterige Membran ist.

Macht man quer auf die Axe der an der concaven Fläche der Placenta verlaufenden grossen Gefässe einen Schnitt, so findet man, wie dieselben in der Membran des Chorion selbst stecken; es spaltet sich gleichsam das Chorion in zwei Blätter, um die Gefässe zwischen sich zu nehmen; so dass die Gefässe förmlich in einer Scheide des Chorion untergebracht sind; an den grossen Gefässen kann man füglich eine embryonale und eine materne Fläche unterscheiden, und da zeigt es sich, dass die choriale Lamelle, die die embryonale Seite übersieht, ganz durchsichtig ist im Gegensatze zur maternen, die dick und opak ist. Wenn eine Arterie und eine Vene nebeneinander liegen, so zieht die embryonale Lamelle über den einspringenden Winkel, die Furche zwischen der Arterie und Vena hinüber. Hyrtl hat diese embryonale Lamelle bereits erwähnt und nennt sie die Decklamelle der Gefässe. Dem früher Gesagten entsprechend gelingt es, das Chorion mittelst Kunsthilfe unschwer auch an anderen Stellen in zwei Lamellen zu zerlegen, welche man öfters in grosser Ausdehnung darstellen kann.

In gleicher Weise findet man die in das Placentaparenchym eintauchenden Gefässe nicht frei, sondern von Chorion überzogen; so dass sämmtliche Ramificationen der Umbilicalgefässe eine choriale Scheide tragen (Taf. I Fig. 4 *a*), oder es stecken die Gefässe in handschuhfingerartigen Fortsätzen des Chorion; welches Chorion anfangs mächtig entwickelt, gegen die Endvertheilung der Gefässe immer zarter und zarter wird, bis es schliesslich die zarte Membran der Zotten darstellt. Theilt sich ein Umbilicalgefäss, so theilt auch dessen choriale Scheide u. s. f. Auf Durchschnitten durch gehärtete Placenten[1] gewahrt man, wie die Dicke der chorialen Scheide nicht im Einklange steht mit der Mächtigkeit der sie

[1] Die beste Methode Placentagewebe zu schneiden ist, kleine Stücke der Placenta einige Tage in concentrirtem Gummiglycerin liegen zu lassen und sie dann in Alkohol geben.

bergenden Gefässe. In einer Scheide, welche auf dem Querschnitte den Durchmesser von 3—4 Mm. hat, findet man die Lumina der feinsten Arterie und Vena und umgekehrt; Gefässe deren Lichtung 5—6 Mm. beträgt, besitzen eine dünne choriale Scheide. Es scheint, dass die Mächtigkeit der chorialen Scheide dazu dient, um die feinen Gefässe in dem schwammigen Parenchym in ihrer Lage zu erhalten und vor Druck zu schützen. Obliteriren die Gefässe in den chorialen Scheiden, so entsteht ein sogenannter Balken zur Stützung des Placentagewebes, die Septa placentae foetalis, welche stets Ausläufer der Ramificationen der Umbilicalgefässe sind; diese Septa steht zu dem Umbilicalgefässe in ähnlichem Verhältnisse wie sich, was ich bereits früher erwähnte, die obliterirte Art. umbilicalis des Erwachsenen zur Art. hypogastrica verhält.

Die Spaltbarkeit des Chorions hat Veranlassung gegeben zwischen Amnion und Decidua mehrere Membranen zu unterscheiden, oder Theilstücke des Chorions mit besonderen Namen zu belegen, wie es Hyrtl mit seiner „Decklamelle der Placentagefässe“ und Jungbluth mit seiner „Grenzmembran“ gethan, welch' letztere nichts anderes ist, als der künstlich abgezogene innere Theil des Chorions.

Das Erwähnte anlangend wurde von Joulin[1] eine neue Haut beschrieben, die sich ausser dem Amnion an der Fötalseite der Placenta vorfindet. Er nennt diese Haut „Membrane lamineuse“. Er meint, dass das Chorion, welches unter seiner Membran liegt, Öffnungen besitze, durch welche die mit Scheiden von der Membrane lamineuse versehenen Umbilicalgefässe in die Tiefe der Placenta tauchen. Joulin erzeugte ein Artefact, indem er das Chorion in eine innere Lamelle (die ich früher die embryonale Partie des Chorions nannte), Membrane lamineuse, und eine äussere (meine materne Lamelle), Joulin's eigentliches Chorion zerlegte. Die Scheiden der Umbilicalgefässe, die Joulin ganz richtig annimmt, lässt er nicht vom ganzen Chorion, sondern nur von der inneren Lamelle (der Membrane lamineuse) entstehen, welche Gefässe durch künstliche Öffnungen der äusseren Lamelle durchtreten. All' das Letztere ist Kunstproduct.

---

[1] Recherches anatomiques sur la membrane lamineuse. Extrait de Archiv. gen. de Médecine; numéro de juillet 1865, Paris 1865.

Eine weitere Frage, das Chorion anbelangend, ist, ob dasselbe ihm eigenthümliche Gefässe besitze oder nicht; es ist dies ein vielfach bestrittener Punkt. Nach dem heutigen Standpunkte der Wissenschaft wird angenommen, dass das Chorion absolut gefässlos sei, obwohl nach Hyrtl diese Membran die früher näher erörterten Vasa nutrientia besitze.

In früherer Zeit wurde das Chorion als gefässhältig beschrieben, d. h. dass dasselbe ihm speciell angehörige Gefässe besitze. Als Hunter die Existenz der gefässhaltigen Decidua als eine vom Chorion ganz verschiedene Membran nachgewiesen hatte, gab ein Theil der Anatomen die Ansicht der Vascularisation des Chorion auf, während ein anderer Theil, sich auf die Angaben Wrisberg's stützend, bei der Ansicht beharrte. Wrisberg behauptete nämlich, er habe durch die Umbilicalgefässe, die Gefässe des Chorions, die sich sehr schön über dasselbe verzweigten, mit rother und blauer Masse injicirt. Sandifort[1] lässt die Verbindung des Chorions mit der Decidua durch Gefässe vermitteln, aber der Ausspruch des letzteren ist nicht vollkommen massgebend betreffs der Vascularisation. Er sagt: „Chorion maxime transparens — Ope superficie externae, quae villosa et tormentosa existit, investit atque adhaeret internae faciei deciduae ac placentae, circumdat autem omnia vasa, quae a foetu proveniant simul ac placentam atque generatim per totam ejus substantiam vasorum tunicam extimam constituunt. . Inter deciduam reflexam et chorion multa comparent vasa, dum chorii et amnii nexus cellulosui videtur.“

Lobstein, Velpeau, Raspail, Burdach und Bischoff erklären das Chorion entschieden als gefässlos. Bischoff (l. c. S. 42) meint, dass diejenigen Autoren, die Gefässe in dem Chorion beschreiben, durch die Decidua getäuscht worden sind, deren Gefässe sie in der Meinung, eine Platte des Chorions vor sich zu haben, diesen zuschrieben. Noch mehrere haben sich durch die Analogie mit den Säugethieren täuschen lassen, wo allerdings das Chorion z. B. beim Kalbe, Pferde, Schwein etc. auf das reichlichste mit Gefässen versehen ist; ein Unterschied von der menschlichen Bildung, der lange nicht genug gewürdigt worden, und der beweist, wie vorsichtig man hier mit Schlüssen aus der Analogie sein muss. Allein alles dieses konnte jene Angabe Wrisberg's

[1] Obs. anat. path. lib 2, p. 40, lib 3, pag. 95 tab. 8.

nicht veranlassen. Und doch ist es gewiss, dass an dem Chorion zu keiner Zeit ihm eigenthümlich angehörende Gefässe irgend einer Art nachzuweisen sind."

Rudolph Wagner (l. c. S. 110) nimmt das Chorion als gefässlos an. In den neueren Hand- und Lehrbüchern findet man nirgends etwas angegeben, was auf eine specielle Vascularisation des Chorions hinweisen würde, und man muss desshalb der Meinung sein, dass die Autoren dem Chorion eigenthümliche Gefässe nicht anerkennen. Das Chorion wird zwar in seinen Entwicklungsphasen in zwei Theilen beschrieben, wovon ein Theil gefässlos das Chorion laeve der andere gefässhältig, das Chorion frondosum ist; allein der Ausdruck „gefässhältig" wird in dem Sinne gebraucht, dass jener Antheil des Chorions die Ramificationen der Umbilicalgefässe enthält, welche die spätere Placenta aufbauen.

Eine Ausnahme hiervon macht nur Th. Langhans [1], welcher das Chorion in eine fibrilläre und eine Gefässschichte trennt, und sich über die letztere etwas näher ausspricht. Er sagt: Wenn ich von einer Gefässschichte rede, so meine ich damit eine Schichte mit einer Ausbreitung von Capillarnetzen, denn die grösseren Gefässstämme liegen in der tieferen fibrillären Lage, die Capillaren dagegen ausschliesslich direct an der Oberfläche in einer etwa 0·01 M. dicken Schichte. Was nun den Charakter des Capillarnetzes anlangt, so ist derselbe je nach dem Alter des Eies verschieden. In allen Stadien, die ich untersuchte, von der 5. und 6. Woche an bis in den 4. Monat finden sich immer mehr ausgesprochene Zeichen einer Umwandlung, die schliesslich mit einem völligen Schwunde des Lumens endet. Am frühesten obliteriren die Gefässe an dem Chorion laeve; hier sind die Maschen schon in der 6. Woche erheblich weiter, als am Chorion frondosum, ja an einzelnen Stellen von grösserer Ausdehnung fehlen sie ganz; in der 7.—8. Woche sind sie schon verschwunden; dagegen lassen sie sich am Chorion frondosum noch viel länger nachweisen als man bisher annahm; noch bis gegen den 4. Monat hin sind sie leicht zu erkennen; Langhans verfällt jedoch in einen Fehler, wenn er

[1] Untersuchungen über die menschl. Placenta. Archiv. für Anat. u. Physiol. anat. Abth. 1877.

die Hyrtl'schen Vasa nutrientia und aberrantia als von jenem Gefässnetze herrührend erachtet.

Bei meinen Untersuchungen über die Gefässverhältnisse der menschlichen Nachgeburt nahm ich auf den strittigen Punkt, ob das Chorion ihm eigenthümliche Gefässe besitze oder nicht, Rücksicht und kam zu dem bestimmten Resultate, dass die Negirung solcher absolut unrichtig ist. Das Chorion besitzt ein ihm selbst angehöriges Capillargefässsystem, welches den Zweigen der Arteria und Vena umbilicalis entstammt. Es ist ferners richtig, dass jenes Capillarnetz, welches ich weiterhin beschreiben werde, von keinem Autor vorher so gesehen und näher bezeichnet wurde. Denn wenn sich auch ältere Angaben von einer gesehenen Vascularisation des Chorion vorfinden, so sind dieselben so mangelhaft und oberflächlich gehalten, dass man wohl der Ansicht Bischoff's beipflichten muss, dass eben jene Autoren die Gefässe der Decidua auf das Chorion bezogen, oder was vielleicht auch möglich ist, dass sie die leicht sichtbaren Vasa aberrantia Hyrtl's vor Auge gehabt haben. Auch Abbildungen existiren nicht, während ich solche mit präciser Klarheit zu liefern im Stande bin, und Jedermann durch Vorzeigung von mit grösster Leichtigkeit und Einfachheit anzufertigenden Präparaten die Richtigkeit meines Gesagten zu beweisen bereit bin. Das Capillarnetz zu finden, ist eben nur durch die vollkommenste anatomische Technik und deren Hilfsmittel möglich geworden; die früheren Hilfsmittel waren zu geringe, sonst wären diese Gefässnetze gewiss früher schon beschrieben worden.

Wenn man in eine möglichst frische Placenta, die unversehrt ist, nachdem man sie möglichst blutleer durch Streichen gegen das abgeschnittene Ende des Nabelstranges gemacht hat, eine verdünnte Lösung von Berlinerblau durch eine Nabelarterie oder die gleiche Vene injicirt, bis der ganze Kuchen tiefblau geworden ist, so füllen sich nicht nur die Gefässe der Placenta, sondern auch die Capillarnetze des Chorions. Die Placenta muss möglichst frisch sein; je frischer sie ist, um so leichter gelingt die Injection, da man sich die Placenta etwas blutleer machen kann, was nicht mehr gelingt, wenn das Blut in den Gefässstämmen geronnen ist, da es sich nicht mehr herausbringen lässt und auf diese Weise die Gerinnsel die Lumina der Gefässe verstopfen. Ferner muss die

Injection vollständig gemacht werden; d. h. es muss so lange injicirt werden, als man selbst unter stärkerem Druck, ohne Extravasate zu erzeugen, die Masse hineintreiben kann. Selbst wenn Zotten zerreissen und die Injectionsmasse durch deren Gefässe hervorquillt, sistire man noch nicht die Injection; man kann sich gegen dieses etwas schützen, indem man die Placenta mit ihrer uterinen Fläche auf Gypsbrei oder feinen Sand gelagert hat; da die Körner dieser Massen die erzeugten Öffnungen etwas zu verlegen mögen. Die Placenta muss nach einer sehr gelungenen Injection ein tiefblaues Ansehen haben; nirgends dürfen noch Cotyledonen mit Blut gefüllt zum Vorschein kommen. Da die Injectionsmasse das Blut vor sich hertreibt, so ist es von Vortheil, beim Beginne der Injection, z. B. durch die Arterie, die Vene offen zu lassen, damit das vorgetriebene Blut einen Abzug habe; erst wenn reines Blau aus der Vene quillt, ligire man dieselbe. Ein Hauptaugenmerk ist darauf zu richten, dass die concave oder innere Fläche niemals trocken sei; daher während der Injection stets Wasser dieselbe zu bespülen hat. Unter Wasser zu injiciren halte ich nicht für angezeigt, da ausströmendes Berlinerblau das Wasser trübt und man die Injection nicht controlliren kann. Die fortwährende Feuchthaltung der inneren Oberfläche der Placenta ist desshalb von eminenter Bedeutung, weil das Amnion und Chorion ungemein rasch eintrocknen, und mit ihnen die Gefässe des Chorion, wo dann eine Injection derselben unmöglich ist. Daher auch eine Placenta, dessen Chorion man mikroskopisch injiciren will, gleich nach ihrer Entbindung vor Verdunstung zu schützen ist. Ich habe absichtlich eine Placenta 5 Minuten frei liegen lassen, und fand wie die Injectionsmasse in die feinsten Stämmchen nur durch Anwendung von besonderer Mühe eindrang, und trotzdem die meisten uninjicirt blieben. Die Eintrocknung bildet eben einen unüberwindbaren Widerstand.

Hat man nun unter gegebenen Cautelen eine Placenta injicirt, so kann man dieselbe gleich, oder was bedeutend vortheilhafter ist, nach 2—3 Tagen, nachdem man sie in Müller'sche Flüssigkeit gelegt hatte, der Untersuchung unterziehen. Die öfters zu wechselnde Müller'sche Flüssigkeit macht das Berlinerblau gerinnen und erleichtert die Untersuchung, da sonst bei Durchschneidung von Gefässstämmen, das Berlinerblau hervorquillt und

das Beobachtungsfeld verdeckt. Ist die Placenta in Müller'scher Flüssigkeit gelegen, so ist sie ganz gelb und man kann sie, damit die Gefässverhältnisse deutlich hervortreten, durch ein bis zwei Stunden in fliessendes Wasser legen und „auswaschen", worauf sie ganz rein wird; diese Procedur schadet nicht im Geringsten.

Indem man an irgend einer Stelle der Placenta das Chorion durchschneidet, mit der Pincette fasst und die das Chorion durchsetzenden in das Parenchym der Placenta eindringenden Gefässe abtrennt, so kann man sich beliebig grosse Lappen des placentaren Chorions darstellen. Legt man einen solchen Lappen auf eine Glasplatte oder in eine Schale mit Alkohol, in der Weise, dass die innere oder embryonale Fläche aufliegt, so gewahrt man mit freiem Auge, noch besser mittelst der Loupe, wie an der dem Beobachter sich darbietenden äusseren oder maternen Fläche des Chorions directe Inseln von Capillarnetzen in grösserer oder geringerer Ausbreitung sich darbieten. Auf Taf. I Fig. 4 und 5 (vergrössert) ist eine Abbildung solcher Netze von einem exquisit schönen Falle gegeben; die Fläche des Chorions ist die äussere. Ist das Chorion sehr dünn und durchsichtig, so kann man diese Netze auch von der embryonalen oder inneren Fläche des Chorions durchschimmern sehen. Die Netze sind sehr fein und zierlich und sind ein Capillarnetz, welches in den Chorion unter seiner äusseren Fläche, zwischen einer feinen Arterie und Vene ausgebreitet ist, welche Gefässe Zweige der in die Tiefe tauchenden Umbilicalgefässe sind. Die Netze bilden öfters Wirbel, dort wo Gefäss an Gefäss dicht gedrängt steht oder zeigen sich mehr flächenhaft ausgebreitet, wo dann das Netz weitmaschiger, sehr fein zwar aber lockerer erscheint. Bei Besichtigung eines solchen chorialen Lappens von seiner äusseren Fläche her, gewahrt man ferner, wie die in die Tiefe tauchenden Umbilicalgefässe in einer Scheide des Chorions stecken, die unverhältnissmässig zu dem Caliber der sie bergenden Gefässe mächtig ist, Taf. I Fig. 4 *a* und dann in die Tiefe tauchen; andererseits, wie aber feinste Gefässchen sich mit keiner dicken Chorialscheide umgeben, oberflächlich bleiben und sofort ihre Endramificationen eingehen, Taf. I Fig 4 *b*; dadurch entstehen schon zweierlei Systeme in der Placenta; die grösseren Stämme mit dicken Chorialscheiden bauen die Cotyledonen auf, während die feinsten Stämme Taf. I, Fig. 4 *b*, für ein oberflächlich an der äusseren

Fläche des Chorions liegenden Zottensystem dienen. Die Netze an der maternen Fläche des Chorions gehen auf die choriale Scheide über Taf. I Fig. 4 *c*, (so dass es als Vasa vasorum erscheint), welche im weiteren Verlaufe von zarten Gefässchen, die den, in den Chorionbäumen steckenden Gefässen entstammen, weiter aufgebaut werden, immer neue Zuflüsse erhält, so dass der ganze Chorionbaum in ein Gefässnetz (Vasa vasorum) eingehüllt wird, welches diese Ramification bis zu den Endtheilungen, den Zotten begleitet und daselbst mit den Endschlingen der Zottengfässe in reichen anastomotischen Verbindungen steht, so dass die Zottengefässe zweierlei Blutzufuhr und Abfuhr haben: 1. durch die in der Axe des Chorionbaumes liegenden eigentlichen Umbilicalgefässe, und 2. durch das an der äusseren Oberfläche des Chorionbaumes liegende Gefässnetz. Ohne viel Mühe der Präparation kann man sich ein Gesammtbild von diesem Verhältnisse machen, wenn man ein an der äusseren Oberfläche des Chorion liegendes feinstes kurzes Bäumchen, und deren gibt es unendlich viele, unter das Mikroskop bringt; da gewahrt man, wie die in der dünnen chorialen Hülle steckenden Umbilicalgefässe an die Oberfläche Stämmchen entsenden, welche das Netz aufbauen. (Taf. II Fig. 6.) Dass die Endschlingen der Gefässe in den Zotten anastomosiren, weiss man bereits durch Schröder van der Kolk[1]; allein dass auch die Vasa vasorum, man kann ja füglich diese oberflächlichen Netze der Chorionbäumchen damit in innigen Zusammenhange stellen, ist bisher unbekannt. Auch die Art und Weise der Anastomose der Endschlingen unter sich ist nicht ganz gut bekannt; denn die einzige Abbildung die existirt, die Schröder van der Kolk gegeben hat, ist glaube ich, zu viel schematisch gehalten; ich habe daher ein naturgetreues Bild des Endes eines Chorionsbäumchens mit den Gefässen abbilden lassen, Taf. II Fig. 7. Man sieht sehr deutlich die Endschlingen der Umbilicalgefässe, ihre Verbindungen unter sich und mit dem Netze. Schliesst man an diese Abbildung, die in Taf. II Fig. 6 gegeben, an, welche den Ursprung des Chorionbäumchens von Chorion gibt, so hat man ein sehr gutes Bild von dem Verhalten der Blutgefässe im Parenchym der Placenta.

---

[1] Waarnemingen over het maaksel van de menschelijke Placenta en over haren Bloedsomloop, in Verhandlungen van het k. nederlandsche Inst. 1851.

Während die Chorionbäume, allwo sie von dem Chorion abgehen, an ihren Wurzeln meistens ein Gefässnetz erhalten, welches von den Netzen der äusseren Fläche des Chorion übergreift, entstehen die Netze für die zarten Chorionstämmchen, deren Zottengebiet dicht aussen an dem Chorion liegt, gewöhnlich durch Entsendung von Gefässchen aus den axialen Gefässen, id est den Stämmen, die die späteren Zottengefässe werden. Auch die grossen Gefässstämme, wie z. B. bei der Einpflanzung der Nabelgefässe in die Placenta und deren primitive Ramificationen, erzeugen sich selbst Netze, nachdem sie ihre choriale Scheide bekommen, durch Entsendung directer Vasa vasorum, wie Taf. II Fig. 8 es zeigt. Das Bild zeigt der geschlitzten Arterie äussere Oberfläche. Gleich will ich bemerken, dass Adventitia und choriale Scheide ein Continuum bilden.

Aus dem Gesagten geht nun hervor, dass:

1. sämmtliche Ramificationen der Umbilicalgefässe sowohl in den Chorion selbst verlaufen, als deren Verzweigungen in der Placentasubstanz choriale Scheiden mitnehmen. Die Chorionbäume bergen die Placentagefässe;

2. das Chorion placentale ist vascularisirt (die Netze entstammen feinsten Zweigen der Umbilicalgefässe), und daher sind

3. die Chorionbäume als Fortsetzungen des Chorions ebenfalls mit Gefässnetzen (Vasa vasorum) versehen;

4. die Gefässnetze der Chorionbäume anastomisiren mit den Endramificationen der Umbilicalgefässe, den Zottengefässen, id est, mit dem Schroeder van der Kolk'schen Zottennetze, oder helfen dasselbe aufbauen.

3. Über den Bau der Placenta.

Aus dem Vorhergegangenen ist nun ersichtlich, dass die Kenntniss des Baues der menschlichen Nachgeburt Modificationen erleiden muss.

Die Placenta foetalis ist nicht einfach als der Gefässbaum der Umbilicalgefässe anzusehen, sondern ein Gebilde, welches aus reichlich verzweigten Fortsätzen des Chorions besteht, in welchen

die Ramificationen der Blutgefässe stecken, so dass es richtiger ist, von der Placenta foetalis mehr als Chorionbaum als Gefässbaum zu sprechen. Sämmtliche Verzweigungen des Chorionbaumes stecken in den Bluträumen der mütterlichen Placenta, und da man Endramificationen, als Zotten dicht an der äusseren Fläche des Chorions in grosser Anzahl vorfindet, so müssen dem entsprechend die mütterlichen Bluträume bis an die Oberfläche des Chorions reichen und die bläulich gefärbten Inseln oder Stellen, die an der concaven Fläche der Placenta durch das Chorion durchschimmern, sind oberflächlich gelegene mütterliche Bluträume, welche man ohne Mühe mittelst Einstich einer Injection unterziehen kann. Man kann im Grossen und Ganzen der Definition Winklers[1] beistimmen, welcher sagt, dass die Fötalgebilde für sich gedacht nichts anderes sind, als ein Convolut mehr oder weniger verzweigter Zotten, ohne jeden architektonischen Einfluss auf den Bau der Placenta, in welche sie einfach nur so eingelassen sind, dass ihre Verzweigung an den durch das mütterliche Gewebe gegebenen architektonischen Grundriss und Durchschnitt daran gebunden erscheint.

Die Stämme des Chorionbaumes erscheinen in zweierlei Form. Erstens als Stämme eines Cotyledo, welche in die Tiefe tauchen, den Cotyledo aufbauen (Taf. I Fig. 4*a*) und solche, welche oberflächlich bleiben und mit ihren zarten und spärlichen Verzweigungen die dichten Ballen eines Cotyledo überlagern (Taf. I Fig. 4*b*). Die letztere Art besitzt eine sehr dünne chloriale Scheide. Hieher gehören die von Winkler beschriebenen Zotten, die zwar gefässhaltig sind, jedoch, da sie sofort in den superficiellen, unter der Schlussplatte gelegenen Caverne enden, keine besonders dicken Stämme haben und schon nach etwa dreimaliger Theilung überall in die Zottenenden übergehen.

Die Blutgefässe, die in den Verzweigungen des Chorionbaumes liegen, treten in deren Endramificationen in die Zottenbäumchen ein, in der Art, dass in jeder Zotte ein Arterienstämmchen eintritt und ein solches venöses austritt, welche Gefässe sich in der Zotte nicht nur schlingenförmig verbinden, sondern weitere

---

[1] Zur Kenntniss der menschlichen Placenta. Arch. f. Gynäcol. 4. Bd. S. 240.

Anastomosen in Form von capillaren Netzen stattfinden. Zotten, welche keine Netze beherbergen, sondern nur hirschgeweihartig verzweigte Endschlingen, scheinen mir solche Zotten zu sein, die im Beginne der regressiven Metamorphose sich befinden. Selbst in den Stämmen finden sich zahlreiche langmaschige anastomotische Capillarnetze. Jede Verzweigung des Chorionbaumes besitzt an seiner äusseren Oberfläche Capillarnetze, welche an den grösseren Stämmen feiner, an den kleineren Stämmen langmaschiger sind und aus den axialen Gefässen und sie hinein Blutzufuhr und Blutabfuhr haben. Die Netze begleiten die Ramificationen des Chorionbaumes bis zu den Zotten hin, allwo sie mit den Netzen der Zotten im innigen Zusammenhange sind, so dass man die Zottennetze als den Anfang oder das Ende des chorialen Netzes betrachten kann. Aus diesem Grunde tritt in die Zotten das arterielle Blut nicht nur aus den axialen Stämmen der Chorionbäumchen, sondern auch aus den an letzteren an der Oberfläche sich vorfindlichen Netzen; das venöse Blut hat dem entsprechend einen doppelten Abfluss. Auf einem Querschnitte eines Chorionstammes findet man ausser den Lumina der axialen Gefässstämme an deren Peripherie auch die der durchschnittenen Gefässnetze. Winkler sagt: Überall innerhalb der Zotten, selbst in deren Stämmen, finden sich zahlreiche allseitige Anastomosen, daneben in den Zottenstämmen selbst zahlreiche langmaschige Capillarnetze, die theils um die Gefässstämme gelagert, theils einfach in das Parenchym eingesenkt erscheinen.

Jene Gefässnetze, die hauptsächlich zur Ernährung des Chorionbaumes dienen, denn auch das placentare Chorion besitzt solche (im Gegensatze zur Ansicht Winkler's), welche ausschliesslich für die Ernährung vorhanden sind, können durch ihre Anastomosen mit den eigentlichen Zottengefässen, bei Verschliessung der dieselben entsendenden Hauptstämme eventuell vicariirend auftreten für den eigentlichen Blutlauf in der Placenta foetalis; jene Gefässnetze (die den Namen Vasa vasorum auch führen könnten), verhalten sich zu den eigentlichen Umbilialgefässen, wie die Vasa privata in der Lunge zu deren Vasa publica.

In der Placenta selbst treten mancherlei Veränderungen auf. Man kann nicht sagen, dass sie in 3 Monaten bereits fertig gebil-

det ist, denn ihr weiteres Wachsthum besteht nicht allein durch Wachsthum der schon bestehenden Zottenstämme, sondern durch die Bildung neuer. Ferner tritt in der Placenta foetalis und dementsprechend in der Placenta materna von ihrer Bildung bis zur Zeit der Niederkunft, ein die Gefässe betreffender rückschreitender Process ein, welcher namentlich gegen die Zeit der Niederkunft hin grosse Dimensionen annimmt. Es gehen ganze Theile der Placenta durch diesen regressiven Process zu Grunde.

Gleichwie sich die Placenta foetalis aus dem ursprünglich allseitig mit gefässhaltigen Zotten versehenen Chorion herausgebildet hat, indem dieselben an einer bestimmten Stelle zu wuchern anfangen und die übrige Anzahl beinahe vollends zu Grunde geht, durch Verödung der Gefässe bedingt, so dass nach Bildung der Placenta, das Chorion laeve mit den Resten der bindegewebigen gefässlosen Zotten spärlich besetzt ist, so findet ein ähnlicher Process in der Placenta vom Beginne ihrer Existenz bis zu ihrem Tode statt. Es gehen eine grosse Anzahl von Zotten, die zur Respiration des Kindes dienen, zu Grunde, indem deren Gefässe obliteriren; diese Verödung der Gefässe erstreckt sich an den Zotten immer weiter und weiter, übergeht auf die kleineren, dann auf die grösseren Stämme, so dass ganze Ramificationsgebiete des Gefässbaumes der Placenta zu Grunde gehen und zu bindegewebigen Strängen umgewandelt werden, welche die Septa der Placenta foetalis, ein Stützgewebe für dieselbe darstellen. (Die Septa der Placenta materna scheinen mir auf ähnliche Weise erzeugt zu werden.) Die von Kölliker (l. c. S. 332), als Ausläufer der Chorionbäumchen, bezeichneten „Haftwurzeln“ scheinen mir auch obliterirte Gefässstränge zu sein. Es wurde deren zuerst von Langhans[1] Erwähnung gethan. Kölliker schildert sie als feinere und gröbere Ausläufer der Stämme des Chorionbäumchens in einer Dicke bis zu 1 Mm., welche ungetheilt oder einige Male verästelt bis zur Placenta uterina reichen und dann in diese sich einsenken, um, frei vom Epithel, mit dem Gewebe derselben so innig sich zu vereinigen, dass selbst ein starker Zug die Verbindung nicht löst. Am zahlreichsten sind die Haftwurzeln an den Scheidenwänden mütterlichen Gewebes, die tief zwischen die Coty-

[1] Zur Kenntniss der menschl. Placenta. Arch. für Gyn. I. 317—334.

ledonen sich einsenken und verlaufen hier viele derselben ganz wagrecht und am dicksten, und immer noch zahlreich genug finden sich dieselben in den mittleren Theilen der Cotyledonen, wo sie wie senkrechte Pfeiler zwischen den Stämmen der Chorionbäumchen und der mütterlichen Placenta ausgespannt sind. Alle als Haftwurzeln endenden Äste der Chorionbäumchen geben übrigens in ihrem ganzen Verlaufe feinere Zweige ab, welche in gewöhnlicher Weise sich verzweigen und frei enden.

Das Zugrundegehen der axialen Gefässe der Chorionbäumchen und deren oberflächliche Netze kann man an einer Nachgeburt zur Zeit der Reife in allen Studien beobachten. Zuerst schwinden die Netze (S. 256) und dann die axialen Gefässe. Ich besitze eine Reihe von Präparaten, welche den Untergang der Gefässe stufenweise demonstriren, musste jedoch aus Raumersparniss auf die Wiedergabe durch Abbildung verzichten. Man kann sich übrigens von dem Processe leicht eine Vorstellung machen. Ist ja der Vorgang ein ähnlicher, wie an der Randzone der Placenta, deren Eingehen bildlich dargestellt wurde.

Die grössten Veränderungen hat die Placenta an ihrem Rande zu erleiden. Drei bis vier Centimeter, ja unter Umständen noch mehr, sind vom Placentarrande zur Zeit der Niederkunft verloren gegangen. Durch das Schwinden der Placentarsubstanz am Rande entstehen durch den ungleichmässig fortschreitenden regressiven Process die Placentae succenturiatae. Je früheren Stadien die Placenten angehören, um so geringer wird die Anzahl der Placenta succenturiatae, so dass man dieselben eigentlich als Producte der regressiven Metamorphose anzusehen hat. Dem entsprechend findet man ja auch die Placenta succenturiatae in allen möglichen Formen und Gestalten. Dass eine Placenta succenturiata sich gleichzeitig mit der Bildung der Placenta etabliren kann, ist ja auch einleuchtend, da bei Umwandlung des Chorion frondosum in das Chorion laeve Stellen übersprungen werden können. Aber wie gesagt, in früheren Stadien der Placenta findet man die Placentulae ungemein viel seltener, im Gegentheile zur Zeit der Niederkunft, wo sie am reichlichsten angetroffen werden und daher sind dieselben als Reste der Randzone der Placenta aufzufassen. Auf Taf. I, Fig. 2 und 3, sind die regressiven Stadien solcher

Placenten zu studiren. Bei Fig. 2 und 3*aa* ist das Parenchym der Placenta vollständig zu Grunde gegangen, es restiren nur noch die Rudimente ihrer Blutgefässe, welche von Hyrtl als Vasa nutrientia chorii und von Jungbluth als Vasa propria aufgefasst wurden. In einem weiteren Stadium schwinden auch diese Gefässe und es bleiben als Zeugen ihrer ehemaligen Anwesenheit jene früher erörterten Stränge zurück, welche von der Placenta gegen das Chorion laeve hinziehen (Taf. I Fig. 2*a*) und in die Decidua eintauchen. Je nach dem Stadium der regressiven Metamorphose findet man die Gefässe verschieden vor.

Die von Hyrtl und Jungbluth beschriebenen Gefässe sind sohin nichts als die Residuen von Placentagefässen, die ihre Rolle ausgespielt haben.

Die dem Chorion eigenthümlichen Capillarnetze, die früher näher erörtert worden sind, sind die in den früheren Stadien des Chorion sich vorfindlichen Gefässnetze (Langhans), die bis zur Zeit der Niederkunft persistiren, so dass die Angabe Langhans, nach welcher im 2.—4. Monate die capillare Gefässschichte des Chorions vollends geschwunden ist, nicht richtig ist. Mit den regressiven Processen in der Placenta gehen auch solche in den bezeichneten Capillarnetzen des Chorions einher. In Placenten, bei welchen der rückschreitende Process schon Platz gegriffen hat, findet man jene Netze auch nur in der Minderzahl.

Erklärung der Abbildungen.

Tafel I.

Fig. 1. Äussere Fläche eines Decidualappens mit seinem Gefässnetze. — *a* Offenes Lumen des Hauptstammes (Verbindung mit mütterlichen Gefässen). Doppelte Lage von Gefässnetzen *b*.

„ 2. Ausschnitt einer Placenta mit einem Antheil des Chorions *x*; *a* Residuen von Placentargefässen, obsolete Gefässe. *b*, *c*, *d*. placentae succentur. Bei *c* ist die Substanz der Placenta nahezu vollends zu Grunde gegangen.

„ 3. *x* Chorion; bei *a a* Gefässreste einer hier ehemals sich vorfindlichen Placenta succenturiata (Hyrtl's Vasa nutrientia und Jungbluth's Vasa propria). *A*, *V*, Art. und Vena umbil.

„ 4. Äussere Fläche eines Chorionlappens, dem Chorion placentale entnommen. *n*, capillare Gefässnetze des Chorion; demselben angehörig; bei *c* Übertritt auf die Chorionbäume *a*, welche im Innern die Lumina der respiratorischen Placentargefässe beherbergen. *b* Gefässe, für dicht an der äusseren Fläche des Chorion liegende Zotten. Die blau gezeichneten, gröberen Blutgefässe liegen in der Membran des Chorion selbst.

„ 5. *n* Capillarnetze des Chorions *x*, vergrössert. Object 4.

Tafel II.

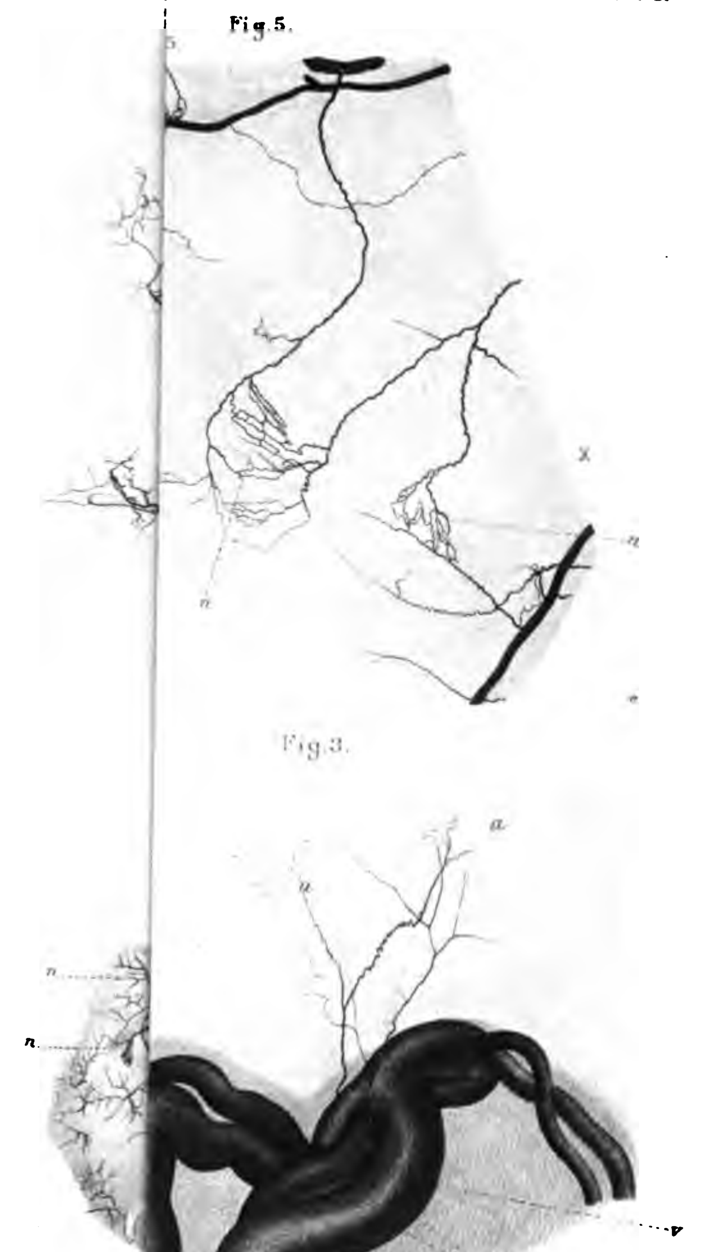
„ 6. Ein von der äusseren Fläche des Chorions *x* abgehender Balken *b*, in welchem eine Art. *a* und vena *v* verläuft. *n* Balken (Chorionnetz) *b'* und *b''* Theilungsäste des Chorionbalkens. Jeder Ast besitzt ausser den vielen Gefässen noch oberflächliche Netze.

„ 7. Endramification eines Chorionbalkens mit den Zotten deren Gefässen und Netzen. Bei *x* Abtrennung vom Balken. Diese Figur bildet gleichsam den Schlusstheil der vorigen. Die Zottenschlingen haben sich aus den Zotten etwas zurückgezogen. *z* Zotten.

„ 8. Gefässnetz (Vasa vasorum) an der äusseren Wand eines grossen Gefässes, nachdem es in die Placenta eingetaucht. *x* Ausgebreitete, geschlitzte Gefässwand. (Vergr. Obj. 4.)

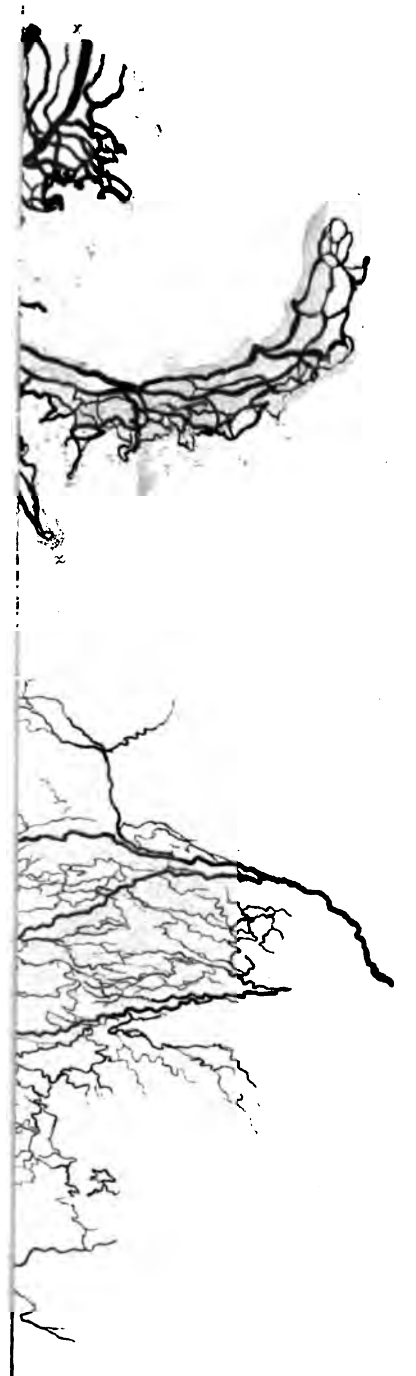
Holl: Üb…

Taf. I.



Gez u lith. v. Dr. …

K.k. Hof u. Staatsdruckerei.


Fig.7.
x
x



Über den Einfluss des fortdauernden Gebrauches von kohlensaurem Natron auf die Zusammensetzung des Blutes.

Von Dr. **D. Dubelir** aus St. Petersburg.

(Aus dem Laboratorium des Prof. E. Ludwig.)

Im Jahre 1843 hat Professor Nasse[1] acht Versuche über den Einfluss des mit der Nahrung eingeführten kohlensauren Natrons auf die Zusammensetzung des Blutes mitgetheilt, die er an Hunden und Ziegen angestellt hat, nämlich an vier Hunden, die täglich 1—4 Drachmen kohlensauren Natrons mit gewöhnlicher, halb vegetabilischer, halb animalischer Nahrung bekamen, an zwei anderen Hunden, denen dabei das Kochsalz möglichst entzogen wurde, und zwei Versuche an 2 Ziegen.

In Bezug auf die äussere Beschaffenheit des Blutes fand sich: 1. meist eine hellere Farbe und ein späteres Dunkelwerden; 2. eine grössere Dickflüssigkeit in den Fällen, in denen das Kochsalz vermindert; 3. eine Verlangsamung der Gerinnung, mit Ausnahme bei einem Hunde, dem das Kochsalz entzogen war; 4. verminderte Neigung der Blutkörperchen, sich mit einander zu verbinden und sich zu Boden zu senken; 5. nur in einem Falle bei einem Hunde etwas trübes Serum, obgleich Bostock die trübe Beschaffenheit des Blutes nach längerem Gebrauche von kohlensaurem Natron immer gefunden haben will; 6. eine vermehrte Fähigkeit, Kohlensäure beim Schütteln zu absorbiren.

---

[1] Über die arzneiliche Wirkung des kohlensauren Natrons, namentlich auf die Beschaffenheit des Blutes. Med. Correspond. Bl. rhein. Ärzte Nr. 1. 1843. Schmidt's Jahrbücher 1843, Bd. XXXVIII, p. 274.

In Bezug auf die chemischen Veränderungen des Blutes sind Folgendes die Resultate: *A.* Bei den 4 Hunden, denen nebst dem kohlensauren Alkali auch Kochsalz gegeben wurde, war 1. der Wassergehalt des Blutes im Ganzen vermehrt; 2. der des Faserstoffs etwas (um $^1/_7$ im Durchschnitte) vermindert; 3. das Fett in der normalen Menge vorhanden; 4. die Menge der löslichen Salze etwas, aber nicht regelmässig vermindert; 5. unter den einzelnen löslichen Salzen das kohlensaure, sowie das phosphorsaure Alkali in grösserer, die Chloride der Alkalimetalle und auch das schwefelsaure Alkali in geringerer Menge bemerkbar; 6. der Gehalt an Eisen keineswegs schwächer, eher stärker, als sonst, der des Kalkes aber nicht gross. *B.* die Analysen des Blutes der beiden Hunde, denen das Kochsalz möglichst entzogen worden war, stimmen nur in Folgendem überein: 1. in einer grösseren Menge von festen Bestandtheilen; 2 in einer Abnahme des Faserstoffes (um $^1/_5$ im Durchschnitte); 3. in Verminderung des Fettgehaltes, und 4. in einer absoluten oder relativen Zunahme des kohlensauren Alkali in Beziehung auf das phosphorsaure und schwefelsaure Salz, aber nicht auf das Kochsalz. *C.* In zwei an Ziegen angestellten Versuchen wurde das Blut concentrirter, d. h. die festen Bestandtheile und namentlich der Faserstoff walten vor.

Auffallend ist es, dass das kohlensaure Natron in dem Blute des pflanzenfressenden Thieres gerade die entgegengesetzte Wirkung von der hervorbrachte, die im fleischfressenden Thiere beobachtet wurde. Diese Verschiedenheit mag zum Theile wenigstens von der verschiedenen Magenflüssigkeit jener Thierclassen herrühren.

Professor Nasse hat auch an Kaninchen Versuche mit dem kohlensauren Natron angestellt, und gefunden, dass, während bekanntlich bei Menschen die Verdauung geschwächt wird und Abmagerung eintritt, bei Kaninchen nicht die geringste Veränderung im Körpergewichte und in der Verdauung eintritt.

Da das kohlensaure Natron nicht bloss physiologisches Interesse hat als ein normaler Bestandtheil unseres Organismus (Lehmann, Kossel u. A.) und als Verbindung, in welche die mit der Nahrung eingenommenen Salze der Pflanzensäuren übergehen (Wöhler), sondern auch praktisches Interesse für den Arzt besitzt als oft gebrauchtes Medicament und als Bestandtheil vieler

Mineralwässer, so habe ich es unternommen, einige Versuche von Nasse zu wiederholen und namentlich jene, welche folgende Fragen betreffen:

1. Ob durch längeren inneren Gebrauch von kohlensaurem Natron mit der Nahrung sich dasselbe im Blute anhäufe;

2. Ob und in welcher Weise sich dabei die Aschenbestandtheile des Blutes ändern;

3. welchen Veränderungen dabei der Stickstoffgehalt des Blutes unterliegt.

Diese Versuche auszuführen habe ich umsoweniger für überflüssig gehalten, als nicht alle späteren Autoren mit Nasse übereinstimmen, obwohl sie ihre Schlüsse nicht immer auf Blutanalysen, sondern auf klinische Beobachtungen, auf Harnanalysen oder nur auf Reflexionen stützen.

So theilt Verdeil[1] auf Grund seiner Blutanalysen mit, dass durch Gaben kohlensaurer Salze zwar nicht die Menge dieser im Blute, aber wohl die der mit organischen Säuren gebildeten Salze vermehrt werde.

Köhler[2] sagt: „Wird das Blut durch Alkalimissbrauch in die Lage gesetzt, sich andauernd des ihm zugeführten Plus an Alkalien zu entledigen, so macht sich die antiplastische Wirkung der letzteren allmälig geltend, und eine an Scorbut erinnernde, und durch Abmagerung oder gedunsenes Aussehen, Hypostasen etc. zu erkennen gebende Kachexie (von den Franzosen Cachexie alkaline genannt) kömmt zur Entwicklung.“.... und weiter[3]:

„Das Blut stellt seinen normalen Alkaligehalt durch schnelle Elimination des Plus wieder her.“

Beneke[4] gibt an, dass der andauernde Gebrauch kohlensaurer Alkalien die Ernährung herabsetze und chlorotische Zustände im Gefolge habe, und erklärt es für wahrscheinlich, „dass diese chlorotischen Zustände weniger Ursache als Folge der Zunahme der alkalischen Basen im Organismuss sind.“

---

[1] F. Verdeil „Untersuchungen der Blutasche verschiedener Thiere“ Liebig's Annal. 1849, Bd. 69, 89.

[2] Handbuch der phys. Therapeutik 1875, p. 94.

[3] Pag. 99.

[4] „Grundlinien der Pathologie des Stoffwechsels“ 1874, p. p. 69, 378.

Wie Beneke geben auch Rossbach und Nothnagel[1] die Möglichkeit der Anhäufung des kohlensauren Natrons zu, indem sie sagen: „..... erfolgt die Aufsaugung mancher Natriumsalze, wie die des schwefelsauren, kohlensauren Natriums u. s. f. wegen ihres geringen Diffusionsvermögens langsam, so geht andererseits auch ihre Ausscheidung aus dem Blute nicht so schnell von Statten, wie z. B. die der Kaliumsalze. Die Natriumverbindungen können sich mithin leichter in grösserer Menge im Blute anhäufen.“

Im Widerspruche mit den genannten Autoren steht Buchheim[2]. Er sagt nämlich Folgendes: „Der Übergang der im Darmcanale befindlichen kohlensauren Alkalien in das Blut ist hauptsächlich abhängig von dem Diffusionsvermögen derselben. Da die doppeltkohlensauren Salze nur ein geringes Diffusionsvermögen besitzen, so gehen sie nur langsam und in beschränkter Menge in das Blut über. Nach der Einführung grösserer Mengen, z. B. von kohlensaurem Natrium gelangt daher eine grössere Quantität des Salzes in den Dünndarm und wirkt hier in derselben Weise wie das Glaubersalz. Daher zeigen grössere Dosen von kohlensaurem Natrium sowie die Alkalisalze organischer Säuren, welche im Darmcanale in kohlensaure Salze umgewandelt werden, eine abführende Wirkung. Dass die abführende Wirkung der doppelt kohlensauren Alkalien etwas schwächer ist, als die des Glaubersalzes, hat wohl seinen Grund in der geringeren Löslichkeit derselben. Je länger nun die doppeltkohlensauren Salze im Darmcanale verweilen, ohne mit dem Darminhalte ausgeleert zu werden, desto grössere Mengen davon können auch allmälig in das Blut übergehen.

Wegen dieses langsamen Überganges der doppeltkohlensauren Salze kann auch, nach Einführung grösserer Mengen davon in dem Darm keine Anhäufung derselben im Blute entstehen“ .... und weiter (p. 150) .... „Ob wir im Stande sind, durch den arzneilichen Gebrauch alkalischer Mittel einen bemerklichen Einfluss auf die Alkalescenz des Blutes auszuüben, erscheint noch

---

[1] Handb. d. Arzneimittellehre 1880, p. 11.

[2] Lehrb. der Arzneimittellehre 1878, p. 148.

sehr zweifelhaft. Der langsame Übergang der kohlensauren Alkalien in das Blut und ihre baldige Wiederausscheidung machen eine Anhäufung derselben im Blute nicht wahrscheinlich. Eine solche würde auch noch sehr bald Störungen der verschiedenen Körperthätigkeiten hervorrufen, die wir beim arzneilichen Gebrauche jener Mittel nicht beobachten.“

Was die zweite Frage anbelangt, so kann man die Angaben der Autoren in zwei Gruppen eintheilen: in solche, welche den Einfluss des kohlensauren Natrons auf den Säuregehalt der Blutasche, und in solche, welche den Einfluss auf den Gehalt an Basen ins Auge fassen.

So behauptet Lersch[1], dass das kohlensaure Natron die Säuren im Organismus bindet, und sie durch Neutralisation oder Alkalisation (bezüglich der Phosphorsäure) fähig mache, in Salzverbindung in mehrere Säfte überzugehen und durch die Nieren auszutreten. Das Natrium entführt also nach seiner Meinung dem Körper Säuren. (Chlor, Schwefelsäure, Phosphorsäure).

Nach Herrmann[2] dagegen scheint der grösste Theil des kohlensauren Natrons unverändert den Organismus zu verlassen; nur ein Theil erscheint im Harne als Phosphat, wozu es jedoch keiner Umsetzung im Stoffwechsel bedarf, da im Harne selbst sich das saure Natriumphosphat mit dem Carbonat zu neutralem Phosphat umsetzen muss, ehe freies Carbonat auftreten kann:

$$2PO_4NaH_2 + CO_3Na_2 = 2PO_4Na_2H + H_2O + CO_2.$$

Endlich sagt Beneke[3], dass man dem Organismus durch alkalische Basen Schwefelsäure in gleicher Weise entziehen könne, wie durch schwefelsaure Alkalien.

In Beziehung auf die Basen handelt es sich hauptsächlich darum, ob überschüssig eingeführtes Natron im Organismus Kali vertreten kann.

---

[1] Lersch: Die phys. u. therap. Fundam. der prakt. Balneologie und Hydrop. p. 664.

[2] Lehrb. d. experm. Toxicologie 1874, p. 187.

[3] L. c. p. 363.

Böcker[1] behauptet auf Grund seiner Untersuchungen mit phosphorsaurem Natron, dass im Organismus Kali durch Natron substituirt werden kann.

Bunge[2] hat gefunden, dass die Kaliausscheidung am Tage der Natronaufnahme vermehrt wird.

Lunin[3], welcher bemerkte, dass von seinen Versuchsthieren diejenigen schneller zu Grunde gingen, welche grössere Mengen von kohlensaurem Natron bekommen hatten, und erklärt dies damit, dass das Natronsalz durch Massenwirkung die anderen Salze aus dem Gewebe verdrängt hatte.

Was die dritte Frage betrifft, so ist nur eine einzige alte Beobachtung von Nasse[4] zu erwähnen, welcher in vier Versuchen gefunden hat, dass das kohlensaure Natron die Menge des Faserstoffes vermindert. Diese Beobachtung hat jedoch nach Nasse's[5] eigener Angabe weit nicht den Werth, den ihr die späteren Autoren beilegen, wenn man bedenkt, mit welchen Schwierigkeiten die genaue quantitative Bestimmung des Fibrins verbunden ist. Unverständlich ist dabei die herrschende Meinung über den Zusammenhang einer Anhäufung von Alkalien im Blute und gleichzeitige Verminderung des Faserstoffes, denn Nasse[6] sagt ausdrücklich Folgendes:

„Besonders muss ich erinnern an das von mir entdeckte Gesetz im Thierreiche, dass Faserstoff und Alkali in einem geraden Verhältnisse zu einander stehen. Auch ist das sehr gewöhnlich bei Menschen, wo der Gehalt an Faserstoff vermehrt ist, ebenso den der Alkalien vermehrt zu finden.“

Zu meinem im Hinblicke auf die oben erörterten Fragen angestellten Untersuchungen diente das der Carotis entnommene Blut von Hunden, welchen während einer bestimmten Zeitdauer mit ihrer aus genügenden Mengen von Fleisch und Brot beste-

---

[1] Böcker: „Über die phys. Erstwirkung der Phosphors. u. d. phosphors. Natrons.“ Prager Vierteljahrschr. 1854, Bd. IV, p. 117.

[2] Bunge: „Über die Bedeutg. d. Kochsalzes u. d. Verh. d. Kalisalze im menschl. Organ.“ Zeitschr. f. Biologie Bd. IX, p. 125.

[3] Lunin: „Über die Bedeutg. der anorg. Salze f. d. Ernähr. d. Thieres.“ Zeitschr. f. phys. Chemie v. Hoppe-Seyler V. Bd., I. Heft, 1881.

[4] Wagner's Handwörterb. d. Physiologie 1842, p. 144.

[5] L. c. p. 171.

[6] L. c. p. 160.

henden Nahrung, täglich eine bestimmte Quantität von krystallisirtem kohlensauren Natron einverleibt wurde.

Zum Vergleiche wurde auch das Blut von solchen Hunden untersucht, welche dieselbe Nahrung erhielten und unter denselben Bedingungen gehalten wurden, wie die eigentlichen Versuchsthiere, mit dem einzigen Unterschiede, dass ihrer Nahrung kein kohlensaures Natron zugesetzt war.

Ich führte einerseits vollständige Analysen der Asche des Blutes aus, andererseits bestimmte ich die Menge der in dem Blute gelösten festen Bestandtheile und dessen Stickstoffgehalt. Für die Aschenanalyse kam die von A. Jarisch[1] beschriebene Methode in Verwendung. Die Bestimmung des Stickstoffes erfolgte nach der Methode von Dumas unter Benützung des von Professor E. Ludwig beschriebenen Apparates[2] und der von ihm angegebenen Cautelen[3]. Das in ganz kleinen mit gut eingeschliffenen Glasstöpseln verschliessbaren Glascylindern aufgefangene arterielle Blut wurde gewogen, in einem Tiegel gespült, eingedampft, bei 100° bis 110° zum constanten Gewichte gebracht und so der Trockenrückstand bestimmt. Von diesem wurde eine genau gewogene Menge mit Kupferoxyd aufs feinste zerrieben und gemengt der Verbrennung unterzogen.

A. Aschenanalysen.

I. Normaler Hund, zwei Wochen gefüttert mit Fleisch und Brot, 329·88 Grm. Blut lieferten 2·8478 Grm. (0·86%) Asche; von dieser waren:

a) in Wasser unlöslich.... 0·3664 Grm.
b) „ „ löslich...... 2·4814 Grm.

a) der in Wasser unlösliche Theil bestand aus:

Eisenoxyd..................	0·2300
Phosphorsäureanhydrid (P_2O_5) .	0·0553
Kalk........................	0·0212
Magnesia....................	0·0171
	0·3236,

[1] Wiener medic. Jahrbüch. Jahrg. 1871 und 1877.
[2] Ber. d. deutsch. chemisch. Gesellschaft in Berlin, XIII, 883.
[3] Wiener med. Jahrbücher, Jahrg. 1880.

b) der in Wasser lösliche Theil bestand aus:

Kohlensäure (CO_2)	0·0155
Chlor	0·9314
Phosphorsäureanhydrid (P_2O_5)..	0·2386
Schwefelsäureanhydrid (SO_3)...	0·2242
Kali (K_2O)	0·0703
Natron (Na_2O)	1·2240
	2·7040.

Die Metalle sind sämmtlich als Oxyde berechnet. Da aber ein Theil derselben mit dem vorhandenen Chlor als Chloride verbunden vorkommt, so muss, wenn man aus den Einzelbestimmungen die Gesammtasche berechnen will, die dem Chlor äquivalente Sauerstoffmenge von der Summe in Abzug gebracht werden; wir haben sodann:

Summe der in Wasser unlöslichen Bestandtheile	0·3236
„ „ „ „ löslichen „	2·7040
	3·0276.
Für 0·9314 Grm. Chlor abzurechnende Sauerstoffmenge	0·2099
berechnete Gesammtasche	2·8177
direct gefundene	2·8478.

II. Hund, zwei Wochen gefüttert mit Fleisch, Brot und 3 Grm. Soda per Tag.

302·85 Grm. Blut lieferten 2·8473 Grm. (0·94%) Asche; von dieser waren

a) in Wasser unlöslich.... 0·3404 Grm.
b) „ „ löslich ..... 2·5069 Grm. (berechnet).

a) Der im Wasser unlösliche Theil bestand aus:

Eisenoxyd	0·2312 Grm.
Phosphorsäureanhydrid (P_2O_5).......	0·0533 „
Kalk	0·0150 „
Magnesia	0·0165 „
	0·3160.

b) Der in Wasser lösliche Theil bestand aus:

Kohlensäure (CO_2)	0·0788
Chlor	0·8598
Phosphorsäureanhydrid (P_2O_5) ...	0·1811
Schwefelsäureanhydrid (SO_3)	0·2040
Kali (K_2O)	0·0682
Natron (Na_2O)	1·1168
	2·5087.

Summe der in Wasser unlöslichen Bestandtheile	0·3160
" " " " löslichen "	2·5087.
	2·8247
Für 0·8598 Chlor abzuziehender Sauerstoff	0·1938
berechnete Aschenmenge	2·6309
direct gefundene	2·8473.

III. Hund, sechs Wochen gefüttert mit Fleisch und Brot und 5 Grm. Soda per Tag.

405·87 Grm. Blut lieferten 3·4031 Grm. (0·84%) Asche; von dieser waren:

a) in Wasser unlöslich	0.4556
b) in Wasser löslich	2·9475.

a) Der in Wasser unlösliche Theil bestand aus:

Eisenoxyd	0·3224
Phosphorsäureanhydrid (P_2O_5)..	0·0551
Kalk	0·0200
Magnesia	0·0234
	0·4209.

b) Der in Wasser lösliche Theil bestand aus:

Kohlensäure (CO_2)	0·0400
Chlor	1·1107
Phosphorsäureanhydrid (P_2O_5)..	0·3046
Schwefelsäureanhydrid (SO_3)...	0·2047
Kali (K_2O)	0·1028
Natron (Na_2O)	1·4992
	3·2620.

Summe der in Wasser unlöslichen Bestandtheile	0·4209
„ „ „ „ löslichen „	3·2620
	3·6829.
Für 1·1107 Grm. Chlor abzurechnender Sauerstoff...	0·2503
berechnete Aschenmenge.........	3·4326
direct gefundene................	3·4031.

IV. Hund, 30 Klgrm. Gewicht, 6 Wochen gefüttert mit Fleisch und Brot und 6 Grm. Soda pro die.

244·004 Grm. Blut lieferten 2·0523 (0·84%) Asche; von dieser waren:

a) in Wasser unlöslich....	0·3505	Grm.
b) „ „ löslich	1·7018	„

a) Der in Wasser unlösliche Theil bestand aus:

Eisenoxyd......................	0·2554	Grm.
Phosphorsäureanhydrid (P_2O_5).......	0·0639	„
Kalk	0·0150	„
Magnesia.......................	0·0138	„
	0·3481.	

b) Der in Wasser lösliche Theil bestand aus:

Kohlensäure (CO_2)	0·0744
Chlor......................	0·6128
Phosphorsäureanhydrid (P_2O_5)..	0·1932
Schwefelsäureanhydrid (SO_3)...	0·1298
Kali (K_2O)...................	0·0618
Natron (Na_2O)...............	0·9077
	1·9797.

Summe der im Wasser unlöslichen Bestandtheile	0·3481
„ „ „ „ löslichen „	1·9797
	2·3278.
Für 0·6128 Grm. Chlor abzurechnender Sauerstoff...	0·1380
berechnete Aschenmenge.........	2·1898
direct gefundene Aschenmenge	2·0523.

Zusammenstellung der analytischen Resultate für 100 Theile Blutasche.

	I	II	III	IV	Jarisch[1]		
					1	2	3
Phosphorsäureanhydrid	10·43	8·91	10·48	11·74	13·78	11·85	13·84
Schwefelsäureanhydrid	7·96	7·75	5·96	5·93	4·18	4.72	3·49
Chlor	33·06	32·68	32·36	27·98	31·31	33·76	33·00
Kohlensäure	0·55	3·00	1·17	3·40	—	—	—
Kali	2·50	2·59	3·00	2·82	4·54	3.54	3·90
Natron	43·44	42·45	43·67	41·45	42·03	44·77	43·12
Kalk	0·75	0·57	0·58	0·68	1·03	1·61	1·34
Magnesia	0·60	0·63	0·68	0·63	0·81	0·75	0·68
Eisenoxyd	8·16	8·79	9·39	11·67	9·37	6·58	8·06
	107·45	107·37	107·29	106·30	107·05	107·58	107·43
Für Chlor abzuziehender Sauerstoff	7·45	7·37	7·29	6·30	7·05	7·58	7·43
Summe....	100·00	100·00	100·00	100·00	100·00	100·00	100·00

In 100 Theilen Blut sind enthalten:

	I	II	III	IV	Jarisch		
						2	3
Posphorsäureanhydrid	0·0861	0·0774	0·0886	0·1054	0·1191	0·1062	0·1193
Schwefelsäureanhydrid	0·0680	0·0674	0·0504	0·0532	0·0362	0·0423	0·0298
Chlor	0·2823	0·2839	0·2737	0·2511	0·2705	0·3026	0·2821
Kohlensäure	0·0047	0·0260	0·0099	0·0305	—	—	—
Kali	0·0213	0·0225	0·0253	0·0253	0·0392	0·0318	0·0333
Natron	0·3710	0·3688	0·3694	0·3717	0·3631	0·4012	0·3682
Kalk	0·0064	0·0050	0·0049	0·0061	0·0090	0·0144	0·0114
Magnesia	0·0052	0·0054	0·0058	0·0057	0·0070	0.0067	0·0058
Eisenoxyd	0·0697	0·0763	0·0794	0·1047	0·0809	0·1412	0·0688
Gesammtasche gef.	0·8633	0·9402	0·8385	0·8411	0·8856	0·8971	0·9106
„ ber.	0·8541	0·8687	0·8455	0·8758	0·8643	0·8969	0·8562

[1] Wien. Med. Jahrbücher Jahrg. 1877, H. I., p. 59.

Ob sich die alkalische Beschaffenheit des Blutes jener Thiere, die mit ihrer Nahrung kohlensaures Natron aufnahmen, quantitativ geändert hat, wird man am besten beurtheilen können, wenn man die Summe der Säureäquivalente (mit Ausschluss der Kohlensäure) mit der Summe der Basenäquivalente des löslichen Theiles der Blutasche vergleicht; die folgende Tabelle enthält eine diesbezügliche Zusammenstellung, welche sowohl meine als auch die von Jarisch[1] ausgeführten Analysen umfasst. Die Rechnungen für diese Tabelle sind unter der von Bunsen[2] gegebenen Voraussetzung angestellt, dass die Phosphorsäure als Salz von der Form Na_2HPO_4 in dem löslichen Theile der Asche erscheint.

	I	II	III	IV	Jarisch 1	Jarisch 2	Jarisch 3
Chlor	0·02624	0·02422	0·03129	0·01726	0·02435	0·02038	0·02953
Phosphorsäure	0·01008	0·00765	0·00858	0·00544	0·00940	0·00588	0·00974
Schwefelsäure	0·00560	0 00510	0·00512	0·00324	0·00289	0·00253	0·00278
Kali	0·00151	0·00145	0·00219	0·00131	0·00267	0·00162	0·00264
Natron	0·03948	0·03602	0·04836	0·02928	0·03743	0·03095	0·04425

Nach dieser Tabelle gestaltet sich das Verhältniss zwischen den Summen der Säure- und Basenäquivalente, wie folgt:

	I	II	III	V	Jarisch 1	Jarisch 2	Jarisch 3
Säureäquivalent	1	1	1	1	1	1	1
Basenäquivalent	1·063	1·089	1·124	1·175	1·094	1·131	1·115

B. Stickstoffbestimmungen.

5. Normaler Hund von 25 Klgrm. Gewicht; gefüttert mit Brot und Fleisch durch zwei Wochen.

[1] L. c.

[2] Anleitung zur Analyse der Aschen und Mineralwasser 1874, p. 14.

6·1874 Grm. Blut gaben 1·2317 Grm. (19·9%) festen Rückstand. Davon wurden 0·2585 Grm. zur Stickstoffbestimmung verwendet und gaben folgende Zahlen:

$V = 31 \cdot 75$ CC.
$t = 8 \cdot 8°$ C.
$b = 755$ Mm.
entspricht reducirt auf 0° und 760 Mm.: 27·81 CC. N.

6. Normaler Hund von 4 Klgrm. Gewicht, zwei Wochen gefüttert mit Brot und Fleisch.

3·6419 Grm. Blut gaben 0·6737 Grm. (18·5%) festen Rückstand. Davon gaben 0·2026 Grm:

$V = 26 \cdot 5$ CC.
$t = 14 \cdot 2°$ C.
$b = 738$ Mm.
reducirt auf 0° und 760 Mm.: 24·12 CC. N.

7. Für diese Bestimmung wurde das Blut des Hundes IV verwendet.

6·2666 Grm. Blut gaben 1·5163 (24·2%) festen Rückstand. Davon gaben 0·4605 Grm.:

$V = 63 \cdot 8$ CC.
$t = 12 \cdot 0°$ C.
$b = 747 \cdot 5$ Mm.
reducirt auf 0° und 760 Mm.: 59·3 CC. N.

8. Kleiner Hund, 2 Klgrm. Gewicht, noch jung; gefüttert mit Fleisch und Brot und 0·5 Grm. Soda täglich.

6·1473 Grm. Blut gaben 1·0924 (17·8%) festen Rückstand. Davon 0·4144 Grm. verwendet:

$V = 55 \cdot 6$ CC.
$t = 13 \cdot 0°$ C.
$b = 742 \cdot 5$ Mm.
reducirt auf 0° und 760 Mm.: 51·07 CC. N.

Die folgende Tabelle enthält die in den vier Versuchen gefundenen Werthe für den Gehalt an festen Bestandtheilen, sowie an Stickstoff (Eiweisskörpern) auf 100 Theile Blut berechnet, den von mir gefundenen Werthen habe ich noch die von Forster[1] beigefügt, welche sich auf einen mit vollständiger Nahrung gefütterten Hund beziehen.

---

[1] Zeitschr. f. Biolog. Bd. IX, p. 363.

	Feste Bestandtheile	N.	
Vollständige Nahrung	22·2	3·22	(Forster)
Normaler Hund	19·9	2·69	
Normaler Hund	18·5	2·77	
Nach 6wöchentlichem Gebrauche von 6 Grm. Soda täglich	24·2	3·90	
Nach 3wöchentlichem Gebrauche von 0·5 Grm. Soda täglich	17·8	2·75.	

Auf Grund dieser allerdings geringen Zahl von Analysen lassen sich folgende Schlüsse ziehen (zunächst für den Organismus des Hundes):

1. Die alkalische Beschaffenheit der Blutasche erfährt bei fortdauerndem Gebrauche grösserer Gaben von Soda eine kleine, immerhin aber merkliche Vergrösserung, die mit der täglichen Menge der eingeführten Soda und der Zeitdauer, während welcher sie eingeführt wird, wächst.

2. Kali wird in der Blutasche nicht durch Natron substituirt.

3. Natron wird im Blute nicht angehäuft.

4. Der Eisengehalt wird, wie schon Nasse bemerkt, nicht vermindert.

5. Der Gehalt des Blutes an festen Bestandtheilen, sowie an Stickstoff (Eiweiss) wird durch den innerlichen Gebrauch von Soda nicht in solchem Grade verändert, dass er die normalen Grenzen überschritte, welche letzteren allerdings sehr schwankend gefunden wurden.

So fand Collard de Martigny ..... 17·6%[1]
„ „ Forster.. .... 22·2%.

[1] Nasse l. c.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LXXXIII. Band. V. Heft.

DRITTE ABTHEILUNG.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Physiologie, Anatomie und theoretischen Medicin.



XI. SITZUNG VOM 5. MAI 1881.

In Verhinderung des Vicepräsidenten übernimmt Herr Dr. L. J. Fitzinger den Vorsitz.

Das w. M. Herr Director Dr. Steindachner übersendet zwei Abhandlungen unter dem Titel: „Beiträge zur Kenntniss der Flussfische Südamerika's (III)" und „Ichthyologische Beiträge (XI)."

Das c. M. Herr Oberbergrath D. Stur in Wien übersendet eine Abhandlung unter dem Titel: „Zur Morphologie der Calamarien".

Das c. M. Herr Prof. Wiesner übersendet eine von Herrn Dr. Karl Richter im pflanzenphysiologischen Institute der Wiener Universität ausgeführte Arbeit, betitelt: „Beiträge zur genaueren Kenntniss der chemischen Beschaffenheit der Zellmembranen bei den Pilzen."

Herr Prof. Dr. P. Weselsky übersendet zwei im Laboratorium für analytische Chemie an der technischen Hochschule in Wien ausgeführte Arbeiten:

1. „Über Dinitro- und Trinitroresorcin", von den Herren Dr. R. Benedikt und Oberlieutenant A. Freiherrn v. Hübl.
2. „Über resorcinsulfosaure Salze", von Herrn Heinr. Fischer.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. „Über Körper von vier Dimensionen", von Herrn Prof. Dr. H. Durège in Prag.
2. „Der Strahl als kinematisches Element", von Herrn F. Wittenbauer, diplom. Ingenieur und Privatdocent an der technischen Hochschule in Graz.

Das w. M. Herr Hofrath R. v. Hochstetter überreicht einen Bericht des Herrn Dr. Aristides Brezina: „Über die Meteoreisen von Bolson de Mapimi."

Der Secretär Herr Prof. J. Stefan überreicht eine Abhandlung: „Über die Verdampfung aus einem kreisförmig oder elliptisch begrenzten Becken."

Das w. M. Herr Professor Ad. Lieben überreicht eine von Herrn Dr. Julius Domac in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit „Über das Hexylen aus Mannit."

Das w. M. Herr Prof. E. Weiss überreicht eine Abhandlung von Herrn Dr. H. Seeliger in Leipzig: „Über die Bewegungsverhältnisse in dem dreifachen Sternsysteme ζ Cancri."

Herr Dr. J. Holetschek, Adjunct der Wiener Sternwarte, überreicht den zweiten Theil seiner „Bahnbestimmung des Planeten (118) Peitho."

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Accademia, R. dei Lincei: Atti. Anno CCLXXVII. 1879 bis 1880. Serie terza. Memorie della classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. V, VI, VII & VIII. Roma, 1880; 4°.

Akademie der Wissenschaften, königl. preussische zu Berlin: Monatsbericht. December 1880. Berlin, 1881; 8°.

— kaiserliche Leopoldino-Carolinisch deutsche der Naturforscher: Leopoldina. Heft XVII. Nr. 5—6. Halle a. S. 1881; 4°.

— — Ungarische in Budapest: Almanach für 1881. Budapest, 1881; 8°. — Értesitö. 13. Jahrg. Nr. 7, 8. 14. Jahrg. Nr. 1—8. Budapest, 1879 & 1880; 8°. — Literarische Berichte aus Ungarn. IV. Band, Heft 1—4. Budapest, 1880; 8°. — Revue, Ungarische, 1881, Heft 1 und 2, Leipzig & Wien, 1881; 8°. — Évkönyvei. XVI. Band. 6. Heft. Budapest, 1880. Fol. Szász K., Gróf Széchenyi István és az Akademia megalapitása. Budapest, 1880; 8°.

— — — in Budapest: Értekezések a mathematikai tudományok köréből. VII. Band. Nr. 6—21. Budapest, 1879 & 1880; 8°. — Értekezések a természettudományok köreből. IX. Bd. Nr. 20—25, X. Band, Nr. 1—18. Budapest, 1880; 8°. — Értekezések a mathematikai tudományok köreből. VII. Band, Nr. 6—22. Budapest, 1879 & 1880; 8°.

Apotheker-Verein, allgem. österr.: Zeitschrift nebst Anzeigen-Blatt. XIX. Jahrgang, Nr. 11, 12 & 13. Wien, 1881; 8⁰.

Chemiker-Zeitung: Central-Organ. Jahrgang V. Nr. 13—17. Cöthen, 1881; 4⁰.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome XCII. Nrs. 13—17. Paris, 1881; 4⁰.

Gesellschaft, deutsche chemische: Berichte. XIV. Jahrgang. Nr. 6 & 7. Berlin, 1881; 8⁰.

— deutsche entomologische: Zeitschrift. XXV. Jahrg. (1881.) I. Heft. Berlin, London, Paris, 1881; 8⁰.

— k. k. geographische in Wien: Mittheilungen. Band XXIV. (N. F. XIV.) Nr. 3. Wien, 1881; 8⁰.

— österreichische für Meteorologie: Zeitschrift. XVI. Band. April- & Mai-Heft. Wien, 1881; 8⁰.

— königl. der Wissenschaften zu Göttingen: Abhandlungen. XXVI. Band vom Jahre 1880. Göttingen, 1880; 4⁰.

— — Göttingische gelehrte Anzeigen. 1880, II. Band. Göttingen; kl. 8⁰.

— k. k. zoologisch-botanische in Wien: Verhandlungen. Jahrgang 1880. XXX. Band. Wien, 1881; 8⁰.

Gewerbe-Verein, nied.-österr.: Wochenschrift. XLII. Jahrgang. Nr. 14—17. Wien, 1881; 4⁰.

Ingenieur- und Architekten-Verein, österr.: Wochenschrift. VI. Jahrgang, Nr. 14—17. Wien, 1881; 4⁰.

Jahresbericht über die Fortschritte der Chemie für 1879. I. und II. Heft. Giessen, 1880; 8⁰.

Militär-Comité, k. k. technisches u. administratives: Mittheilungen über Gegenstände des Artillerie- und Genie-Wesens. Jahrgang 1881. II. & III. Heft. Wien, 1881; 8⁰.

Nature. Vol. XXIII, Nos. 598 & 599. London, 1881; 8⁰.

Reichsanstalt, k. k. geologische: Verhandlungen. Nr. 5, 6 & 7. Wien, 1881; 8⁰.

— — Jahrbuch. Jahrgang 1881. XXXI. Band, Nr. 1. Januar, Februar, März. Wien, 1881; 8⁰.

Repertorium für Experimental-Physik, etc. von Dr. Ph. Carl. XVII. Band. 6. Heft. München und Leipzig, 1881; 8⁰.

Società adriatica di Scienze naturali in Trieste: Bollettino Vol. VI. Trieste, 1881; 8°.

Société Belge de Microscopie: Annales. Tome V. Année. 1878 bis 1879. Bruxelles, 1879; 8°.

Sternwarte, k. k. in Wien: Annalen. Dritte Folge. XXIX. Bd. Jahrgang 1879. Wien, 1880; 8°.

Wiener medizinische Wochenschrift. XXXI. Jahrgang. Nr. 15 bis 18. Wien, 1881; 4°.

XII. SITZUNG VOM 12. MAI 1881.

Der Vicepräsident eröffnet die Sitzung mit der Mittheilung, dass die Deputation zur Überreichung der Adresse der Akademie Montag den 9. Mai, um 3 Uhr, von Seiner kaiserlichen Hoheit dem Kronprinzen und dessen durchlauchtigster Braut in der Hofburg huldvollst empfangen wurde.

Das Präsidium der k. k. Polizei-Direction in Wien übermittelt ein Exemplar des Polizei-Verwaltungsberichtes für das Jahr 1881.

Das c. M. Herr Prof. J. Wiesner übersendet eine von Herrn E. Ráthay, Professor an der k. k. önologisch-pomologischen Lehranstalt in Klosterneuburg, ausgeführte Arbeit: „Über Austrocknungs- und Imbibitionserscheinungen der Cynareen-Involucren."

Das c. M. Herr Prof. C. Claus in Wien übersendet eine Abhandlung: „Über die Gattungen *Temora* und *Temorella* nebst den zugehörigen Arten."

Das c. M. Herr Prof. L. Ditscheiner in Wien übersendet eine Abhandlung: „Über die Aufsuchung der Störungsstellen an nicht vollkommen isolirten Leitungen."

Herr Prof. Dr. Rich. Maly in Graz übersendet eine Untersuchung: „Über die Dotterpigmente."

Herr Jacob Zimels, derzeit in Balta (Russland), übersendet eine Notiz: „Berechnung der Seite eines im Kreise eingeschriebenen regelmässigen Neuneckes."

Das w. M. Herr Director E. Weiss macht eine Mittheilung über die Entdeckung eines teleskopischen Kometen durch L. Swift in Rochester (U. S.) am 1. Mai d. J.

Ferner überreicht Herr Director Weiss eine vorläufige im akademischen Anzeiger zu veröffentlichende Mittheilung: „Über eine neue Methode zur Berechnung der wahren Anomalie in stark excentrischen Bahnen.“

Das w. M. Herr Prof. A. Lieben überreicht eine in seinem Laboratorium von Herrn Dr. Zd. H. Skraup ausgeführte Arbeit, betitelt: „Über Cinchonidin und Homocinchonidin.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Academia, Real de Ciencias medicas, fisicas y naturales de la Habana: Anales. Entrega 199, 200 & 201. Tomo XVII Febrero 15—Abril 15. Habana, 1881; 8°.

Académie de Médecine: Bulletin. 2ᵉ série. Tome X. 45ᵉ année. Nos. 14—18. Paris, 1881; 8°.

— Impériale des sciences de St. Pétersbourg: Bulletin. Tome XXVII. St. Pétersbourg, 1881; 4°.

Akademie, koninklijke van Wetenschappen gevestigd te Amsterdam: Jaarboek voor 1879. Amsterdam; 8°.

— Verhandelingen. 20. Deel. Amsterdam. 1889; 4° — Naam- en Zaakregister op de Verslagen en Mededeelingen. Deel. I—XVII. Amsterdam, 1880; 8°.

— Verslagen en Mededeelingen. II. Reeks, 15. Deel. Amsterdam, 1880; 8°.

— Processen-verbaal van de gewone Vergaderingen; van mei 1879 tot en met April, 1880, Amsterdam; 8°.

Astor Library: Thirty-second Annual Report of the Trustees for the year ending December 31, 1880. Albany, 1881; 8°.

Bibliothèque universelle: Archives des sciences physiques et naturelles. IIIᵉ période. Tome V. Nos. 3 & 4. 15 Mars & 15 Avril 1881. Genève, Lausanne, Paris, 1881; 8°.

Chemiker-Zeitung: Central-Organ. Jahrgang V., Nr. 18. Cöthen, den 15. Mai 1881.

Elektrotechnischer Verein: Elektrotechnische Zeitschrift. II. Jahrgang 1881. Heft 4, April. Berlin; 4°.

Gesellschaft, österreichische, zur Förderung der chemischen Industrie: Berichte. III. Jahrgang. 1881. Nr. 1. Prag; 8°.

— medicinisch-naturwissenschaftliche zu Jena: Denkschriften. I. Band, 2. Abtheilung mit Atlas. Jena, 1880; 4°.

Gesellschaft, deutsche geologische: Zeitschrift. XXXII. Band, 4. Heft, October bis December 1880. Berlin, 1881; 8°.

— oberhessische für Natur- und Heilkunde: Neunzehnter Bericht. Giessen, 1880; 8°.

— Oberlausitzische der Wissenschaften: Neues Lausitzisches Magazin. LVI. Band, 2. Heft. Görlitz, 1880; 8°.

Institute, the Anthropological of Great-Britain and Ireland: The Journal. Vol. X. No. 11. November 1880. London; 8°.

Institution, the Royal of Great Britain: Proceedings. Vol. IX. — part. III. London, 1880; 8°. List of the Members, Officers and Professors in 1879, London, 1880; 8°.

Instituut, koninklijk voor de Taal- Land- en Volkenkunde van Nederlandsch-Indië: Bijdragen. IV. Volgreeks, 4. Deel, 3. & 4. Stuk. S'Gravenhage, 1880; 8°.

Kiel, Universität: Schriften aus dem Jahre 1879—80. Band XXVI. Kiel, 1880; 4°.

Mittheilungen aus Justus Perthes' geographischer Anstalt von Dr. A. Petermann. XXVII. Band, 1881. V. Gotha; 4°.

Museum of comparative Zoology at Harvard College: Memoirs. Vol. VI, No. 1. Cambridge, 1880; 4°. — Vol. VII, No. 2, part 1. Cambridge, 1880; 4°.

— Annual Report of the Curator to the President and fellows of Harvard College for 1879—80. Cambridge, 1880; 8°.

— Bulletin. Vol. VI. Nos. 8—11. Cambridge, 1880; 8°.

Nuovo Cimento: 3ª serie. Tomo IX. 1881. Pisa; 8°.

Observatory, The: A monthly review of Astronomy. No. 49. 1881, May 2. London; 8°.

Pickering, Edward, C.: Variable Stars of short period. Cambridge, 1881; 8°.

Societät, physikalisch-medicinische zu Erlangen: Sitzungsberichte. 12. Heft. November 1879 bis August 1880. Erlangen, 1880; 8°.

Société de Physique et d'Histoire naturelle de Genève: Mémoires. Tome XXVII. 1ᵉ partie. Genève. Bâle, Paris, 1880; 4°.

— botanique de France: Bulletin. Tome XXVII. (2ᵉ série, tome IIᵉ). Revue bibliographique. D—E. Paris, 1880; 8°.

— des Ingénieurs civils: Mémoires et Compte rendu des travaux. 4ᵉ série, 34ᵉ année, 2ᵉ cahier. Février 1881. Paris; 8°.

Société mathématique de France: Bulletin. Tome IX, No. 2. Paris, 1880; 8⁰.

Society, the American geographical: Buletin. 1880 No. 3—1881 Nr. 1. New-York, 1881; 8⁰.

— the Royal astronomical: Memoirs. Vol. XLV, 1879—80. London. 1880; 8⁰.

— Monthly Notices. Vol. XLI, Nr. 5. March 1881. London; 8⁰.

— the royal geographical: Proceedings and monthly Record of Geography. Vol. III. No. 4. April 1881. London; 8⁰.

— the Linnean of London: The Transactions 2nd Ser. Botany. Vol. I, parts VII—IX. London, 1880; 4⁰.

— — The Journal. Botany. Vol. XVII. No. 103—105. London, 1879—80; 8⁰. — Vol. XVIII. Nos. 106—107. London, 1880; 8⁰.

— — The Transactions; 2nd Ser. Zoology. Vol. II, Part 1. London, 1879; 4⁰.

— — The Journal. Vol. XIV. No. 80. — Vol. XV, Nos. 81—8. London, 1879—80; 8⁰.

— — The List. November 1st, 1879; 8⁰

United-States: Report of the Superintendent of the Coast Survey showing the Progress of the work for the fiscal year ending with June. 1877. Washington, 1880; 4⁰.

— — Methods and Results, Meteorological Researches for the use of the coast pilot. Part. II. Report for 1878. Washington, 1880; 4⁰.

— — Bulletin of the geological and geographical Survey of the Territories: Vol. VI, No. 1. Washington, 1881; 8⁰.

Verein, naturwissenschaftlicher für Schleswig-Holstein: Schriften. Band IV, 1. Heft. Kiel, 1881; 8⁰.

Wiener Medizinische Wochenschrift. XXXI. Jahrgang. Nr. 19. Wien, 1881; 4⁰.

XIII. SITZUNG VOM 19. MAI 1881.

Se. Excellenz der Herr Curator-Stellvertreter macht der Akademie mit hohem Erlasse vom 15. Mai die Mittheilung, dass er in Verhinderung Seiner kaiserlichen Hoheit des Durchlauchtigsten Herrn Erzherzog-Curators in Höchstdessen Stellvertretung die diesjährige feierliche Sitzung am 30. Mai mit einer Ansprache eröffnen werde.

Das w. M. Herr Prof. E. Hering übersendet eine Abhandlung: „Beiträge zur allgemeinen Nerven- und Muskelphysiologie. VII. Mittheilung. Über die durch chemische Veränderung der Nervensubstanz bewirkten Veränderungen der polaren Erregung durch den elektrischen Strom", von Herrn Dr. Wilh. Biedermann, Privatdocenten der Physiologie und ersten Assistenten am physiologischen Institute der Universität zu Prag.

Das w. M. Herr Prof. Dr. A. Rollett übersendet eine Abhandlung des Herrn Otto Drasch, Docent und Assistent am physiologischen Institute der Universität zu Graz, betitelt: „Zur Frage der Regeneration des Trachealepithels mit Rücksicht auf die Karyokinese und die Bedeutung der Becherzellen."

Das w. M. Herr Director Dr. E. Weiss übersendet eine nachträgliche Mittheilung über den Kometen Swift vom 30. April 1881.

Das c. M. Herr Oberbergrath V. L. Ritter v. Zepharovich in Prag sendet die Fortsetzung seiner krystallographisch-optischen Untersuchungen über „Kampferderivate".

Das c. M. Herr Prof. H. Leitgeb in Graz übersendet eine Abhandlung unter dem Titel: „Die Stellung der Fruchtsäcke bei den geocalyceen Jungermannien."

Das c. M. Herr Prof. J. Wiesner übersendet eine von Herrn Dr. Hans Molisch im pflanzenphysiologischen Institute der

Wiener Universität ausgeführte Abhandlung: „Über die Ablagerung von kohlensaurem Kalk im Stamme dicotyler Holzgewächse.“

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. „Normalenfläche einer krummen Fläche längs ihres Schnittes mit einer zweiten krummen Fläche“, von Herrn Regierungsrath Prof. Dr. G. A. Peschka an der technischen Hochschule in Brünn.
2. „Zur Theorie der Polyeder“, von Hrn. Prof. Dr. F. Lippich an der Universität in Prag.
3. „Untersuchungen über die Bierhefe“, von Herrn G. Czeczetka, technischer Fabriksdirector in Wien.

Der Secretär überreicht eine im k. k. physikalischen Institute ausgeführte Untersuchung: „Über das magnetische Verhalten von Eisenpulvern verschiedener Dichten“, von Herrn J. Haubner.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Académie, Royale de Copenhague: Oversigt over det Forhandlingar of dets Medlemmers Arbejder i Aaret 1880. Nr. 2. Kjøbenhavn; 8°.

— — Mémoires. 5me série. Vol. XII. Nr. 6. Kjøbenhavn, 1880; 4°. — 6me série. Vol. I. Nr. 1. Kjøbenhavn, 1880; 4°.

Academy, the American of Arts and Sciences: Proceedings. New Series. Vol. VIII. Whole series. Vol. XVI. Part 1. From May 1880, to February 1881. Boston, 1881; 8°.

Akademie, kaiserlich Leopoldino-Carolinisch-Deutsche der Naturforscher: Leopoldina. Heft XVII. Nr. 7—8. Halle a. S. April, 1881; 4°.

— der Wissenschaften k. b. zu München: Sitzungsberichte der mathem.-physikalischen Classe. 1881. Heft 2. München, 1881; 8°.

Apotheker-Verein, allgem. österr.: Zeitschrift (nebst Anzeigen-Blatt). XIX. Jahrg, Nr. 14. Wien, 1881: 8°.

Central-Station, k. bayer. meteorologische: Beobachtungen der meteorol. Stationen im Königreiche Bayern. Jahrgang II. Heft 4. München, 1880; 4°.

Chemiker-Zeitung: Central-Organ. Jahrgang V, Nr. 19. Cöthen, 1881; 4°.

Commission de la carte géologique de la Belgique: Texte explicatif du levé géologique de la planchette de Lubbeek. Bruxelles, 1881; 8°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences Tome XCII, Nr. 18. Paris, 1881; 4°.

Gesellschaft, deutsche chemische, zu Berlin: Berichte. XIV. Jahrgang. Nr. 8. Berlin, 1881; 8°.

Halle, Universität: Akademische Gelegenheitsschriften vom Jahre 1879—80. 90 Stücke 4°, 8° & folio.

Moniteur scientifique du D[teur] Quesneville: Journal mensuel. 25[e] année, 3[e] série. Tome XI. 473[e] livraison. — Mai 1881. Paris; 4°.

Moore, F. F. Z. S.: The Lepidoptera of Ceylon. Part II. London, 1881; 4°.

Museo Público de Buenos-Ayres: Description physique de la République Argentine par le Dr. H. Burmeister. Tome III. Animaux vertébrés 1[re] partie. Buenos-Ayres, Paris, Halle, 1879; 8°. — Atlas de la Description physique de la République Argentine. 2[e] Livraison. Lépidoptères. Buenos-Ayres. Paris, Halle, 1880; folio. — Berichte über die Feier des 50jährigen Doctor-Jubiläums des Professors Dr. Herm. Burmeister, begangen den 19. December 1879 in Buenos-Ayres. Buenos-Ayres, 1880; 8°.

Muséum d'Histoire naturelle. Nouvelles Archives. 2[e] série. Tome III, 2[e] fascicule. Paris, 1880; 4°.

Nature. Vol. XXIV. Nr. 602. London, 1881; 8°.

Naturforscher-Verein zu Riga: Correspondenzblatt. XXIII. Jahrgang. Riga, 1880; 8°.

Radcliffe Observatory, Oxford: Results of meteorological Observations made in the years 1876—79. Vol. XXXVII. Oxford, 1880; 8°.

Society, the Royal geographical: Proceedings and monthly Record of Geography. Vol. III. Nr. 5. May 1881. London; 8°,

— the Royal geological of Ireland: Journal. Vol. XV. Part. III. 1879—80, Edinburgh, London, Dublin, 1880; 8°.

— the Royal microscopical: Journal. Ser. 2. Vol. I. Part 2. April, 1881. London; 8°.

Society the Royal of South Australia: Transactions and Proceedings and Report. Vol. III (for 1879—80.) Adelaide, 1880; 8⁰.

— the literary and philosophical of Manchester: Memoirs. 3. Series. VI. Vol. London, Paris, 1879; 8⁰.

— — Proceedings. Vol. XVI—XIX. Sessions 1876—1880. Manchester, 1877—1880.

Verein militär-wissenschaftlicher, in Wien: Organ. XXII. Band, 4. & 5., 6. Heft. Wien, 1881; 8⁰.

Wiener Medizinische Wochenschrift XXXI. Jahrgang. Nr. 20, Wien, 1881; 4⁰.

Wissenschaftlicher Club in Wien: Monatsblätter. II. Jahrg., Nr. 7. — Ausserordentliche Beilage Nr. VI, Wien, 1881; 4⁰.

Beiträge zur allgemeinen Nerven- und Muskelphysiologie.

(Aus dem physiologischen Institute zu Prag.)

(Siebente Mittheilung.)

Über die durch chemische Veränderung der Nervensubstanz bewirkten Veränderungen der polaren Erregung durch den elektrischen Strom.

Von Dr. **Wilhelm Biedermann**,

Privatdocenten und erstem Assistenten am physiologischen Institute der Universität zu Prag.

(Mit 2 Tafeln.)

Seit Pflüger's Untersuchungen über die Physiologie des Elektrotonus bezweckten die meisten neueren Arbeiten über elektrische Nervenreizung fast ausschliesslich die möglichst genaue Feststellung der Beziehungen, welche zwischen Richtung, Stärke und Dauer des Stromes und der durch denselben ausgelösten Schliessungs- oder Öffnungserregung bestehen.

Dem gegenüber muss es als auffallend bezeichnet werden, dass der Einfluss verschiedener Nervenzustände auf die elektrische Erregung, der ja zum Theil bereits den älteren Galvanikern (Ritter, Nobili) bekannt war, nur wenig Berücksichtigung fand. Dass aber in der angedeuteten Richtung noch Manches zu thun übrig bleibt, ergibt sich unter anderem auch aus der Zusammenfassung und Vergleichung der verschiedenen bisher vorliegenden Angaben über Vorhandensein oder Fehlen der Öffnungszuckung bei elektrischer Reizung von Nerven, sei es, dass dieselben vom Centralorgan getrennt sind oder mit demselben noch in Zusammenhang stehen. Bei Durchsicht der einschlägigen Arbeiten drängt sich mehr und mehr die Überzeugung auf, dass das Auftreten der Öffnungszuckung nicht, wie man meist anzunehmen geneigt scheint, in erster Reihe als eine Function der Intensität und Dauer des Stromes angesehen werden darf, sondern dass es

vielmehr zunächst geknüpft erscheint an gewisse Zustandsveränderungen der Nervensubstanz und erst in zweiter Reihe beeinflusst wird von den beiden erstgenannten Momenten. Es lagen aber bisher keinerlei Thatsachen vor, die irgendwie begründeten Vermuthungen Raum gegeben hätten hinsichtlich der Natur der erwähnten Zustandsänderungen oder „Nervenstimmungen", welche das Hervortreten der Öffnungszuckung begünstigen sollten. Vielfach scheint die Meinung verbreitet zu sein, dass eine zu geringe „Erregbarkeit" die wesentliche oder gar einzige Ursache sei, wesshalb an frisch präparirten oder noch mit dem Centralorgan in Zusammenhang befindlichen Nerven, die Öffnung eines Stromes als der schwächere Reiz in der Regel erst bei viel grösserer Intensität des ersteren erregend wirkt als die Schliessung, und es schienen für diese Auffassung unter anderem auch gewisse später zu erwähnende Versuche von Rosenthal und v. Bezold an absterbenden Nerven zu sprechen. Da man sich endlich überzeugt zu haben glaubte, dass an Nerven, welche mit dem Rückenmark noch in Verbindung stehen, wirksame Öffnungserregung viel schwieriger auszulösen ist, als nach Aufhebung dieses Zusammenhanges, so glaubte man auch einen specifischen, die Erregbarkeit der peripheren Nerven stetig hemmenden, also in gewissem Sinne „trophischen" Einfluss der Centralorgane annehmen zu dürfen, nach dessen Wegfall die Öffnungszuckung leichter hervortrete (Rumpf[1]).

Es lässt sich jedoch zeigen, dass in Wahrheit keine der beiden vorerwähnten Ansichten mit den Thatsachen in völliger Übereinstimmung sich befindet, indem das Auftreten der Öffnungszuckung zumeist an ganz andere Bedingungen geknüpft erscheint.

In der vorliegenden Abhandlung will ich es nun versuchen, diese letzteren etwas genauer festzustellen, als es bisher der Fall war und zwar auf Grund von Beobachtungen, welche ich bei Fortsetzung meiner am Muskel begonnenen Untersuchungen über den Einfluss localer chemischer Veränderungen auf die polaren Wirkungen des elektrischen Stromes machte. Ich will daher auch im Folgenden zunächst jene Versuche besprechen, welche als Analoga der erwähnten Muskelversuche betrachtet werden dürfen.

[1] Arch. f. Psychiatrie und Nervenkrankheiten 1878, Bd. VIII.

I.

Über den Einfluss partieller Abtödtung markhaltiger Nerven auf den Erfolg der elektrischen Reizung.

Ich hatte gefunden,[1] dass, wenn man einen möglichst regelmässig gebauten, parallelfaserigen Muskel an dem einen oder andern Ende mechanisch, thermisch oder chemisch abtödtet, ein denselben durchsetzender elektrischer Strom nur dann in normaler Weise bei Schliessung oder Öffnung Erregung auslöst, wenn die wirksame Elektrode an dem unversehrten Muskelende sich befindet. Die Erklärung, welche ich von dieser Erscheinung gegeben habe, legte bei der weitgehenden Übereinstimmung, welche in dem Verhalten von Muskel und Nerv gegenüber dem elektrischen Strome besteht, die Vermuthung nahe, dass analoge Erscheinungen auch an partiell verletzten Nerven hervortreten würden.

Stellt man aber den betreffenden Versuch wirklich an, indem man einerseits den frisch angelegten Querschnitt eines gut erregbaren Froschischiadicus an die Thonfläche einer unpolarisirbaren Elektrode anklebt, während die andere Elektrode den Nerven an einer etwa 1 oder 2 Centimeter tiefer gelegenen Stelle berührt, so beobachtet man als Erfolg der Reizung mit schwachen Strömen in der Regel Schliessungszuckung bei aufsteigender, Schliessungszuckung und Öffnungszuckung bei absteigender Stromesrichtung. Dieser Befund stimmt nun keineswegs überein mit dem Verhalten, welches man auf Grund meiner Versuche an einseitig verletzten Muskeln hätte erwarten können, demzufolge bei schwachen Strömen unter den gegebenen Versuchsbedingungen nur die dem Muskel näher gelegene Elektrode wirken sollte, so dass der Nerv bei der beschriebenen Lagerung auf den Elektroden von vorneherein der dritten Stufe des Pflüger'schen Zuckungsgesetzes entsprechende Reizerfolge am Muskel hätte auslösen müssen. Allerdings beobachtet man in den meisten Fällen bei einem nur wenige Millimeter betragenden Abstand der Elektroden ein derartiges Verhalten, also nur ↓SZ und ↑OZ bei Reizung mit den schwächsten Strömen, wenn man nur recht vorsichtig dafür Sorge trägt dass am oberen Ende des Nerven die Elektrode eben nur den

[1] Diese Beiträge, IV. Sitzungsberichte der Wiener Akademie. Bd. LXXX, 1879.

Querschnitt und nicht auch Theile des Längsschnittes berührt. Allein dann genügt fast immer eine sehr geringe Steigerung der Stromesintensität, um auch SZ bei aufsteigendem und OZ bei absteigendem Strom auftreten zu sehen.

Es scheint daher auf den ersten Blick, als bestünde eine wesentliche Differenz in dem Verhalten des quergestreiften Muskels und des markhaltigen Nerven gegenüber dem elektrischen Strome, wenn der Aus-, beziehungsweise Eintritt dieses letzteren aus oder in normale Substanz nicht direct, sondern unter Vermittelung abgestorbener, beziehungsweise absterbender Substanz erfolgt. Die sofort zu erwähnende, eigenthümliche räumliche Vertheilung der Aus- und Eintrittsstellen des elektrischen Stromes in der intrapolaren, wie auch in den extrapolaren Nervenstrecken erklärt jedoch, wie mir scheint, die erwähnte scheinbare Differenz in ebenso einfacher als befriedigender Weise.

Man darf annehmen, dass bei totaler Längsdurchströmung eines parallelfaserigen Muskels die Schliessungserregung sowohl, wie auch die Öffnungserregung im Allgemeinen nur an den betreffenden Faser enden ausgelöst wird, so dass die „physiologische“ Kathode oder Anode annähernd auf einen einzigen Querschnitt des Muskels beschränkt erscheint, welcher bei Abtödtung der Faserenden eben nur entsprechend nach innen vorrückt. Hievon ist nun aber das, was man am partiell durchströmten markhaltigen Nerven als „physiologische Anode oder Kathode“ zu bezeichnen hat, sehr wesentlich verschieden und zwar wegen der elektrotonischen Ausbreitung des Reizstromes. Sei es, dass man sich der von Hermann aufgestellten Theorie des Elektrotonus oder der neueren Grünhagen'schen Anschauung anschliesst, immer muss man vor Allem den Umstand im Auge behalten, dass beide in gleicher Weise zu der Anschauung führen, dass ebensowohl zu beiden Seiten der Kathode, wie auch zu beiden Seiten der Anode Aus-, beziehungsweise Eintrittsstellen des Stromes vorhanden sein müssen, so dass sich die „physiologische Kathode,“ wie auch die „physiologische Anode“ über einen nach der jeweiligen Stärke des Stromes verschieden grossen Abschnitt des Nerven erstreckt. Es zerfällt daher nicht nur die intrapolare Nervenstrecke in zwei je nach der Länge derselben und der Stärke des Stromes verschieden grosse Abschnitte, welche man als den kathodischen

und anodischen bezeichnen kann, sondern jeder derselben umfasst auch noch einen grösseren oder kleineren Theil der extrapolaren Nervenstrecken. Beide Abschnitte, in deren einem (dem kathodischen) bei der Schliessung, in dem andern bei der Öffnung des Stromes gleichzeitig an vielen Stellen der Erregungsvorgang ausgelöst wird, sind durch einen Punkt von einander getrennt, den man als „Indifferenzpunkt“ bezeichnet.

Tödtet man den Nerven in möglichst beschränkter Ausdehnung und ohne wesentliche Änderung der Structur an der Stelle ab, welche dem Berührungspunkte der vom Muskel entfernteren Elektrode entspricht, so hat man dadurch allerdings den extrapolaren Antheil des nach der jeweiligen Stromesrichtung kathodischen oder anodischen Abschnittes ausgeschaltet; allein die erregende Wirkung des intrapolaren Antheiles ist durch den genannten Eingriff keineswegs beseitigt, so lange nicht auch die Erregbarkeit jener Stellen beträchtlich herabgesetzt ist, welche dem erwähnten „Indifferenzpunkte“ zunächst gelegen sind. Denn nur diese spielen selbstverständlich in dem hier vorausgesetzten Falle mit Rücksicht auf das Zustandekommen oder Fehlen der von der oberen Elektrode ausgehenden Erregung dieselbe Rolle, wie die Faserenden des durchströmten und an einem Ende verletzten, parallelfaserigen Muskels.

Ich brauche wohl kaum besonders zu erwähnen, dass eine einfache Unterbrechung der Leitung im Indifferenzpunkte durch Umschnürung oder irgend einen anderen mit Zerstörung der normalen Structurverhältnisse verknüpften Eingriff nicht den gleichen Erfolg haben kann, da hierdurch die gesetzmässige Stromvertheilung sofort geändert wird, und ein solches Verfahren einfach gleichzusetzen wäre dem Abschneiden eines Nervenstückes von entsprechender Grösse und dem Ersatz desselben durch irgend einen indifferenten Leiter von entsprechendem Widerstande.

Von diesem Gesichtspunkte aus wäre daher das oben erwähnte Verhalten eines die Reizelektroden mit Längsschnitt und künstlichem Querschnitt berührenden Froschnerven bei Schliessung und Öffnung eines schwachen elektrischen Stromes dadurch zu erklären, dass ungeachtet der geringen Distanz der Elektroden bei aufsteigender Stromesrichtung noch eine genügende Zahl von Austrittsstellen in das Bereich normal erregbarer Nervensubstanz

fielen, während von den anodischen Stellen das Gleiche bei absteigender Richtung des Reizstromes gilt.

Um die Zulässigkeit der eben gegebenen Deutung zu prüfen, kam es daher zunächst darauf an, eine grössere Strecke des Nerven vom Schnittende aus gerechnet abzutödten, ohne die Structurverhältnisse in allzu gröblicher Weise zu schädigen.

Ich suchte zunächst auf die Weise zum Ziele zu gelangen, dass ich Nerv-Muskelpräparate vom Frosch in der feuchten Kammer längere Zeit aufbewahrte und von Zeit zu Zeit den Erfolg der elektrischen Reizung mit schwachen Kettenströmen prüfte, indem ich hierbei von der Voraussetzung ausging, dass dem in jüngster Zeit allerdings angezweifelten [1] Ritter-Vallischen Gesetz zufolge der Absterbeprocess von der Schnittfläche aus langsam fortschreitend, nach einiger Zeit einen genügend grossen Theil der intrapolaren Strecke unerregbar machen würde, um die Wirkung der dem Querschnitt anliegenden Elektrode so gut wie auszuschliessen, sofern die Länge der intrapolaren Strecke nicht zu gross ist.

Indessen haben diese Versuche keine befriedigenden Resultate ergeben, indem offenbar das Verhalten des Froschnerven der obigen Voraussetzung nicht entspricht.

Da jedoch, wie schon Rosenthal [2] bemerkte, die Erregbarkeit eines durchschnittenen Nerven in unmittelbarer Nähe des Querschnittes stets herabgesetzt erscheint, so gelingt es stets, durch Verkürzung der intrapolaren Strecke, indem man die untere den Längsschnitt berührende Elektrode der oberen am Querschnitt gelegenen mehr und mehr nähert, schliesslich an jedem durchschnittenen Nerven den besprochenen Versuchsbedingungen zu genügen und die gewünschten Reizerfolge zu beobachten, wenn zugleich die Intensität der angewendeten Ströme nicht zu gross ist. (Derselben Deutung unterliegt offenbar auch der von Heidenhain [3] angegebene Versuch, den Nerven zwischen den Elektroden zu durchschneiden und die Schnittenden wieder zu verkleben, wobei, wenn der Schnitt hinreichend nahe an der

---

1 Mommsen, Virchows Arch. 83. Bd., pag. 253 ff.

2 Allgem. med. Centralzeitung, 1859, Nr. 16.

3 Studien des physiolog. Inst. zu Breslau. Heft I, pag. 4,

myopolar gelegenen Elektrode geführt wurde, nur die Wirkung dieser letzteren übrig bleibt.)

Es scheint, dass die Zone herabgesetzter Erregbarkeit in der Nähe einer frisch angelegten Schnittfläche an Nerven warmblütiger Thiere beträchtlich grösser ist, als an solchen von Kaltblütern. Wenigstens gelingen die in Rede stehenden Versuche im ersteren Falle bei viel grösserer Distanz der Elektroden, als im letzteren. Legt man den N. ischiadicus irgend eines mit Chloralhydrat betäubten Säugethieres oder Vogels in möglichst grosser Ausdehnung bloss und durchschneidet denselben, nachdem man sich vorher von der ausschliesslichen Wirksamkeit der Schliessung nicht zu starker ↑ oder ↓ Ströme überzeugt hat, auf der dem Centrum näher gelegenen unpolarisirbaren Elektrode, so beobachtet man bei geringem Abstand der Elektroden (etwa 1 Ctm.) unter den gleichen Versuchsbedingungen wie früher bei ↓ Stromesrichtung nur SZ bei ↑ nur OZ. In der Folge tritt eine Veränderung in diesem Verhalten nur insoweit ein, als die erwähnten Reizerfolge an Grösse mehr und mehr abnehmen.

In Anbetracht des Umstandes, dass das Absterben der Kaltblüternerven bei höherer Temperatur sehr rasch erfolgt, habe ich es später versucht, Froschnerven durch Eintauchen des Schnittendes in verschieden temperirte (40—60° C.) 0·6% Kochsalzlösung in einen ähnlichen Zustand abgestufter Erregbarkeit zu versetzen, in welchem sich Warmblüternerven sofort nach der Durchschneidung in der Nähe des Querschnittes befinden. In diesem Falle entsprachen denn auch die Erfolge der Reizung mit schwächeren Strömen bei geeigneter Lagerung der Elektroden am Schnittende des Nerven den gehegten Erwartungen, indem dann entsprechend der dritten Stufe des Pflüger'schen Gesetzes der ↓ Strom nur SZ, der ↑ nur OZ auslöste. Verschiebt man dann die Elektroden nur wenig nach der Peripherie hin, so beobachtet man aus schon erörterten Gründen bei beiden Stromesrichtungen SZ und OZ. Wie durch Wärme gelingt es auch leicht den Nerven durch Anwendung starker Kälte partiell und voraussichtlich ohne sehr tiefgreifende Structurveränderungen abzutödten.

Man erreicht dies am einfachsten dadurch, dass man den betreffenden etwa 1 Ctm. langen Nervenabschnitt zunächst an die Wand einer kleinen, mit einer Mischung aus Eis und Kochsalz

gefüllten Epronvette anlegt, und nachdem die während des Anfrierens auftretenden Reizerscheinungen aufgehört haben, durch kurze Berührung mit dem Finger ablöst. Durch allmäliges Verschieben der 1—2 Ctm. von einander entfernten Elektroden findet man dann immer leicht die Lage derselben heraus, bei welcher von den schwächsten Strömen angefangen (bis zu sehr beträchtlicher Intensität) bei ↑ Stromesrichtung nur OZ, bei ↓ nur SZ ausgelöst wird.

Ich möchte nicht unterlassen, an dieser Stelle ein eigenthümliches Verhalten zu erwähnen, welches man besonders häufig und deutlich ausgesprochen bei elektrischer Reizung eines durch Kälte am Schnittende oder in der Continuität partiell abgetödteten Nerven zu beobachten Gelegenheit hat, obschon ich eine genügende Erklärung desselben zur Zeit nicht zu geben vermag.

Wenn sich die einen schwachen Kettenstrom zuführenden Elektroden in einer solchen Lage befinden, dass bei Reizung des durch Kälte in einer Ausdehnung von etwa 1—2 Ctm. abgetödteten N. ischiadicus vom Frosche nur ↓ SZ und ↑ OZ ausgelöst wird, so beobachtet man bei allmäligem vorsichtigem, nach der Peripherie hin gerichteten Verschieben der in unverändertem Abstand (etwa 1 Ctm.) zu erhaltenden Elektroden um sehr kleine Strecken in den meisten Fällen einen höchst auffallenden Wechsel der Reizerfolge bei unveränderter Stärke und aufsteigender Richtung des Stromes. Die ursprünglich allein vorhandene OZ nimmt, wie man sich leicht bei graphischer Verzeichnung der Muskelcontractionen überzeugen kann, mehr und mehr an Grösse ab, je weiter die Anode vorrückt und verschwindet bald vollständig, ohne dass jedoch bei der betreffenden Elektrodenstellung bereits kathodische Erregung, d. i. SZ erfolgt. Man kann dann sogar in der Regel den Strom sehr bedeutend verstärken, ohne wirksame Erregung bei Schliessung oder Öffnung auszulösen. Verschiebt man jedoch die Elektroden nur um ein Geringes in derselben Richtung, so tritt sofort SZ auf, welche von da ab den einzigen Reizerfolg schwacher Ströme darstellt.

Zwischen zwei Elektrodenstellungen, bei welchen ein schwacher ↑ Strom entgegengesetzte Reizerfolge bedingt, gibt es daher in dem erwähnten Falle so zu sagen eine „Indifferenzstellung“,

bei welcher derselbe Strom keinerlei Reizwirkungen auslöst. Dagegen beobachtet man dann nach Wendung des Stromes stets SZ.

Ich will bemerken, dass ich die eben erwähnte Erscheinung bisweilen, wenn auch nur selten bei Anwendung chemischer Abtödtungsmittel (Kalisalze, Alkohol, Ammoniak) ebenfalls beobachtet habe, doch scheinen die Bedingungen ihres Auftretens besonders dann gegeben zu sein, wenn eine Nervenstrecke durch Gefrieren ihrer Lebenseigenschaften beraubt wurde, obschon auch da Fälle vorkommen, wo man eine vollkommene Indifferenzlage der Elektroden für den ↑ Strom nicht aufzufinden vermag, indem sich noch vor dem völligen Verschwinden der OZ bei einer gewissen Lage der gereizten Nervenstrecke auch bereits schwache SZ beigesellt.

Ich habe erwähnt, dass man sich auch verschiedener chemischer Substanzen (Kalisalze, Alkohol, ätzende Alkalien etc.) mit gleichem Erfolge zur partiellen Abtödtung eines Nerven bedienen kann, indem man auch dann bei einer gewissen, nach der Grösse der abgetödteten Nervenstrecke, der Intensität des Stromes und dem Abstand der Elektroden wechselnden Lage der letzteren, von den schwächsten Strömen angefangen, der dritten Stufe des Pflüger'schen Zuckungsgesetzes entsprechende Reizerfolge beobachtet. Da es in diesem Falle nur darauf ankommt, den Einfluss der Abtödtung eines genügend grossen Theiles der intrapolaren Strecke auf den Erfolg der elektrischen Reizung des Nerven zu untersuchen, so empfiehlt es sich im Allgemeinen, sich ziemlich concentrirter Lösungen der betreffenden Substanzen zu bedienen, da das Eindringen so verdünnter Lösungen, wie sie zur Abtödtung des quergestreiften Muskels genügen, vielleicht wegen der nur hier und da unterbrochenen Markumhüllung des Axencylinders allzu langsam erfolgt. Es ist jedoch zu bemerken, dass nichtsdestoweniger Lösungen von Kalisalzen (KNO_3, KCl, KH_2PO_4 etc.) auch in hohen Verdünnungsgraden (1—2%) und nach verhältnissmässig kurzer Zeit der Einwirkung die Erregbarkeit der Nerven mehr oder minder herabsetzen, so dass es gelingt, bei localer Einwirkung im Verlauf derselben die besprochenen Reizerfolge ebenfalls zu demonstriren. Dagegen eignet sich concentrirte Kochsalzlösung für diesen Zweck nur sehr wenig, einmal

weil die Lebenseigenschaften des Nerven und insbesondere das Leitungsvermögen durch dieselbe erst spät zerstört werden, ein Umstand, der unten noch zu erörtern sein wird, und weil andererseits das Auftreten tetanischer Erregung weiteren Beobachtungen bald hindernd in den Weg tritt.

Nachträglich fand ich, dass bereits Harless [1] gelegentlich seiner Untersuchungen über die Wirkungen des Ammoniak auf die Nervenstämme, Versuche mitgetheilt hat, deren Ergebnisse mit den von mir bisher erörterten Resultaten der localen Abtödtung eines Nerven im Wesentlichen übereinstimmen. Bekanntlich zeichnet sich das Ammoniak dadurch aus, dass es in concentrirter Lösung angewendet, ausserordentlich rasch die Lebenseigenschaften des Nerven am Orte der Einwirkung zerstört, ohne denselben zu erregen und (wenigstens in der ersten Zeit) die Structurverhältnisse wesentlich zu alteriren. Man ist daher in den Stand gesetzt, durch Auftragen von Ammoniak mittelst eines kleinen Pinsels, wie dies Harless that, auf Stellen der intrapolaren Strecke den kathodischen, beziehungsweise anodischen Abschnitt eines durchströmten Nerven, d. i. die Gesammtheit aller jener Punkte, welche bei einer gegebenen Stromstärke und Elektrodenstellung als Aus-, beziehungsweise Eintrittsstellen des Stromes betrachtet werden müssen, functionell abzutrennen, die intrapolare Strecke so zu sagen ohne Veränderung der Structur im Indifferenzpunkte zu durchschneiden, so dass im betreffenden Falle immer nur jene Reizwirkung zur Geltung kommen kann, welche der nach der Peripherie hin gelegenen Elektrode entspricht. also Schliessungserregung bei ↓, Öffnungserregung bei ↑ Stromesrichtung. Da sich die Wirkung des Ammoniaks (und in geringerem Grade auch die jeder anderen chemischen Substanz in gelöstem Zustande) auch bei möglichst vorsichtiger localer Application mit der Zeit über jene Stelle hinauserstreckt, welche ursprünglich mit demselben in Berührung gekommen war, jedoch um so schwächer wird, je weiter man sich von dem Orte der directen Einwirkung entfernt, so ist klar, dass nach dem Auftragen von Ammoniak im Bereich der central gelegenen Elektrode die Abstufung der Erregbarkeit in auf einander folgenden Querschnitten

[1] Zeitschr. f. rat. Med. III. Bd. 12.

der Nerven eine sehr allmälige sein wird. Es ist in Folge dessen auch gar nicht nöthig, das Ammoniak auf die intrapolare Strecke selbst aufzutragen, vielmehr genügt es, insbesondere bei nicht zu grosser Distanz der Elektroden, diejenige Stelle der Nerven mit Ammoniak zu benetzen, welche der centralen Elektrode aufliegt oder, wenn die Reizung in der Continuität des Nerven erfolgt, gar schon jenseits derselben, innerhalb der „centropolaren“ Strecke sich befindet. [1] Wenn die fortschreitende Ammoniakwirkung bereits in das Bereich der unteren wirksamen Elektrode vorgedrungen sein sollte, so erscheint es natürlich nöthig mit den in gleichem Abstand erhaltenen Elektroden etwas weiter am Nerven herabzurücken. Befinden sich aber die Elektroden in richtiger Stellung, so dass die Stromvertheilung den oben erörterten Bedingungen entsprechend sich gestaltet, so besteht der Reizerfolg ausnahmslos in dem alleinigen Auftreten der SZ bei ↓ Stromesrichtung. Hinsichtlich der Wirkung aufsteigender schwacher Ströme macht sich ein Unterschied bemerkbar gegenüber den früher besprochenen Fällen partieller Abtödtung des Nerven. Denn während dort stets schon bei sehr schwachen aufsteigenden Strömen und bei einer Elektrodenstellung, bei welcher dieselben Ströme ↓ gerichtet, nur SZ auslösen, deutliche, den letzteren an Grösse kaum nachstehende Öffnungszuckungen beobachtet werden, fehlen dieselben nach örtlicher Ammoniakwirkung entweder ganz oder treten nur spurweise im Beginn der Einwirkung oder bei beträchtlicher Verstärkung des Stromes hervor. [2]

Aus dem bisher Mitgetheilten geht jedenfalls so viel mit Sicherheit hervor, dass es am markhaltigen durchströmten Nerven in gleicher Weise, wie auch am quergestreiften Muskel gelingt, durch künstlich bewerkstelligte örtliche Herabsetzung der Erregbarkeit die erregende Wirkung der einen Elektrode auszuschalten und dadurch einen weiteren experimentellen Beweis zu liefern für die Richtigkeit der zuerst von Pflüger ausgesprochenen Ansicht, dass die Erregung des Nerven bei Schliessung des Stromes ausschliesslich an der Kathode, bei Öffnung dagegen an der Anode erfolgt.

---

[1] Vergl. Harless, l. c. p. 78 ff.

[2] Harless, l. c. p. 113.

Die bisher besprochenen Versuche werden ergänzt und die aus denselben gezogenen Schlussfolgerungen erfahren eine weitere Bestätigung durch die Untersuchung der Reizwirkungen, welche inducirte Ströme von verschiedener Richtung an markhaltigen Nerven hervorbringen, deren Erregbarkeit im Bereich der centralwärts gelegenen Elektrode herabgesetzt ist. Die hierher gehörigen Thatsachen wurden ebenfalls von Harless [1] bereits richtig erkannt, indem dieser Forscher fand, dass nach dem Auftragen von Ammoniak auf einen Theil der intrapolaren Nervenstrecke „selbst der an sich wirksamere Öffnungsschlag nach der Ammoniakwirkung erfolglos wird, wenn er den Nerven mit der früheren Stärke in aufsteigender Richtung trifft,“ während dann der in umgekehrter Richtung den Nerven durchsetzende Schliessungsschlag sich wirksam erweist. Niemals aber erfolgt bei gleichem Rollenabstand Erregung, wenn bei ↑ Stromesrichtung der kathodische Abschnitt durch Ammoniak oder irgend ein anderes der früher genannten Mittel ausser Wirksamkeit gesetzt wurde, so dass der Erregungsvorgang nur von der Anode ausgehen kann. Es beweist dieser Umstand abermals, dass durch inducirte Ströme nur Kathodenerregung ausgelöst wird. Sehr leicht ist es auch, sich am Warmblüternerven, unmittelbar nach der Durchschneidung und ohne irgend einen vorbereitenden Eingriff, von der Richtigkeit der vorstehenden, sich auf den Froschnerven beziehenden Angaben zu überzeugen. Man braucht nur zwei unpolarisirbare Elektroden einerseits an den frischen Querschnitt, andererseits an eine etwa 1 Ctm. tiefer gelegene Stelle eines Kaninchen-Ischiadicus anzulegen, um bei Reizung mit einzelnen nicht zu starken Inductionsschlägen zu beobachten, dass nur in dem Falle eine Zuckung ausgelöst wird, wenn die Ströme im Nerven absteigend gerichtet sind.

Unter Umständen hat dieses bemerkenswerthe Verhalten eine methodische Bedeutung, denn es ist klar, dass, wenn man irgend einen Nervenabschnitt, innerhalb dessen an jedem Punkte annähernd gleiche Erregbarkeit vorausgesetzt werden darf, mit Wechselströmen reizt, wie sie z. B. ein gewöhnlicher Schlittenapparat liefert, bei einem gewissen Rollenabstande sowohl jeder

---

[1] L. c. p. 113 ff.

einzelne Schliessungsschlag als auch jeder Öffnungsschlag wirken muss. Dies wird aber aus den früher erörterten Gründen nicht mehr der Fall sein, wenn man unter sonst gleichen Bedingungen das Schnittende eines Warmblüternerven reizt. Denn dann werden eben nur die absteigend gerichteten Ströme Erregung auslösen, also je nach der Richtung des primären Stromes entweder nur die Schliessungsschläge oder nur die Öffnungsschläge. Bei grösserem Rollenabstand aber, wo sich schliesslich die erregende Wirkung der Öffnungsinductionsströme allein geltend macht, wird ein Reizerfolg überhaupt nur dann zu erwirken sein, wenn jene in absteigender Richtung den Nerven durchsetzen, so dass man also bei einer und derselben Elektrodenstellung und gleichbleibendem Rollenabstand, je nach der Richtung des primären Stromes das einemal einen deutlichen Reizerfolg beobachtet, während derselbe anderenfalls vollständig fehlen kann. (In der That wurden schon vor längerer Zeit im hiesigen Laboratorium Beobachtungen gemacht, welche das eben Gesagte vollständig bestätigen.)

II.

Über die Bedingungen des Auftretens der Öffnungserregung am markhaltigen Nerven.

Als Pflüger im Jahre 1859 das nach ihm benannte Zuckungsgesetz aufstellte, schien es kaum zweifelhaft, dass das Wirksamwerden des Öffnungsreizes am motorischen Nerven in erster Reihe von der jeweiligen Stromstärke abhänge. Diese Ansicht wurde, wie es scheint, auch von der Mehrzahl der späteren Arbeiter auf diesem Gebiete angenommen. Als zweiten, hier in Betracht kommenden Factor hatten jedoch bereits Ritter und später Nobili verschiedene „Erregbarkeitszustände“ des Nerven kennen gelehrt. Rosenthal und v. Bezold[1] haben sodann in neuerer Zeit ein mit dem Pflüger'schen Zuckungsgesetz völlig übereinstimmendes Zuckungsgesetz des absterbenden Nerven aufgestellt, demzufolge bei unveränderter (geringer) Stromstärke an derselben Nervenstelle in drei auf-

[1] Arch. f. Anat. u. Phys. 1859, p. 131.

einanderfolgenden Stadien des Absterbens dieselben wechselnden Reizerfolge beobachtet werden, welche dem Pflüger'schen Gesetze entsprechend am frischen Nerven bei schwachen, mittelstarken und starken Strömen auftreten. Die Erklärung dieser Erscheinung schien sich unter Berücksichtigung der von Pflüger aufgestellten theoretischen Gesichtspunkte einfach aus dem Verlauf der Erregbarkeitsveränderungen zu ergeben, welche den herrschenden Anschauungen zufolge die einzelnen Nervenstellen und zwar früher die central gelegenen, als die peripheren im Verlauf des Absterbens erleiden sollen.[1]

Pflüger hatte sein Gesetz zunächst abgeleitet aus Untersuchungen, welche ausschliesslich an dem vom übrigen Organismus losgetrennten Nerv-Muskelpräparate des Frosches angestellt worden waren, dessen Erregbarkeitsverhältnisse als vom normalen Verhalten nicht wesentlich verschieden betrachtet werden durften. Für dieses Präparat behielt denn auch in der Folge das Pflüger'sche Gesetz ziemlich unbestritten Geltung.

Allein es fehlte nicht an Stimmen, welche die Giltigkeit desselben wenigstens in dem Falle bestritten, wo der gereizte Nerv mit den Centralorganen des lebenden Thieres noch in Zusammenhang steht.

Bernard,[2] Schiff[3] und Valentin[4] haben übereinstimmend hervorgehoben, dass man bei elektrischer Reizung undurchschnittener Nerven „eine Muskelverkürzung nur bei dem Schluss, nicht aber bei der Öffnung der Kette erzeugt, der Strom sei wie er wolle gerichtet,“[5] vorausgesetzt, dass er nicht übermässig stark ist. Der letzterwähnte Forscher, welcher dieses Verhalten als dem eigentlichen „Zuckungsgesetz des kräftigen und unveränderten, lebenden Nerven“ entsprechend bezeichnet, hatte seine diesbezüglichen Versuche allerdings unter Bedingungen angestellt,

---

[1] Vergl. Funke-Grünhagen, Lehrb. d. Physiol., I, p. 561 ff., und Rosenthal, Allgem. Physiologie d. Muskeln und Nerven (internationale. wissenschaftl. Bibliothek, Bd, 27), pag. 133 f.

[2] Leçons sur la physiologie du système nerveux, I, p. 185.

[3] Lehrb. d. Muskel- und Nervenphysiologie 1858—59, pag. 80.

[4] Die Zuckungsgesetze des lebenden Nerven und Muskels 1863. p. 24 ff.

[5] Valentin, l. c. p. 19.

welche eine völlig klare Übersicht der Stromvertheilung nicht gestatteten, indem er die (metallischen) Elektroden in den Oberschenkel des unversehrten Thieres einführte. Indessen verliert dieser Umstand um so mehr an Bedeutung, als bereits Bernard und Schiff auch bei Reizung des blossgelegten mit dem Centralorgan in Zusammenhang stehenden Nerven von Wirbelthieren aus verschiedenen Classen zu analogen Resultaten gelangt waren. Es scheint, dass Bernard sich schon der Ansicht zuneigte, die nervösen Centren übten auf die abgehenden Nervenstämme einen eigenartigen Einfluss aus, vermöge dessen ihre normale Erregbarkeit erhalten bleibt, die sie befähigt, nur bei dem Entstehen (nicht allzu starker) Ströme in Erregung zu gerathen. In diesem Sinne glaube ich wenigstens die nachstehende Bemerkung Bernard's auffassen zu dürfen: „Le nerf moteur tire ainsi ses propriétés de la moelle. Il les perd à l'air; mais il peut les reprendre, pourvu qu'il communique encore avec le centre nerveux.“ [1] Das Experiment, welches als Beweis hiefür dienen soll, dürfte gegenwärtig eine solche Schlussfolgerung kaum mehr rechtfertigen. Es besteht einfach darin, dass ein nur zum Theil freigelegter Ischiadicus vom Frosch seine normale Erregbarkeit wieder gewinnt, wenn man die betreffende Stelle befeuchtet, nachdem sie vorher durch Austrocknen verändert worden war.

Die Ansicht, dass das Fehlen der Öffnungszuckung bei Reizung undurchschnittener Nerven mit selbst starken Strömen durch einen von dem Centralorgan ausgehenden, hemmenden Einfluss bedingt werde, hat, wie bereits in der Einleitung erwähnt wurde, ihren bestimmtesten Ausdruck in einer neueren Arbeit von Th. Rumpf [2] gefunden. Die Versuche sind zumeist an demselben Präparate angestellt, dessen sich bereits Bernard bedient hatte. Der N. ischiadicus bildete die einzige Verbindung zwischen dem einen Unterschenkel und dem sonst unversehrten Frosche. Aus dem Umstande nun, dass hier „an dem mit dem Centralorgan verbundenen Nerven die Öffnungszuckung des ↑ Stromes bedeutend später (d. i. erst bei stärkeren Strömen) auftritt, als an dem vom Centralorgan getrennten,“ eine Thatsache,

[1] Bernard, l. c. p. 189.

[2] Arch. f. Psychiatrie und Nervenkrankheiten 1878, Bd. VIII, pag. 567 ff.

welche noch deutlicher hervortreten soll, wenn das Rückenmark durch äusserliche Application einer Kältemischung abgekühlt wurde, schliesst Rumpf, dass „in dem mit dem Centralorgan verbundenen motorischen Nerven ständige Einwirkungen sich geltend machen, die sich durch Veränderung der elektrischen Erregbarkeit ausdrücken und in dem vom Centralorgan getrennten Nerven jedenfalls nicht nachweisbar sind, „da in diesem Falle die OZ entweder fast gleichzeitig oder kurz nach der SZ auftrat“. Die letztere sollte aber durch die Durchschneidung „nicht modificirt“ werden.

Hermann [1] weist endlich auf die Möglichkeit hin, „dass die Öffnungserregung, welche auf dem Schwinden einer Veränderung des Nerven beruht, durch eine gewisse Resistenz des Nerven gegen tiefere Einwirkungen des Stromes (auf einer ersten Stufe der Erregbarkeit) beeinträchtigt wird.“

Es ist bemerkenswerth, dass auch für den vom Centrum getrennten Nerven die Angaben verschiedener Forscher bezüglich des ersten Auftretens der Öffnungserregung bei Reizung mit schwachen Strömen, also auf der ersten Stufe des Pflüger'schen Zuckungsgesetzes, durchaus nicht übereinstimmend lauten. Pflüger selbst gibt als Regel an, dass SZ bei beiden Stromesrichtungen der erste Erfolg der Reizung sei und hiermit befinden sich die Beobachtungen von Bernard, [2] Schiff, [3] v. Bezold und Rosenthal [4] in Übereinstimmung. Dagegen fand Heidenhain [5] in der Mehrzahl der Fälle SZ bei ↑ und OZ bei ↓ Stromesrichtung als ersten Erfolg der Reizung mit schwächsten Strömen. Bisweilen jedoch beobachtete er ebenfalls nur SZ bei beiden Stromesrichtungen. Ähnliche Angaben liegen vor von Wundt. [6]

Aufmerksam gemacht durch die im ersten Abschnitt der vorliegenden Arbeit beschriebenen, durchaus gesetzmässigen Reizerfolge, welche man bei einer bestimmten Lagerung und Distanz der Electroden an durchschnittenen oder partiell abgetödteten Nerven wahrnimmt, untersuchte ich zunächst, inwieweit die oben

---

1 Handb. d. Physiologie, II, 1, p. 63.
2 L. c. p. 163.
3 L. c. p. 80.
4 Arch. f. Anat. u. Physiol. 1859, p. 131.
5 Arch. f. physiol. Heilkunde 1857, p. 442 ff.
6 Arch. f. physiol. Heilkunde 1858. p. 354.

erwähnten Differenzen sich vielleicht durch Verschiedenheiten der Lage der Elektroden an einem vom Centrum getrennten Nerven erklären lassen.

Alle im Folgenden mitzutheilenden Versuche wurden an Winterfröschen (einige Controlversuche auch an frisch eingefangenen Frühlingsfröschen) angestellt, welche ich stets zwei Tage vor dem Gebrauch in Zimmertemperatur brachte. Vor dem Versuch wurden dieselben immer mit einer genügenden Dosis Chloralhydrat bis zu fast vollkommener Reflexlosigkeit vergiftet, um so die Ergebnisse direct mit den später zu erwähnenden Versuchen an undurchschnittenen Nerven vergleichen zu können. Als Stromquelle diente 1 Daniell'sches Element oder eine zwanziggliedrige nach Art der Noë'schen Sternsäulen construirte Thermosäule. Wo es nicht ausdrücklich bemerkt ist, wurden zur Reizung immer nur schwache Ströme verwendet.

Wie schon früher bemerkt wurde, beobachtet man bei Reizung des Schnittendes eines frisch präparirten Nerven, wenn die eine Elektrode an dem Querschnitt selbst oder eine demselben sehr nahe liegende Stelle des Nerven angelegt wurde, zunächs bei Schliessung der schwächsten ↓ Ströme eine Zuckung des Muskels. Bei geringer Verstärkung des Stromes gesellt sich dazu SZ bei aufsteigender und gleichzeitig auch OZ bei absteigender Stromesrichtung. Beide sind meist ziemlich gleich stark und schwächer als die ↓ SZ bei gleicher Stromstärke. Die ↑ OZ tritt in diesem Falle erst bei sehr viel stärkeren Strömen hervor. Wesentlich verschieden gestalten sich unter sonst gleichen Verhältnissen die Reizerfolge bei schwachen und selbst mittelstarken Strömen, wenn man beide Elektroden an einem nur wenig tiefer gelegenen Abschnitt desselben Nerven anlegt. Dann sieht man ausnahmslos nur Schliessungszuckung bei beiden Stromesrichtungen erfolgen, worauf bereits Rosenthal und Bezold [1] aufmerksam machten.

Man kann mit den Elektroden bis in die unmittelbare Nähe des Muskels herabrücken oder auch mittlere Nervenpartien reizen, so lange sich die centralwärts gelegene Reizstelle nur in genügender Entfernung (etwa 1 Ctm.) von dem Querschnitt befindet,

---

[1] L. c. p. 131.

erleidet das erwähnte Verhalten keine, oder nur in dem Sinne eine Änderung, dass die an verschiedenen Stellen des Nerven bei gleichbleibendem Abstand der Elektroden und gleicher Stromstärke ausgelösten Schliessungszuckungen verschieden gross ausfallen, entsprechend dem Umstande, dass die Erregbarkeit eines durchschnittenen Nerven nicht nur im Allgemeinen in der Nähe des Schnittes grösser ist, als nach der Peripherie hin, sondern dass, wie es scheint, bisweilen auch gewisse bevorzugte Punkte in der Continuität vorhanden sind, die durch eine höhere Erregbarkeit sich auszeichnen. [1]

Wenn sich bei ↓ Stromesrichtung die centralwärts gelegene Elektrode in unmittelbarer Nähe des Querschnittes befindet, so beobachtet man bei beliebigem Abstande der andern Elektrode ausnahmslos neben der SZ auch OZ und zwar bei sehr geringer, die Grenze der Wirksamkeit nur wenig übersteigender Intensität des Reizstromes; bei aufsteigender Stromesrichtung dagegen muss man die peripher gelegene Elektrode der am Querschnitt befindlichen Kathode bis auf wenige Millimeter nähern, um ausser dem Schliessungsreiz auch den Öffnungsreiz wirksam zu finden. Die SZ ist dann bei geringer Intensität des Stromes meist sehr klein und fehlt oft ganz; dasselbe gilt nach Wendung des Stromes von der OZ. (Vergl. Taf. II, Fig. 1 *a*, *b*.)

Die Abhängigkeit der Öffnungserregung von der Nähe des Querschnittes eines Nerven an der Anode tritt besonders deutlich hervor, wenn man, wie Heidenhain[2] zuerst zeigte, die Elektroden irgendwo in der Continuität eines Nerven anlegt und die „centropolare“ Strecke durch Abschneiden soweit verkürzt, bis man mit dem Querschnitt in unmittelbare Nähe der oberen Elektrode gelangt ist. Man sieht dann ebenfalls

[1] Da die wahre Gestalt der Erregbarkeitscurve des ausgeschnittenen Nerven noch keineswegs als sichergestellt betrachtet werden kann, und andererseits auch zweifelhaft ist, ob verschiedene Erregbarkeitszustände auch in der Continuität unversehrter mit dem Centralorgan noch zusammenhängender Nerven vorhanden sind, beide Fragen vielmehr noch eingehender Untersuchungen bedürftig scheinen, so glaube ich hier um so weniger auf dieselben eingehen zu sollen, als, wie sich später zeigen wird, ein directer Zusammenhang mit den in der vorliegenden Abhandlung geschilderten Thatsachen nicht besteht.

[2] Studien des physiolog. Inst. zu Breslau, Heft I, p. 3 ff.

die OZ zunächst nur bei absteigender Stromesrichtung auftreten und erst bei Verkürzung der intrapolaren Strecke, sei es, dass man die untere Elektrode der oberen sehr nahe bringt, oder, wie bereits früher erwähnt wurde, den Querschnitt innerhalb der intrapolaren Strecke selbst anlegt und die Schnittenden des Nerven wieder aneinanderlegt, erscheint die OZ auch bei ↑ Stromesrichtung, während zugleich die SZ kleiner wird oder fehlt.

Die nächstliegende Deutung des Wirksamwerdens selbst sehr schwacher Öffnungsreize in nächster Nähe des Querschnittes eines Nerven scheint sich auf den ersten Blick aus dem Umstande zu ergeben, dass den bekannten Beobachtungen Heidenhain's [1] zufolge durch Anlegen eines Querschnittes sowohl an frischen Nerven, wie auch an solchen, deren Erregbarkeit bereits im Sinken begriffen ist, die Anspruchsfähigkeit jeder nicht zu weit entfernten Stelle für den elektrischen Reiz sehr bedeutend gesteigert wird. Es geht dies ohne Weiteres daraus hervor, dass sowohl aufsteigende wie absteigende Ströme, welche nur minimale Reizeffecte bei der Schliessung hervorbringen, wenn sie durch unpolarisirbare Elektroden unteren Nervenpartien zugeführt werden, fast maximale Schliessungszuckungen auslösen, wenn man den Nerven in nicht zu grosser Entfernung von der centralwärts gelegenen Elektrode durchschneidet. In demselben Sinne scheint aber auch auf den ersten Blick das Auftreten der OZ gedeutet werden zu müssen, indem dieselbe bei geringer Intensität des Reizstromes nur dann beobachtet wird, wenn die Anode in das Bereich der durch den Querschnitt offenbar am stärksten beeinflussten Nervenstrecke fällt.

So sicher nun aber auch die Thatsache steht, dass die Öffnungserregung schon bei sehr geringer Intensität des Stromes wirksam wird, wenn die Anode in nächster Nähe des an einem Nerven angelegten (mechanischen, chemischen oder thermischen) Querschnittes sich befindet, so wenig dürfte die vorerwähnte, bisher wohl allgemein angenommene Deutung dieser Thatsache genügen. Ich will davon absehen, dass, wie ich mich oft überzeugt habe, die OZ gerade an solchen Nerv-Muskelpräparaten,

---

[1] Allgem. med. Centralzeitung 1859. Nr. 10. 16; Studien des physiol. Instit. zu Breslau, I.

welche frisch aus einem kalten Raum in das Arbeitszimmer gebrachten Thieren entnommen werden und deren Erregbarkeit eine sehr hohe ist, erst bei verhältnissmässig starken Strömen deutlich hervortritt, während umgekehrt an Präparaten minder erregbarer Frösche bisweilen, wenn auch nur selten, bei geringen Stromstärken Öffnungserregung erfolgt, ohne dass ein Querschnitt angelegt worden wäre, denn der im ersteren Falle regelmässig eintretende Schliessungstetanus verhindert das Erkennen schwächerer Öffnungswirkungen, die sich dann nur durch eine Verzögerung der Wiederverlängerung des Muskels verrathen konnten.

Entscheidend scheint mir jedoch gegen die ausschliessliche Bedeutung der Erregbarkeitserhöhung für das Hervortreten der Öffnungszuckung die Thatsache zu sprechen, dass die Durchschneidung eines Nerven in der Nähe der Anode selbst dann das sofortige Auftreten der OZ zur Folge hat, wenn die Erregbarkeit desselben im Verlaufe des Versuches durch irgendwelche Einflüsse sehr beträchtlich gesunken ist, so dass dieselbe, soweit sich dies nach der Höhe der dann ausgelösten Schliessungszuckungen beurtheilen lässt, auch in der Nähe eines frisch angelegten Querschnittes bei weitem nicht so gross gefunden wird, als sie der betreffenden Stelle vorher am unversehrten Nerven zukam. Nichtsdestoweniger fehlt bei gleicher Stromstärke die OZ im Beginn des Versuches vollständig, während sie unmittelbar nach Anlegung des Querschnittes ungeachtet der absolut geringeren Erregbarkeit vorhanden ist.

Sehr instructiv sind in dieser Beziehung besonders Reizversuche an Nerven, welche Präparaten angehören, die mehrere Stunden in einer feuchten Kammer bei Zimmertemperatur aufbewahrt wurden und deren Erregbarkeit in Folge dessen bedeutend herabgesetzt erscheint. Unmittelbar nach der Durchschneidung eines solchen Nerven in nächster Nähe der vom Muskel entfernteren Elektrode löst ein ↓ gerichteter schwacher Strom nebst der in ihren Grössenverhältnissen durch den Schnitt nicht wesentlich veränderten SZ auch OZ aus. Die ↑ SZ erscheint dann zwar in der Regel etwas grösser als vorher, erreicht jedoch bei weitem nicht ihre ursprüngliche Höhe. Es scheint also, dass in der Nähe einer Schnittstelle noch andere Momente ins Spiel

kommen, welche unabhängig von der Erregbarkeitssteigerung das Hervortreten der OZ begünstigen.

Es drängt sich hier die Frage auf, ob überhaupt die Öffnungserregung des Nerven von dem jeweiligen Erregbarkeitszustande desselben in ähnlicher Weise abhängig ist, wie dies von der Schliessungserregung als bewiesen gelten darf, ob es mit andern Worten möglich ist, bei Anwendung schwacher Ströme durch künstliche Steigerung der Anspruchsfähigkeit für Schliessungsreize Öffnungszuckungen auszulösen.

Es könnte scheinen, als sei diese Frage bereits entschieden durch die mehrfach erwähnten Versuche von Rosenthal und v. Bezold,[1] indem den Erfahrungen dieser Forscher zufolge die Öffnungszuckung wegen der im Verlauf des spontanen Absterbens des Nerven angeblich eintretenden Erregbarkeitserhöhung schon bei Reizung mit schwachen Strömen auftreten soll. Indessen scheint dies nur unter gewissen, unten genauer zu erörternden Bedingungen der Fall zu sein. Wenigstens gelang es mir bei Wiederholung der diesbezüglichen Versuche nicht, mich von der regelmässigen Aufeinanderfolge der drei Stadien des sogenannten Zuckungsgesetzes absterbender Nerven bei Reizung einer und derselben Stelle mit gleichbleibenden, schwachen Strömen zu überzeugen, sobald das Präparat durch Einschliessen in einer feuchten Kammer auf das Sorgsamste vor Schädlichkeiten und insbesondere vor Verdunstung geschützt war. Ich habe bereits oben bemerkt, dass unter diesen Umständen auch das von Rosenthal[2] beschriebene primäre Stadium der Erregbarkeitserhöhung am absterbenden Nerven nicht nachweisbar ist, vielmehr ein ganz allmäliges Absinken der Erregbarkeit als Regel betrachtet werden darf. Hierbei ist bemerkenswerth, dass bei unveränderter Lage der Elektroden zunächst immer die Schliessung des ↑ gerichteten Stromes unwirksam wird, so dass in einem gewissen Stadium des Absterbens die ↓ SZ den einzigen Reizerfolg schwacher Ströme darstellt. Diese Thatsache würde als mit dem sogenannten Ritter-Valli'schen Gesetze in Übereinstimmung stehend zu betrachten sein, demzufolge die Erregbarkeit dem

[1] Arch. f. Anat. und Physiol. 1859, pag. 131.

[2] Allgem. med. Centralzeitung 1859, Nr. 16, pag. 126.

Centrum näher gelegener Nervenstellen früher erlöschen soll, als die peripher gelegener Punkte. Es scheint jedoch, dass es sich bei jenen Thatsachen, welche zur Aufstellung des erwähnten Gesetzes führten, nicht sowohl um eine ungleiche Abnahme der Erregbarkeit verschiedener Nervenstellen handelt, sondern vielmehr um eine Beeinträchtigung des Leitungsvermögens, worauf in neuester Zeit Mommsen [1] wie auch J. Szpilman und Luchsinger [2] hingewiesen haben. Ich will noch erwähnen, dass der erstgenannte Forscher ebensowenig wie ich, eine von dem bekannten Einfluss des Querschnittes unabhängige Erregbarkeitserhöhung im Beginn des Absterbens eines vor Schädlichkeiten (Wasserverlust etc.) genügend geschützten Nerven nachzuweisen vermochte. [3]

Dagegen ist es eine längst bekannte und leicht zu bestätigende Thatsache, dass die Anspruchsfähigkeit eines Nerven für schwache elektrische Reize durch Wasserverlust ausserordentlich gesteigert wird und zwar, wie besonders Harless [4] und Birkner [5] gezeigt haben, schon zu einer Zeit, wo die den sogenannten Vertrocknungstetanus einleitenden spontanen Zuckungen noch vollständig fehlen. Grünhagen [6] und Mommsen [7] wiesen in neuerer Zeit ebenfalls darauf hin, dass „ein Nerv gegen die Wirkung des galvanischen Stromes um so empfindlicher wird, je mehr er vertrocknet, namentlich wenn die bekannten spontanen Zuckungen eintreten.“ [8] Es war daher von Interesse zu untersuchen, ob in diesem Falle die Öffnung eines Kettenstromes von geringer Intensität als zureichender Reiz wirkt. In der That liegt bereits von Harless [9] die Angabe vor, dass nach partiellem Wasserverlust eines Nerven schwache, sowohl auf- wie absteigende Ströme Öffnungserregung auslösen und nichts ist leichter, als sich von der Richtigkeit dieser Thatsache durch den einfachen

---

[1] Virchow's Arch., Bd. 83, pag. 254 ff.

[2] Pflüger's Arch., Bd. 24, pag. 356.

[3] L. c., pag. 260 f.

[4] Zeitsch. f. rat. Med. III, 7. Bd.

[5] Das Wasser des Nerven in physiolog. u. patholog. Beziehung. Augsburg 1858.

[6] Zeitschr. f. rat. Med. III, 26. Bd.

[7] L. c., pag. 261.

[8] Grünhagen l. c., pag. 195.

[9] Vergl. Meissner's Jahresber. 1859.

Versuch zu überzeugen, einen über unpolarisirbare Elektroden gebrückten Froschnerven bei nicht zu hoher Zimmertemperatur der allmäligen Verdunstung auszusetzen, und von Zeit zu Zeit in nicht zu grossen Zwischenräumen mit auf- oder absteigenden Strömen zu reizen. Es ist zweckmässig, sich bei diesen Versuchen eines Nerv-Muskelpräparates zu bedienen, das mit dem Rückenmark noch in Zusammenhang steht, [1] um den Einfluss des Querschnittes vollkommen auszuschliessen, obschon man ganz dieselben Resultate auch bei Reizung peripherer Strecken durchschnittener Nerven erhält. Übrigens kann man im letzteren Falle nach Mommsen's Vorgang die Präparate mit durchschnittenen Nerven vor dem Gebrauche einige Stunden in 0·6% NaCl-Lösung „ausruhen" lassen, wobei die durch den Querschnitt verursachten Erregbarkeitsänderungen sich so ziemlich ausgleichen.

Die erste Wirkung der beginnenden Vertrocknung macht sich bei graphischer Verzeichnung der Muskelcontractionen dadurch bemerkbar, dass die Höhe der ausgelösten Schliessungszuckungen mehr oder weniger beträchtlich zunimmt. In einem späteren Stadium kommt es dann bekanntlich bei Schliessung selbst schwacher Ströme zu tetanischer Verkürzung des Muskels. Alsbald tritt aber neben der Schliessungszuckung auch die Öffnungszuckung hervor. Bei welcher Stromesrichtung dies zuerst geschieht, hängt nicht sowohl von dieser ab, als vielmehr davon, an welcher Stelle der in das Bereich der beiden Elektroden fallenden Nervenstrecke sich der Einfluss des Wasserverlustes früher und in höherem Masse geltend macht. Hat man an einem undurchschnittenen Nerven die Elektroden derart angelegt, dass der Plexus sacralis zum grössten Theil in das Bereich der oberen Elektrode fällt, so sieht man fast regelmässig wegen der langsameren Vertrocknung dieses dicksten Nervenabschnittes die OZ zuerst bei aufsteigender Stromesrichtung hervortreten, während bei Lagerung der Elektroden etwa in der Mitte des Nerven bei beiden Stromesrichtungen meist annähernd gleich-

[1] Wenn im Folgenden von einem mit dem Centrum noch zusammenhängenden Nerven die Rede ist, so ist dabei immer ein Präparat gemeint, das, einem chloralisirten Frosch entnommen, aus der isolirten Wirbelsäule nach Abtrennung des Schädels, dem N. ischiadicus der einen Seite und dem zugehörigen M. gastrocnemius besteht.

zeitig neben der verstärkten SZ auch OZ erfolgt, wenn nicht etwa absichtlich die eine oder andere Nervenstrecke durch öfteres Benetzen mit 0·6 % NaCl-Lösung vor Wasserverlust geschützt wird.

Wenn man sich auf Reizung mit schwachen Strömen (1 Dan. *RW* = 5 — 20 Ctm.) beschränkt und jedesmal nur solange geschlossen lässt, als zur Auslösung deutlicher Öffnungserregung nothwendig ist (es genügen in der Regel wenige Secunden), so beobachtet man ganz regelmässig ein mehr oder weniger deutlich verspätetes Eintreten der OZ und ausserdem fällt sofort auf, dass die Grösse derselben in hohem Grade von der Schliessungsdauer des Stromes abhängt.

Ist die letztere sehr kurz, so kann die OZ vollständig fehlen, selbst wenn die Erregbarkeit des Nerven bedeutend gesteigert erscheint, während mit unfehlbarer Sicherheit eine kräftige Zuckung ausgelöst wird, wenn der Strom um Weniges länger geschlossen blieb. Es ist bemerkenswerth, dass auch die Form der Zuckungscurve wesentlich von der Schliessungsdauer des Stromes abhängt, indem alle Übergänge vorkommen zwischen einer einfachen, in ihrem Verlaufe von der SZ sich nicht unterscheidenden Muskelcontraction und lang anhaltender tetanischer Verkürzung (Ritter'scher Öffnungstetanus).

Dass in diesem Falle der Öffnungstetanus, welcher in einem vorgerückteren Stadium der Vertrocknung leicht und schon nach kurzer Schliessung schwacher Ströme auftritt, der Öffnungszuckung früherer Stadien insoferne als gleichwerthig betrachtet werden darf, als beide einer und derselben später zu erörternden Ursache ihre Entstehung verdanken, geht, abgesehen von dem Vorhandensein der eben erwähnten Übergangsformen auch daraus hervor, dass der Öffnungstetanus ganz ebenso ein verspätetes Eintreten erkennen lässt, wie die anfängliche OZ. (Taf. I, Fig. 5.)

Der Erste, welcher bezüglich der OZ auf diesen wichtigen Umstand aufmerksam gemacht hat, war Pflüger,[1] welcher bei Reizung der tieferen Theile des Ischiadicus von Rana esculenta mit schwachen ↓ Strömen wiederholt beobachtete „dass die OZ

[1] Physiologie d. Elektrotonus, pag. 75.

dem Augenblick der Öffnung des ↓ Stromes um eine sehr lange Zeit nachfolgt, die oft mehrere Secunden beträgt."

Ich habe zwar eine so bedeutende Verzögerung nur in seltenen Fällen und niemals an Nerven gesehen, deren Erregbarkeit durch Wasserverlust gesteigert wurde, gleichwohl kann ich jedoch in Hinblick auf die verhältnissmässig geringe Zahl meiner diesbezüglichen Versuche, sowie die Möglichkeit individueller Verschiedenheiten den Verdacht nicht unterdrücken, dass Pflüger in den erwähnten Fällen Präparate vor sich gehabt hat, welche sich im ersten Stadium der Vertrocknung befanden, da ich sonst niemals die in Rede stehende Erscheinung beobachtet habe, ausser wenn die Erregbarkeit des Nerven künstlich durch gewisse, sofort zu erwähnende Eingriffe über die Norm gesteigert wurde.

Bekanntlich erklärte Eckhard[1] die Erregungserscheinungen, welche man bei Einwirkung neutraler Alkalisalze und insbesondere des NaCl in Substanz oder in stärkeren Lösungen auf Nerven beobachtet, als bedingt durch Wasserentziehung und vergleicht dieselben direct mit den die Vertrocknung eines Nerven begleitenden Reizerscheinungen. Und in der That besteht eine grosse Übereinstimmung in dem Verlauf der Erscheinungen im ersteren wie letzteren Falle sowohl hinsichtlich der Veränderung der Erregbarkeit im Allgemeinen, wie auch betreffs des Auftretens und Charakters der Öffnungserregung.

Die Versuche mit NaCl in concentrirter Lösung gewähren zwar einerseits den Vortheil, dass es besser als bei der Vertrocknung gelingt, die Einwirkung auf eine bestimmte Nervenstrecke zu localisiren, allein andererseits haben dieselben wieder den Nachtheil, dass bei elektrischer Reizung eines mit NaCl behandelten Nervenabschnittes die Neigung zu tetanischer Verkürzung des Muskels schon bei den schwächsten Schliessungs- oder Öffnungsreizen bei weitem ausgesprochener ist, als im Verlaufe der Vertrocknung, so dass man fast immer nur Öffnungstetanus und nur selten Öffnungszuckungen auszulösen im Stande ist.

[1] Zeitschr. f. rat. Med. II. Bd. 1, pag. 303 ff., 1851.

Da ausserdem bei Behandlung der Nerven mit NaCl in seiner ganzen Ausdehnung der alsbald auftretende, von der Stromesrichtung, (so lange es sich, wie hier durchwegs, um schwache Ströme handelt) unabhängige Schliessungstetanus das Erkennen der Erregungserscheinungen bei Öffnung des Stromes vielfach beeinträchtigen würde, so thut man gut die Einwirkung des NaCl soviel als thunlich auf das Gebiet der Anode zu beschränken.

Es ist am bequemsten sich bei derartigen Versuchen derjenigen Form unpolarisirbarer Röhrenelektroden zu bedienen, welche zuerst von Engelmann[1] beschrieben wurde. Man braucht dann nur ein kleines, mit der betreffenden Salzlösung getränktes Baumwollbäuschchen auf die eine oder andere Elektrode zu legen, so dass eine etwa der Breite der Glasröhrchen entsprechende Nervenstrecke davon bedeckt ist. Das ganze Präparat nebst den Elektroden bringt man zweckmässig in eine feuchte Kammer, um bei längerer Dauer des Versuches das Austrocknen der frei liegenden Nervenabschnitte zu verhüten. Der Muskel steht vermittelst eines um eine Rolle gehenden Fadens mit einem ausserhalb der Kammer befindlichen Schreibstift in Verbindung, welcher die Gestaltveränderungen auf dem mit wechselnder Geschwindigkeit rotirenden Cylinder eines Kymographions zu verzeichnen gestattet. Bei Reizung mit schwachen Strömen beobachtet man schon nach wenigen Minuten eine deutliche Zunahme des Schliessungsreizerfolges, wenn der Austritt des Stromes in der mit NaCl behandelten Nervenstrecke erfolgt. Die Zuckungen werden aber bald tetanisch, und nach kurzer Zeit kommt es bei jeder Schliessung des Stromes in der angedeuteten Richtung zu einem kräftigen Tetanus (Taf. II, Fig. 5), der anfangs bei der Öffnung wieder vollständig verschwindet, in späteren Stadien der NaCl-Wirkung jedoch dauernd wird, womit natürlich allen weiteren Beobachtungen ein Ziel gesetzt ist. Zu einer Zeit, wo nach Application von NaCl auf die dem Muskel näher gelegene Elektrode ein absteigend gerichteter schwacher Strom bereits kräftigen Schliessungstetanus auslöst, beobachtet man in der Regel bei Schliessung desselben Stromes in umgekehrter Richtung nur eine einfache Zuckung, deren Verlauf und Grösse sich nicht

[1] Pflüger's Arch., Bd. VI, pag. 105.

von jenen Schliessungszuckungen unterscheidet, welche unter denselben Versuchsbedingungen vor der localen NaCl-Behandlung ausgelöst wurden. (Taf. II, Fig. 5.) Es dürfte dieser Umstand insoferne nicht ohne Interesse sein, als er zu beweisen scheint, dass es für die Grösse des Enderfolges der Reizung einer Nervenstelle gleichgiltig ist, wenn die ausgelöste „Reizwelle“ eine Nervenstrecke durchläuft, welche sich im Zustande erhöhter Erregbarkeit befindet.

Die Öffnung schwacher, aufsteigender Ströme bleibt nach localer NaCl-Behandlung an der Anode in der Regel noch ohne Erfolg, wenn nach Wendung des Stromes die Schliessung bereits kräftigen Tetanus auslöst. Man muss dann entweder den ↑ Strom etwas verstärken oder die Schliessungsdauer entsprechend vergrössern, um wirksame (meist tetanische) Öffnungserregung zu erzielen. Beides erscheint überflüssig in einem etwas vorgerückteren Stadium der örtlichen NaCl-Wirkung. Dann dauert es aber auch in der Regel nicht lange, bis der Muskel in Unruhe geräth, an welche sich unmittelbar der bekannte Kochsalztetanus anschliesst und weitere Reizversuche unmöglich macht, wenn man nicht vorher nach Entfernung des Baumwollbausches die betreffende Nervenstelle durch Auswaschen mit 0·5% NaCl-Lösung in den Zustand zurückversetzt, in welchem sie zwar noch eine gesteigerte Erregbarkeit erkennen lässt, ohne dass jedoch spontane Erregungserscheinungen ausgelöst werden.

Im Übrigen entspricht der Charakter der nach NaCl-Behandlung zu beobachtenden Öffnungswirkungen fast vollkommen dem Verhalten der analogen, oben geschilderten Erscheinungen am vertrocknenden Nerven und ist insbesondere das verspätete Eintreten der Öffnungscontraction, sowie deren Abhängigkeit von der Schliessungsdauer des Stromes in den meisten Fällen sehr deutlich wahrnehmbar. (Taf. I, Fig. 4, II.) Ich brauche mich daher auch unter Hinweis auf die beigegebenen Curven nicht weiter bei der Beschreibung der hierher gehörigen Thatsachen aufzuhalten, gehe vielmehr sofort zur Besprechung der besonders interessanten Wirkungsweise des Alkohols in hohen Verdünnungsgraden über.

Mommsen zeigte in der oben erwähnten Arbeit, dass die Erregbarkeit motorischer Nerven durch Application einer

schwach alkoholhaltigen (1—2 Volum $^0/_0$) NaCl-Lösung erheblich zunimmt, welche Steigerung erst nach lange dauernder Einwirkung einer Abnahme der Erregbarkeit bis zur völligen Unerregbarkeit Platz macht. Selbst dann ist aber noch eine Restitution durch Auswaschen mit 0·6 $^0/_0$ NaCl-Lösung möglich.

Wenn man den mit dem Rückenmark noch zusammenhängenden Ischiadicus eines Nerv-Muskelpräparates vom Frosche in seiner ganzen Ausdehnung mit alkoholischer NaCl-Lösung behandelt und von Minute zu Minute mit einem schwachen ↑ oder ↓ Kettenstrom reizt, so bemerkt man wieder zunächst eine sehr bedeutende Zunahme der Höhe der Schliessungszuckungen, ohne dass dieselben jedoch tetanisch würden. Fast gleichzeitig (gewöhnlich schon nach 2—4 Minuten) erfolgt aber auch bei Öffnung des Stromes eine, meist sehr verspätet eintretende Muskelzuckung, vorausgesetzt, dass die Schliessungsdauer nicht allzu kurz war. (Taf. I, Fig. 2, II; Fig. 3, II.) Wie lange aber ein Strom unter den gegebenen Bedingungen geschlossen bleiben muss, um bei der Öffnung erregend zu wirken, hängt natürlich abgesehen von der Intensität desselben auch von dem Grade der Alkoholwirkung ab, also einerseits von der Stärke der angewendeten Lösung, andererseits von der Dauer der Einwirkung derselben.

Im Allgemeinen erfolgt das Ansteigen der Erregbarkeit eines Nerven bei Behandlung mit einer nicht zu schwach alkoholischen Kochsalzlösung ziemlich rasch und tritt dann dementsprechend auch die OZ selbst bei Anwendung schwacher Ströme sehr bald und schon nach kurzer Schliessungsdauer auf. Zu bemerken wäre noch, dass die Öffnung aufsteigend gerichteter Ströme in der Regel etwas früher erregend wirkt, als die absteigender, was wohl mit dem Auftreten der sogenannten „negativen Modification“ des Katelektrotonus im letzteren Falle zusammenhängen dürfte.

Da es bei Alkoholbehandlung des Nerven niemals zu spontanem Tetanus kommt und wie auch Mommsen hervorhebt, vereinzelte Muskelzuckungen nur bei Anwendung stark alkoholhaltiger Salzlösung (bis zu 20 $^0/_0$ Vol.) bisweilen eintreten, so ist es hier, wie in keinem anderen mir bekannten Falle möglich, die Abhängigkeit der Öffnungserregung von dem Erregbarkeitszustande des Nerven, sowie deren besondere Eigenschaften mit

Bequemlichkeit zu untersuchen, zumal die Steigerung der Erregbarkeit lange Zeit hindurch gleichmässig anhält.

Als charakteristische Eigenthümlichkeiten der Öffnungserregung, welche bei künstlich gesteigerter Erregbarkeit eines Nerven durch schwache Kettenströme ausgelöst werden kann, wurde bereits in zwei Fällen erstlich das mehr oder weniger ausgesprochene, immer aber merkliche, verspätete Eintreten der Muskelverkürzung constatirt und zweitens die Abhängigkeit der Grösse und Form der Zuckungscurve von der Schliessungsdauer des Stromes.

Beides tritt in ausserordentlich klarer und überzeugender Weise hervor bei graphischer Verzeichnung der Öffnungszuckungen, welche bei Einwirkung schwacher Ströme auf alkoholisirte Nerven ausgelöst werden. Was zunächst die Verspätung anbelangt, so ist zu erwähnen, dass dieselbe innerhalb ziemlich weiter Grenzen schwankt.

Bisweilen nur eben merklich, kann die Verzögerung des Beginns der Muskelverkürzung in anderen Fällen mehrere Secunden betragen. Als bestimmende Momente kommen hier vor allem in Betracht die Schliessungsdauer und Intensität des Stromes, mit deren Zunahme die Grösse der „Latenzzeit“ im Allgemeinen abnimmt.

In gleichem Sinne wird das „Latenzstadium der Öffnungserregung“ bei Reizung alkoholisirter Nerven auch durch den Grad der Erregbarkeitssteigerung beeinflusst, so dass dasselbe im Beginn einer Versuchsreihe gewöhnlich merklich grösser erscheint, als im Verlaufe derselben, wenn auch hier vielleicht der Einfluss der in kurzen Pausen sich folgenden Einzelreize (bei durchwegs gleicher Schliessungsdauer) von grösserer Bedeutung ist, zumal bereits Pflüger[1] darauf hinweist „dass das Phänomen (der Verspätung) nach mehrmals wiederholtem Schliessen sich änderte, indem die OZ dann immer schneller und schneller der Öffnung folgte, bis endlich kein Intervall mehr zu bemerken war“.

Ein Blick auf die mit II bezeichneten Öffnungszuckungscurven der Fig. 1 und 2. auf Taf. I. lässt sofort auch die

---

[1] L. c. pag. 76.

höchst auffallende Abhängigkeit der Öffnungserregung von der Schliessungsdauer des Reizstromes unter den gegebenen Versuchsbedingungen erkennen und zeigt, wie verhältnissmässig geringfügige Änderungen der letzteren genügen, um die erstere entweder vollkommen zu unterdrücken oder umgekehrt maximale Zuckungen auszulösen. Soweit stimmen die Ergebnisse der elektrischen Reizung alkoholisirter Nerven und solcher, deren Anspruchsfähigkeit durch partiellen Wasserverlust oder Kochsalzbehandlung erhöht wurde, fast vollkommen überein; dagegen macht sich ein, allerdings nur unwesentlicher, Unterschied bemerkbar hinsichtlich des vorwiegenden Charakters der Zuckungscurve. Während nämlich am vertrocknenden Nerven die Auslösung einfacher Öffnungszuckungen in einem gewissen, dem Auftreten spontaner Erregungserscheinungen unmittelbar vorausgehenden Stadium, selbst bei Anwendung sehr schwacher Ströme nicht mehr gelingt und es dann immer nur zu tetanischer Contraction des Muskels (Ritter'scher Öffnungstetanus) kommt, was in noch höherem Maasse bei Kochsalzbehandlung eines Nerven gilt, bedarf es umgekehrt ziemlich andauernder Durchströmung bei nicht zu geringer Intensität des Stromes, um nach Alkoholbehandlung des Nerven einen ausgesprochenen Öffnungstetanus zu erzielen. Meist kommt es nach etwas längerer Schliessungsdauer nur zu gedehnt verlaufenden Zuckungen, die als Übergangsformen zwischen einer einfachen OZ und andauernder tetanischer Verkürzung des Muskels betrachtet werden müssen.

Hiermit steht in Übereinstimmung, dass auch das Auftreten des Schliessungstetanus bei schwacher elektrischer Reizung alkoholisirter Nerven als Ausnahme betrachtet werden muss, obschon die Curven, sowohl der Schliessungs- wie auch der Öffnungszuckungen sich durch den meist abgerundeten Gipfel von solchen unterscheiden, welche bei Erregung normaler Nerven durch Momentanreize (einzelne Inductionsschläge) oder auch durch Schliessung eines Kettenstromes erhalten werden.

Da, meinen früheren Erfahrungen zufolge,[1] selbst hochgradig verdünnte Lösungen von Na_2CO_3 sich dadurch auszeichnen, dass

[1] Diese Beiträge IV. Wiener akad. Sitzungsberichte. Bd. LXXX, 1879.

durch ihre Einwirkung nicht nur die Ansprnchsfähigkeit der contractilen Substanz quergestreifter Muskeln für den Schliessungsreiz ausserordentlich gesteigert wird, sondern dass an solchen Stellen auch vorher unwirksame Öffnungsreize zur Auslösung von Zuckungen führen, unter Verhältnissen, bei welchen der Muskel normaler Weise niemals auf das Verschwinden eines Stromes reagirt und in Berücksichtigung des Umstandes, dass zwischen Muskel und Nerv hinsichtlich ihres Verhaltens gegen den elektrischen Strom weitgehende Analogien bestehen, hatte ich erwartet, dass auch die Erregbarkeit des markhaltigen Nerven durch Na_2CO_3 in gleichem Sinne sich würde verändern lassen, wie die des Muskels. Indessen überzeugt man sich bald, dass verdünnte Lösungen von Na_2CO_3 (0·5—2%) die Erregbarkeit des Nerven nicht nur nicht erhöhen, sondern nach einiger Zeit deutlich herabsetzen, sei es dass man denselben ganz eintaucht oder die alkalische Lösung nur auf eine beschränkte Stelle in der Continuität des Nerven applicirt. OZ beobachtet man bei Reizung markhaltiger Nerven selbst nach lang anhaltender Behandlung mit verdünnten Lösungen von Na_2CO_3 nicht.

Aus den vorstehend beschriebenen Versuchen geht nun mit aller Sicherheit hervor, dass, während es am normalen, unversehrten Nerven niemals gelingt durch schwächere Ströme Öffnungserregung auszulösen, dies allerdings möglich ist, wenn die Erregbarkeit desselben künstlich gesteigert wird, und es würde daher von dieser Seite die Annahme durchaus berechtigt erscheinen, dass auch das Auftreten der OZ nach Anlegung eines Querschnittes am Nerven als Folge der dadurch bedingten Erregbarkeitserhöhung zu betrachten sei.

Ausser den schon früher angeführten und, wie mir scheint, triftigen Gegengründen ergibt jedoch schon die einfache Vergleichung der in beiden Fällen zu beobachtenden Öffnungsreizerfolge, dass nicht nur keine Übereinstimmung der wesentlichsten Eigenschaften derselben besteht, wie es doch wohl der Fall sein müsste, wenn der Öffnungserregung in beiden Fällen die gleiche Ursache zu Grunde liegen würde, sondern es drängt sich bei genauerer Untersuchung der betreffenden Erscheinungen mehr

und mehr die Überzeugung auf, dass es sich hier um zwei von einander streng zu sondernde Wirkungen des elektrischen Stromes handelt, verschieden nicht nur hinsichtlich der Bedingungen ihres Eintretens, sondern auch in der Art und Weise, wie sie sich am Muskel äussern.

Als charakteristische Eigenthümlichkeiten der Öffnungszuckungen, welche bei Einwirkung schwächerer Ströme auf Nerven ausgelöst werden, deren Erregbarkeit beträchtlich gesteigert wurde, macht sich den oben mitgetheilten Erfahrungen zufolge vor allem das verspätete Eintreten derselben, sowie deren Abhängigkeit von der Schliessungsdauer bemerkbar und sie unterscheiden sich in dieser Beziehung wesentlich von jenen Öffnungszuckungen, welche unter sonst gleichen Versuchsbedingungen in nächster Nähe eines Querschnittes an sonst normalen Nerven ausgelöst werden. An der Curve dieser letzteren lässt sich ohne Zuhilfenahme feinerer, zeitmessender Untersuchungsmethoden niemals ein merkliches Intervall zwischen dem Moment der Öffnung des Stromes und dem Beginn der Muskelverkürzung wahrnehmen; auch verläuft die Curve viel steiler und zeigt stets einen spitzen Gipfel, ohne jemals an Höhe den Öffnungszuckungen gleich zu kommen, welche in Folge künstlich gesteigerter Erregbarkeit des Nerven ausgelöst werden können. (Taf. II, Fig. 1, *a*, *b*, *c*.) Besonders ist es aber bemerkenswerth, dass die Schliessungsdauer des Reizstromes nur innerhalb sehr enger Grenzen die Grösse und in keiner Weise den Charakter der „Querschnitts-Öffnungszuckungen", wie ich dieselben kurz bezeichnen will, zu beeinflussen vermag; denn niemals sieht man die Curven derselben einen gedehnteren Verlauf annehmen oder gar tetanisch werden, selbst wenn ein ziemlich starker Strom in ↓ Richtung beliebig lange. das Schnittende eines vor Verdunstung geschützten Nerven durchfliesst.

Diese Momente dürften vielleicht allein schon genügen, um die Annahme einer doppelten, in Ursache und Erscheinungsweise verschiedenen Öffnungserregung nicht ganz unberechtigt erscheinen zu lassen; indessen lassen sich hierfür noch weitere und, wie ich glaube, zwingende Gründe beibringen.

Ich muss hier zunächst auf die Thatsache aufmerksam machen, dass Öffnungszuckungen von genau demselben Charakter, wie in der Nähe eines Querschnittes, auch am unverletzten Nerven, also unabhängig von dem Einfluss des Schnittes unter gewissen Bedingungen durch selbst sehr schwache Ströme ausgelöst werden können. Merkwürdigerweise ist es aber nicht sowohl eine erhöhte, als vielmehr eine bedeutend verminderte Erregbarkeit des Nerven, welche dann das Auftreten derselben zu begünstigen scheint.

Wenn man in der bekannten Weise den mit dem Rückenmark noch zusammenhängenden N. ischiadicus vom Frosche mit einer nicht zu schwachen alkoholischen Kochsalzlösung (etwa 10 Vol. %) behandelt und von Minute zu Minute mit einem ↑ oder auch ↓ gerichteten Kettenstrom von geringer Intensität reizt (es empfiehlt sich im Allgemeinen die ↑ Stromesrichtung desshalb mehr, weil sich bei derselben die Wirkung der Anode ganz ungestört zu entfalten vermag), so bemerkt man bald neben der, anfangs allein vorhandenen, bereits ausführlich besprochenen, verspäteten OZ eine zweite, welche sich, im Momente der Öffnung beginnend, in die Pause zwischen diesem und dem Beginn der verspäteten Muskelzuckung einschiebt und so gewissermassen einen Vorschlag derselben bildet. (Taf. I, Fig. 2, I.) Ob dieser Vorschlag als völlig gesonderte Zuckung hervortritt, indem der Muskel vollständig wieder erschlafft, bevor die verspätete Zuckung (OZ. II) beginnt, oder mit dieser theilweise oder ganz verschmilzt, hängt natürlich von der Grösse des Zeitintervalls zwischen dem Moment der Öffnung und dem Beginn der OZ. II und daher wesentlich von der Schliessungsdauer des Stromes ab.

In Folge der fortschreitenden Alkoholwirkung sinkt allmälig die Anspruchsfähigkeit des Nerven, und dem entsprechend nimmt die Höhe der SZ-Curven, wie auch die der OZ. II ab und nun zeigt sich die auffallende Thatsache, dass die erste Öffnungszuckung (OZ. I) ihren grössten Werth erst dann erreicht, wenn die Erregbarkeit schon beträchtlich abgenommen hat. Wenig später fehlt die OZ. II vollständig und

tritt auch bei beliebig langer Schliessungsdauer nicht mehr hervor, gleichwohl bleibt dann die OZ. I neben der in ihrer Grösse beträchtlich reducirten SZ bestehen, welcher sie meist gleichkommt, dieselbe unter Umständen sogar übertrifft. (Taf. I, Fig. 2.) Bringt man um diese Zeit das ganze Präparat in eine reichliche Menge 0·6% NaCl-Lösung, so gelingt es leicht, die normalen Erregbarkeitsverhältnisse des Nerven vollständig wieder herzustellen, so dass an jeder beliebigen Stelle eine SZ den einzigen Reizerfolg nicht zu starker ↑ oder ↓ gerichteter Ströme darstellt. (Taf. I, Fig. 2.) Man kann dann bei abermaliger Behandlung mit verdünntem Alkohol dieselbe Reihenfolge der Erscheinungen auch ein zweites Mal, unter Umständen sogar noch ein drittes Mal beobachten.

Die Behandlung eines Nerven mit alkoholischer Kochsalzlösung gewährt den grossen Vortheil, dass man dabei, ohne die sonstigen Versuchsbedingungen irgendwie zu ändern, an einem und demselben Präparate die Art und Weise wie sich die Reizerfolge bei Öffnung des Stromes im Verlaufe der Einwirkung ändern, genau zu verfolgen und so den directen Beweis zu liefern vermag, dass die beiden in Rede stehenden Zuckungsformen gleichzeitig neben einander zu bestehen vermögen, und daher als von einander verschiedene Wirkungen des Stromes aufgefasst werden müssen. Dies lässt sich mit gleicher Sicherheit weder aus der alleinigen Untersuchung der Öffnungsreizerfolge vertrocknender oder mit Kochsalz behandelter Nerven erschliessen, da der bald eintretende spontane Tetanus länger dauernde Beobachtungen verhindert, noch würden die sofort zu besprechenden Fälle ausschlaggebend sein, wo nur die OZ. I zum Vorschein kommt, da die anfängliche Erregbarkeitserhöhung entweder vollständig fehlt oder doch zu wenig ausgesprochen ist.

Ranke[1] gibt an, dass „durch die Kalisalzwirkung die Erregbarkeit der Nerven primär erhöht wird. Erst in der Folge und bei stärkerer Kaliwirkung tritt die Herabsetzung der Erregbarkeit und der Nerventod ein.“ Er rechnet daher die neutralen Kalisalze zu den „Ermüdungsstoffen“ des Nerven, indem er als charakteristisch für die „Nervenermüdung“ überhaupt angibt, dass

[1] Lebensbedingungen der Nerven, pag. 69.

sie „zwei verschiedene Stadien erkennen lässt: das primäre Stadium ist eine Erhöhung, das secundäre eine Verminderung der Erregbarkeit," die schliesslich in den Nerventod übergeht. [1]

Diesen Erfahrungen zufolge wäre demnach die Aufeinanderfolge der Erregbarkeitsänderungen in den verschiedenen Stadien der Kalisalzwirkung ganz dieselbe, wie bei Einwirkung alkoholischer Kochsalzlösung, und wäre daher auch ein analoges Verhalten gegenüber schwachen Öffnungsreizen zu erwarten. Aus den im Folgenden mitzutheilenden Beobachtungen geht jedoch hervor, dass sich diese Erwartungen nur zum Theil erfüllen.

Wenn man den vom Centralorgan getrennten Nerven eines Nerv-Muskelpräparates seiner ganzen Länge nach in eine stark verdünnte (1%) Lösung von KNO_3 taucht, so beobachtet man schon nach kurzer Zeit (5—10 Min.) eine höchst charakteristische Veränderung der Reation des Muskels bei Reizung des Nerven mit schwachen Kettenströmen, derart, dass eine OZ (vom Charakter der OZ. I) nicht nur, wie vorher, ausschliesslich bei ↓ Stromesrichtung auftritt, sobald sich die Anode in nächster Nähe des Querschnittes befindet, sondern unabhängig von der Lage und dem Abstand der Elektroden bei ↓ wie auch bei ↑ Richtung des Reizstromes ausgelöst wird, ohne dass sich zu dieser Zeit eine irgend beträchtliche Steigerung der Anspruchsfähigkeit für Schliessungsreize nachweisen liesse. (Taf. II, Fig. 1, *f. g.*) In den meisten Fällen findet man sogar die Höhe der Schliessungszuckungen geringer als vor Beginn der Kaliwirkung. Ganz gleiche Resultate ergibt auch die Behandlung undurchschnittener, mit dem Rückenmark noch zusammenhängender Nerven mit KNO_3 in 1% Lösung. (Taf. II, Fig. 2, *a—f.*)

Wenn man dann von Zeit zu Zeit verschiedene Stellen des Nerven bei gleichbleibender Distanz der Electroden (etwa 1—2 Ctm.) mit schwachen Strömen reizt, so findet man zumeist, dass in der dem Plexus entsprechenden Nervenstrecke der Öffnungsreiz früher wirksam wird, als an tiefer gelegenen Nervenpartien. Da die Salzlösung offenbar an jenen Stellen früher ihre Wirkung entfalten wird, wo die Fasermasse des Nerven noch in einzelne Bündel zerspalten ist, als tiefer unten nach ihrer

---

[1] L. c., pag. 69.

Vereinigung zu einem einzigen Stamme, dürfte sich das eben erwähnte Verhalten leicht erklären. Wenn man nur den unterhalb des Plexus gelegenen Nervenabschnitt bis etwa in die Nähe der untersten Theilungsstelle mit KNO_3 behandelt, indem man denselben zwischen zwei mit der Salzlösung getränkten Papierbäuschen einbettet, so kann man bei einer und derselben Stromstärke an allen Stellen der betreffenden Nervenstrecke gleichzeitig gleichstarke Öffnungszuckungen auslösen. Legt man aber an einem derartig vorbereiteten Präparate die Elektroden bei geringem Abstand an den Plexus selbst, so beobachtet man entweder nur SZ bei beiden Stromesrichtungen, wenn der Zusammenhang mit dem Rückenmark noch besteht, andernfalls dagegen wegen der Nähe des Querschnittes SZ und OZ bei ↓ Stromesrichtung.

Wenn sich die Einwirkung der Kalisalpeterlösung nicht bis in die unmittelbare Nähe des Muskels erstreckt, sondern daselbst ein etwa 2 Ctm. langer Nervenabschnitt derselben entzogen bleibt, so kann man sich sehr schön davon überzeugen, wie bei allmäligem Vorrücken die in gleichem Abstand (1 Ctm.) erhaltenen Elektroden vom Centrum nach der Peripherie die OZ bei ↑ Stromesrichtung immer kleiner wird, je näher man an die normal gebliebene Nervenstrecke herankommt und ein je grösserer Theil derselben daher in das Bereich der Anode fällt, um schliesslich ganz zu verschwinden, während die Höhe der Schliessungszuckungscurve unverändert bleibt oder sogar merklich zunimmt. (Taf. II, Fig. 1, *f*—*k*.) Das Gleiche gilt auch für den ↓ Strom, nur muss man in diesem Falle die Elektroden dem Muskel noch mehr nähern, um die OZ ganz zum Verschwinden zu bringen, da dann zunächst die Kathode und später erst die Anode in das Bereich des normal gebliebenen Nervenabschnittes fällt. D i e H ö h e d e r S Z n i m m t d a n n i m m e r b e d e u t e n d z u, was wieder darauf hinweist, dass die Anspruchsfähigkeit für Schliessungsreize an normalen Nervenstellen in der Regel grösser ist, als an solchen, welche durch die Einwirkung von Kalisalzen verändert wurden, ohne dass im ersteren Falle OZ ausgelöst wird, die im letzteren niemals fehlt. (Taf. II, Fig. 2, i, *k*, *l*.)

Wenn man in einem nicht allzu vorgerückten Stadium der KNO_3-Wirkung den Nerven, dessen Reizung mit schwachen

Kettenströmen an allen Punkten etwa gleich starke SZ und OZ auslöst, in eine genügend grosse Menge 0·6°/₀ NaCl-Lösung taucht, so bemerkt man bald, dass, während die Grösse der Schliessungszuckungen zunächst unverändert bleibt, die Höhe der Öffnungszuckungen mehr und mehr abnimmt, je länger das Auslaugen fortgesetzt wird und schliesslich bleiben dieselben nach etwa 10—15 Minuten bei gleicher Stromstärke wie vorher, ja selbst bei Anwendung viel stärkerer Ströme gänzlich aus, so dass die SZ, wie vor Beginn des Versuches, den einzigen Reizerfolg bei beiden Stromesrichtungen darstellt. (Taf. II, Fig. 1, 2.)

Wie schon oben erwähnt wurde, stimmen die Öffnungszuckungen, welche im Verlaufe der Kalisalzwirkung durch schwache Ströme ausgelöst werden können, hinsichtlich ihres Charakters vollkommen mit jenen überein, die unter dem Einfluss der Alkoholwirkung als Vorschlag der anfangs allein vorhandenen verspäteten OZ. II beobachtet werden. Zuckungen, welche als Analoga dieser letzteren aufgefasst werden dürften, fehlen dagegen am Kalinerven vollständig.

Es schien von vorneherein nicht unwahrscheinlich zu sein, dass es durch Behandlung kleinerer Nervenstrecken mit KNO_3 auch gelingen würde, ganz local jene Bedingungen herzustellen, welche das Auftreten „primärer Öffnungszuckungen“ (OZ. I) in so hohem Grade zu begünstigen scheinen, und daher schwachen aufsteigenden oder absteigenden Strömen, bei einer bestimmten Lage der Elektroden, die Fähigkeit zu ertheilen, wirksame Öffnungserregung auszulösen.

Wenn man sich derselben Versuchsanordnung bedient, welche oben bei Besprechung der örtlichen Behandlung des Nerven mit concentrirter Kochsalzlösung erwähnt wurde und zur Reizung Ströme von geringer Intensität verwendet, so beobachtet man einige Zeit nach dem Auflegen des mit 1°/₀ KNO_3-Lösung getränkten Baumwollbäuschchens auf die eine oder andere Elektrode ein verschiedenes Verhalten, je nachdem der Nerv im Bereich der dem Muskel oder dem Centrum näher gelegenen Elektrode der Einwirkung der Kalisalzlösung ausgesetzt wurde. In beiden Fällen bleibt die Grösse der SZ während der ersten Minuten unverändert, wie man sich leicht bei graphischer Verzeichnung

derselben überzeugen kann. In der Folge tritt dann aber zumeist ein Unterschied in der Höhe der SZ bei ↑ und ↓ Ströme hervor und zwar stets zu Gunsten derjenigen Stromesrichtung, bei welcher die Kathode die normal gebliebene Nervenstelle berührt. (Taf. II, Fig. 3.) Doch kommt es auch vor, dass nach einer 10 Minuten und länger dauernden örtlichen Behandlung des Nerven mit 1 % KNO_3-Lösung die Anspruchsfähigkeit der betreffenden Stelle (für Schliessungsreize) noch kaum merklich vermindert erscheint. (Taf. II, Fig. 4.) Dagegen entwickelt sich ausnahmslos während dieser Zeit eine auffallend gesteigerte Empfindlichkeit der mit KNO_3 behandelten Nervenstrecke für selbst sehr schwache Öffnungsreize, sei es nun, dass der Nerv vom Centralorgan getrennt ist oder mit demselben noch zusammenhängt.

Je nach der Lage des Baumwollbausches auf der dem Muskel näheren oder davon entfernteren Elektrode, tritt dann entweder bei aufsteigender oder bei absteigender Stromesrichtung zu der bereits vorhandenen SZ auch die OZ hinzu und erreicht gewöhnlich bald dieselbe Grösse wie jene. (Taf. II, Fig. 3 und 4.)

Ich brauche kaum besonders hervorzuheben, dass es auch in diesem Falle gelingt, die örtlich veränderte Anspruchsfähigkeit des Nerven für den Öffnungsreiz durch Auswaschen mit 0·6 % NaCl-Lösung wieder zu beseitigen. Es ist hiezu nicht einmal nothwendig, die Elektroden und das Baumwollbäuschchen zu entfernen, sondern es genügt, die das letztere tränkende Kalisalzlösung durch einen während mehrerer Minuten unterhaltenen Strom von Kochsalzlösung zu verdrängen, was am leichtesten mittelst eines passend angebrachten Tropffläschchens zu bewerkstelligen ist. Obschon in diesem Falle alle übrigen Versuchsbedingungen, insbesondere die Dichte und Intensität des Stromes so gut wie unverändert bleiben und die Erregung an genau denselben Stellen des Nerven erfolgt, wie vorher, sieht man nichtsdestoweniger die OZ immer kleiner werden und schliesslich verschwinden, ohne dass die SZ bei der gleichen oder entgegengesetzten Stromesrichtung wesentliche Veränderungen erkennen liesse. (Taf. II, Fig. 4.) Die vorstehend beschriebenen Versuche wurden sämmtlich mit Kalisalpeter in 1 % Lösung angestellt. Ich habe jedoch nicht unterlassen, auch andere Kalisalze hinsichtlich ihrer Wirkung auf den Nerven zu untersuchen, so insbesondere KCl in 1 %, K_2CO_3 in 0·2 % und

KH_2PO_4 in 2% Lösung. Wie zu erwarten war, gelang es auch bei Anwendung dieser Salzlösungen die gleichen Erscheinungen zu beobachten, wie mit KNO_3, und machen sich Unterschiede nur mit Rücksicht auf Raschheit und Intensität der Wirkung bemerkbar.

Von Interesse ist es auch, dass Milchsäure (und zwar ebensowohl Gährungs- als Fleichmilchsäure), welche hinsichtlich ihrer Einwirkung auf die Erregbarkeit des Muskels, wie auch des Nerven von Ranke in eine Gruppe mit den Kalisalzen gestellt wird, das Hervortreten der OZ. I nicht begünstigt, wenn sie in verdünnter Lösung angewendet wird. Man kann 0·6% NaCl-Lösung bis zu stark saurer Reaction mit Milchsäure versetzen, ohne dass es gelingt, bei Reizung eines vorher längere Zeit eingetauchten, mit dem Rückenmark noch in Verbindung stehenden Nerven I Öffnungszuckungen auszulösen. Es genügt aber dann, denselben Nerven nur wenige Minuten mit 1% KNO_3-Lösung zu behandeln, um sofort kräftige OZ. I selbst bei Reizung mit schwächsten Strömen zu beobachten. Es scheint überhaupt, dass die normalen Lebenseigenschaften der Nerven sich in sauren Lösungen ziemlich lange unverändert zu erhalten vermögen, was bereits Ranke hervorhob.

Aber nicht nur gewisse, künstlich erzeugte chemische Veränderungen der Nervensubstanz, welche mit einer beträchtlichen Herabsetzung der Erregbarkeit verbunden sein können und in besonders hohem Grade durch Kalisalze hervorgebracht werden, begünstigen die Auslösung „primärer Öffnungszuckungen", sondern es scheint, dass auch der elektrische Strom selbst an den Eintrittsstellen ähnliche Veränderungen des Nerven zu erzeugen vermag.

Der Satz, dass bei elektrischer Reizung normaler unversehrter Nerven unabhängig von der jeweiligen Stromesrichtung nur Schliessungszuckungen des Muskels ausgelöst werden, gilt, wie schon erwähnt, im allgemeinen nur für schwache und mittelstarke Ströme. Bei meinen Versuchen beobachtete ich fast ausnahmslos wirksame Öffnungserregung bei Anwendung eines Daniell'schen Elementes nach Einschaltung einer Widerstandseinheit des Du Bois'schen Rheochords, sowohl vor als nach der Trennung vom Centralorgan (im letzteren Falle an vom Querschnitt genügend entfernter Nervenstelle).

Es stellte sich jedoch die bemerkenswerthe Thatsache heraus, dass **unmittelbar nach Ablauf einer durch einen stärkeren Strom ausgelösten OZ auch das Verschwinden vorher nur bei Schliessung wirksamer, schwacher Ströme erregend wirkt und zwar in fast gleichem Grade wie die Öffnung des starken Stromes. Dieser Reizerfolg nimmt aber schon nach kurzer Zeit an Grösse ab und verschwindet, wenn der Nerv hinreichend lebenskräftig war, nach wenigen Minuten der Ruhe vollständig.** Diese eigenthümliche Nachwirkung ist unter sonst gleichen Umständen um so anhaltender, je länger vorher der stärkere Strom einwirkte und je weniger lebenskräftig der Nerv war.

Man stellt den Versuch am einfachsten in der Weise an, dass man zunächst durch Verschieben des Rheochordschlittens diejenige Stromstärke ermittelt, bei welcher deutliche Öffnungserregung des Nerven erfolgt und hierauf nach raschem Zurückschieben des Schlittens mit ganz schwachen Strömen reizt, deren alleinige Wirksamkeit bei der Schliessung vorher geprüft wurde. Besser noch bedient man sich eines Rheochords mit zwei verschiebbaren Schlitten, die sich von den gewöhnlich gebrauchten nur dadurch unterscheiden, dass die beiden Quecksilbergefässe nicht unmittelbar in leitender Verbindung stehen, diese vielmehr an jedem der beiden Schlitten in einem beliebigen Momente hergestellt und wieder aufgehoben werden kann. Zu dem Zwecke ist an dem einen Quecksilbergefäss eines jeden Schlittens ein Metallnäpfchen angelöthet, das mit Quecksilber gefüllt wird und in welches die Spitze einer mit dem anderen Quecksilbergefäss leitend verbundenen Metallfeder eintaucht, sobald man dieselbe niederdrückt. Im Übrigen wird das Instrument ganz in der gewöhnlichen Weise in den Stromkreis eingeschaltet. Nachdem man sich überzeugt hat, dass bei Einschaltung eines geringen Widerstandes mittelst des ersten Schlittens, der Muskel nur bei der Schliessung zuckt, schickt man mittelst des zweiten, weiter vorgeschobenen Schlittens einen stärkeren Strom durch den Nerven, der voraussichtlich genügt, um Öffnungserregung zu bewirken, und öffnet diesen Schlitten nach wenigen Secunden, nachdem man zuvor die Feder des ersten Schlittens niedergedrückt hat; dann

öffnet man sofort den Stromkreis vollständig, wobei der Muskel in der Regel kräftig zuckt, während dieselbe negative Stromschwankung vorher nicht erregend wirkte.

Man kann daher, wie durch locale Kalisalzbehandlung eine beliebige Stelle in der Continuität eines unversehrten Nerven auch dadurch für schwache unter normalen Verhältnissen niemals wirksame Öffnungsreize empfänglich machen, dass man dieselbe für kurze Zeit zur Eintrittsstelle eines stärkeren Kettenstromes macht, und wie im ersteren Falle die gesteigerte Disposition für die Öffnungserregung durch Auslaugen der schädlichen Substanzen mit einer indifferenten Flüssigkeit beseitigt werden konnte, so genügen die im ausgeschnittenen Nerven fortdauernden Restitutionsprocesse, um auch im letzteren Falle die durch den Strom selbst bewirkten anodischen Veränderungen wieder aufzuheben und die normale Unempfindlichkeit für Öffnungsreize wieder herzustellen.

Die Öffnungserregung, welche nach kurzer Schliessung eines stärkeren Stromes an den anodischen Nervenstellen durch Ströme von geringer Intensität ausgelöst werden kann, äussert sich, wie schon erwähnt, stets durch Muskelzuckungen, deren Eigenschaften dieselben als durchaus gleichwerthig mit jenen erscheinen lassen, die man nach Einwirkung von Kalisalzlösungen oder in nächster Nähe eines frisch angelegten Querschnittes auszulösen vermag. Abgesehen von dem Fehlen eines merklichen Intervalls zwischen dem Moment der Öffnung und dem Beginn der Verkürzung äussert sich dies insbesondere durch die übereinstimmende Form der Zuckungscurven und den geringen Einfluss der Intensität und Schliessungsdauer des Reizstromes auf die Grösse der Zuckungen.

Ein weiterer Beweis für die Gleichwerthigkeit der Öffnungszuckungen, welche nach Kalisalzbehandlung eines Nerven ausgelöst werden, die ihrerseits als identisch mit den „primären Öffnungszuckungen“ nach Einwirkung von Alkohol angesehen werden müssen, und der durch stärkere Ströme an normalen, unversehrten Nerven ausgelösten Öffnungszuckungen, ist dadurch gegeben, dass es gelingt, die letzteren neben „secundären“ verspäteten Öffnungszuckungen (OZ. II) an einem und demselben Präparate gleichzeitig auftreten zu sehen. Da der Ritter'sche

Öffnungstetanus früheren Auseinandersetzungen zufolge, gleichwerthig ist der OZ. II und wie diese unter Umständen verspätet eintritt, was bereits Wundt[1] beobachtete, so besteht in solchen Fällen der Öffnungsreizerfolg entweder in einer vollständig oder unvollständig getrennten Doppelzuckung, oder es bildet die OZ. I einen Vorschlag zu dem Ritter'schen Tetanus. Eine Reihe derartiger Fälle sind auf Taf. I, Fig. 1, 3, 4, 5 abgebildet.

Die betreffenden Curven wurden in der Weise gewonnen, dass, nachdem die Erregbarkeit des Nerven durch Wasserverlust, Kochsalz- oder Alkoholbehandlung beträchtlich gesteigert und in Folge dessen die Disposition für die Auslösung secundärer Öffnungserregung hergestellt war, ein stärkerer Strom während einiger Secunden geschlossen blieb, um die anodischen Faserstellen zugleich für die Auslösung primärer Öffnungszuckungen (durch Ströme von geringer Intensität) zu disponiren. So lange dann die Nachwirkung der einmaligen Schliessung eines starken Stromes anhält, beobachtet man auch bei Öffnung schwächerer Ströme die doppelten Reizerfolge, ja sie treten sogar gerade dann besonders deutlich gesondert hervor, während bei Anwendung stärkerer Ströme wegen der Verkürzung des „Latenzstadiums" der OZ. II beide Zuckungen leicht zu einer einzigen verschmelzen, was in gleicher Weise auch vom Ritter'schen Tetanus gilt. Dieser letztere Umstand lässt es auch, wie ich glaube, begreiflich erscheinen, dass man bisher das Vorhandensein von zwei wesentlich verschiedenen Öffnungswirkungen des Stromes übersehen hat.

Es erhebt sich nunmehr die wichtige Frage, ob die beiden, unter gewissen, in der vorliegenden Abhandlung erörterten, Versuchsbedingungen zu beobachtenden Öffnungsreizerfolge ungeachtet ihrer Verschiedenheit auf eine und dieselbe Grundursache zurückgeführt werden können und wenn nicht, welche ursächliche Momente denselben zu Grunde liegen.

Was zunächst die erste Frage anbelangt, so dürfte eine unbefangene und vorurtheilslose Prüfung der mitgetheilten Thatsachen genügen, um die Unwahrscheinlichkeit einer einheitlichen Entstehungsursache von Reizerfolgen darzuthun, welche nicht

---

[1] Arch. f. physiol. Heilkunde. N. F. Bd. 2, pag. 375 und Mechanik d. Nerven und Nervencentren, I. pag. 247.

nur betreffs der Bedingungen ihres Eintretens, sondern auch hinsichtlich ihrer Eigenschaften so wenig übereinstimmen wie die I und II OZ. Während das Auftreten der letzteren geknüpft erscheint an das Vorhandensein einer beträchtlich erhöhten Erregbarkeit des Nerven, tritt die erstere umgekehrt gerade, bei herabgesetzter Erregbarkeit desselben hervor, und während bei Anwendung schwächerer Ströme ein verspätetes Eintreten der OZ. II und des ihr gleichwerthigen Ritter'schen Tetanus als Regel gelten darf, und ausserdem die Abhängigkeit von der Schliessungsdauer des Stromes auf das Deutlichste hervortritt, ist ein merkliches Intervall zwischen dem Moment der Öffnung und dem Beginn der OZ. I niemals vorhanden; auch ist dieselbe, sobald einmal die Bedingungen ihres Auftretens gegeben sind, fast ganz unabhängig von der Schliessungsdauer und Intensität des Reizstromes.

Die unzweifelhafte Gleichwerthigkeit der OZ. II und des Ritter'schen Tetanus gestattet für beide die gleiche Entstehungsursache anzunehmen. Pflüger, welcher jede OZ als Folge der Erregung des Nerven durch das Verschwinden des Anelektrotonus betrachtete, erklärte auch den Ritter'schen Tetanus in derselben Weise und bewies in der That durch den bekannten Versuch mit Abschneiden einer vorher anelectrotonisirten Nervenstrecke, dass der Öffnungstetanus in dieser selbst entsteht. Nach Engelmann's [1] Anschauung verdankt er jedoch hier seine Entstehung bereits vorhandenen, spontanen Reizen, welche, vorher unwirksam, in Folge der nach der Öffnung eintretenden positiven Modification der Erregbarkeit der vorher anelektrotonischen Nervenstrecken zu wirksamen Reizen werden, und dann eine Gestaltveränderung des Muskels herbeizuführen vermögen. Engelmann stützt diese Anschauung besonders mit dem Hinweis auf die leicht zu bestätigende Thatsache, dass „in frischen, vor Verdunstung geschützten Nerv-Muskelpräparaten normaler Frösche nach der Öffnung des Stromes eine einfache Zuckung eintritt, die sich nicht unterscheidet von der Schliessungszuckung oder der Zuckung nach einem einzelnen Inductionsschlag". „Mit der grössten Regelmässigkeit dagegen tritt der Öffnungstetanus (wie

---

[1] Pflüger's Arch., Bd. III, pag. 411.

auch der analoge Schliessungstetanus) bei erkältet gewesenen Präparaten ein,“ deren Nerven sich durch eine ausserordentliche Reizbarkeit auszeichnen, welche Engelmann eben auf das Vorhandensein innerer Reize bezieht, die oft so mächtig werden, dass auch bei sorgfältigstem Schutz vor Verdunstung spontane Zuckungen auftreten oder gar Tetanus ausbricht. Als weitere Stütze der Engelmann'schen Ansicht über die Natur des Ritter'schen Tetanus kann ein Versuch von Grünhagen[1] gelten, welcher zeigt, dass „schwache tetanische Reizung, welche vor Schluss des polarisirenden Stromes keinen sichtbaren Effect erzielte, nach Öffnung desselben einen deutlichen Tetanus hervorruft, dessen Dauer um so länger ausfällt, je stärker der polarisirende Strom und je empfindlicher der Nerv war“. Grünhagen leitet hieraus folgenden Satz ab: „Die gesteigerte Erregbarkeit des Nerven auf der zuvor anelektrotonisirten Strecke plus einer Vermehrung der im Nerven normal ablaufenden Zersetzungsreize gibt uns den Öffnungstetanus constanter Ströme. Durch eine tetanisirende Reizung, welche noch nicht die Schwelle der Erregung erreicht, lassen sich diese chemischen Reize ersetzen.“

Demzufolge wäre auch das Auftreten der secundären Öffnungszuckung nur in dem Falle zu erwarten, wenn der Nerv sich in einem so zu sagen latenten Erregungszustande befindet. Und in der That stimmt das, was oben über die Bedingungen des Auftretens der OZ. II mitgetheilt wurde, auf das vollkommenste mit dieser Anschauung überein. Denn sowohl bei Wasserverlust durch Verdunstung, wie auch bei Behandlung mit concentrirter Kochsalzlösung geräth der Nerv alsbald in den Zustand der Erregung, die anfangs zu schwach, um sich durch Zuckungen des Muskels zu verrathen, später den heftigsten Tetanus veranlasst. Gerade zu jener Zeit aber, wo die Erregung noch latent ist, vermag man OZ. II, beziehungsweise Ritter'schen Tetanus durch selbst sehr schwache Ströme auszulösen. In gleicher Weise muss, wie ich glaube, auch die das Auftreten der OZ. II so ausserordentlich begünstigende Wirkung des Alkohols in hohen Verdünnungsgraden gedeutet werden, obschon Eckhard und Kühne denselben nur bis etwa 80$^0/_0$ herab erregend fanden. Indessen sah

---

1 Pflüger's Arch., Bd. IV, p. 548.

Mommsen[1] nicht selten schon Muskelzuckungen auftreten bei Behandlung des Nerven mit relativ stark verdünnter alkoholischer Salzlösung (20 Vol. Percent), und ich kann diese Angabe durchaus bestätigen. Der Umstand, dass die Erregung der Nerven durch Alkohol so schwach ist, dass sie nur selten die Schwelle überschreitet, dagegen lange Zeit hindurch in ziemlich gleicher Stärke latent bleibt, macht denselben zu dem geeignetsten Mittel, um OZ. II hervorzurufen und deren Eigenschaften zu untersuchen.

In schlagendster Weise wird aber der Satz, dass die Auslösung der OZ. II ganz ebenso wie das Auftreten des Ritter'schen Tetanus an das Vorhandensein einer latenten Erregung des Nerven geknüpft ist, dadurch bewiesen, dass es gelingt OZ. II mit allen ihren früher geschilderten, charakteristischen Eigenschaften an Nerven auszulösen, welche nach dem Vorgange Grünhagen's durch schwaches Tetanisiren in den Zustand latenter Erregung versetzt werden.

Man braucht zu diesem Zwecke nur das centrale Ende eines vom Rückenmark getrennten oder auch mit demselben noch zusammenhängenden Ischiadicus mittelst des Du Bois'schen Schlitteninductoriums bei einem Rollenabstand zu tetanisiren, bei welchem man sich gerade an der Grenze der Wirksamkeit befindet. Reizt man dann zu gleicher Zeit eine tiefer gelegene Nervenstrecke mit schwachen ↓ gerichteten Kettenströmen, so beobachtet man bei passender Regulirung der Schliessungsdauer stets Öffnungszuckungen, welche in jeder Beziehung den OZ. II als gleichwerthig sich erweisen, indem sie, wie diese, verspätet erfolgen und in hohem Grade von der Schliessungsdauer des Stromes abhängig erscheinen. Wird die Intensität des letzteren verstärkt, so werden die Öffnungszuckungen allmälig immer gedehnter und gehen schliesslich in Tetanus über, der, wie vordem die Zuckungen, verspätet eintritt. Die Identität dieser und der oben als secundär bezeichneten Öffnungswirkungen wird unzweifelhaft, wenn man sieht, dass auch hier doppelte Reizerfolge bei Öffnung schwacher Ströme auftreten, wenn durch vorhergehende kurze Schliessung eines stärkeren Stromes die Disposition für Auslösung primärer Öffnungszuckungen gegeben ist.

---

[1] L. c. p. 277.

Man beobachtet dann wiederum entweder Doppelzuckungen oder es bildet die OZ. I einen Vorschlag zu dem Ritter'schen Tetanus.

Reizt man den Nerven während des schwachen und an sich unwirksamen Tetanisirens mit ↑ gerichteten Kettenströmen, so erfolgt, je nach der Intensität derselben, entweder nur Verstärkung der SZ oder Schliessungstetanus, niemals beobachtet man in diesem Falle Öffnungserregung.

Im Wesentlichen denselben Erfolg, wie schwaches Tetanisiren oberhalb der mit Kettenströmen gereizten Nervenstrecke hat auch die Application eines nicht zu schwach wirkenden chemischen Reizmittels an derselben Stelle. Besonders fand ich hiezu Glycerin geeignet. Kurz vor Ausbruch des Tetanus sieht man in günstigen Fällen schwache ↓ gerichtete Ströme OZ. II auslösen. In ähnlicher Weise wurde der Versuch auch schon früher von Grünhagen[1] angestellt. Kann es demnach wohl als bewiesen gelten, dass die OZ. II und der Ritter'sche Tetanus (sowie auch der Schliessungstetanus) nicht wie Pflüger meinte auf dem Verschwinden des Anelektrotonus (beziehungsweise dem Entstehen des Katelectrotomus) an sich beruht, sondern durch latente Reize bedingt wird, die, selbst unzureichend zur Erregung der Muskels, erst dann wirksam werden, wenn die Erregbarkeit der Nerven nach dem Verschwinden des Anelektrotonus (oder während eines bestehenden Katelektrotonus) gesteigert erscheint, so bleibt doch die Natur der OZ. I zunächst noch unaufgeklärt, wenn sich auch die Bedingungen ihres Auftretens genauer als vordem präcisiren lassen.

Anknüpfend an die Versuche, bei welchen die OZ. I unmittelbar nach Anlegung eines (mechanischen, thermischen oder chemischen) Querschnittes in nächster Nähe der Anode hervortritt, könnte man daran denken, die durch diesen Eingriff entwickelten Demarcationsströme in einen ursächlichen Zusammenhang mit dem Hervortreten der OZ. I zu bringen, allerdings nicht in dem Sinne, dass die erhöhte Erregbarkeit in der Nähe des Querschnittes, welche nach Hermann[2] durch die elektrotonische Ausbreitung des Demarcationsstromes bedingt wird, das Wirk-

---

[1] Zeitschf. f. rat. Med. III. Bd. 26, p. 207.

[2] Handb. d. Physiologie II. 1, p. 117.

samwerden schwacher Öffnungsreize verursacht, denn diese Auffassung erscheint genügend wiederlegt durch früher mitgetheilte Thatsachen. Indessen erscheint die Annahme, dass die präexistirenden Spannungsdifferenzen zwischen den beiden Reizstellen in directer Beziehung stehen zu dem Auftreten der OZ. I von vorneherein höchst unwahrscheinlich, wenn man den früher erörterten Umstand berücksichtigt, dass die gesteigerte Disposition für Auslösung OZ. I auch dann beobachtet wird, wenn der ganze Nerv mit verdünnten Lösungen gewisser chemischer Substanzen (Kalisalze, Alkohol etc.) behandelt wurde, wó irgend beträchtliche Spannungsdifferenzen in der Continuität des Nerven wohl kaum angenommen werden dürfen.

Grünhagen[1] ist der Meinung, dass die Erscheinung des Auftretens der OZ nach Anlegung eines frischen Querschnittes am Nerven in der Nähe der Anode in erster Reihe als das „Product einer Reizsummation“ aufzufassen sei, „einerseits der an und für sich zu schwachen Erregung, welche mit der Öffnung des absteigenden Stromes verknüpft ist — des Anodenreizes also — andererseits des fortbestehenden schwachen mechanischen Reizes der Schnittführung“. Aber abgesehen davon, dass eine stundenlange Nachwirkung einer einfachen Durchschneidung (und so lange dauert in der Nähe des Querschnittes die Disposition für Auslösung der OZ. I) an und für sich unwahrscheinlich ist, lässt sich gegen die Grünhagen'sche Auffassung auch geltend machen, dass dann die Schliessungsreizerfolge bei gleicher Lage der Elektroden und ↑ Stromesrichtung entsprechend verstärkt sein müssten, was nicht der Fall ist. Ebensowenig kann es nach den in der vorliegenden Arbeit mitgetheilten Erfahrungen über die Verschiedenheit der I und II OZ. als zutreffend gelten, wenn Grünhagen[2] den Satz aufstellt, dass „chemische Reizungen von schwächster Intensität, welche selbst keinen sichtbaren Effect im Muskel auslösen, während ihres Bestehens an der Anode die gleiche Wirkung wie die Anlegung eines Querschnittes“ haben. Denn im ersteren Falle treten bei schwachen Strömen eben immer nur OZ. II und niemals primäre, den Querschnitts-Öffnungszuckungen gleichwerthige Zuckungen auf.

[1] Funke-Grünhagen, Lehrb. d. Physiologie I. p. 564.

[2] L. c. p. 564.

Man kann vorläufig, so viel ich sehe, nichts weiter aussagen, als dass unabhängig von Erregbarkeitsveränderungen eine bestimmte chemische Veränderung der Nervensubstanz, sei es dass dieselbe durch Reagentien oder durch den Strom selbst herbeigeführt wurde, die erste und wesentlichste Vorbedingung für das Auftreten der OZ. I ist, während Intensität, Dauer und Richtung des elektrischen Stromes erst in zweiter Reihe in Betracht kommen. Dass die nervösen Centralorgane und insbesondere das Rückenmark einen die anodische Erregung hemmenden Einfluss auf die abgehenden Nervenstämme ausüben, wie dies Rumpf aus seinen oben erwähnten Versuchen folgern zu dürfen glaubte, geht aus denselben keineswegs hervor. Denn einmal widerspricht dem schon die Thatsache, dass nach möglichst hoher Durchschneidung eines Froschnerven die Reizung peripherer Abschnitte desselben mit selbst ziemlich starken Strömen oft keine OZ bewirkt und dieselbe immer erst bei Stromstärken hervortritt, bei welchen sie auch vor der Trennung vom Centralorgan beobachtet wird, andererseits gestattet die von Rumpf angewendete Versuchsmethode den Einwand, dass der Einfluss des Querschnittes nicht genügend ausgeschlossen erscheint. Nur in dem Falle wäre man, wie ich glaube, berechtigt, einen hemmenden Einfluss des Rückenmarkes im Sinne Rumpf's anzunehmen, wenn sich zeigen liesse, dass nach der Durchschneidung an allen Punkten des Nerven eine eben solche Steigerung der Anspruchsfähigkeit für den Öffnungsreiz vorhanden ist, wie in nächster Nähe eines Querschnittes. Dies ist aber meinen Erfahrungen zufolge niemals der Fall.

Erläuterung zu den Tafeln.

Sämmtliche Curvenreihen stammen von Nerv-Muskelpräparaten her, welche mit Chloralhydrat vergifteten Fröschen entnommen wurden.

Als Stromquelle diente bei Fig. 1, 2 und 4, Taf. I und 1—6, Taf. II eine 20gliederige Thermosäule, bei 3 und 5, Taf. I. ein Daniell'schen Element. Im Stromkreise befand sich nebst einem Du Bois'schen Rheochord ein Stromwender und ein Schlüssel. Der Moment der Schliessung und Öffnung des Stromes *s* und *o* ist bei sämmtlichen Figuren auf Taf. I und bei Fig. 6 auf Taf. II mittelst eines elektromagnetischen Markirapparates genau verzeichnet.

Die unter jeder Curvenreihe befindlichen Zeitmarken entsprechen einfachen Secunden.

s = Schliessungszuckung, I = primäre, II = secundäre Öffnungszuckung, beziehungsweise Öffnungstetanus.

Tafel I.

Fig. 1. Nerv mit dem Rückenmark noch zusammenhängend. Reizung im oberen Drittel. Länge der intrapolaren Strecke = 1 Ctm.; durchwegs ↓ Stromesrichtung. Nach 2 Minuten langem Eintauchen des ganzen Nerven in alkoholische (4 Vol. %) NaCl-Lösung, löst ein schwacher Strom (*RW* = 5) nebst der SZ nur verspätete OZ II aus. Nachdem jedoch bei unveränderter Elektrodenstellung ein stärkerer ↓ Strom (*RW* = 47) während 4 Secunden geschlossen war, tritt unmittelbar darnach bei gleicher Stromstärke wie früher (*RW* = 5) nebst der OZ II auch die OZ I auf. In der sodann verzeichneten Curvenreihe tritt besonders deutlich die Abhängigkeit der OZ II von der Schliessungsdauer des Stromes hervor, indem dieselbe bald die Grösse der SZ erreicht oder übertrifft, bald vollständig ausbleibt, während die Höhe der OZ I in der ganzen Reihe fast unverändert erscheint. Ausserdem erscheint die OZ II stets deutlich verspätet und von der OZ I entweder völlig gesondert oder mit derselben mehr oder weniger verschmolzen.

„ 2. Nerv vom Rückenmark durch Schnitt getrennt. Reizung etwa in der Mitte seiner Länge. Intrapolare Strecke = 1 Ctm. ↑ Stromesrichtung. Nach 30 Secunden langem Eintauchen in alkoholische Kochsalzlösung (10 Vol. %) löst der Strom (*RW* = 9) nebst der SZ nur OZ II (die beiden ersten Zuckungspaare) nach abermaligem Eintauchen während 1 Minute, 30 Secunden unter

sonst gleichen Bedingungen auch OZ I. aus, welche je nach der Schliessungsdauer entweder völlig gesondert oder mit der OZ II. ganz oder theilweise verschmolzen erscheint. (Die vier folgenden Zuckungspaare.) Wenig später nimmt die Höhe der OZ II. bei gleicher Schliessungsdauer wie vorher mehr und mehr ab, während die OZ I. noch wächst (7—10 Zuckungspaar) und schliesslich bleibt die letztere neben der ebenfalls kleiner gewordenen SZ allein übrig. Nach etwa viertelstündigem Auswaschen des Nerven mit einer 0·6% NaCl-Lösung bleibt auch die OZ I. aus und bei beiden Stromesrichtungen erfolgt nur SZ.

Fig. 3. Nerv vom Rückenmark getrennt. Entfernung der centralwärts gelegenen Elektrode vom Querschnitt = 16 Mm. Intrapolare Strecke = 1 Ctm. Die Zuckungen wurden nach 4 Minuten dauerndem Eintauchen des N. in alkoholische NaCl-Lösung (4 Vol. %) und darauf folgender kurzer Schliessung eines mittelstarken Stromes (*RW* = 60) durch einen schwachen ↑ Strom (*RW* = 7) ausgelöst. Neben der deutlich verspäteten OZ II. und von derselben mehr oder weniger deutlich gesondert, erscheint die OZ I.

„ 4. Nerv vom Rückenmark getrennt. Reizung in der Mitte seiner Länge. Intrapolare Strecke = 17 Mm. ↑ Stromesrichtung 3 Minuten nach dem Auflegen eines mit concentrirter NaCl-Lösung getränkten Baumwollbausches auf die Anode, bewirkt die Öffnung eines schwachen Stromes (*RW* = 9) schon nach kurzer Schliessungsdauer tetanische Verkürzung des Muskels, welche deutlich verspätet eintritt (erstes Curvenpaar II). Nach einmaliger kurzer Schliessung eines stärkeren Stromes (*RW* = 60) schiebt sich jedoch bei Öffnung eines Stromes von gleicher Intensität wie früher (*RW* = 9) in die Pause zwischen dem Momente der Öffnung und dem Beginn des Tetanus die OZ I. ein, welche in Folge der allmälig schwindenden Nachwirkung der stärkeren Stromes immer kleiner wird. Sehr deutlich tritt wieder die Abhängigkeit der Stärke des Öffnungstetanus von der Schliessungsdauer des Stromes hervor.

„ 5. Nerv vom Rückenmark getrennt. Ort der Reizung. Abstand der Elektroden und Stromesrichtung wie im vorigen Versuche. Beginnende Vertrocknung. Bei Anwendung eines mittelstarken Stromes. (*RW* = 60) treten sofort doppelte Öffnungsreizerfolge ein: OZ I., die im Momente der Stromunterbrechung beginnend einen Vorschlag zu dem verspätet erscheinenden Öffnungstetanus bildet.

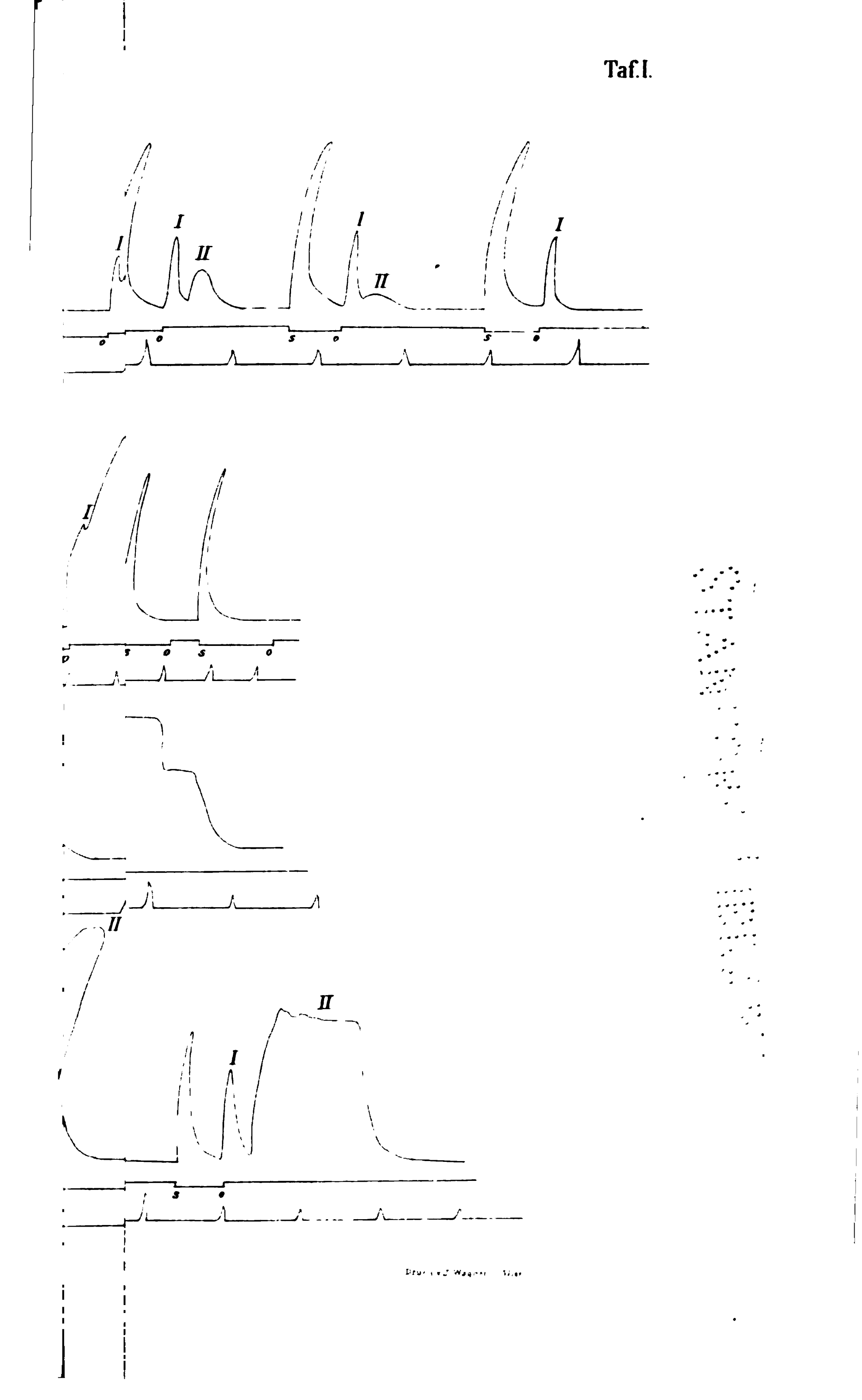
Tafel II.

Fig. 1.* Erfolge schwacher elektrischer Reizung (*RW* = 2) bei allmäliger Verschiebung der in gleicher Distanz (1 Ctm.) erhaltenen Elektroden

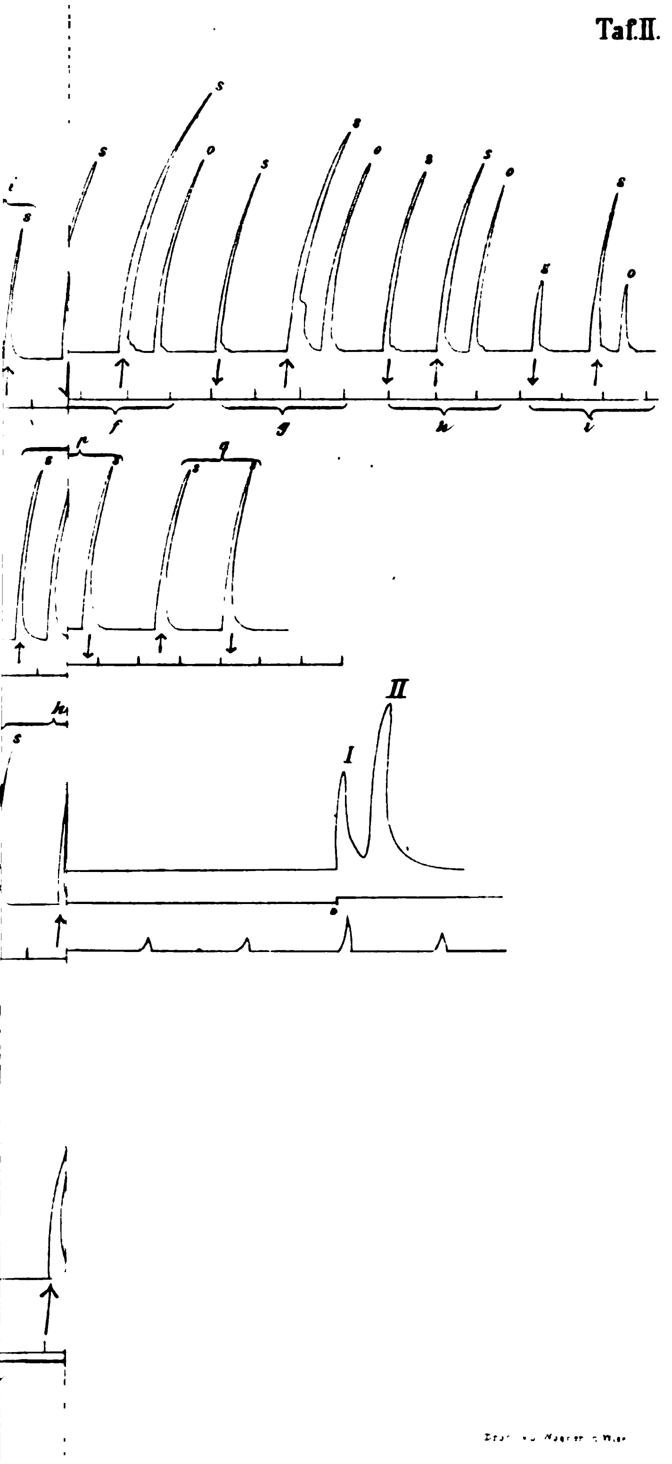
---

* Infolge eines Versehens haben sämmtliche in dieser Figur gezeichneten Pfeile eine verkehrte Richtung.

Taf.I.



Taf.II.



Druck v. J. Wagner in Wien

vom Schnittende nach der Peripherie eines Nerven vor und nach Behandlung eines grossen Theiles desselben mit 1% Lösung von KNO_3. Berührt die obere Elektrode nur den Querschnitt, so tritt bei ↓ Stromesrichtung nebst der SZ auch schwächere OZ, bei ↑ Stromesrichtung aber nur SZ hervor *(a)*. Werden die Elektroden nur wenig peripheriewärts verschoben, so erreicht die ↓ OZ bald ihren grössten Werth *(b)*, nimmt aber weiterhin rasch ab *(c)*, um ganz auszubleiben, wenn die Anode sich etwa 1 Ctm. vom Querschnitt entfernt befindet *(d, e)*. Nach 5 Minuten dauernder Behandlung der zwei oberen Drittel des Nerven mit 1% KNO_3-Lösung (bei *α*) tritt bei derselben Elektrodenstellung, wie vorher *(b)* OZ nicht nur bei ↓, sondern auch bei ↑ Stromesrichtung hervor *(f)*. Je mehr jedoch bei weiterem Verschieben die untere Elektrode in das Bereich der normal gebliebenen Nervenstrecke geräth, um so mehr nimmt die Höhe der ↑ OZ ab und wird Null, wenn die ↓ OZ fast noch dieselbe Grösse besitzt wie bei Reizung des Schnittendes *(g, h, i)*. Erst wenn bei ↓ Stromesrichtung die Anode aus dem Bereich der durch die Kochsalzwirkung veränderten Nervenstrecke herausrückt, nimmt auch die Höhe der ↓ OZ bis zum Verschwinden ab *(i, k)*. Durch Auslaugen der Nerven mit 0·6% NaCl-Lösung während 15 Minuten (*α'*) lässt sich das ursprüngliche Verhalten desselben wiederherstellen. Man erhält dann nur noch bei Reizung des äussersten Schnittendes ↓ OZ *(l)*, bei jeder andern Lage der Elektroden jedoch und beliebiger Stromesrichtung nur SZ *(m, n, o)*, selbst wenn man die Stromesintensität sehr beträchtlich steigert *(p, q* bei $RW = 30$*)*.

Fig. 2. Nerv mit Rückenmark. Bei beliebiger Lage der 1 Ctm. von einander entfernten Elektroden löst ein schwacher ↑ oder ↓ gerichteter Strom ($RW = 2$) nur SZ aus (*a* Reizung des centralen, *b* Reizung des peripheren Endes). Nach 5 Minuten dauerndem Eintauchen des Nerven in 1% KNO_3-Lösung mit Ausnahme einer etwa 1 Ctm. langen Strecke in unmittelbarer Nähe des Muskels, erscheint in diesem Falle die Erregbarkeit beträchtlich herabgesetzt. Gleichwohl löst derselbe Strom an allen Stellen der durch die Kalisalzwirkung veränderten Nervenstrecke nebst der SZ auch gleichstarke OZ aus *(c, d, e, f)*. Durch Auslaugen mit 0·6% NaCl-Lösung (15 Minuten) bleibt auch hier die OZ aus und Schliessungszuckungen von nahezu derselben Grösse, wie vor dem Auswaschen bilden dann den einzigen Reizerfolg schwacher ↑ oder ↓ Ströme *(g, h, i)*. Wurden die Elektroden soweit nach dem Muskel hin verschoben, dass die untere Elektrode innerhalb der normal gebliebenen Nervenstrecke lag, so war die ↓ SZ viel grösser als die ↑ SZ *(k, l)*. Bei *x* wurde der Nerv bei einer Elektrodenstellung, wo gleichstarke ↑ und ↓ SZ ausgelöst wird *(m)* auf der oberen Elektrode durchschnitten; unmittelbar nachher erscheint bei derselben Stromstärke ($RW = 2$) die ↓ OZ.

Fig. 3. Einfluss localer Kalisalzbehandlung. Nerv mit Rückenmark. Reizung in der Mitte der Nervenlänge. Intrapolare Strecke = 17 Mm *RW* = 3. Bei α wird auf die dem Muskel nähere Elektrode ein mit 1% KNO_3-Lösung getränkter Baumwollbausch gelegt. Nach 5 Minuten erscheint die Höhe der ↓ SZ vermindert und gleichzeitig erfolgt bei ↑ Stromesrichtung OZ *(d)*. Dieselbe erreicht nach weiteren 5 Minuten ihren grössten Werth *(f)*. In der Folge nimmt allmälig die ↑ SZ an Höhe ab, während die OZ noch ziemlich unverändert bleibt, um erst mit der dann rasch zunehmenden Herabsetzung der Erregbarkeit, die sich auch durch geringere Höhe der ↓ SZ äussert, abzunehmen.

„ 4. Alles wie im vorigen Versuche. Die drei ersten Zuckungspaare *(a. b, c)* wurden 1, 2 und 5 Minuten nach dem Auflegen des Kalisalzbausches auf die untere Elektrode erhalten. Keine merkliche Veränderung der Erregbarkeit. Nach 9 Minuten erfolgt bereits bei ↑ Stromesrichtung OZ *(d)*. Nachdem dieselbe 13 Minuten nach Beginn der Einwirkung die Höhe der ↑ SZ erreicht hat *(g)* wird durch Aufträufeln reiner 0·6% NaCl-Lösung die Wirkung des KNO_3 beseitigt. In Folge dessen zeigt sich bereits nach 4 Minuten eine deutliche Abnahme der Höhe der OZ *(h)* und nach 11 Minuten ist dieselbe beseitigt *(l)*, ohne dass dabei die Höhe der SZ sich merklich verändert zeigte.

„ 5. Einfluss localer Kochsalzbehandlung auf die Erregbarkeit. Dieselbe Versuchsanordnung wie vorher. Der Baumwollbausch auf der unteren Elektrode mit concentrirter Kochsalzlösung getränkt. *(RW* = 2.*)* Die ↓ SZ schon nach 4 Minuten deutlich verstärkt, *(a)* geht bald in ST über, ohne dass die ↑ SZ dadurch irgendwie beeinflusst würde oder nach kurz dauernder Schliessung OZ erfolgte.

„ 6. Nerv mit Rückenmark. Reizung in der Mitte der Länge desselben. Intrapolare Strecke = 1 Ctm. *RW* = 9. ↑ Stromesrichtung. Gleichzeitiges Auftreten der I und II OZ unter dem combinirten Einfluss beginnender Vertrocknung und kurzdauernder Schliessung eines mittelstarken Stromes *(RW* = 50*)*.

Zur Frage der Regeneration des Trachealepithels mit Rücksicht auf die Karyokinese und die Bedeutung der Becherzellen.

Von Dr. **Otto Drasch,**
Docenten und Assistenten am physiologischen Institute der Universität zu Graz.

(Mit 1 Tafel.)

In der Abhandlung: „Über Epithelregeneration und sogenannte freie Kernbildung“ [1] macht mir Flemming einerseits den Vorwurf, mich bei meinen Untersuchungen über die Regeneration des Trachealepithels [2] einer verfehlten Methodik bedient und die von ihm in seinen früher über diesen Gegenstand erschienenen Arbeiten betonten Vorsichtsmassregeln ausser Acht gelassen zu haben, anderseits aber will er die „Becherzellen“, welche ich als Übergangsstadien zu den Flimmerzellen auffasse in die Rubrik „einzelliger Schleimdrüsen“ zurückversetzt wissen und die Zelltheilung mit Kerntheilung nach vorausgegangener Karyokinese auch für das Epithel der Trachea als den Hauptmodus der Zellvermehrung hinstellen, indem er meinen Schluss, dass jene vereinzelnt vorkommen mag, [3] aber die eigentliche Vermehrung der Zellen durch die zuerst von Lott an den Plattenepithelien beschriebenen und in ihrer Bedeutung gewürdigten Rudimentzellen vor sich geht, umgekehrt zieht. [4] Die beiden letzteren Ansichten spricht Flemming aus, ohne selbst das Trachealepithel untersucht zu haben [5] auf blosse Analogie hin, und thut dies um so leichter,

[1] Supplement zu: Beiträge zur Kenntniss der Zellen und ihrer Lebenserscheinungen, Theil II, Archiv für mikrosk. Anatomie, Bd. 18, p. 151.

[2] Die physiologische Regeneration des Flimmerepithels der Trachea. Wiener Sitzungsb. Bd. 80, III. Abth.

[3] L. c. pag. 41.

[4] L. c. pag. 357.

[5] L. c. pag. 358.

da er mich selbst der völligen Ausserachtlassung aller Analogie zeiht.[1]

Was den ersten Punkt obiger Einwände anbelangt, so gebe ich gerne zu, dass Flemming formell im Rechte ist, wenn er, nur die chronologische Folge des Erscheinens seiner Arbeiten und meiner Abhandlung vor Augen, von seinem Gesichtspunkte aus, den Resultaten meiner Untersuchung von vorneherein Misstrauen entgegenbringt. Ich hätte eben eines an und für sich geringfügigen Nebenumstandes schon bei der Publication meiner Abhandlung gedenken sollen, zu dessen Anführung ich mich jetzt gezwungen sehe, um von mir den Verdacht abzuwälzen, die Literatur nicht berücksichtigt zu haben.

Meine Untersuchungen stellte ich im Wintersemester 1877 bis 1878 an und führte selbe im Mai 1878 zu Ende. Das Manuscript war nahezu vollendet als an mich der Einberufungsbefehl erging. Mein Aufenthalt in Bosnien verzögerte die Drucklegung bis zum October 1879, in welchem Jahre die Arbeiten von Flemming, Schleicher, Peremeschko und Riglov erschienen. Wie man sieht, arbeiteten diese Forscher und ich ziemlich gleichzeitig. Diesen Sachverhalt hätte ich, wie gesagt, erwähnen sollen, um vielleicht dadurch auf die Richtungsverschiedenheit der von jenen Autoren und mir beabsichtigten Ziele aufmerksam zu machen. Allein ich konnte ja damals nicht ahnen, dass meine Arbeit, welcher Flemming selbst das Lob grosser Sorgfalt ertheilt, gerade von ihm in ihrer Wesenheit so total missverstanden werden würde.

Daher möge es mir gestattet sein, hier meinen Standpunkt mit besonderem Nachdrucke hervorzuheben.

Ich habe mir bei meiner Untersuchung das Ziel gesteckt, zu ermitteln, wie sich aus den Basalzellen die Flimmerzellen entwickeln, indem ich dabei die Annahme, dass die Basalzellen die Ersatzzellen für ausgestossene Flimmerzellen sind, festhielt. Dieses Ziel kann aber bei dem gegenwärtigen Stand der Untersuchungsmethoden nur erreicht werden, wenn Zelle für Zelle genau geprüft, wenn die Formen derselben

---

[1] L. c. pag. 358.

einzeln sowohl, als im gegenseitigen Zusammenhange ängstlich verglichen werden, kurz, wenn jedes Zellenindividuum der eingehendsten Untersuchung unterzogen wird. Dazu aber sind Reagentien nöthig, welche die genuine Form der Zellen möglichst wenig alteriren und aus diesem Grunde wählte ich die Müller'sche Flüssigkeit und chromsaure Salze. Ich habe nicht Kerntheilungsstudien gemacht, sondern ich habe die Formen der Zellen zu erklären versucht; das darf nicht übersehen werden.

Würde ich dagegen aus Flemming's Abhandlungen entnehmen, dass er mit Chrom- und Pikrinsäure dieselben Zwecke habe verfolgen wollen, wie ich, dann würde mir mit Recht der Vorwurf der oberflächlichen Beurtheilung zu Theil werden.

Für meine Auffassung der „Becherzellen", welche einen Cardinalpunkt der von mir aufgestellten Wachsthumsvorgänge des Flimmerepithels bildet, glaubte ich solche Gründe erbracht zu haben, dass ich hoffen durfte eine Bestätigung oder Verwerfung derselben erst von Seite eines Nachuntersuchers zu erfahren, um so mehr, da es mir gar nicht beigefallen ist, auch den Becherzellen der Haut verschiedener Thiere dieselbe Rolle zuzuschreiben.

Zur Annahme einer freien Kernbildung zwang mich die Logik der Thatsachen. Ich wusste nämlich, dass „der Rückschluss gestattet sei, dass dort, wo man mehrkernige Zellen findet, Kerntheilungen vor sich gehen oder gegangen sind". Diese habe ich nun nicht gefunden. „Der vollständige Mangel an Bildern in den Basalzellen, welche auf eine Zelltheilung im Sinne der neueren Untersuchungen schliessen liessen, hat mir a priori das Vorhandensein von Rudimentzellen in der Bedeutung wie sie Lott an den Pflasterepithelien vorfand, wahrscheinlich erscheinen lassen." [1]

Der Vermuthung Flemming's, „dass ich im Antreffen von Kerntheilungsfiguren wenig Glück gehabt zu haben scheine", [2] kann ich folgenden Passus entgegenhalten: „In den zahlreichen

---

[1] L. c. pag. 18

[2] L. c. pag. 12, Anmerkung.

Präparaten, welche ich von der Trachea des Hundes, Meerschweinchens und Kaninchens anfertigte, habe ich auch nicht eine Zelle unter den Basalzellen gefunden, deren Kern sich in Theilung befunden hätte und nur beim Menschen stiess ich einmal auf eine Zelle mit zwei Kernen".[1] Aus diesen beiden Citaten aus meiner Arbeit ist es aber auch ersichtlich, dass mir zur Zeit ihrer Drucklegung die neueren Arbeiten über Kerntheilung wohl schon bekannt waren. Ich habe nun in der That meinen Gegenstand einer neuen Prüfung unterzogen und bin dabei auf die Intentionen Flemming's eingegangen, d. h. ich habe die „Becherzellen" des Epithels der Trachea mit denen der Haut einiger Thiere nämlich: *Cobitis barbatula, Telestes Agassizii, Petromyzon fluviatilis* und *Triton taeniatus* verglichen und im Flimmerepithel selbst nach Kerntheilungsfiguren gesucht. Zur Wiederaufnahme meiner Untersuchungen bestimmten mich aber zwei Gründe.

Erstens ist die Stimme Flemming's in der Frage der Zellvermehrung eine so bedeutende und die Richtung, welche augenblicklich zur Klarlegung dieses Gegenstandes allenthalben eingeschlagen wird, der Art, dass ein Stillschweigen gegenüber Einwendungen von jener Seite nicht nur dem Aufgeben einer ausgesprochenen Meinung gleichkommen, sondern auch das Bekenntniss, dass man nutzlos und unverantwortlich einer „veralteten" Ansicht gehuldigt habe, in sich schliessen würde. Dann erachtete ich gerade das Studium der Kerntheilung als Prüfstein für die Richtigkeit oder Unrichtigkeit der von mir gegebenen Erklärung des Wachsthumes der Zellen, welche das Flimmerepithel zusammensetzen. Ich gestehe nämlich offen, dass die apodiktische Gewissheit, mit welcher Flemming behauptete, man werde im Epithel der Trachea Kerntheilungen finden, wenn man die von ihm empfohlenen Methoden anwendet, mich auf meine Arbeit misstraurisch machte und ich mich mit dem Gedanken befreundete, im Falle sich diese Prophezeihung bestätigen würde, die Untersuchungen über die Regeneration des Flimmerepithels neuerdings in Angriff nehmen zu müssen. Denn es war mir klar, dass dann die Formveränderungen der Zellen nicht in der von mir beschriebenen Weise vor sich gehen könnten und ich mithin entweder in

[1] L. c. pag. 12.

den directen Beobachtungen mich geirrt oder aber in den Schlüssen, welche ich aus diesen gezogen, Fehler gemacht haben musste. In beiden Fällen war eine Revision meiner Arbeit geboten.

I. Becherzellen.

Wer meine Abhandlung aufmerksam durchgelesen hat, wird gefunden haben, dass ich streng descriptiv vorgegangen bin und das Theoretische aus den thatsächlichen Verhältnissen abzuleiten bemüht war. Dabei ging ich von zwei Annahmen aus, nämlich, dass sich das Flimmerepithel wirklich fortwährend regenerirt, und dass diese Regeneration darin bestehen müsse, dass die Basalzellen irgend wie zu Flimmerzellen werden. Die erstere Annahme erheischen gewisse Thatsachen der Beobachtung: Abstossung von Flimmerzellen, die zweite Annahme aber erscheint plausibel, weil man doch die zwischen den Flimmerzellen gelagerten Zellen nicht als blosse Ausfüllungsmasse wird betrachten wollen.

Da ich nun, wie ich vorgreifend bemerken muss, bei meiner neuerlichen Untersuchung auf keine wesentlichen Gründe gegen jene Annahmen stiess, so will ich nochmals kurz erläutern, was ich ausführlich in meiner Arbeit niedergelegt habe.

Es oblag mir, zunächst über die Formen sämmtlicher im Flimmerepithel vorkommenden Zellen vollständig ins Klare zu kommen. Ich habe dieselben unter drei Typen gebracht, nämlich: Basalzellen, Keilzellen, Flimmerzellen,[1] und es lautete dann die Frage, welche ich mir vorerst stellte, ob die Basalzellen als die kleinsten und tiefsten unter den drei typischen Zellarten die Vorstudien für die nächst grösseren, die Keilzellen sind. Konnte ich diese Frage im bejahenden Sinne beantworten, dann handelte es sich offenbar nur mehr darum, wie die grössten Keilzellen sich in Flimmerzellen umwandeln, weil es bei Lösung der ersten Frage

---

[1] Um jedem Missverständnisse vorzubeugen, sei hier erwähnt, dass ich mit Basalzellen im engeren Sinne, jene Zellen in der Tiefe des Epithels bezeichne, welche Buchten, Facetten, Flügel etc., aber keine Fortsätze besitzen, unter Rudimentzellen aber jene kleinsten Zellen unter den Basalzellen verstehe, welche eine nahezu kugelförmige Gestalt und niemals eine Ausbuchtung zeigen. Alle anderen Zellen gehören entweder in die Kategorie der Flimmer-, Becher- oder Keilzellen.

schon entschieden worden sein musste, ob es noch Zellen gebe, welche nicht unter die drei obigen Kategorien gebracht werden können.

Zur Lösung aller dieser Fragen dienten mir nun die direct zu beobachtenden Thatsachen einerseits, andererseits aber Schlüsse, welche ich aus jenen gezogen habe. Als erste wichtige Thatsache ist die hervorzuheben, dass alle Zellen, Basal-, Keil-, Flimmerzellen bis an das elastische Fasernetz reichen. Zweitens ist als Thatsache direct zu beobachten, dass immer die grösseren Basalzellen von den kleineren ausgebuchtet werden und nie zwei an Grösse und Gestalt gleiche Basalzellen unmittelbar aneinander liegen. Endlich sieht man zwischen den Flimmerzellen eingelagert keilförmige Zellen, welche, ihre Basis nach unten kehrend, stets vom Ende des unteren Drittheiles der Gesammthöhe des Epithels auftreten und verschiedene Längen besitzen, in deren Maximum sie bis an die Flimmerböden der zwei benachbarten Flimmerzellen reichen.

Mit diesen thatsächlichen Verhältnissen muss also stets gerechnet werden, und es dürfen damit die Consequenzen der Schlüsse, welche aus den obigen Prämissen gezogen werden, nie in Widerspruch gerathen.

Indem ich die erste der angeführten Thatsachen vorläufig übergehe, will ich den zweiten Punkt einer eingehenderen Discussion unterziehen.

Wenn es zu constatiren ist, dass ausnahmslos die grösseren Basalzellen durch die kleineren eingebuchtet sind, durch diese deformirt erscheinen, so ist der Schluss sicher gerechtfertigt, dass während des gegenseitigen Wachsthumes die grösseren Zellen gegenüber den kleineren eine passive Rolle spielten. Nun findet man aber auch stets kleinste Zellen (Rudimentzellen) unter den Basalzellen, welche ausser an der Stelle, mit welcher sie auf dem elastischen Fasernetze aufsassen und welche abgeflacht ist, keinerlei Deformation zeigen. Hat man nun eine beliebig grosse Anzahl von Basalzellen überblickt und denkt sich dieselben in eine Reihe neben einander gestellt, so drängt sich unwillkürlich die Vorstellung auf, dass ähnliche Deformationen wie die beob-

achteten, an den Zellen auch auftreten müssen, wenn sie in derselben Reihenfolge sich im Leben wirklich unmittelbar neben einander befunden hätten. Gewiss hätte die Rudimentzelle ihre Nachbarzelle, diese wieder die ihr zunächst stehende Zelle etc. eingedrückt. Es sind dies Bilder, deren Vorhandensein ich thatsächlich nachgewiesen habe.

Ohne auf die Frage, woher die Rudimentzellen rühren, vorläufig einzugehen, begnügen wir uns jetzt mit der Thatsache, dass sie unter den Basalzellen vorhanden sind und suchen zunächst zu ermitteln, durch welche Gesetze die Formveränderungen an den Zellen in der aufgestellten Reihe zu Stande kamen, und dann ob und welchen weiteren Veränderungen jede Zelle unter der Wirkung derselben Gesetze in einer späteren Zeit hätte unterliegen müssen.

Würde man nun genau kennen, in welcher Weise das jeder Zelle zugeführte Nährmateriale verwerthet wird, dann würde sich mit mathematischer Genauigkeit ermitteln lassen, welche Veränderungen die einzelnen Zellen der aufgestellten Reihe in sich folgenden Zeiteinheiten eingehen. In dieser Hinsicht reicht aber die Hypothese, dass jede Zelle, wenn sie von ihrer Umgebung unabhängig gedacht wird, mit abnehmender Wachsthumsenergie sich kugelförmig weiter entwickeln würde, vollkommen aus.

In Bezug auf die unter den Basalzellen vorhandenen mit Buchten, Facetten etc. versehenen vielgestaltigen Zellen stellte ich mir zuerst die Frage, wie dieselben aussehen. Dabei konnte ich aber nicht stehen bleiben und behaupte, dass es nicht richtig ist, wenn man auf die blosse Beschreibung der Zellformen das Hauptgewicht legt. Es ist ebenso wichtig den Gründen für diese bestimmten Zellformen nachzuforschen, da man sich ja nicht vorstellen kann, dass dieselben auf blossen Zufälligkeiten beruhen.

Ich glaube vielmehr, dass Buchten, Facetten etc. nichts Ungefähres sind und bin der Meinung, dass sie an den Zellen durch ganz bestimmte Gesetze entstehen und man hätte es verstehen sollen, dass meine Arbeit nichts Anderes ist als ein Versuch, diese Gesetze zu finden und zu erklären. Ich stelle folgenden Satz auf: W a c h s t h u m u n d R e g e n e r a t i o n d e s T r a c h e a l e p i t h e l s i s t e i n r e i n m e c h a n i s c h e s P r o b l e m; d i e F o r m v e r ä n d e r u n g j e d e r Z e l l e i s t e i n e F u n c t i o n d e r F o r m v e r ä n d e r u n g

aller um jene gelagerten jüngeren Zellen, weil ich mir nicht vorstellen kann, dass die Protoplasmamoleküle einer Zelle wirklich a priori schon die Weisung haben, hier nur zum Aufbaue eines Ansatzes, dort nur zur Bildung einer Lamelle oder Facette beizutragen, und ich glaube, dass Niemand leichten Schrittes über die Frage hinwegzukommen suchen wird, warum man im Flimmerepithel so mannigfaltige Zellformen findet. Perhorrescirt man aber die zwei Eventualitäten Zufall oder Vorherbestimmung, dann bleibt nichts mehr übrig, als anzunehmen, dass auch die complicirtesten Formen der Zellen nur der Ausdruck einer durch Wachsthum und Widerstand bedingten Gegeneinanderwirkung der lebendigen Bausteine des Epitheliums sind.

Durch Anwendung obiger Hypothese, dass die Zellen mit abnehmender Wachsthumsenergie sich fortentwickeln, kann man sich Rechenschaft geben über die Druckverhältnisse, welche in der Basalzellenregion im Allgemeinen herrschen. An und für sich ist es schon klar, dass darin eine bestimmte und zwar constant bleibende Spannung während des Lebens vorhanden ist.

Diese Spannung ist aber offenbar nur eine Function der Wachsthumsenergie der einzelnen Zellen.

Wenn nun jede Zelle das Bestreben hat, sich mit abnehmender Wachsthumsenergie kugelförmig weiter zu entwickeln, so hat das augenscheinlich zur Folge, dass die Volumszunahme der Zellen in aufeinander folgenden Zeiteinheiten immer eine geringere wird. Diese Annahme wird schon dadurch nahegelegt, dass ja schliesslich für jede Zelle ein Stillstand des Wachsthums eintritt und keine Zelle in das Unbegrenzte fortwächst. Nun bilden sämmtliche Zellen eine zusammenhängende Masse. Wenn mithin eine jede Zelle zu einer gegebenen Zeit eine bestimmte Wachsthumsenergie besitzt, so muss diese in der nächsten Zeiteinheit, soll die Constanz der Spannung in der ganzen Masse vor- und nachher erhalten bleiben, bei den grösseren Zellen in dem Maasse abgenommen haben, wie sie bei den kleineren zugenommen hat. Unter solchen Verhältnissen werden aber die kleineren Zellen die grösseren von ihrem Platze zu verdrängen suchen, was in unserem Falle durch eine Deformation der grösseren Zellen zum Ausdrucke gelangen muss. Jede Basalzelle würde, in auf einander folgenden Momenten betrachtet, in jedem späteren dieser Momente schon

eine wesentlich andere Form besitzen als im vorausgehenden Momente.

Ich habe nun in meiner Abhandlung ausführlich dargelegt, wie es sich, wenn dieses Alles zugegeben wird, dann von selbst ergibt, dass sämmtliche Basalzellen nur Übergangsstadien ursprünglich kugelförmiger Zellen sind, dass beispielsweise eine Basalzelle, welche unter dem Mikroskope flügelartige Fortsätze zeigt, kurz zuvor noch eine Zelle mit seichten Ausbuchtungen war, dass die Flügeln schon in der nächsten Zeit durchbrochen worden wären etc., kurz, dass so in einer kugeligen Basalzelle (Rudimentzelle) nach und nach, Höhlen, Buchten, Facetten, Flügel und Lamellen ausgeprägt werden. Jene kleinsten kugelförmigen Zellen sind mithin die Regeneratoren für die Basalzellen und mag ihre Provenienz welcher Natur immer sein, so ist doch ihre fortwährende Neubildung das eigentliche Regulativ für die Spannung und die Druckverhältnisse in der Basalzellenregion.

Hält man sich nun die oben besprochenen Druckverhältnisse und Wachsthumsgesetze vor Augen, und zieht daraus die weiteren Consequenzen, so ergibt sich, dass successive an allen Basalzellen Fortsätze zu Stande kommen müssen. Denn die Zellen, welche an einer anderen Zelle die Flügel, Lamellen etc. hervorbringen, werden im Verlaufe ihres Wachsthums augenscheinlich diese durchbrechen, indem der grösste Theil des Protoplasmas der Flügel und Lamellen durch Atrophie zu Grunde geht. Die mit der Zelle noch zusammenhängenden Protoplasmareste derselben werden aber dadurch in Form von mehr oder minder fadenförmigen mit pyramidenförmigen Anschwellungen versehenen Gebilden dorthin zu liegen kommen, wo je drei der drückenden Zellen zusammenstossen. Natürlich ist auch dieses Verhältniss wieder für jede Zelle ein reciprokes und ich habe über diesen Punkt so ausführlich in meiner Abhandlung gesprochen und ihn durch schematische Darstellung zu erläutern versucht, dass ich ohne Weiteres darauf verweisen kann. Es möge mir hier nur gestattet sein das Folgende zu betonen. Wenn man der Ansicht ist, dass die Flimmerzellen aus den Basalzellen hervorgehen, so kann man nicht mehr annehmen, dass es eine blosse Zufälligkeit ist, d ss aus einer Zelle, welche ursprünglich keine Fortsätze hat, eine solche mit Fortsätzen wird, und, dass die eine Flimmerzelle nur

einen Fortsatz besitzt, die anderen deren mehrere haben. Und ebenso wenig kann man dann annehmen, dass die verschiedene Gestaltung der Kerne in den verschiedenen Zelltypen namentlich aber in den Keilzellen nur nebensächlich sei. Schickt man sich aber an nach den Gründen für alle diese Dinge zu forschen, dann wird man a priori nicht mehr glauben können, dass Schnittpräparate und Analogien allein zur Erkenntniss derselben führen werden.

Das war in der That mein Standpunkt und darum habe ich den Weg betreten, auf welchem es mir, wie ich glaube, gelungen ist nachzuweisen, dass an jeder Basalzelle, wenn sie in der Entwicklung fortschreitet, Fortsätze entstehen müssen. Wir wollen nun weiter in Betracht ziehen, welches das fernere Schicksal des Zellprotoplasmas während der Zeit sowohl, in der die Fortsätze daraus geprägt werden, als auch späterhin ist.

Während an den grösseren, älteren Basalzellen durch die diesen unmittelbar anliegenden kleineren, jüngeren Basalzellen die Fortsätze gebildet werden, wird die Zellmasse der gedrückten Zellen, welche sich über der Höhe der drückenden Zellen befindet, von diesen vor sich hergeschoben. Dadurch ist es bedingt, dass, trotzdem das Eigenwachsthum der Zellen fortwährend abnimmt. wie dieses in der Natur der aufgestellten Hypothese liegt, doch eine Höhenzunahme der Zellen stattfindet. Obwohl jede Zelle auch noch Nährmateriale empfängt, so ist doch von einem bestimmten Momente an, die Höhenzunahme der Zellen zum grössten Theile gewiss nur mehr mechanischer Natur und es ist leicht einzusehen, dass die Massen der vorgeschobenen Zellen, sich als polygonale Prismen aneinander reihen müssten, wenn über der Region der Basalzellen der seitliche Druck, welchen die Zellen erfahren, in jedem Höhenelemente derselbe sein würde. In Wirklichkeit findet man aber derlei Zellen nicht, sondern alle Zellen welche unmittelbar über den Basalzellen und zwischen den Flimmerzellen liegen, zeigen eben die Keilform, welche ich in meiner früheren Abhandlung beschrieben habe. Betrachtet man eine solche Keilzelle für sich, ganz ohne Rücksicht darauf, wo sie herstammt, so besagt ihre Form. dass die Protoplasmamasse, aus welcher sie besteht, auf dem Wege ihrer Entwicklung einem von unten nach oben steigenden seitlichen Drucke begegnet war.

Daher muss man voraussetzen, dass auch die emporgeschobenen Protoplasmamassen der Basalzellen den nämlichen Druckverhältnissen später ausgesetzt sein werden. Das heisst aber nichts Anderes als dass die Basalzellen selbst zu den Keilzellen werden müssen und diese aus den Basalzellen hervorgegangen sind. Die Keilzellen sind mithin wieder nur spätere Entwicklungsstadien der Basalzellen. Über den näheren Entwicklungsmodus der Keilzellen, sowie darüber, dass gerade der von unten nach oben steigende seitliche Druck der wichtige Factor ist, dass die Durchlöcherung der Basalzellen, die Bildung der Fortsätze nur bis in eine bestimmte Höhe hinauf platzgreifen kann, dass eine Keilzelle von der anderen Fortsätze abschnüren muss etc., habe ich gleichfalls eingehend besprochen. Hier möchte ich aber diese Druckverhältnisse nochmals schematisch illustriren. Die Trachea bildet eine Röhre. Man denke sich nun, dass das dieselbe auskleidende Epithel nur pyramidenförmige Flimmerzellen mit einem Fortsatze enthalte. Weiters stelle man sich vor, dass alle Zellen bis auf die Flimmerzellen entfernt würden, so werden diese, mit ihren polygonalen Flimmerböden einander berührend, in Form eines geschlossenen Gewölbes die Innenfläche der Trachea überkleiden Durch den Ausfall der übrigen Zellen sind nun Lücken vorhanden, welche, der Gestalt der Flimmerzellen entsprechend, gleichfalls keil- oder pyramidenförmiger Natur sind. Um diese wieder genau auszufüllen, würden also Pyramiden oder Keile nothwendig sein. Sollen aber anfangs kugelförmig gestaltete Zellen diese Rolle übernehmen, so müssen auch diese, wenn nicht eine laesio continui des Ganzen eintreten sollte, im Wachsen sich den Raumverhältnissen genau anpassen und schliesslich pyramiden- und keilförmige Zellen werden.

Aus diesem Schema ist nun auch ersichtlich, dass der seitliche Druck an der inneren Peripherie des Gewölbes, respective an der Berührungsstelle der Flimmerböden am grössten sein muss, und es wird ferner klar, dass die Thatsache, dass sämmtliche Flimmerzellen bis an das Schleimhautgewebe reichen und eine pyramidenförmige Gestalt besitzen, der wichtigste Factor dafür ist, dass alle Basalzellen im Verlaufe ihrer Entwicklung einem stets steigenden Seitendrucke begegnen. Hierin liegt auch der wesentliche Unterschied in den Regenerationsvorgängen des

Flimmer- und des geschichteten Plattenepithels. In beiden Epithelarten herrschen in der Basalzellenregion dieselben Druckverhältnisse. Während aber die Flimmerzellen so lange in Verbindung mit dem Schleimhautgewebe bleiben bis sie durch die Keilzellen ausgestossen werden, welche unmittelbar darauf die Rolle der Flimmerzellen übernehmen, haben im geschichteten Plattenepithele die aus den Basalzellen hervorgegangenen Zellen schon als Riff- und Stachelzellen den unmittelbaren Contact mit dem unterliegenden Gewebe verloren. Der seitliche Druck in der ersten Etage der Riff- und Stachelzellen ist daher schon unabhängig von dem der Basalzellenregion, jener der zweiten Etage unabhängig von dem der ersten etc. In der Richtung von unten nach oben sind aber die Zellen sämmtlicher Etagen demselben Drucke ausgesetzt. Durch diesen werden die Zellen von Etage zu Etage emporgerückt, und da sie auf diesem Wege nur abgeplattet werden, bis sie endlich die charakteristische Form der Zellen der Hornschichte erhalten, so muss der Seitendruck in allen Lagen nahezu der gleiche sein.

Diese Überlegungen und das gelegentliche Vorhandensein von Inseln geschichteten Plattenepithels im Flimmerepithel haben es mir nahe gelegt, durch das Experiment zu untersuchen, ob nicht durch Aufhebung des seitlichen Druckes im Flimmerepithel geschichtetes Plattenepithel künstlich erzielt werden könnten.[1] Der Versuch hat denn auch, wie ich mitgetheilt habe, meine Voraussetzungen vollkommen bestätiget.

Wir haben bis jetzt gesehen, dass es sehr plausibel ist, dass aus jeder Rudimentzelle eine Basalzelle und aus dieser eine Keilzelle wird, und damit hat man sich der Lösung des Problems der Regeneration so weit genähert, dass nur mehr die Frage offen steht, wie sich eine längste Keilzelle in eine Flimmerzelle umwandelt.

---

[1] Einer Unterredung mit Bizzozero verdanke ich die Mittheilung dass Dr. L. Griffini (Contribuzione alla patologia generale del tessuto epitelico cilindrico. Dal laboratorio del prof. G. Bizzozero, Luglio 1875) schon im Jahre 1874 die Entdeckung machte, dass sich im menschlichen Kehlkopfe in pathologischen Fällen sehr reichlich Plattenepithel zwischen den Flimmerepithele vorfindet. Ich benütze diese Gelegenheit anzuführen, dass damit eine wichtige Stütze meiner eigenen Ansicht vorliegt.

Ich glaube nun, dass es gewiss nicht gezwungen erscheint, wenn ich die verschieden hohen Keilzellen als ebenso viele Altersstufen auffasse. Da nun die Flimmer- und Keilzellen, mit Rücksicht auf ihre topographische Lage eine einander entgegengesetzte Gestalt besitzen, eine Keilzelle aber nie mit Flimmern versehen ist, so muss nothwendiger Weise zuerst eine Formveränderung an den Keilzellen in dem Sinne Platz greifen, dass ihre Figur gleichsam umgekehrt wird. Dass dieses stattfinden kann, müssen die erörterten Wachsthumsgesetze in ihren letzten Consequenzen theoretisch ergeben, und dass eine solche Veränderung an den Keilzellen in der That vor sich geht, müssen Zellformen darthun, welche Merkmale an sich tragen, welche als Effecte der theoretisch aufgestellten Wachsthumsvorgänge gedeutet werden können. Die Schlussfolgerungen aus der aufgestellten Hypothese ergeben, dass unter dem obwaltenden Drucke, die fraglichen Formveränderungen an den Keilzellen stattfinden müssen, sobald dieselben das Maximum ihrer Länge erreicht haben. Die Keilzelle kann nicht über das Niveau des Epithels hinauswachsen; das hindert der maximale seitliche Druck an den Berührungsstellen der Flimmerböden, welchen man demzufolge geradezu einem Drucke gleichsetzen kann, der senkrecht auf die Basis der Keilzelle gerichtet wirkt und so ihr weiteres Vordringen hemmt. Um die Keilzelle herum sind aber Basalzellen und andere Keilzellen gelagert, welche fort und fort auf jene drücken und Theile ihres Protoplasmas vor sich herzuschieben streben. Dieses kann aber unter den obwaltenden Verhältnissen nur mehr von Statten gehen, dass in demselben Maasse, in welchem das Protoplasma in die Höhe gedrückt wird, sich die Spitze der Keilzelle abflacht. Wie auf diese Weise die Flimmerzellen eingedrückt, endlich ausgestossen werden und grösste Keilzellen unmittelbar aneinander zu liegen kommen, habe ich durch die schematische Darstellung zu erläutern versucht und die dafür sprechenden Abbildungen von Präparaten gebracht.

Wenn man nun in der That im Trachealepithel Zellen findet, welche, die übrigen Charakteristica der Keilzellen aufweisend, abgeflachte Spitzen und in die Höhe gerückte Basen zeigen, wenn man in einer Reihe von solchen Zellen, welche nach dem Maasse der Spitzenabflachung und Höhe der idealen Basis angeordnet sind, die einzelnen Individuen wieder nur als verschiedene Alters-

stufen auffassen muss, so hat man, glaube ich. die gestellten Fragen gelöst: denn es handelt sich nur mehr darum, wann und wie an den in Rede stehenden Zellen die Flimmern gebildet werden.

Wer gegen meine bisherigen Auseinandersetzungen keine Einwendung macht, wird es auch vollkommen begreiflich finden, dass ich von meinem Standpunkte aus zwar vergleichende Untersuchungen über die Regeneration der Epithelien der Haut von Fischen und Amphibien hätte anstellen können, aber, um die Form von Zellen des Flimmerepithels zu erklären nicht zu einer anderen Epithelart greifen durfte. Ich bin nämlich dadurch, dass ich auch die „Becherzellen“ in obige Reihe aufnahm, und aufnehmen musste, weil mich dazu Überlegung und Thatsachen zwangen in Conflict gerathen mit der hergebrachten Ansicht über die Bedeutung der „Becherzellen“. Flemming sagt: „Allerorten. wo sie vorkommen sind die Becherzellen eigenartige und besonders fungirende Epithelzellen.“ Die Richtigkeit dieses Satzes werde besonders bewiesen, wenn man sich bei Evertebraten umsehe. Ganz richtig, wie ja auch die Leber allerorten wo sie vorkommt Secretionsorgan für die Galle ist. Was aber dann, wenn einmal z. B. auch die Milz mit der Leber verglichen werden sollte? Ich habe nämlich schon darauf hingewiesen, dass man zu Folge bestimmter Eigenschaften Zellen bereits zu den „Becherzellen“ rechnen muss, welche von den Anhängern der Doctrin, dass die „Becherzellen“ Schleimdrüsen sind, logisch und consequent dazu nicht gezählt werden dürfen, ich habe die Bemerkung gemacht, dass die verschieden grossen „Becherzellen“ der Autoren doch auch nur einander ergänzende Übergangsstadien sein können und dann die Regeneration der Fimmerzellen ein Räthsel bleibt, ich habe gezeigt, dass man wirklich „Becherzellen“ findet, welche sich gegenseitig abzuplatten beginnen. Leider vergebens. Das Epithel der Haut von Fischen, Amphibien und Evertebraten muss befragt werden, ob im Epithel des Respirationstractes von Säugethieren Zellen vorkommen dürfen, welche unter den Zellen jener Epithelien kein Analogon finden. Nicht einmal das habe ich durch meine Darlegung bewirkt, dass der Gedanke angeregt wurde, es könnten vielleicht doch zwischen den „Becherzellen“ des Haut- und Trachealepithels solche essentielle Unterschiede vorhanden sein,

dass man gar nicht berechtigt ist, beide Arten von Zellen zusammenzufassen. Und doch liegt dieser Gedanke in meiner Beschreibung der „Becherzellen" der Trachea. Denn abgesehen davon, dass ich mich nirgends darauf eingelassen habe, die Auffassung der „Becherzellen" der Haut obiger Thierreihen als Schleimdrüsen in Frage zu stellen, hätte man bei aufmerksamer Durchlesung meiner Arbeit ersehen können, dass Beschreibung und Zeichnungen meiner „Becherzellen" auf die anderer Epithelien gar nicht passt. Allein das Vorurtheil in der Sache ist so fest gewurzelt, dass es fast den Anschein hat, dass auch die triftigsten Gründe dagegen nicht mehr im Stande sind, dasselbe zu beheben. Flemming verweist auf die Lehre F. E. Schulze's über die Becherzellen und es liegt mir ferne, mich von dem Verdachte beschleichen zu lassen, Flemming kenne die auf Schulze's Arbeit bezughabende Litteratur nicht. Da er mir aber im Besonderen die Abhandlung jenes Forschers vorhält, so will ich hier in Erinnerung bringen, dass auch von anderer Seite die Richtigkeit einzelner seiner Angaben in Abrede gestellt wird. Nach Schulze besteht „das die Innenfläche des Magens aller Wirbelthiere deckende Epithel aus Cylinderzellen, welche oben offen sind." [1] Heidenhain [2] widerspricht dem schon theilweise, indem er die „Zellen im natürlichen Zustande zwar nicht durchwegs, aber doch zum grossen Theile geschlossen findet," und im frischen Zustande nur jene Cylinder geöffnet sind, „welche die schleimige Metamorphose, die den typischen Entwicklungsgang dieser Zellen bezeichnet, bereits durchgemacht und ihren Inhalt entleert haben." [3] Rollett [4] hingegen konnte sich an, dem lebenswarmen Magen entnommenen und im Jodserum untersuchten Präparaten nicht nur nicht von einer vitalen Bechermetamorphose überzeugen, er bestreitet auch überhaupt obige Angabe Schulze's, ja er bekam im frischen Zustande auch nicht vereinzelte Becher zu Gesicht, wie Heidenhain angibt. „Post-

---

[1] L. c. pag. 174.

[2] Untersuchungen über den Bau der Labdrüsen. Von R. Haidenhain. Archiv für mikrosk. Anat. Bd. VI, 368.

[3] L. c. pag. 372.

[4] Bemerkungen zur Kenntniss der Labdrüsen und der Magenschleimhaut. Untersuchungen aus dem Institute für Physiologie und Histologie in Graz, Leipzig 1870, p. 133.

mortal erscheinen sowohl an Jodserumpräparaten unter den Augen des Beobachters entstehend als auch an Alkoholpräparaten namentlich aber an Präparaten aus Müller'scher Flüssigkeit häufig alle Zellen ganz in derselben Weise in Becher verwandelt."[1] In neuester Zeit hat Stöhr[2] über das Epithel des menschlichen Magens gearbeitet. Ihm diente zu seinen Untersuchungen ein Magen, welcher eine halbe Stunde nach dem Tode des betreffenden (justificirten) Individuums in seine Hände gelangte. Auch Stöhr bekämpft Schulze's Angabe, was das Offensein der Cylinderzellen betrifft, und bezweifelt zugleich, dass die Becherzellen oben ohne Membran seien. Aber Stöhr erklärt überhaupt alle Epithelzellen des Magens für einzellige Schleimdrüsen. Und warum auch nicht? Mir scheint diese Ansicht Stöhr's nicht besser begründet, als die abenteuerliche Rolle, welche er den Kern jeder Zelle in der Zeit spielen lässt, in welcher diese schleimig metamorphosirt und wieder protoplasmatisch werden soll. Auch scheint Stöhr zu meinen, dass in seinem Falle die Zeit von einer halben Stunde keine zu lange war, um zu der Vermuthung zu berechtigen, dass seine Beschreibungen sich auf postmortale Erscheinungen beziehen und seine Schlüsse aus solchen gezogen sind; während doch bekannt ist, dass schon einige Minuten nach dem Tode hinreichen, um die physiologische Beschaffenheit der Zellen zu verwischen.

Schulze hält auch die Becherzellen des Darmes für Secretionsorgane, für selbstständige Gebilde. Arnstein[3] stimmt der physiologischen Deutung Schulze's zwar bei,[4] gelangt aber durch seine Untersuchungen zur Überzeugung, dass die Becherzellen durch eine Veränderung der Cylinderzellen entstehen.[5] Eimer,[6] welcher die fraglichen Gebilde als Schleim- oder Eiterbecher bezeichnet, und gleichfalls für ihre Selbstständigkeit eintritt, wirft zuerst die Frage auf, ob die Becher des Dünndarmes überhaupt

[1] L. c. pag. 185.

[2] Über das Epithel des menschlichen Magens von Dr. Philipp Stöhr. Verh. der phys. med. Gesellschaft zu Würzburg, Bd. XV, N. F.

[3] Über Becherzellen und ihre Beziehung zur Fettresorption. Virchow's Archiv Bd. XXXIX, 4. Heft, p. 527.

[4] L. c. pag. 543.

[5] L. c. pag. 533.

[6] Zur Geschichte der Becherzellen, insbesondere derjenigen des Darmcanales von Theodor Eimer, Berlin 1868.

identificirt werden können, mit solchen an anderen Orten vorkommenden. „Vielleicht muss man zwei Arten von Becherzellen unterscheiden, deren eine den Drüsen zugehört und in der Haut gewisser Thiere und in Schleimhäuten zugleich vorkommt, während die zweite, anderer Function, nur auf Schleimhäuten sich findet.“ [1] Er sah nämlich niemals aus den Bechern der Darmschleimhaut eine „zähe“ wurstförmige Masse austreten wie aus den Bechern der Haut des Frosches, und sah, „den (anders beschaffenen) Inhalt überhaupt gewöhnlich nur nach langem Liegen des Objectes oder nach Anwendung schlechter Reagentien“ und ferners schienen ihm die Schleimzellen, welche andere Forscher von verschiedenen Thieren abgebildet haben, „zu mindestens in der Form wenig Übereinstimmendes zu haben mit den Bechern, welche er auf den verschiedensten Schleimhäuten der Thiere untersucht hat“.

Was schon Eimer vermuthet, was ich selbst indirect ausgesprochen habe, muss ich nun positiv behaupten: Die Becherzellen des Epithels der Haut von Amphibien und Fischen und die des Trachealepithels sind Gebilde ganz verschiedener Natur, welche sich nicht nur durch ihre Form sondern auch durch ihre Structur und ihre Lage im Epithel wesentlich von einander unterschieden.

Die Becherzellen, einzelligen Schleimdrüsen, aus der Haut der Eingangs erwähnten Thiere fand ich, was ihre Gestalt betrifft, nahezu gleich; nur hinsichtlich der Grösse variiren sie bei den einzelnen Individuen. Der Beschreibung, welche Schulze von ihrer Form gibt, habe ich nichts hinzuzufügen; mit den Worten eiförmig oder kugelig ist ihre Kennzeichnung so ziemlich erschöpft. Findet sich eine Öffnung an den Drüsen, so ist dieselbe scharf contourirt, wie mit einem Locheisen herausgeprägt. Von einer Structur im Inneren der Drüse kann nicht gesprochen werden. Denn die Stelle am Grunde der Zelle, wo sich gewöhnlich ein undeutlich ausgesprochener, quer gerichteter kleiner Kern mit spärlichem gekörntem Protoplasmareste befindet, ausgenommen, erscheint das Innere fast homogen. Dieses Ansehen ist so ziemlich dasselbe, mag die Zelle frisch oder in Müller'scher Flüssigkeit

[1] L. c. p. 12.

untersucht werden. Auf Zusatz von Essig- oder Chromsäure entsteht ein äusserst feinkörniger Niederschlag in der Zelle; niemals aber wird durch Anwendung dieser Reagentien ein Netzwerk sichtbar. Auch bei Anwendung von Färbemitteln erzielt man nur eine diffuse Färbung. Einen deutlichen grossen Kern habe ich weder an den geschlossenen, noch offenen Zellen finden können. Die Zellen sind in der ganzen Dicke des Epithels verbreitet und treten in grosser Regelmässigkeit auf. Dass eine solche Zelle aber einen oder mehrere Fortsätze hätte, mit welchen sie bis an die Cutis reichte, habe ich niemals gesehen. In Fig. 1 habe ich möglichst getreu die Topographie der Becherzellen der Haut von *Cobitis barbatula* wiedergegeben und in Fig. 4 eine Anzahl von in Müller'scher Flüssigkeit macerirter Becher desselben Thieres abgebildet. Man vergleiche jetzt damit die Becherzellen aus dem Trachealepithel, von denen ich eine Reihe in Fig. 8 und 10 wiedergegeben habe. Ich bin nun vollkommen überzeugt, dass man ohne Weiteres die Zellen 1, 2, 3, Fig. 8, und die mittlere Zelle von 1, Fig. 10, für „Becherzellen" erklären würde. Haben diese aber die entfernteste Ähnlichkeit mit denen aus der Haut von *Cobitis barbatula?* Auf beide Arten hat dasselbe Reagens gewirkt; also müssten, wenn dieselben einander analog wären zu mindestens dieselben Erscheinungen an ihnen hervortreten. Mit Nichten. Die „Becherzellen" aus der Trachea zeigen durchwegs einen deutlichen Kern und im Zellleibe hebt sich ein ausgeprägtes mit Knotenpunkten versehenes Netzwerk ab.[1] Dasselbe ist bald grobmaschig, bald feinmaschig und nimmt sehr begierig Farbestoffe auf. Durch dieses Netzwerk sind aber auch die anderen Zellen in Fig. 8, welche vielleicht nicht als „Becherzellen" passiren würden, wohl charakterisirt, so dass man sie unter sich als Analoga hinstellen muss. Man vergleiche nun die Gestalt beider Zellarten. Ich habe aus den mannigfachen Formen der „Becherzellen"

---

[1] Ich muss hier bemerken, dass auch das Kerngerüste mit grosser Klarheit sichtbar wird, wenn man Gewebe, welche nur kurze Zeit in Müller'scher Flüssigkeit lagen, sehr gut in fliessendem Wasser auswäscht und nachträglich färbt. Damit will ich aber keineswegs die Behauptung aufstellen, dass dieses Reagens doch zum Studium der Kerntheilung in Anwendung gebracht werden könnte, sondern nur constatiren, dass es mir so gelang für meine Zwecke ganz brauchbare Präparate herzustellen.

der Trachea die möglichst einfachsten absichtlich gewählt. Ein Blick auf die Tafel zeigt, dass, abgesehen von allem anderen schon der Unterschied in der Form es verbieten muss, beide Zellarten für identisch zu erklären.

Was nun die Öffnungen der „Becherzellen" der Trachea betrifft, so ist dieselbe in den allerseltensten Fällen scharf contourirt, sowie bei den Bechern der Haut. Vielmehr erscheint dieselbe wie durch ein Trauma entstanden, indem die Ränder ein unregelmässiges, abgerissenes Aussehen besitzen.

Die Vertheilung der „Becherzellen" im Trachealepithel spricht ebenfalls gegen ihre Auffassung als selbstständig fungirende Gebilde. Ich muss dem nämlich auf das Entschiedenste widersprechen, dass ihr Vorkommen ein höchst regelmässiges ist. In der einen Trachea findet man sie in überaus grosser Anzahl, während man in anderen Fällen Mühe hat an einem Präparate einigen Exemplaren zu begegnen. Man sollte aber glauben, dass ein physiologisch selbstständiges Gebilde in sehr regelmässiger Weise vorkommen würde.

Die Becherzellen der Trachea sind mithin weder Kunstproducte, noch selbstständige Gebilde im Sinne Schulze's und Flemming's, sondern sie sind die Übergangsstadien von den Keilzellen zu den Flimmerzellen. Ich habe in der ersten Beschreibung, welche ich von ihnen gab, mich des Ausdruckes bedient, dass mit fortschreitender Längenzunahme der Zellen in diesen eine immer stärker und gröber werdende Granulirung auftritt. Wie aus dem Vorhergehenden ersichtlich geworden sein dürfte, ist diese Granulirung aber nichts Anderes als der optische Ausdruck des Netzwerkes im Zellleibe und daher ein weiterer Beweis für die Richtigkeit meiner Auffassung. Denn es lauft hier im Zellprotoplasma eine Erscheinung ab, welche an den Vorgang erinnert, der bei der Karyokinese im Zellkerne auftritt.

Man muss ja annehmen, dass die Bildung der Flimmern von dem Zellprotoplasma aus erfolgt, und es scheint mir, wie ich das auch schon früher vermuthet habe, dass unmittelbar vor dem Auftreten der Flimmern, das Protoplasma der Becherzellen gegen jeden Eingriff sehr empfindlich ist. Man könnte weiter vermuthen, dass, sowie z. B. die Kerngerüste nur durch bestimmte Reagentien

erhalten bleiben, durch andere aber zerstört werden, das auch mit dem Bilde der Fall ist, welches die Becherzellen während des Entstehens der Flimmern darbieten. Es würde dann nur auf Rechnung der angewandten Reagentien zu schreiben sein, dass die „Becherzellen", welche nicht geschlossen sind, an ihrem oberen Ende wie zertrümmert erscheinen und das Protoplasma der Zelle ein zerklüftetes Aussehen hat, und es würde auch hier nur der Anwendung des richtigen Reagens bedürfen, um die Entwicklung der Flimmern an den „Becherzellen" verfolgen zu können.

II. Art der Vermehrung der Basalzellen.

Aus meinen bisherigen Darstellungen der Regenerationsvorgänge dürfte es schon ersichtlich geworden sein, dass es nur auf die fortwährende Neubildung von Rudimentzellen ankomme, um das Material für die ausgestossenen Flimmerzellen zu ersetzen. Ich bin mithin bei der Frage angelangt, ob die Regeneration der Basalzellen, also die Neubildung der Rudimentzellen durch Zelltheilung im Sinne der neueren Autoren geschieht, oder ob um mich mit Jhering[1] auszudrücken, „der unbequeme Typus der Zellvermehrung durch freie Kernbildung" noch immer als zu Recht bestehend angesehen werden muss.

Mit anderen Worten lautet die Frage: sind die kleinsten unter den Basalzellen vorfindlichen Zellen aus Mutterzellen nach vorausgegangener Karyokinese des Kernes entstanden, oder ist, trotzdem für eine Reihe von Zellarten der Vermehrungsmodus durch Zelltheilung nach vorausgegangener Karyokinese des Kernes festgestellt ist, die Vorstellung gestattet, welche zuerst Lott für die Pflasterepithelien ausgesprochen hat, dass die fraglichen Zellen aus Keimen hervorgehen, in welchen sich ein Kern unabhängig, wenigstens so viel uns jetzt bekannt, von dem Kerne jener Zelle entwickelt, deren Ableger der Keim ist. Ist man ferner berechtigt für die Flimmerepithelien anzunehmen, dass nicht nur die reifen Flimmerzellen bei ihrer Ausstossung aus dem Epithel die

---

[1] Befruchtung und Furchung des thierischen Eies und Zelltheilung von Hermann von Jhering. Leipzig 1878, p. 49.

Auch Jhering nennt fälschlich Krause und nicht Lott den Begründer der eigenthümlichen Regenerationsvorgänge im Cornealepithel.

pyramidenförmigen Anschwellungen ihrer Fortsätze als Keime (Rudimente) zurücklassen, in welchen sich unmittelbar nach der Abstossung ein Kern differenzirt, sondern sind als solche Keime auch die pyramidenförmigen Ansätze anzusehen, welche von den Fortsätzen der Keilzellen noch während ihres Contactes mit dem Epithele, von den nachrückenden jüngeren Zellen abgeschnürt werden?

In Beziehung auf alle diese Fragen handelte es sich für mich zunächst darum, zu untersuchen, ob unter Anwendung der zur Demonstration von Kerntheilungsbildern angegebenen Methoden, im Trachealepithel überhaupt karyokinetische Figuren nachgewiesen werden können. Dabei vertraute ich mich vollständig der Führung Flemming's an, indem ich keine der von ihm betonten Vorsichtsmassregeln ausser Acht liess. Als Untersuchungsobject benützte ich die Trachea des Rindes und legte Stücke davon, wenige Minuten nach dem Tode des Thieres in Chrom-Pikrinsäure und in Müller'sche Flüssigkeit. In letztere desshalb, um mir, weil ich speciell das Epithel der Rindertrachea noch nicht untersucht hatte, jederzeit über die Form der einzelnen Zellen Rechenschaft geben zu können. In gleicher Weise habe ich für die mikroskopische Untersuchung auch eine menschliche Trachea vorbereitet, welche ich der Leiche eines Hingerichteten $1^1/_2$ Stunden nach dessen Tode entnahm. Haben mit Rücksicht auf diese Zeit die daraus angefertigten Präparate auch nicht hinlängliche Beweiskraft, so waren gewisse Charakteristika an diesen doch so scharf ausgeprägt, dass ich nicht zögere, dieselben für meine Zwecke in Anspruch zu nehmen.

Die in Chrom- oder Pikrinsäure erhärteten Stücke wurden in fliessendem Wasser gut ausgewaschen, in absolutem Alkohol nachgehärtet, die daraus angefertigten Schnitte mit Hämatoxylin oder Safranin oder Eosin gefärbt und in Glycerin aufgehellt. Ausserdem habe ich mir Mühe gegeben durch Herstellung von Gemischen aus Chromsäure und Kochsalz, Chromsäure und schwefelsaurem Natron, in verschiedenen procentischen Zusammensetzungen eine Macerationsflüssigkeit zu finden, welche die Kittsubstanz der Zellen unter Conservirung ihrer Kerngerüste, lösen sollte. Ich habe darin nicht reussirt und keine besseren Resultate als durch Anwendung verdünnter Chromsäure allein erzielt. Als

Paradigmata von Kerntheilungsbildern dienten mir unter anderen auch Präparate von Flemming selbst.[1]

Aus den Schnitten, welche ich von dem Trachealepithele des Rindes anfertigte, habe ich zuerst nur jene ausgewählt, welche eine Durchmusterung mit der Tauchlinse gestatteten; die Zahl derselben betrug viele Hundert. In derselben Weise begann ich die Untersuchung der Schnitte von der menschlichen Trachea; auch ihre Anzahl betrug viele Hundert.

Erst dann untersuchte ich auch solche Schnitte, deren Dicke nur mehr die Anwendung von Obj. 7, Occ. 3, Hart. mit ausgezogenem Tubus erlaubte, so dass ich im Ganzen gegen ein halb tausend Schnitte geprüft habe. Die Länge eines Schnittes betrug im Durchschnitte beiläufig 1 Ctm.

In Fig. 2 habe ich eine Stelle aus einem Schnittpräparate von der Rindertrachea, in Fig. 9 einen Bezirk aus einem Schnitte der menschlichen Trachea abgebildet. Jener war mit Hämatoxylin, dieser mit Safranin gefärbt. Alle Präparate der Rindertrachea liessen die Gerüste in sämmtlichen Zellkernen auf das Deutlichste in der Weise erkennen, wie ich sie abgebildet habe. Nicht so die durch die menschliche Trachea angelegten Schnitte. Hier zeigten sich die kleinsten Kerne der Basalzellenregion vollkommen homogen, in den grösseren trat bald ein Kerngerüste zu Tage, bald fehlte ein solches; der Farbstoff war gleichmässig vertheilt und hatte nur in den grösseren Kernen einen intensiveren Ton.

Vor Allem in die Augen springend, namentlich an den Präparaten aus der menschlichen Trachea ist das Grössenverhältniss der Kerne in der Basalzellenregion. Derjenige nun, welcher nur das Schnittverfahren cultivirt, dürfte sehr leicht dem Irrthume verfallen, Stellen, wie *a*, Fig. 2 und 9 so zu deuten, als rühre ihr Aussehen von einer Zelle mit zwei Kernen her. Ebenso könnten auch Bilder wie *b*, Fig. 9, *b*, 6 Fig. 5 sehr oft zu Missverständnissen Veranlassung geben. Darum muss ich auf das Nachdrücklichste betonen, dass jener, welcher Studien über die Zellvermehrung des Flimmerepithels anstellen will und dazu

[1] Prof. v. Ebner stellte mir ihm von Flemming übersandte Präparate zur Verfügung, sowie Prof. v. Ebner mir auch Präparate überliess, welche er selbst aus Salamanderlarven herstellte und an welchen viele Kerntheilungsphasen zu sehen waren.

Schnittpräparate benützt, sich vorerst genau über die Formen isolirter Zellen unterrichten muss. Sieht man in einem Macerationspräparate — und das begegnet dem Beobachter nur zu häufig — Gebilde wie 3, 7 *a b*, Fig. 5, so ist man bei oberflächlicher Beobachtung ohne weiters geneigt, sie als Zellen mit zwei Kernen hinzunehmen. Und doch ist dieses niemals der Fall. Aber erst durch Hin- und Herwalken des Präparates im Sehfelde, wird man gewahr, dass die fraglichen Figuren aus zwei knapp aneinander liegenden Zellen bestehen.

Entweder treten durch dieses Verfahren die Contouren der einen Zelle deutlich hervor — so z. B. stellte es sich heraus, dass 3, Fig. 5 aus zwei Zellen zusammengesetzt war, deren Gruppirung 4 in der Seitenansicht veranschaulicht — oder es trennen sich die Zellen wirklich, und in diesem Falle erweist sich, dass der eine Kern immer einer mehr minder kugeligen Zelle angehört (Fig. 5, 1, 5). Dieser allerdings mühevollen Untersuchungsmethode wird sich der Nachuntersucher auch unterziehen müssen, wenn er Zellenpaqueten begegnet, welche Fig. 3 wiedergibt. Wohl wird er, nach vorausgegangener Prüfung der Keilzellen, vermuthen, dass die Kerne *a*, *a'* Keilzellen angehören mögen und in sehr vielen Fällen auch die Contour dieser Zellen selbst ausnehmen können. Gewissheit darüber kann er jedoch nur erlangen, wenn das Paquet ebenfalls im mikroskopischen Sehfelde selbst erst weiters zerlegt wird.

So war an dem der Fig. 3 entsprechenden Präparate nicht zu unterscheiden, welcher Zelle der Kern *a'* entspreche. Indem ich ihn fortwährend im Auge behielt, zerlegte ich den ganzen Zellencomplex und fand nun, dass er der nebenstehenden Keilzelle angehörte. In diesem Falle war, bis ich die Zelle ganz isolirt hatte, der Kern aus ihr ausgetreten. In den Isolationspräparaten, welche ich aus dem menschlichen Trachealepithele anfertigte, habe ich öfters, in denen aus dem Trachialepithel des Rindes nur einige Male Gebilde gefunden, welche Fig. 5, 6, *b* darstellt.

Es sind pyramidenförmige, verhältnissmässig grosse, oben scharf gespitzt zulaufende Zellen mit 3 bis 5 gleich grossen, ganz aneinander liegenden Kernen. Vielleicht hat man es hier, um mich mit Flemming auszudrücken, mit einer „verunglückten

Zelltheilung“ zu thun. Eine sichere Deutung weiss ich diesen Gebilden nicht zu geben. Unter den isolirten Basalzellen bin ich aber auch bei meinen jetzigen Untersuchungen auf keine einzige Zelle mit zwei Kernen gestossen; also auf kein Bild, welches mir die Vermuthung erwecken konnte, dass ich es mit einem Stadium der normalen Karyokinese zu thun hätte. Ich kann daher nur annehmen, dass auch in allen Schnittpräparaten an jenen Stellen, wo scheinbar eine Zelle mit zwei Kernen vorlag, Bilder vorhanden sind, welche durch zwei, wie in Fig. 5, 1, 3, 4, 5, neben einander liegende Zellen bedingt sind.

Was die Gestalt und Grösse der Kerne der übrigen Regionen betrifft, so habe ich dem, was ich darüber bereits früher ausgesprochen habe, nichts hinzuzufügen und will nur nochmals hervorheben, dass ich auch diesmal verhältnissmässig wenige Flimmerzellen mit zwei Kernen fand.

In allen Schnittpräparaten nun, welche ich mit der Tauchlinse und System 7 durchmusterte, habe ich keine einzige Kerntheilungsfigur gefunden, nicht die Andeutung einer solchen beobachtet. Wenn daher der Präparationsmethode kein Fehler anhaftet und die Anzahl der von mir untersuchten Präparate hinreicht, einen Schluss zu ziehen, dann muss ich meinen früheren Ausspruch, dass auch unter den Basalzellen die Bildung der Rudimentzellen nicht durch Zelltheilung nach vorausgegangener Karyokinese des Kerns stattfindet, vollinhaltlich aufrecht halten. Mein früheres Zugeständniss aber, dass ausnahmsweise Karyokinese stattfinden könne, muss ich jetzt dahin richtig stellen, dass in dem Falle, wo Karyokinese an einer Zelle vor sich gegangen war, diese Zelle selbst vielleicht niemals sich theilt, und zeitlebens als eine Zelle mit zwei Kernen bestehen bleibt. Was ich nämlich an den Schnittpräparaten nicht gefunden habe, glückte mir an einem Macerationspräparate zu beobachten. Bei Gelegenheit des erwähnten Versuches eine passende Macerationsflüssigkeit herzustellen, stiess ich in einem Präparate aus dem Epithel einer Rindstrachea, welche in einem Gemische von Kochsalz und Chromsäure gelegen war, auf die in Fig. 6 abgebildete Kerntheilungsfigur, welche einer Basalzelle angehört. Auf diesen Fund hin habe ich aus der

nämlichen Trachea zahlreiche Schnitte angefertigt und tagelang Macerationspräparate untersucht, ich habe keine weiteren karyokinetischen Bilder mehr entdecken können. Ich schätze mich aber glücklich, dass der Zufall mir diese eine Kerntheilungsfigur in die Hand spielte. Denn wie leicht hätte Flemming gelegentlich einer Untersuchung des Trachealepithels vom Glücke noch mehr begünstigt, schon in dem ersten Schnitte auf eine solche Figur stossen können. Das wäre aber für Lott sowohl, als für mich verhängnissvoll geworden. Denn wenn auch hundert andere Schnitte keine Kerntheilungen mehr gezeigt hätten, die Karyokinese wäre einmal constatirt gewesen, und bei der gegenwärtigen Neigung sie für die Theilung aller Zellen in Anspruch zu nehmen, würde unbedingt Flemming Glauben geschenkt und meine jetzige Untersuchung abermals für eine verfehlte angesehen worden sein.

Und doch besagt diese eine karyolitische Figur gar nichts weiter, als dass, wenn man Flimmerzellen mit zwei Kernen findet, diese durch Karyokinese entstanden sind, und zwar entstanden sind, als die betreffenden Flimmerzellen sich noch im Stadium der Basalzellen befanden. Allerdings ist das nur ein Wahrscheinlichkeitsschluss, ich gestatte ihn mir aber darum, weil ich die eine Kerntheilungsfigur gerade an einer Basalzelle gefunden habe. Denn würden die Kerne erst in der fertigen Flimmerzelle entstehen, so wäre wohl die Wahrscheinlichkeit eine weit grössere, Kerntheilungsfiguren in Flimmerzellen zu finden, da solche mit zwei Kernen in spärlicher Zahl immer getroffen werden.

Meine Vermuthung aber, dass die Karyokinese nicht auch eine Zelltheilung zur Folge habe, dass auch die Flimmerzellen mit zwei Kernen so gut wie die der Fig. 5, 6, *b* ähnlichen Gebilde stets als Beispiele für verunglückte Zelltheilung, wie sich Flemming ausdrückt, aufgefasst werden müssen, will ich rechtfertigen, indem ich jetzt den gegen die Zellvermehrung im modernen Sinne sprechenden Resultaten meiner Untersuchung auch noch die Thatsachen entgegenstelle, welche die Autoren für die Vorgänge der Karyokinese bereits aufgedeckt haben.

Aus den Zeichnungen sämmtlicher Forscher auf dem Gebiete der Zelltheilung ist ersichtlich, und Peremeschko[1] hebt es

[1] Über die Theilung der thierischen Zelle von Prof. Dr. Peremeschko. Archiv für mikroskop. Anatomie, Bd. 16.

ausdrücklich hervor, dass aus einer Zelle, nach vorausgegangener Karyokinese zwei neue der Grösse nach einige seltene Fälle ausgenommen, unter einander gleiche Zellen gebildet werden.[1]

Diesem Gesetze entsprechend, müsste man nun, hauptsächlich in Isolations-, aber auch in Schnittpräparaten aus dem Trachealepithel Zellen mit Merkmalen finden, aus denen zu erkennen wäre, dass die betreffenden Zellen in einer späteren Zeit in zwei gleich grosse Zellen zerfallen sein würden. Ich meine, man müsste auf Zellen stossen, welche, von dem Stadium angefangen, in welchem „entsprechend der Mitte des Raumes zwischen den neugebildeten Kernen eine kleine von starker, dunkler Contour umgebene Furche erscheint", auch die Stadien weiter vorgeschrittener Theilung des Zellleibes aufweisen. Mir ist es nicht gelungen, auch nur eine solche Zelle zu finden, und das war auch früher hauptsächlich der Grund, warum ich mich „gegen eine Zellvermehrung im Sinne der Autoren" aussprach.

Zugestanden, dass ich auch diesmal „in ihrem Auffinden wenig Glück gehabt zu haben scheine", wird man mich doch nie des Übersehens und der Voreiligkeit zeihen können, wenn ich nochmals auf das Nachdrücklichste wiederhole, dass unter den Basalzellen des Flimmerepithels niemals zwei unmittelbar neben einander stehende Zellen von gleicher Grösse und Form gefunden werden.

Nehmen wir nun an, dass eine kleinste Zelle, beispielsweise die Rudimentzelle 2, Fig. 5, durch Zelltheilung entstanden ist. Dann muss sich ihre Schwester in ihrer unmittelbaren Nähe befunden haben, und zwar vor ihr oder hinter ihr, rechts oder links von ihr gestanden sein, da die Theilung der Mutterzelle nur in der Richtung von unten nach oben erfolgt sein konnte. Denn eine Theilung der Mutterzelle parallel zum elastischen Fasernetze muss a priori ausgeschlossen werden, weil in einem solchen Falle ja die eine der Tochterzellen ausser Contact mit dem elastischen Fasernetze gerathen würde, was den thatsächlichen Verhältnissen widerspricht.

---

[1] L. c. p. 444.

Die Zelle 2 ist dieselbe, wie die Zelle *a* in 3 und 4 derselben Figur. Ich habe sie unter dem Mikroskope von *b*, in welcher sie mit dem grössten Theile ihrer Masse, wie in einer Nische lag, getrennt. Sie war also, mit Rücksicht auf die Abbildung, durch die schaalenartige Lamelle von *b*, hinten vollständig durch diese, seitlich zum grössten Theile von ihren Nachbarzellen getrennt und ihre Schwesterzelle konnte demnach nur vor ihr gestanden sein. Nun ist aber die Form der Zelle selbst, mit Ausnahme der Stelle, wo sie auf dem elastischen Fasernetze aufsass, die einer Kugel.

Dieses besagt aber, dass sie die vor ihr befindliche Zelle ausgebuchtet haben und diese mithin jedenfalls eine von ihr verschiedene Gestalt besessen haben müsste. Die Zelle war also allerseits von Zellen umgeben, welche unter sich und von ihr, sowohl durch Grösse als Gestalt vollkommen verschieden waren; sie steht als Zelle ihrer Art vollständig isolirt da, keine ihrer Nachbarn kann dem obigen Gesetze zu Folge als ihre Schwester aufgefasst werden.

Setzen wir aber trotzdem voraus, es seien z. B. *a* und *b*, Fig. 5, Schwesterzellen, und ihre Massen zusammen hätten einst die Mutterzelle gebildet. Die Karyokinese in dieser mag zu welcher Zeit immer stattgefunden haben, so viel wissen wir, dass in der Phase 7 nach Flemming die Trennung der Zellen erfolgt sein würde, „indem die Marke an der Mutterzelle, die schon in der Sternphase bemerkbar ist, allmälig auch um die andere Seite herumgegriffen, der Äquator sich immer mehr verdünnt und der Leib sich abgeschnürt hätte“.

Laut dieses Gesetzes kann aber auch obige Annahme wieder nicht mehr gemacht werden, denn die eine Zelle *a* könnte sich nicht in so einfacher Weise abgeschnürt haben, sie müsste vielmehr aus der Mutterzelle gleichsam sich herausgeschält, herausgeprägt haben. Einen solchen Theilungsmodus finde ich aber weder bei Flemming, noch bei den anderen Autoren verzeichnet.

Diesen analoge, ja noch complicirtere Theilungsvorgänge müssten stattgefunden haben, wollte man andere der unmittelbar benachbarten Zellen als Schwesterzellen von *a* ansehen. Man könnte mir noch den Einwurf machen, dass die Zellen *a* und *b*

dennoch Schwesterzellen seien, dass sie in der vorliegenden Gestalt nur einem späteren Stadium entsprechen und ursprünglich immerhin gleich gestaltet gewesen sein mögen. Dass eine solche Vorstellung aber auf sehr schwachen Füssen ruht, liegt auf der Hand. Denn man müsste geradezu behaupten, dass, während bei anderen Zellarten die beiden neu entstandenen Zellen in gleicher Weise weiter wachsen, im Trachealepithel die eine der Zellen im Wachsthume eine Zeit lang stille stehe und die andere um sie herumwachse, oder die andere sich passiv verhalte und ihre Schwester in sie hinein sich ausdehne. Wie unendlich mannigfaltiger aber müssten erst die Abschnürungs-, richtiger Prägungsvorgänge sein, wenn aus einer an sich schon façettirten Zelle, aus einer Keilzelle, aus einer Flimmerzelle zwei neue Zellen entstehen sollten! Man verliere nicht aus den Augen, dass alle neu entstandenen Zellen bis an das elastische Fasernetz reichen müssten und man versuche es nun, sich einen Modus vorzustellen, wie dieses vor sich gehen könnte.

Aber nicht allein mein gescheitertes Unternehmen, Kerntheilungen im Trachealepithel zu finden, nicht allein die eben erörterten Umstände haben meine ursprüngliche Ansicht befestigt, auch einige Präparate, welche ich neuerdings erhielt, weisen klar darauf hin, dass das, was man mit dem Ausdrucke „freie Kernbildung“ bezeichnet hat, gewiss noch nicht als überwundener Standpunkt gelten kann und dieser „unbequeme Typus“ einer Zellvermehrung durch freie Kernbildung in der That noch immer als zu Recht bestehend angesehen werden muss. In welchem Sinne ich hier aber die Bezeichnung freie Kernbildung gebrauche, darauf werde ich später noch zurückkommen.

Ein Blick auf Fig. 7 genügt, um zu erkennen, dass uns in 1 und 2 *b* Flimmerzellen mit mehreren Fortsätzen vorliegen: die pyramidenförmige Anschwellung je eines Fortsatzes der Zellen ist durch einen Kern ausgezeichnet. Auch 6 *b*, Fig. 5, gehörte einer Flimmerzelle an und riss von dieser ab, während ich das Zellenpaquet, zu welcher beide Zellen der Zeichnung gehörten, im Gesichtsfelde zerlegte.

Wenn man, bewogen durch diese Bilder von gegnerischer Seite auch vielleicht geneigter zur Concession sein dürfte, dass die Regeneration des Flimmerepithels durch die Abschnürung der

pyramidenförmigen Anschwellungen der Fortsätze eingeleitet werde, so wird man gewiss die Entgegnung machen, es müsse gerade in den vorliegenden Fällen die Karyokinese vorausgegangen sein.

Was ich aber kurz zuvor besprochen habe, kommt hier noch mehr zur Geltung. Karyokinese kann nicht an den Flimmerzellen stattgefunden haben. Denn es ist unmöglich, sich vorzustellen, dass die eine Tochterzelle, indem ein Theil des Protoplasmas sich zu einem Faden auszog, etwa in kugeliger Gestalt in die Tiefe gedrungen sei und nachträglich die pyramidenförmige vorliegende Gestalt angenommen habe, noch viel weniger, dass sie in der gegenwärtigen Form an das elastische Fasernetz gedrungen sei. Also konnte Karyokinese wieder nur vorausgegangen sein, als die betreffenden Flimmerzellen noch Basalzellen waren. Dann aber steht man abermals vor der Frage, warum denn gerade nur die eine der beiden Tochterzellen bis zur Flimmerzelle sich entwickelte, die andere aber in dieser ganzen Zeit im Wachsthume still gestanden ist.

Fasst man das eben Gesagte und die früheren Discussionen zusammen, so müssten die Gesetze für die Karyokinese, falls eine solche im Flimmerepithel zur Regel gehörte, ungefähr so lauten: Die Karyokinese findet an den Zellen der Basalregion statt Während aber bei anderen Zellarten die Trennung der Mutterzelle in zwei gleich gestaltete und gleich grosse Tochterzellen durch einen einfachen Abschnürungsprocess stattfindet, wird im Flimmerepithel die eine Tochterzelle, im einfachsten Falle als kugelige, häufig als façettirte oder Flügelzelle, ja sogar als Zelle mit Fortsätzen aus der Mutterzelle ausgeschieden. Bei anderen Zellarten wachsen beide Tochterzellen gleichmässig fort, im Flimmerepithel bleibt die eine Tochterzelle im Wachsthume zurück, während nur die andere weitere Phasen durchläuft.

Zur Annahme dieses oder eines ähnlichen, aber unter allen Umständen sehr complicirten Gesetzes müsste man sich demnach bequemen, wenn man durchaus die Zelltheilung mit Kerntheilung nach vorausgegangener Karyokinese als den Theilungsmodus auch für das Flimmerepithel hinstellen wollte. Ich muss also das Zugeständniss Flemming's, dass zwar die Rudimente zurückgebliebene Theile der aufgerückten Zellkörper sind, die

sich von jenen abgeschnürt haben, dass aber diese Trennung als Zelltheilung und unter Kerntheilung erfolgt,[1] abermals dahin richtig stellen, dass die erstere Thatsache sich vollzieht, ohne dass während dieser Zeit an den Kern der Zellen sich die Erscheinungen der Karyokinese nachweisen lassen und daher für meinen Theil annehmen, dass in *r* 1, 2, Fig. 7, die Kerne frei entstanden sind, dass die Regeneration des Flimmerepithels so vor sich geht, dass in den pyramidenförmigen Anschwellungen der Fortsätze der Flimmer- und Keilzellen oft noch zur Zeit ihres Zusammenhanges mit, meist aber nach ihrer mechanischen Abschnürung von den Zellen durch andere Zellen ein Kern sich bildet und die „Rudimente“ dadurch zu Rudimentzellen, den kleinsten Zellen in der Basalzellenregion werden. In andere Zellformen werden sie nur durch mechanische Kräfte übergeführt, bis sie endlich zu reifen Flimmerzellen werden.

Wie die Kerne in den Rudimentzellen entstehen, weiss ich näher nicht anzugeben. Wenn ich von einer freien Kernbildung gesprochen habe, so habe ich das nur in dem, auch von Jhering sehr gut gekennzeichneten Sinne gethan, in welchem diese Bezeichnung bisher von den Autoren gebraucht wurde. Ich habe es zur Erforschung und Erklärung dieses Processes ebenso wenig gebracht, als irgend Jemand früher. Man wird hier nur auf methodischem Wege zu weiteren Fortschritten gelangen. Den über die Karyokinese ermittelten Thatsachen fügt sich die regenerative Thätigkeit der Basalzellenregion des Flimmerepithels nicht, und ebenso wenig ist die Arbeit Lott's über das Pflasterepithel in ihrer Wesenheit im Geringsten erschüttert dadurch, dass man im geschichteten Plattenepithele vereinzelte karyokinetische Figuren gefunden hat.

Denn nach den vorausgegangenen Erörterungen wird es ersichtlich geworden sein, dass gerade im geschichteten Plattenepithele in den höheren Regionen ganz gut hie und da eine Theilung der Zellen nach vorausgegangener Karyokinese des Kerns stattfinden kann. Desswegen muss doch die Basalzellenregion als der eigentliche Herd für die Regeneration der abgestossenen Zellen angesehen werden, und diese Regenerations-

[1] L. c. 354.

vorgänge fügen sich wieder nicht den über die Karyokinese ermittelten Thatsachen. Das ergibt sich aus der Bedeutung, die wir den Rudimentzellen vindicirt haben und aus der von uns nachgewiesenen genealogischen Bedeutung der Zellformen der Flimmerzellen. Einwendungen und Entgegnungen gegen unsere Darlegungen dürfen nicht mit Tinte und Feder allein gemacht werden, wir dürfen beanspruchen, dass sie nur auf Grund eingehender Studien mit dem Mikroskope an unseren Objecten erhoben werden. Wenn daher Flemming bei seiner Ansicht verharrt, dass auch bei der Regeneration der Platten- und Flimmerepithelien die Zelltheilung nach vorausgegangener Karyokinese des Kerns eine wesentliche Rolle spielt, so muss er jetzt Kerntheilungsfiguren in der Basalzellenregion, welche mit der genealogischen Folge der Zellen des Flimmer- und Plattenepithels in einem nothwendigen Zusammenhange stehen, selbst suchen und demonstriren.

Tafelerklärung.

Sämmtliche Figuren, mit Ausnahme von 1 und 9, welche mit Winkel Obj. IX, Occ. II entworfen wurden, sind mit Hart., Obj. IX, Occ. II, Tubus eingeschoben, gezeichnet. Die Grösse derselben entspricht der scheinbaren Grösse des Objectes, auf das Papier in der Höhe des Mikroskopes projicirt.

Fig. 1. Durchschnitt durch die in Chromsäure von 0·9% erhärtete, in Wasser ausgewaschene, in Alkohol nachgehärtete Haut von *Cobitis barbatula*. Färbung mit Hämatoxylin. *b* Becherzellen in der Tiefe des Epithels, *b'* offene Becherzellen nahe der Oberfläche des Epithels; *k* Kolben; *h* Höhlen, in welchen Zellen lagen, die den Zellen *z* ähnlich gestaltet waren.

„ 2. Durchschnitt durch das Trachealepithel vom Rinde, Erhärtung in Chromsäure, Auswaschung in fliessendem Wasser, nachträgliche Härtung in absolutem Alkohol, Tinction mit Hämatoxylin. *a* Kerngerüste zweier nahe an einander liegender Zellen, *w* Wanderzellen, *p* pyramidenförmige Anschwellungen der Fortsätze von Flimmer- und Keilzellen.

„ 3. Zellenpaquet aus der menschlichen Trachea, aus Müller'scher Flüssigkeit, sämmtliche Zelltypen enthaltend. *a*, *a'* Kerne von Keilzellen, *b* eine in Ausstossung begriffene Flimmerzelle, *k* die aus dem Zellencomplexe getrennte Keilzelle, mit dem Netzwerke im Zellprotoplasma, zu welcher der Kern *a'* gehört.

Fig. 4. Becherzellen. Macerationspräparat aus Müller'scher Flüssigkeit. 1, 2, 3, 4, 5 Becherzellen von *Cobitis barbatula*, in 2, 3, 4, 5 am Grunde undeutliche Kerne mit spärlichen Protoplasmaresten. *b* Becherzelle von *Petromyzon fluviatilis*, *o* Öffnung der Becherzelle.

„ 5. Rudimentzellen, Keilzellen und Zellencomplexe von Rudiment- und Keilzellen aus der menschlichen Trachea. Macerationspräparat aus Müller'scher Flüssigkeit. 1, *a* kugelige Rudimentzelle, der Keilzelle *b* knapp anliegend, 3 und 4 die nämliche Basal- und Rudimentzelle in verschiedener Lage. 2, die Rudimentzelle isolirt, welche in einer Nische der Zelle *b*, 3 und 4 lag. 5, Combination einer Rudiment- und Keilzelle. 6 *a* Keilzelle, *b* ihr eng anliegendes Rudiment, in welchem 4 Kerne liegen. 7 Zellencomplex, bestehend aus der Rudimentzelle *a*, Keilzelle *b*, dem Rudimente *e*, in welchem schon der Kern gebildet ist und der oben abgerissenen, unten mit einer Nische versehenen Keilzelle *d*.

„ 6. Isolationspräparat aus einer Rindertrachea, welche in einem Gemische von Kochsalz und Chromsäure lag. Zwischen zwei Flimmerzellen die Basalzelle mit karyokinetischem Kern.

„ 7. Flimmerzellen der menschlichen Trachea mit mehreren Fortsätzen. Macerationspräparat aus Müller'scher Flüssigkeit, Blauholztinction. In den pyramidenförmigen Anschwellungen *r*, 1; *r*, *b*, 2 der Fortsätze der Flimmerzellen bereits ein Kern sichtbar.

„ 8. „Becherzellen" aus der menschlichen Trachea. Macerationspräparat aus Müller'scher Flüssigkeit. 1, 2, 3 „Becherzellen" der Autoren, 4, 5, 6, 7 Keilzellen im engeren Sinne. In allen Zellen, das durch die Blauholzfärbung besonders scharf hervortretende Netzwerk des Zellprotoplasmas sichtbar.

„ 9. Schnittpräparat aus der in Chromsäure erhärteten menschlichen Trachea. Safraninfärbung. Besonders schön treten die Grössenverhältnisse der Kerne in der Basalzellenregion hervor. *a* Stelle, anscheinend einer Zelle mit zwei Kernen entsprechend; *b* „verunglückte" Zelltheilung.

„ 10. Flimmerzellen und „Becherzellen" aus der menschlichen Trachea. Die „Becherzelle" in 2 bereits an einer Seite abgeplattet.

Drasch: Üb

m

p

b

a

a

k

Fig. III.

d

b

b

a

a

6

7

Fig. VI.

x

1

Fig. V

Fig. X.

1

2







